# Стационарный рост упругопластической трещины и обратная задача механики разрушения

В. А. Нифагин, О. В. Дубровина (Минск, Беларусь)

В [1] введен контурный интеграл, вычисляемый на заданном распределении $\sigma_{ij}$, $u_i$, допускающий энергетическое толкование, как компоненты вектора потока энергии в вершину трещины инвариантный относительно выбора контура, который обобщается для упругопластичности

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\left(W_0\left(\varepsilon_{ij}\right)+\frac{1}{2}\rho\dot{\gamma}^2u_{i,x_1}u_{i,x_1}\right)n_1-\sigma_{ij}n_ju_{i,x_1}\right)ds.$$

Здесь контур $\Gamma$ охватывает вершину трещины в тонкой пластинке (для определенности будем рассматривать плоскую деформацию) и выходит своими концами на берега трещины, свободные от напряжений, $u_{i,x_1}$ — производные компонент вектора перемещений, $\rho$ — плотность материала, $W_0$ — полная работа напряжения на соответствующих деформациях (потенциал, характеризующий свойства упругопластического материала), $\dot{\gamma}$ — скорость распространения вершины трещины. Ось $x_1$ направлена вдоль оси трещины.

Решение задач о жесткой концентрации строится в асимптотической постановке, причем для упругопластичности главный член разложения вблизи точки сингулярности содержит наряду с неопределенным множителем, неизвестный показатель особенности, относящийся к тонкой, а в ряде задач и сверхтонкой структуре в рамках многоуровневого масштабирования.

Случай распространяющейся трещины еще более контрастен, так как число характерных асимптотик здесь может достигать трех [2]. Для устранения указанного произвола полезным оказывается использование энергетического интегрального инварианта. Второе направление применения $J$-интеграла связано с формулировкой условий предельного равновесия и распространения трещины, когда для растущей в упругопластической среде трещины величину J можно интерпретировать, в обобщенном смысле, как изменение полной энергии в области с границей $\Gamma$ на единицу приращения длины трещины. Поэтому энергетическое условие предельного равновесия принимает вид $J = J_c$, где $J_c$ — положительная величина, зависящая от длины трещины, скорости и истории нагружения, геометрии и внешних усилий, свойств среды, интерпретируемая как удвоенная эффективная поверхностная энергия [3].

Тогда условием распространения стационарной трещины в упругопластической среде с инкрементальными уравнениями состояния можно считать условие $J = 2A^*$ , являющееся энергетическим критерием для стационарного роста упругопластической трещины. Здесь $A^*$ — удельная работа разрушения является положительной константой и оценивается экспериментально. Использование энергетического критерия для различных материалов предполагает известную величину удельной работы и величин под интегралом, формально вычисляемых из асимптотического решения прямой задачи. Далее задача сводится к обратной задаче механики разрушения определению функции $\dot{\gamma}\left(r,\varphi\right)$ по критическому значению $J$-интеграла на семействе окружностей с центром на оси $x_1$. При этом для однозначной разрешимости задачи подинтегральная функция в $J$ должна быть четной по $x_2$.

Предположим, что у нас есть набор величин $u\left(r_i,\varphi_i\right)$, $\sigma\left(r_i,\varphi_i\right)$ — для заданных точек сетки в окрестности вершины трещины, а также известны граничные условия на берегах. Строим нейронную сеть, обучение которой производится путем минимизации функции потерь, измеряющей разницу между предсказанными и наблюдаемыми значениями параметров удельной работы разрушения.

Нейронная сеть с подкреплением обучалась с помощью данных решения прямой задачи, полученного методом асимптотических разложений [2] на основе программного модуля созданного инструментами фреймворка PyTorch.

**Литература**

1. *Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.* М.: Наука (1974).

2. *Нифагин В.А. Асимптотические методы в задачах упругопластической теории трещин.* LAP LAMBERT Academic Publishing (2017).

3. *Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения.* М.: Физматлит (2006).

## Равномерно сходящиеся последовательности многочленов, имеющих заданные нули в кольце $h$-комплексных чисел

**В. А. Павловский (Минск, Беларусь)**

Пусть $\mathbb{C}_h$ — кольцо $h$-комплексных чисел вида $z = x + jy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$ с делителями нуля вида $z = (1 \pm j)t$, $t \in \mathbb{R}$ [1]. В $\mathbb{C}_h$ норма: $\|z\| = |x| + |y|$.

**Определение 1**. Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется $h$-целой, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ и выполняются условия $u'_x = v'_y$, $u'_y = v'_x$ [2].

**Определение 2**. Порядком $h$-целой функции $f(z)$ назовём число $\rho = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$, где $M_f(r) = \max\limits_{\|z\|=r} |f(z)|$. Типом $h$-целой функции $f(z)$ порядка $\rho$ назовём число $\sigma = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$. Функция $f(z)$ имеет нормальный тип, если $0 < \sigma < +\infty$.

**Теорема 1**. Пусть $\{c_{k,m}\}$, $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, n_m$ — множество $h$-комплексных чисел, удовлетворяющих условиям:

1) $0 < \delta \leq \|c_{1,m}\| \leq \|c_{2,m}\| \leq \cdots \leq \|c_{k-1,m}\| \leq \|c_{k,m}\| \leq \cdots \leq \|c_{n_m,m}\|$,

2) $c_{k,m}$ не являются делителями нуля $\forall m \in \mathbb{N}$.

Последовательность многочленов

$$P_m(z) = \prod_{k=1}^{n_m} \left(1 - \frac{z}{c_{k,m}}\right) = 1 + d_1^m z + d_2^m z^2 + \cdots + d_{n_m}^m z^{n_m} \tag{1}$$

такова, что при некотором $p \in \mathbb{N}$ выполняется $\sum\limits_{k=1}^{n_m} \|c_{k,m}\|^{-(p+1)} \leq M$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ и $\|d_k^m\| \leq M$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность (1) равномерно ограничена в любом $h$-круге $\{\|z\| \leq r\}$ и верна оценка

$$\|P_m(z)\| \leq e^{A_p\, M\, r^{p+1} + \frac{1}{p}\sigma_p r^p + \cdots + \frac{1}{2}\sigma_2 r^2 + \sigma_1 r},$$

где $A_p, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p > 0$ — некоторые константы. Если $\sum\limits_{k=1}^{n_m} \|c_{k,m}\|^{-1} \leq M$, то $\|P_m(z)\| \leq e^{Mr}$.

**Теорема 2**. Пусть в (1) все $c_{k,m}$ — вещественные и последовательность $P_m(z)$ равномерно сходится в некоторой окрестности нуля к функции, не равной тождественному нулю. Тогда эта последовательность сходится равномерно в любом $h$-круге $\{\|z\| \leq r\}$. При этом предельная функция — $h$-целая порядка не выше $p + 1$ и нормального типа.