$$(x,t) \in \dot{Q}_n =]0, d[\times]0, d_{n+1}[;\ a \in C^2(Q_n),\ b,\ c,\ q \in C^1(Q_n),\ n = 1,\ 2, ..., \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < d, \tag{2}$$

$$u_x|_{x=0} = \mu_1(t),\ u_x|_{x=d} = \mu_2(t),\ 0 < t < d_{n+1},\ d_n = (n-1)h^{(2)}[d/2, g_2(0.0)]. \tag{3}$$

The characteristic equations $dx - (-1)^i a(x,t)dt = 0$ give the implicit characteristics $g_i(x,t) = C_i$, $i = 1, 2$. If $a(x,t) \geq a_0 > 0$, then they decrease strictly in t at $i = 1$ and increase at $i = 2$ with increasing x. Therefore, the implicit functions $y_i = g_i(x,t)$ have the inverse functions $x = h_i\{y_i, t\}$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$. If coefficient $a \in C^2(G_\infty)$, then functions g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ to the variables x, t, y_i, $i = 1, 2$ [1].

First, in [1], a global correctness theorem with explicit formulas for classical solutions and Hadamard's correctness criterion to the second mixed problem for the model telegraph equation in first quarter G_∞ of the plane is proved by Lomovtsev's ≪implicit characteristics method≫. Using Schauder's continuation method with respect to a parameter and author's theorem on increasing the smoothness of strong solutions, the existence of a unique and stable classical solution to the auxiliary mixed problem for the general telegraph equation in G_∞ was established [1].

Then, in [2], the Riemann formulas for classical solutions of this auxiliary mixed problem are derived by ≪compensation method of the boundary regime with the right-hand side of the general telegraph equation≫. The global correctness theorem with the Riemann formulas to the second mixed problem (1)–(3) on the segment is derived by the author's ≪method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string (wave equation on the half-line)≫ from the global correctness theorem of the auxiliary mixed problem on the half-line. The statement of mixed problem (1)–(3) imply the necessity for some smoothness requirements and all matching conditions. The some integral requirements on f is deduced by author ≪correction method≫.

References

1. *Lomovtsev F. E.* The second mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients in the first quarter of the plane. In: *Vesnik of the Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Information. Computing and Control.* Vol. 12. No. **3** (2022), 50–70.

2. *Lomovtsev F. E.* Compensation method the boundary mode with the right-hand side of the telegraph equation with variable coefficients in solving the second mixed problem on a half-line. In: *Vesnik of the Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Information. Computing and Control.* Vol. 13. No. **1** (2023), 39–63.

Задача Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения

Л. Н. Ляхов (Воронеж, Россия), Ю. Н. Булатов (Елец, Россия)

Пусть $\mathbb{R}_n$=$\{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+$=$\{x : (x_1 > 0, \ldots, x_n > 0)\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+}$=$\{x : (x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0)\}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_i > -1$, $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\Delta_{B_\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}$.

Пусть $x \in \mathbb{R}_n^+$, $y \in \mathbb{R}_m^+$. Рассмотрим сингулярное ультрагиперболическое уравнение $\left(\Delta_{B_\beta}\right)_y u(x,y) = \left(\Delta_{B_\gamma}\right)_x u(x,y)$, где координаты мультииндексов β_i> − 1 и γ_i> − 1.

Постановка задачи Коши: найти функцию $u \in C^2_{ev}\left(\overline{\mathbb{R}_n^+}\right)$ такую, что

$$(\Delta_{B_\beta})_y\ u(x,y) = (\Delta_{B_\gamma})_x\ u(x,y),\ u(x,y)\Big|_{|y|=0} = f(|x|),\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y_i}\Big|_{y_i=0} = 0. \tag{1}$$

И пусть выполнено условие Киприянова [1] о размерности Δ_B операторов, стоящих в левой и правой части уравнения (1): $n + |\gamma| - 1 = m + |\beta| - 1 = s$.

Теорема. Предположим, что координаты мультииндексов β и γ удовлетворяют условиям $\beta_i>-1$, $\gamma_i>-1$. Решение задачи Коши (1) с условием Киприянова существует и представлено следующими формулами.
1. Пусть $s>0$, то решение задачи определено первой формулой Пуассона [2]:

$$u(x,y)=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi} f\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x|\ |y|\ \cos\alpha}\right)\,\sin^{2s}\alpha\,d\alpha.$$

2. Для $s=0$ решение задачи (1) имеет вид формулы Даламбера:

$$u(x,y)=\frac{f(|x|+|y|)+f(|x|-|y|)}{2}.$$

3. Если $0>s>-1$, тогда решение задачи Коши (1) определено формулой:

$$u(x,y)=\mathbb{T}^y f(x)=\frac{\Gamma\,(s+1)\,(xy)^{2s}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(s+\frac{1}{2})}\int\limits_0^{\pi}\frac{f\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\ \cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\ \cos\alpha}\right)^{2s}}\,\sin^{2s}\alpha d\alpha\ ,$$

где оператор $\mathbb{T}^y$ — обобщенный псевдосдвиг [3].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. *Ляхов Л.Н., Половинкин И.П., Шишкина Э.Л.* Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения. *Дифф. уравнения.* Т. 50. No. 4 (2014), 516–526.

2. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. *Успехи мат. наук.* Т. 6. No. 2(42) (1951), 102–143.

3. *Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рощупкин С.А., Санина Е.Л.* Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова. *Дифф. уравнения.* Т. 58. No. 12 (2022), 1654–1665.

Новые неравенства для ρ-тригонометрически выпуклых функций

К. Г. Малютин (Курск, Россия)

Исследуется связь ρ-тригонометрически выпуклых функций с классом субгармонических функций. Установленная связь используется для доказательства новых неравенств, характеризующих ρ-тригонометрически выпуклые функции и нахождения интегральных уравнений первого рода, которым удовлетворяют ρ-тригонометрические функции.

Теорема. Пусть h — не тождественно равная $-\infty$ нигде не обращающаяся в $+\infty$ полунепрерывная сверху функция на интервале (α,β). Для того, чтобы h была ρ-тригонометрически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\theta\in(\alpha,\beta)$ и для любого $R\in(0,1]$ такого, что $[\theta-\arcsin R,\theta+\arcsin R]\subset(\alpha,\beta)$ выполнялось неравенство

$$h(\theta)\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1+2R\cos(\varphi-\theta)+R^2)^{\frac{\rho}{2}}h(\mathrm{Arg}(e^{i\theta}+Re^{i\varphi}))d\varphi,$$