

**Образование гидравлического прыжка при движении тонкого слоя
вязкой жидкости на вращающемся горизонтальном диске**
П. Н. Конон, А. А. Миранович (Минск, Беларусь)

Вертикальная струя жидкости падает на горизонтальный вращающийся диск и растекается в радиальном направлении, образуя тонкую пленку. На определенном расстоянии от точки падения толщина пленки резко увеличивается — наблюдается гидравлический скачок. До последнего времени существовало мнение, что такие тонкопленочные прыжки создаются за счет гравитации [1]. Однако в недавних работах, например [2], показано, что прыжкам способствует поверхностное натяжение и сила тяжести не играет существенной роли.

В данной работе исследовано движение тонкого слоя вязкой жидкости с неизвестной границей на вращающемся с постоянной угловой скоростью горизонтальном диске в поле сил инерции и поверхностного натяжения. Рассмотрена гидродинамическая модель в случае осесимметричного течения, экспериментально наблюдаемого для жидкостей с большой вязкостью [3]. Приближением вида пограничного слоя и прямым методом Капицы-Шкадова [4], получена система уравнений эволюции слоя вязкой жидкости. Исследовано установившееся течение при постоянной подаче жидкости на вращающийся диск. Разработан численный метод, определен вид свободной поверхности и поле скоростей для разных параметров задачи. Показано, что силы поверхностного натяжения играют ключевую роль в формировании свободной поверхности как на начальном участке течения, сглаживая ее, так и вдали от оси вращения, формируя гидравлический прыжок. Используя условия на прыжке [1], найдена его высота и проведено сращивание решений. Результаты работы могут быть применены при анализе режимов течения в вопросах нанесения покрытий, слоев на горизонтальную поверхность вращением.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 2.11 ГПНИ Беларуси “Энергетические и ядерные процессы и технологии”.

Литература

1. *Ipatova A., Smirnov K. V., Mogilevskiy E. I.* Steady circular hydraulic jump on a rotating disk. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 927. (2021), A24.
2. *Bhagat R. K., Jha N. K., Linden P. F., Wilson D. I.* On the origin of the circular hydraulic jump in a thin liquid. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 851. (2018), R5.
3. *Конон П. Н., Кулаго А. Е., Сицко Г. Н., Конон Н. П.* Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске. *Теоретическая и прикладная механика*. Вып. 31. (2016), 87–94.
4. *Шкадов В. Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. *Изв. АН СССР, МЖГ*. No. 1 (1967), 43–48.

**Распределение температуры в профилированном полярно-
ортотропном кольцевом диске, вращающемся в тепловом поле,
с учетом теплообмена с окружающей средой**
В. В. Королевич (Прага, Чехия)

Для расчета напряженно-деформированного состояния быстровращающегося профилированного анизотропного диска в тепловом поле важно первоначально знать распределение температуры $T(r)$ в нем. Методом Лиувилля нами было получено линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции температуры $\Theta_0(r) = T(r) - T_0$, где T_0 — температура окружающей среды. Теплообмен полярно-ортотропного

кольцевого диска переменной толщины $h(r)$ с окружающей средой происходит через оба основания диска.

$$\Theta_0(t) = \lambda \int_0^t K_0^{(T)}(t, \tau) \Theta_0(\tau) d\tau + f(t), \quad (1)$$

где $\lambda \frac{1}{\Omega}$ — числовой параметр; $\Omega = \sqrt{\frac{2Hr_0}{\lambda_r}}$ — безразмерная величина; H — коэффициент теплоотдачи, $[H] = \frac{Bm}{m^2 \cdot ^\circ C}$; λ_r — радиальный коэффициент теплопроводности, $[\lambda_r] = \frac{Bm}{m \cdot ^\circ C}$; $t = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ — безразмерная переменная; $t \in \left[0, \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)\right]$; r_0 и R — внутренний и внешний радиусы диска соответственно;

$$K_0^{(T)}(t, \tau) = \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \Omega^2 \left(1 + \sqrt{\frac{r_0^4 e^{4\tau}}{h^2(\tau)} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)^2 r_0^2 e^{2\tau}} \right) \right] \sin \Omega(t - \tau) - \Omega \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cos \Omega(t - \tau) - \text{ядро интегрального уравнения (1);}$$

$C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t$ — свободный член интегрального уравнения (1); C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (1) записывается с помощью *резольвенты* $R^{(T)}(t, s; \lambda)$:

$$\Theta_0(t) = \lambda \int_0^t R^{(T)}(t, s; \lambda) f(s) ds + f(t),$$

где функция $R^{(T)}(t, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}^{(T)}(t, s)$.

Повторяющиеся, или итерированные, ядра $K_m^{(T)}(t, s)$ вычисляются по рекуррентным формулам.

В качестве примера рассчитывалось распределение температуры в полярно-ортотропном диске степенного профиля из углепластика.

Напряженно-деформированное состояние равномерно вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины В. В. Королевич (Прага, Чехия), Д. Г. Медведев (Минск, Беларусь)

Ранее методом Лиувилля нами получено линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для радиального перемещения $u(r)$ в равномерно вращающемся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг нормальной оси полярно-ортотропном кольцевом диске переменной толщины $h(r)$:

$$u(t) = \lambda_2 \int_0^t K_2(t, \tau) u(\tau) d\tau + f_2(t), \quad (1)$$

где $\lambda_2 = \frac{1}{k}$ — числовой параметр, $k = \sqrt{E_\theta/E_r} > 1$;

$$K_2(t, \tau) = \left\{ \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' - \nu_{\theta r} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \right] \cdot \text{sh}(k(t - \tau)) - k \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cdot \text{ch}(k(t - \tau)) \right\} - \text{ядро}$$