Спектральное приведение дифференциально-разностной системы с несоизмеримыми запаздываниями

В. В. Карпук, А. В. Метельский (Минск, Беларусь)

Изучается линейная автономная дифференциально-разностная система

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-d_i) + bu(t), t > 0. \qquad (1)$$

Здесь x — n-вектор-столбец решения системы (1) ($n \geq 2$); $0 < d_1 < ... < d_m$ — постоянные запаздывания; A_i — постоянные $n\times n$-матрицы ($i = \overline{0,m}$); b — постоянный n-столбец; u — скалярное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих $'$ обозначает операцию транспонирования. Не ограничивая общности, полагаем, что $b = [0;\ldots;0;1]'$ и что последние строки матриц A_i ($i = \overline{0,m}$) — нулевые.

Считаем, что в системе (1)

$$d_i = \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}h_j,\ i = \overline{1,m},$$

где k_{ij} — целые числа, $0 < h_1 < ... < h_\mu$ — произвольные, в частности, несоизмеримые запаздывания. Обозначим $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_\mu)$, $A(\Lambda) = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i \prod\limits_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}, \lambda_j = e^{-ph_j}$, $i = \overline{1,m}$, $p \in \mathbb{C}$.

Пусть

$$M(p,\Lambda) = [M_1(p,\Lambda), ..., M_n(p,\Lambda)]', \qquad (2)$$

— алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки характеристической матрицы замкнутой системы

$$F\varphi(p,\Lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \ldots & p - a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) \\ -\varphi_1(\Lambda) & \ldots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r - \sum_{i=1}^{r} \bar{\varphi}_i(\Lambda)p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $a_{ij}(\Lambda)$ — элементы матрицы $A(\Lambda)$; $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,n-1}$, $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,r}$, — полиномы с действительными коэффициентами, которые подбираем такими, чтобы

$$|F\varphi(p,\Lambda)| = d_0(p),$$

где $d_0(p)$ — некоторый полином степени $\nu = \deg d_0(p) \geq n$. Если это возможно, то систему (1) назовем спектрально приводимой.

Теорема. Система (1) спектрально приводима, если и только если редуцированный базис Гребнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$) для системы полиномов (2) содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$.