Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке федерального проекта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по программе создания и развития Передовой инженерной школы “Распределенные системы управления технологическими процессами”.

К теории интерполирования операторов, заданных на функциональных банаховых алгебрах

М. В. Игнатенко (Минск, Беларусь)

Пусть B — банахова алгебра над полем комплексных чисел с операцией умножения $\circ$. Обозначим

$$l_{nk}[x] = (x - x_0) \circ (x - x_1) \circ \ldots \circ (x - x_{k-1}) \circ (x - x_{k+1}) \circ \ldots \circ (x - x_n),\ k = 0, 1, ..., n.$$

Рассмотрим оператор $F : B \to B$ и точки $x_0, x_1, ..., x_n \in B$ такие, что для $l_{nk}[x_k]$ существует обратный элемент $l^{-1}_{nk}[x_k]$.

Теорема. Операторный многочлен

$$L_n[F; x] = \sum_{k=0}^{n} F[x_k] \circ l_{nk}[x] \circ l^{-1}_{nk}[x_k] \tag{2}$$

удовлетворяет интерполяционным условиям $L_n[F; x_j] = F[x_j], \quad j = 0, 1, ..., n$. Интерполяционная формула (2) инвариантна относительно операторных многочленов

$$P_n[x] = z + \sum_{i=1}^{n} y_i \circ \underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{i},$$

где z и y_i, $i = 1, 2, ..., n$, — фиксированные элементы из B.

В случае линейной интерполяции и операции умножения $\circ$ на множестве функций, определяемой сверткой

$$(x \circ y)(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t x(s) y(t - s) ds,$$

формула (2) примет вид

$$L_1[F; x](t) = F[x_0](t) + \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_0^t (F[x_1](t - s) - F[x_0](t - s)) \times$$

$$\times \frac{d}{ds} \int_0^s (x(s - \nu) - x_0(s - \nu)) \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\exp\{\nu\, \theta\}}{\theta\, \Lambda[x_1 - x_0](\theta)} d\theta\, d\nu\, ds,$$

где $\Lambda[x](t) = \int_0^\infty \exp\{-s\, t\}\, x(s) ds$ — преобразование Лапласа функции x, i — мнимая единица, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографии [1].

Литература

1. *Янович Л.А., Игнатенко М.В. Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц.* Минск: Беларус. навука (2020).

Применение дробного исчисления для моделирования экономических рисков микро-, мезо- и макроуровня

М. В. Карпиеня (Минск, Беларусь)

Дробное исчисление и дробные дифференциальные уравнения, которые используют производные и интегралы нецелых порядков, представляют собой мощные и удобные инструменты для моделирования процессов в экономике.

Примером исследования риска как процесса с памятью на микроуровне может служить дробная модель волатильности GARCH (FIGARCH) [1]:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(|r_{t-i}|^\delta - \theta_i)^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \lambda D^{-\alpha}\sigma_t^2. \tag{1}$$

В данной модели риск связан с изменчивостью волатильности σ_t которая отражает уровень неопределенности и потенциальные колебания цен актива. Учет дробной составляющей $D^{-\alpha}$ позволяет моделировать долгосрочные зависимости, что дает более полное представление о риске.

Управление кредитными рисками часто включает анализ портфелей кредитов, поведения групп заемщиков или даже целых секторов экономики, что характерно для мезоэкономического уровня [2]. Оценка кредитных рисков включает в себя анализ вероятности дефолта $P(t)$ и ожидаемых потерь при дефолте:

$$D^\alpha P(t) = \lambda P(t)(1 - P(t)). \tag{2}$$

Модель экономического роста, где учитывается влияние долговременных эффектов памяти на диамику валового внутреннего продукта (ВВП), является примером дробного исчисления для моделирования экономического риска макроуровня [3]:

$$D^\alpha Y(t) = \alpha Y(t) - bY(t)^2 + c. \tag{3}$$

Применение дробного исчисления для моделирования экономических рисков предоставляет ценные инструменты для более точного анализа и прогнозирования. Учет долговременных зависимостей и эффектов памяти с помощью дробных моделей позволяет более точно оценивать и управлять этими рисками, что важно для принятия обоснованных финансовых решений и повышения устойчивости экономических систем.

Литература

1. *Baillie R.T., Bollerslev T., Mikkelsen H.O.* Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics.* Vol.74. (1996), 3–30.

2. *Leland Hayne E.* Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *The Journal of Finance.* Vol.49. No. 4 (1994), 1213–1252.

3. *Podlubny I. Fractional differential equations.* Academic Press, San Diego. (1999).