Об одном классе систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве

Т. К. Андреева, И. П. Мартынов, В. А. Пронько (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим дифференциальную систему

$$x^{(r)} = a_0 y^k + a_1 y^{k-1} + \ldots + a_k, \quad y^{(s)} = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n, \tag{1}$$

где $x^{(r)} = \dfrac{d^r x}{dz^r}, y^{(s)} = \dfrac{d^s y}{dz^s}$, x, y — комплекснозначные функции от z, z — независимая комплексная переменная, a_i, $i = \overline{0,k}$, b_j, $j = \overline{0,n}$ — аналитические функции по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$, $r, s, k, n \in \mathbb{N}$.

Найдем необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы (1) при $r + s \leq 5$, укажем в каких функциях выражаются решения полученных систем.

При $k = n = 1$ система (1) является линейной, а значит обладает свойством Пенлеве [1, с. 36]. В [2] получены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у системы (1) при $r = s = 1$, $k = n = 2$.

Используя метод малого параметра Пенлеве, Пенлеве-анализ полиномиальных дифференциальных уравнений второго и высших порядков, доказана

Теорема. Для наличия свойства Пенлеве у системы (1) при $r + s \leq 5$ необходимо, чтобы с точностью до обозначения переменных она имела один из видов:

$$x' = a_0 y + a_1, \quad y' = b_0 x^2 + b_1 x + b_2; \tag{2}$$

$$x' = a_0 y + a_1, \quad y' = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3; \tag{3}$$

$$x' = a_0 y^2 + a_1 y + a_2, \quad y' = b_0 x^2 + b_1 x + b_2. \tag{4}$$

Найдены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у систем (2), (3). Заметим, что система (2) содержится в [3]. В [2] получены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у системы (4).

Установлено, что решения полученных систем выражаются либо через эллиптические функциии, либо через решения первого или второго уравнений Пенлеве.

В докладе также обсуждается Пенлеве-анализ системы (1) порядка выше пяти.

Литература

1. *Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* М.: ГИТТЛ (1950).

2. *Яблонский А.И.* Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических особых точек. *Дифференц. уравнения* Т. 2, No. 3 (1966), 752–762.

3. *Лукашевич Н.А., Мататов В.И.* Системы второго порядка без подвижных критических особых точек. *Дифференц. уравнения* Т. 9, No. 3 (1973), 449–455.

Аналитическое исследование уравнения меридианной кривой осесимметричной односвязной свободной поверхности вращающейся капли

Е. В. Авдейчик (Минск, Беларусь)

В работе рассматривается относительный покой жидкости, расположенной на верхней стороне вращающейся горизонтальной плоскости в однородном поле силы тяжести, направленной вертикально вниз. При этом линия действия вектора угловой скорости совпадает с осью вращательной симметрии слоя и пересекает его. На границе жидкости и газа имеет место поверхностное натяжение. Форма равновесной свободной поверхности определяется формулой Лапласа, откуда следуют дифференциальные уравнения соответствующей меридианной кривой [1–3].

В ходе исследования аналитически рассчитаны точные границы диапазонов, в которых расположены решения данных уравнений, а также найдены минимальные и максимальные возможные значения различных характеристик капли при заданных входных параметрах. В частности, проведён анализ связи между числом Бонда и критической кривизной прогиба в центре слоя при постоянном числе Вебера.

В работе [2] осуществлено качественное исследование соответствующих меридианных кривых, например, доказано наличие не более одной точки перегиба на них. В статьях [2, 3] произведено численное решение дифференциальных уравнений равновесия, на основании чего в [3] представлены зависимости между различными параметрами задачи, полученные путём интерполяции конечного набора точек, найденных с помощью численных методов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Энергетические и ядерные процессы и технологии” (подпрограмма “Энергетические процессы и технологии”, задание 2.11 “Волновые течения капиллярных струй, слоев, пленок в центробежных, постоянных и переменных температурных полях и их применение в технологических процессах”).

Литература

1. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. Под редакцией А.Д. Мышкиса.* М.: Наука (1976).

2. *Авдейчик Е.В., Конон П.Н., Могилевский Е.И.* Аналитическое и численное исследование форм равновесия ограниченного объёма жидкости на вращающемся горизонтальном основании. *Механика машин, механизмов и материалов.* Т. 51, No. 2 (2020), 91–96.

3. *Авдейчик Е.В., Конон П.Н.* Численное исследование относительного равновесия капли с односвязной свободной поверхностью на вращающейся плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.*. No. 3 (2022), 79–90.

Волновые пакеты в слоистой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил

И. В. Авдошка (Минск, Беларусь)

Рассмотрим задачу о движении тонкой некруговой цилиндрической оболочки, состоящей из N слоев, подверженной воздействию внешних сил. В работе [1] с использованием гипотез, введенных в [2], были получены уравнения для исследования устойчивости оболочки. В настоящей работе используются аналогичные уравнения для случая движения оболочки с учетом воздействия внешних сил [3]. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}
\varepsilon^4(1-\varepsilon^3\tau\Delta)\Delta^2\chi - k(\varphi)\frac{d^2F}{ds^2} + \varepsilon^2\Delta_t(1-\varepsilon^2\kappa\Delta)\chi + \varepsilon^2\frac{d^2}{dt^2}(1-\varepsilon^2\kappa\Delta)\chi = 0, \\
\varepsilon^4\Delta^2F + k(\varphi)\frac{d^2}{ds^2}(1-\varepsilon^2\kappa\Delta)\chi = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $\Delta z = \dfrac{d^2z}{ds^2} + \dfrac{d^2z}{d\varphi^2}$, $\Delta_t z = \dfrac{d}{d\varphi}\left(t_2\dfrac{dz}{d\varphi}\right) + \dfrac{d}{ds}\left(t_3\dfrac{dz}{d\varphi}\right) + \dfrac{d}{d\varphi}\left(t_3\dfrac{dz}{ds}\right) + \dfrac{d}{ds}\left(t_1\dfrac{dz}{ds}\right)$. Здесь F и χ — функции напряжений и перемещений, s, φ — безразмерные продольная и окружная