Рассмотрим стационарную версию обобщенной иерархии первого уравнений Пенлеве

$$P_1^{[2n-2]} : \mathcal{L}_n[q(z)] - p_n/2 = 0, n \in \mathbb{N}$$

и стационарную версию обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве

$$P_2^{[2n]} : (D + 2w)\mathcal{L}_n[w' - w^2] - p_n w - \alpha_n = 0, n \in \mathbb{N},$$

где оператор $\mathcal{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$D\mathcal{L}_{n+1}[u] = (D^3 + (4u + \beta_n)(D + 2Du))\mathcal{L}_n[u], D = d/dz, \mathcal{L}_1[u] = u, u = u(z), n \in \mathbb{N},$$

а α_n, β_n, p_n — параметры. Обыкновенные дифференциальные уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ имеют соответственно порядок $2n - 2$ и $2n$. Обозначим через G_{2n-2} и H_{2n} множество решений соответственно уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ при фиксированном значении параметров α_n, β_n, p_n. Тогда справедливо включение

$$G_{2n-2} \subset H_{2n}, q(z) = w'(z) - w^2(z), \alpha_n = 0, n \in \mathbb{N},$$

которое определяет соотношение между стационарными иерархиями первого и второго уравнений Пенлеве.

При некоторых соотношениях между параметрами, которые мы здесь не приводим в силу громоздкости, также справедливы включения

$$G_0 \subset G_2 \subset G_4 \subset G_6,\ H_2 \subset H_4 \subset H_6 \subset H_8.$$

Литература

1. *Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plane.* De Gruyter. Studies in Mathematics V. 28. Berlin; New-York (2002).

Фундаментальное решение K-полигармонического уравнения Киприянова

Е. А. Грязнева (Липецк, Россия)

Оператор $\Delta_{-\gamma} = \sum_{i=1}^{n} B_{-\gamma_i}$, $\quad B_{-\gamma_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad 0 < \gamma < 1$ называется оператором Киприянова [1]. K-Гармонической и K-полигармонической функциями Киприянова в области Ω называем дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x)$, четную по каждой координате своего аргумента, удовлетворяющую в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n$ уравнениям

$$\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0, \quad \Delta^m_{B_{-\gamma}} u = 0, \qquad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}_n. \tag{1}$$

Фундаментальное решение оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$, $0 \le \gamma < 1$ определено в работе [1] (теорема 7). Фундаментальное решение K-полигармонического оператора с точностью до константы совпадает с фундаментальным решением оператора Киприянова и определено следующей теоремой.

Теорема. Пусть $-\gamma = -(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $0 > -\gamma_i > -1$ и $n - |\gamma| > 0$. Тогда фундаментальным решением Δ_B-оператора Киприянова является регулярная $S'_{ev,-\gamma}$ — обобщенная функция

$$\mathcal{E}_{n,-\gamma}(x) = \frac{A_1\ |x|^{2-n+|\gamma|}}{(2 - n + |\gamma|)\, |S_1^+(n)|_\gamma}, \quad n + |\gamma| \ne \text{четному числу}, \tag{2}$$

где $|S_1^+(n)|_\gamma$ — площадь нагруженной сферы,

$$A_1 = 2^{2m+1}\prod_{j=0}^{m-1}(k/2-j)\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{k+n-|\gamma|}{2}-s\right) = \frac{(-1)^m\Gamma(\frac{n-|\gamma|}{2}-m)}{\Gamma(m)2^{2m}\pi^{\frac{n-|\gamma|}{2}}}.$$

Формально полученное решение K-полигармонического оператора совпадает с фундаментальным решением классического полигармонического оператора при $\gamma = 0$, см. [2], с. 521. Отметим невозможность логарифмического решения в этом случае. В случае, если мультииндекс γ состоит из неотрицательных чисел, то логарифмический случай возможен, соответствующая формула фундаментального решения определена в книге [3].

Литература

1. *Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С.А., Санина Е. Л.* Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром. *Дифференц. уравнения* (2022). Т. 58. № 12. 1654–1665.

2. *Соболев С.Л. Введение в теорию кубаторных формул.* М.: Наука. (1974).

3. *Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука (1997).

Линейная зависимость компонент сильно нерегулярного решения линейной однородной периодической дифференциальной системы

А. К. Деменчук (Минск, Беларусь)

Будем рассматривать линейную однородную системы дифференциальных уравнеий

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n > 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ — непрерывная ω-периодическая $n \times n$-матрица. До середины XX века исследования по периодическим решениям дифференциальных систем базировались на предположении о соизмеримости периодов решения и самой системы. Поэтому другие возможные соотношения частот не изучались.

По-видимому, первым, кто более детально исследовал данную проблему, был Х. Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [1]. Этот результат послужил началом нового направления в качественной теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах Я. Курцвейля и О. Вейводы [2], Н.П. Еругина [3], И.В. Гайшуна [4], Э.И. Грудо [5], В.Т. Борухова [6] и др. Такие периодические решения ввиду их необычности, в сравнении с ранее изучавшимися, были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр — асинхронным, а описываемые ими колебания — асинхронными.

В настоящем докладе укажем зависимость между компонентами сильно нерегулярного периодического решения системы (1).

Для непрерывной на всей числовой оси ω-периодической вещественнозначной матрицы $F(t)$ определим её среднее значение $\hat{F} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega F(t)dt$ и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}$. Через $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ — наибольшее число её линейно независимых столбцов. Подобным можно определить и строчный ранг матрицы. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать.

Укажем необходимое условие существования асинхронных колебаний. Справедлива

Лемма. Если система (1) имеет нетривиальное сильно нерегулярное периодическое