при всех действительных значениях параметра λ. С этой целью аналитический подход к построению трансверсальных овалов, зависящих от параметра λ и образующих алгебраические границы глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Рэлея из работ [1, 2], был адаптирован к системе (1). Внутренняя граница найденного кольца A состоит из овала множества нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса, что доказывает наличие не более одного предельного цикла. Для нахождения внешней границы кольца предложена процедура нахождения многочлена, множество нулевого уровня которого содержит трансверсальный овал. Таким образом, получен следующий результат

Теорема. Система (1) имеет при всех λ единственный предельный цикл на фазовой плоскости, расположенный в кольце Пуанкаре–Бендиксона A, внутренней и внешней границами которого соответственно являются трансверсальные алгебраические овалы:

$$I_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} : Q^2(x,y,\lambda,n,c_0) + \frac{y^{2n}}{n} - c_0 = 0\right\},$$

$$O_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} : Q^2(x,y,\lambda,n,c_0) + \lambda y\left(2c_0 - \frac{y^{2n}}{n(2n+1)}\right)Q(x,y,\lambda,n,c_0) + \right.$$
$$+\frac{y^{2n}}{n} - \lambda^2\left(\frac{(4n+3)c_0 y^{2n+2}}{n(2n+1)(2n+2)} - c_0^2 y^2 - \frac{y^{4n+2}}{2n^2(2n+1)^2}\right) - (6n+2)c_0 -$$
$$\left. - \frac{\lambda}{n}\sqrt[2n]{\frac{2n(2n+1)c_0}{3n+1}}\left(\frac{6n^2 c_0}{3n+1}\right)^{\frac{3}{2}} - 3\lambda^2 c_0^2 \sqrt[2n]{2n(2n+1)c_0} = 0\right\}.$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф23У–008).

Литература

1. *Grin A.A., Schneider K.R.* Global algebraic Poincaré–Bendixson annulus for the Rayleigh equation. *Electron. J. Qual. Theory Diff. Eq.*, Vol. 35 (2023), 1–12.

2. *Ли Ю., Гринь А.А., Кузьмич А.В.* Уточненное глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона с предельным циклом системы Рэлея. *Дифференц. уравнения.* Vol. 60, No. 6 (2024), 736–749.

О вложимости множеств решений стационарных иерархий первого и второго уравнений Пенлеве

В. И. Громак (Минск, Беларусь)

В настоящее время существует определенный интерес в изучении иерархий уравнений Пенлеве, которые являются бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально–алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, обладают симметриями, индуцированные преобразованиями Беклунда, и при специальных значениях параметров имеют классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения [1]. Для второго уравнения Пенлеве и его иерархии это полиномы Яблонского–Воробьева, которые позволяют построить рациональные решения уравнений иерархии уравнения Кортевега–де Фриза.

Рассмотрим стационарную версию обобщенной иерархии первого уравнений Пенлеве

$$P_1^{[2n-2]} : \mathcal{L}_n[q(z)] - p_n/2 = 0, n \in \mathbb{N}$$

и стационарную версию обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве

$$P_2^{[2n]} : (D + 2w)\mathcal{L}_n[w' - w^2] - p_n w - \alpha_n = 0, n \in \mathbb{N},$$

где оператор $\mathcal{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$D\mathcal{L}_{n+1}[u] = (D^3 + (4u + \beta_n)(D + 2Du))\mathcal{L}_n[u], D = d/dz, \mathcal{L}_1[u] = u, u = u(z), n \in \mathbb{N},$$

а α_n, β_n, p_n — параметры. Обыкновенные дифференциальные уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ имеют соответственно порядок $2n - 2$ и $2n$. Обозначим через G_{2n-2} и H_{2n} множество решений соответственно уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ при фиксированном значении параметров α_n, β_n, p_n. Тогда справедливо включение

$$G_{2n-2} \subset H_{2n}, q(z) = w'(z) - w^2(z), \alpha_n = 0, n \in \mathbb{N},$$

которое определяет соотношение между стационарными иерархиями первого и второго уравнений Пенлеве.

При некоторых соотношениях между параметрами, которые мы здесь не приводим в силу громоздкости, также справедливы включения

$$G_0 \subset G_2 \subset G_4 \subset G_6,\ H_2 \subset H_4 \subset H_6 \subset H_8.$$

Литература

1. *Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plane.* De Gruyter. Studies in Mathematics V. 28. Berlin; New-York (2002).

Фундаментальное решение K-полигармонического уравнения Киприянова

Е. А. Грязнева (Липецк, Россия)

Оператор $\Delta_{-\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}$, $\quad B_{-\gamma_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad 0 < \gamma < 1$ называется оператором Киприянова [1]. K-Гармонической и K-полигармонической функциями Киприянова в области Ω называем дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x)$, четную по каждой координате своего аргумента, удовлетворяющую в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n$ уравнениям

$$\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0, \quad \Delta^m_{B_{-\gamma}} u = 0, \qquad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}_n. \tag{1}$$

Фундаментальное решение оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$, $0 \leq \gamma < 1$ определено в работе [1] (теорема 7). Фундаментальное решение K-полигармонического оператора с точностью до константы совпадает с фундаментальным решением оператора Киприянова и определено следующей теоремой.

Теорема. Пусть $-\gamma = -(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $0 > -\gamma_i > -1$ и $n - |\gamma| > 0$. Тогда фундаментальным решением Δ_B-оператора Киприянова является регулярная $S'_{ev,-\gamma}$ — обобщенная функция

$$\mathcal{E}_{n,-\gamma}(x) = \frac{A_1\ |x|^{2-n+|\gamma|}}{(2 - n + |\gamma|)\,|S_1^+(n)|_\gamma}, \quad n + |\gamma| \neq \text{четному числу}, \tag{2}$$