апробации программы приняли участие магистранты первого и второго года обучения направления подготовки 09.04.01 “Информатика и вычислительная техника”. В настоящее время готовятся материалы для создания сопровождающего курса на платформе дистанционного обучения НовГУ (<https://do.novsu.ru/>).

В докладе будут представлены особенности программы дополнительного образования, её возможности, используемые технологии и основные направления развития. Рассматриваются также трудности, выявленные на этапе апробации, и предлагаются возможные пути их преодоления. Акцент будет сделан на раздел программы, посвященный понятиям и методам математического анализа.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по программе создания и развития центра мирового уровня “Цифровой биодизайн и персонализированное здравоохранение” в рамках проекта № 075-15-2022-306.

Теорема о среднем для К-гармонических функций
Ю. Н. Булатов (Елец, Россия), С. А. Рощупкин (Елец, Россия),
Е. Л. Санина (Воронеж, Россия)

Пусть $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : (x_1 > 0, \dots, x_n > 0)\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)\}$. И пусть мультииндекс $-\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n)$ имеет фиксированные отрицательные параметры: $-1 < -\gamma_i < 0$. Сингулярный дифференциальный оператор $\Delta_{B^{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}$, $B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\gamma_i > 0$, называется оператором Киприянова [1]. Рассмотрим область $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ и часть этой области $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}_n^+$, граница которой состоит из двух частей $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^o \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$. Граница $\partial\Omega = \Gamma$ предполагается гладкой в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^o$ ([2], §3.1) и функции из области Ω^+ должны иметь гладкое четное продолжение через границу Γ^o по отношению к каждой координате x_i ([2], с. 21).

Определение. Функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ называется К-гармонической функцией в области Ω^+ , если $\Delta_{B^{-\gamma}} u = 0$ в каждой точке Ω^+ .

Введем оператор $\mathbb{T}$ -сдвига: $\mathbb{T}^y = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i}$, где

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} f\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}\right)}{\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}\right)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i.$$

Из равенства (см. [3], лемма 2') $\Delta_{B^{-\gamma}} \mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^y \Delta_{B^{-\gamma}} f(x)$, вытекает, что функции f и $\mathbb{T}^y f(x)$ одновременно К-гармонические.

Теорема. Пусть функция $u(x)$ является К-гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ — n -полусфера радиуса r с центром в начале координат, целиком лежащая в Ω^+ . Тогда

$$u(x) = \frac{1}{|S_r^+(n)|_\gamma} \int_{S_r^+(n)} \mathbb{T}^y u(x) y^{-\gamma} dS_r(y).$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения. *Дифф. уравнения*. Т. 56. No. 12 (2020), 1610–1620.
2. Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи*. М.: Наука (1997).
3. Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рошупкин С.А., Санина Е.Л. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова. *Дифф. уравнения*. Т. 59. No. 4 (2023), 483–493.

Наличие свойства Пенлеве

у дифференциальной системы второго порядка специального вида
Т. Н. Ванькова, Л. В. Детченя, В. М. Пецевич (Гродно, Беларусь)

На предмет наличия свойства Пенлеве рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$x'^2 = (\alpha_1 x + \alpha_2)(xy^2 + K_2 xy + K_1 y), \quad y'^2 = xy^2 + K_2 xy + K_1 y, \quad (1)$$

где

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad K_1 \neq 0, \quad (2)$$

x, y — неизвестные функции независимой переменной t , α_1, α_2 — аналитические функции переменной t , K_1, K_2 — некоторые постоянные.

Система (1) является частным случаем системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + \\ &\quad + a_{11}x + a_{10})y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ y'^2 &= (b_{41}y^4 + b_{31}y^3 + b_{21}y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0$, $|b_{41}| + |b_{31}| + |b_{21}| + |b_{11}| + |b_{01}| \neq 0$, a_{ij}, b_{kl} — аналитические функции переменной t .

Система (3), когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$, рассматривалась в [1]. Случай, когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = 0$, $b_{11} \neq 0$, рассматривался в [2]. Случай, когда $|b_{41}| + |b_{31}| \neq 0$, рассматривался в [3].

Система (1) является одной из 7 систем, которые удовлетворяют необходимым условиям наличия свойства Пенлеве у системы

$$\begin{aligned} x'^2 &= (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + \\ &\quad + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ y'^2 &= (y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00}, \end{aligned}$$

где $|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0$ [4]. В [4] система (1) имеет обозначение (4).

Некоторые из систем, полученных в [4], рассматривались в [5], [6]. В [5] рассматривалась система из [4], которая имеет обозначение (7); в [6] рассматривалась система из [4], которая имеет обозначение (10).

Выразив из второго уравнения системы (1) функцию x и подставив в первое уравнение, относительно функции y построим дифференциальное уравнение второго порядка второй степени относительно производной. Используя некоторые леммы из [7], [8], метод малого параметра, метод резонансов, тест Пенлеве, метод сравнения полученных уравнений с уравнениями, аналитические свойства решений которых известны, покажем что справедлива