

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

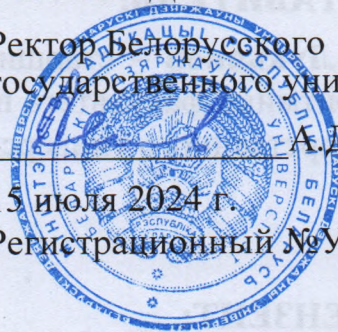
УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

15 июля 2024 г.

Регистрационный №УД-13121/уч.



ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине
для специальности:

1-31 03 04 Информатика

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 04 – 2021, учебного плана БГУ №G-31-1-031/уч. от 30.06.2021.

СОСТАВИТЕЛЬ:

И.Д. Лукьянов – старший преподаватель кафедры дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТ:

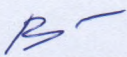
А.С. Шишов – руководитель команды математического моделирования и оптимизации Минского исследовательского центра ООО «БелХуавэй Технолоджис», PhD.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дискретной математики и алгоритмики БГУ
(протокол № 15 от 06.05.2024);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024)

Заведующий кафедрой



В.М.Котов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Целочисленное программирование» знакомит студентов с математическими основами целочисленной оптимизации и формирует навыки моделирования и решения задач целочисленного программирования в практических приложениях.

Цель учебной дисциплины – сформировать теоретические и практические знания в области целочисленной оптимизации, обучить студентов навыкам построения и анализа оптимизационных математических моделей в терминах целочисленного программирования и современным методам решения задач смешанно-целочисленного программирования.

Задачи учебной дисциплины:

1. Изучить теоретические основы целочисленного программирования и алгоритмы, применяемые для решения задач и обработки моделей.
2. Научить выполнять исследование прикладных задач, моделировать задачи в терминах целочисленного программирования.
3. Сформировать навыки решения прикладных задач с помощью современных программных математических решателей.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к дисциплинам по выбору компонента учреждения высшего образования.

Программа составлена с учетом межпредметных связей с учебными дисциплинами. Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплина «Методы оптимизации» модуля «Математические методы принятия решений» компонента учреждения высшего образования, дисциплина «Модели и алгоритмы задач дискретной оптимизации» модуля «Дискретные структуры и алгоритмы» государственного компонента. Знания, полученные в учебной дисциплине, используются при выполнении студентами курсовых и дипломных работ в рамках специализации кафедр.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Целочисленное программирование» должно обеспечить формирование следующей специализированной компетенции:

СК. Организовывать хранение больших данных и выполнять их анализ, определять подходящий инструмент анализа больших данных.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– математические основы теории целочисленного программирования;

– основные методы решения задач целочисленного программирования и алгоритмы, применяемые в математических решателях оптимизационных задач;

уметь:

- анализировать требования модели для постановки задачи целочисленного программирования;
- строить оптимизационные задачи целочисленного линейного программирования;
- осуществлять анализ задач целочисленного программирования, их формулировок и решений;

владеть:

- программными средствами для решения задач целочисленного программирования;
- навыками практического решения задач целочисленного линейного программирования.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 7-м семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Целочисленное программирование» отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 100 часов, в том числе 64 аудиторных часа, из них: лекции – 32 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 2 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Основы целочисленного программирования

Тема 1.1. Введение.

Определение задачи целочисленного программирования. Связь целочисленного программирования с квадратичным и нелинейным программированием. Смешанно-целочисленные формулировки.

Тема 1.2. Многогранники. Формулировки задач.

Полиэдры и многогранники. Хорошие и идеальные формулировки. Расширенные и альтернативные формулировки.

Тема 1.3. Релаксации.

Релаксация задачи целочисленного программирования. Релаксация к линейному программированию (ЛП-релаксация). Комбинаторная релаксация. Лагранжева релаксация.

Тема 1.4. Оптимальность решения.

Оптимальность решения задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Двойственность в линейном программировании. Прямая и двойственная оценки целевой функции. Разрыв двойственности.

Раздел 2. Построение моделей и сложность задач целочисленного программирования

Тема 2.1. Моделирование задач смешанно-целочисленного программирования.

Моделирование дискретных переменных. Аппроксимация нелинейной и выпуклой функций. Моделирование логических условий.

Тема 2.2. Трудность задачи целочисленного программирования и легкоразрешимые случаи.

NP-трудность задачи целочисленного программирования. Комбинаторный взрыв. Задача коммивояжера. Легкоразрешимые случаи: задачи со вполне унимодулярной матрицей, задача о назначениях.

Тема 2.3. Динамическое программирование в задачах целочисленного программирования.

Динамическое программирование для решения частных случаев задач целочисленного программирования. Задача о рюкзаке. Моделирование задач, разрешимых методом динамического программирования, в терминах целочисленной оптимизации.

Раздел 3. Метод ветвей и сечений

Тема 3.1. Метод ветвей и границ.

Метод ветвей и границ. Дерево поиска. Метод ветвей и сечений. Общая схема работы современного решателя целочисленного линейного программирования.

Тема 3.2. Правила ветвления и выбора активного узла в дереве поиска.

Правила выбора активного узла. Правила ветвления. Ветвление по наиболее дробной переменной. Ветвление по псевдостоимостям. Сильное ветвление. Ветвление по надежности.

Тема 3.3. Методы сечений.

Отсечения Хватала — Гомори. Смешанно-целочисленное округление. Дробные отсечения Гомори. Дизъюнктивные неравенства. Методы выбора отсечений.

Тема 3.4. Структурные отсечения.

Сильные неравенства. Техника подъема неравенств. Рюкзачные неравенства. Простые потоковые структуры. Кликовые неравенства. Неравенства для нечетных циклов. Точная процедура отделения.

Раздел 4. Вспомогательные методы решения задач целочисленного программирования

Тема 4.1. Эвристические алгоритмы.

Место эвристик в общей схеме ЦЛП-решателя. Эвристики округления. Эвристики погружения. Улучшенные эвристики локального поиска. Применение метаэвристических алгоритмов: поиск с запретами, метод имитации отжига, генетический алгоритм.

Тема 4.2. Предоптимизационная обработка задачи.

Нормализация и предоптимизационная обработка линейных неравенств. Испытание значений бинарных переменных. Дизагрегация ограничений. Изменение коэффициентов при бинарных переменных. Двойственные фиксации переменных. Рестарт метода ветвей и границ.

Тема 4.3. Метод ветвей и оценивания.

Метод генерации столбцов. Переформулировка Данцига — Вулфа. Координирующая задача и задача оценивания. Проблема симметрии.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Основы целочисленного программирования	8			8			
1.1	Введение	2			2			Собеседование.
1.2	Многогранники. Формулировки задач	2			2			Собеседование.
1.3	Релаксации	2			2			Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
1.4	Оптимальность решения	2			2			Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
2	Построение моделей и сложность задач целочисленного программирования	6			6			
2.1	Моделирование задач смешанно-целочисленного программирования	2			2			Контрольная работа №1.

2.2	Трудность задачи целочисленного программирования и легкоразрешимые случаи	2			2			Собеседование.
2.3	Динамическое программирование в задачах целочисленного программирования	2			2			Контрольная работа №2.
3	Метод ветвей и сечений	12			12			
3.1	Метод ветвей и границ	2			2			Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
3.2	Правила ветвления и выбора активного узла в дереве поиска	2			2			Собеседование.
3.3	Методы сечений	4			4			Контрольная работа №3.
3.4	Структурные отсечения	4			4			Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
4	Вспомогательные методы решения задач целочисленного программирования	6			4		2	
4.1	Эвристические алгоритмы	2					2	Оценивание на основе проектного метода.
4.2	Предоптимизационная обработка задачи	2			2			Контрольная работа №4.
4.3	Метод ветвей и оценивания	2			2			Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Донкова, И. А. Исследование операций и методы оптимизации : учебное пособие / И. А. Донкова ; Тюменский гос. ун-т. - Москва : Проспект, 2023. - 195 с.
2. Матвеев, А. И. Математические методы системного анализа : учебное пособие / А. И. Матвеев. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2020. - 126 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/151666>.
3. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по направлению "Прикладная математика" / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 511 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212129>.
4. Ржевский, С. В. Математическое программирование : учебное пособие / С. В. Ржевский. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 607 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/206993>.

Дополнительная литература

1. Андреева, Е. А. Дискретная оптимизация : учеб. пособие для студ. мат. спец. и напр. подготовки ун-тов / Е. А. Андреева, В. М. Цирулёва ; М-во образования и науки РФ, Гос. образовательное учреждение высш. проф. образования "Тверской гос. ун-т". - Тверь, 2004. - 282с.
2. Карпов, Д. А. Методы и алгоритмы решения прикладных задач дискретной оптимизации : учебное пособие / Д. А. Карпов, В. И. Струченков. — Москва : СОЛОН-Пресс, 2020. — 200 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/180841> (дата обращения: 26.09.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Ковалёв, М. М. Дискретная оптимизация: Целочисленное программирование / М. М. Ковалёв. – Москва : URSS, 2020. – 192 с.
4. Методы оптимизации : пособие для студ. вузов, обуч. по спец. 1-31 03 03 "Прикладная математика (по направлениям)", 1-31 03 04 "Информатика", 1-31 03 05 "Актуарная математика", 1-31 03 06-01 "Экономическая кибернетика" (по направлениям), 1-98 01 01-01 "Компьютерная безопасность" (математические методы и программные системы) : [пособие для студ. мат. и экон. профиля] / [Р. Габасов и др.]. - Минск : Четыре четверти, 2011. - 472 с.
5. Овчинников, В. А. Модели и методы дискретной оптимизации. Модули 1 и 2 : учебник / В. А. Овчинников. - Москва : МГТУ им. Баумана, 2019. - 278 с. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/2010614> (дата обращения: 26.09.2024). — Режим доступа: по подписке.
6. Писарук, Николай Николаевич. Модели и методы смешанно-целочисленного программирования / Н. Н. Писарук. - Минск : БГУ, 2010. - 232 с.

7. Соколов, Г. А. Линейные целочисленные задачи оптимизации : учебное пособие / Г.А. Соколов. — Москва : ИНФРА-М, 2024. — 132 с. — (Высшее образование). — Текст : электронный. — URL: <https://znanium.com/catalog/product/2082848> (дата обращения: 26.09.2024). — Режим доступа: по подписке.
8. Струченков, В. И. Дискретная оптимизация. Модели, методы, алгоритмы решения прикладных задач : практическое руководство / В. И. Струченков. - Москва : СОЛОН-Пресс, 2020. - 192 с. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1858772> (дата обращения: 26.09.2024). — Режим доступа: по подписке.
9. Схрейвер, Александр. Теория линейного и целочисленного программирования : в 2 т. Т. 2 / Александр Схрейвер ; пер. с англ. С. А. Тарасова [и др.]. - Москва : Мир, 1991. - 702 с.
10. Achterberg, T. Constraint Integer Programming : Dissertation ... Doktor der Naturwissenschaften / T. Achterberg. — Berlin : Technischen Universität Berlin, 2007. — 412 p.
11. Chen, D.-S. Applied Integer Programming: Modeling and Solution / D.-S. Chen, R. G. Batson, Yu Dang. — John Wiley & Sons, 2010. — 488 p.
12. Conforti, M. Integer Programming / M. Conforti, G. Cornuéjols, G. Zambelli. — Springer, 2014. — 456 p.
13. Nemhauser, G. L. Integer and Combinatorial Optimization / G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey. — John Wiley & Sons, 2014. — 784 p.
14. Wolsey, L. A. Integer Programming / L. A. Wolsey. — New York ; John Wiley & Sons, 2021. — 2nd ed. — 316 p.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: собеседование.
2. Письменная форма: контрольные работы.
3. Устно-письменная форма: отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой, оценивание на основе проектного метода.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Целочисленное программирование» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- отчет по домашним упражнениям с их устной защитой – 80 %;
- контрольные работы – 20 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 60% и отметки на зачете – 40%.

Примерный перечень лабораторных занятий

Занятия 1-2. Знакомство с открытыми математическими решателями ЦЛП HiGHS, SCIP, CBC.

Занятие 3. Задачи разрешимости. Задача о sudoku. Планирование производства электроэнергии. Решение с помощью математических решателей.

Занятия 4-5. Моделирование дискретных переменных. Аппроксимация нелинейных и выпуклых функций. Специальные упорядоченные множества.

Занятия 6-7. Моделирование и решение задач целочисленного программирования. Задача коммивояжера. Размещение элементов на чипе.

Занятие 8. Ветвление по псевдостоимостям. Сильное ветвление. Сравнение и анализ.

Занятие 9. Отсечения Хватала — Гомори. Смешанно-целочисленное округление. Дробные отсечения Гомори.

Занятие 10. Техника подъема неравенств. Рюкзачные неравенства.

Занятие 11. Простые потоковые структуры. Кликовые неравенства. Неравенства для нечетных циклов.

Занятие 12. Эвристические алгоритмы нахождения допустимых решений. Сравнение и анализ.

Занятия 13-14. Предоптимизационная обработка задачи.

Занятие 15. Обобщенная задача о назначениях.

Рекомендуемая тематика контрольных работ:

1. Контрольная работа № 1. «Построение моделей смешанно-целочисленного программирования».

2. Контрольная работа № 2. «Динамическое программирование в задачах целочисленного программирования».

3. Контрольная работа № 3. «Методы сечений».

4. Контрольная работа № 4. «Предоптимизационная обработка задачи».

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Управляемая самостоятельная работа предлагается в виде заданий проектного типа.

Тема 4.1. Эвристические алгоритмы (2 ч).

Примером такого задания может быть реализация простого эвристического алгоритма для поиска допустимого решения задачи целочисленного программирования. Обеспечение на образовательном портале – инструкция по выполнению проектов.

Форма контроля – защита индивидуального или группового студенческого проекта.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса большинства практических занятий используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

Также при организации образовательного процесса используются **методы группового обучения, проектного обучения и учебной дискуссии**. Студентам предлагается выполнить часть домашних заданий в форме проекта в группах до 4 человек. Задания предполагают предварительное обсуждение в форме мозгового штурма.

Выполнение проекта предусматривает самостоятельную работу с научными и техническими источниками по теме курса, самостоятельный поиск и выбор способа решения задачи, составление плана и разделение задач между участниками группы.

В конце курса предусмотрена устная защита проекта с критическим анализом идей, сгенерированных в ходе мозгового штурма, и ретроспективной выполненной работы.

Комбинация методов предполагает

- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.
- появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, презентации лекций, методические указания к практическим занятиям, электронные версии домашних заданий, материалы текущего контроля и промежуточной аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в том числе вопросы для подготовки к зачету, задания, вопросы для самоконтроля, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Управляемая самостоятельная работа (консультационно-методическая поддержка и контроль) дисциплины обеспечивается средствами образовательного портала БГУ LMS Moodle.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Определение задачи целочисленного программирования. Связь целочисленного программирования с нелинейным программированием.
2. Полиэдры и многогранники. Хорошие и идеальные формулировки. Расширенные и альтернативные формулировки.
3. Релаксация к линейному программированию (ЛП-релаксация). Комбинаторная релаксация. Лагранжева релаксация.
4. Оптимальность решения задачи целочисленного линейного программирования.
5. Двойственность в линейном программировании. Разрыв двойственности.
6. Моделирование дискретных переменных. Моделирование логических условий.
7. Аппроксимация нелинейной и выпуклой функций.
8. NP-трудность задачи целочисленного программирования. Комбинаторный взрыв.
9. Задача коммивояжера. Сведение к задаче ЦЛП.
10. Легкоразрешимые случаи. Задачи со вполне унимодулярной матрицей.
11. Легкоразрешимые случаи. Задача о назначении.
12. Динамическое программирование для решения частных случаев задач целочисленного программирования. Задача о рюкзаке.
13. Метод ветвей и границ. Дерево поиска.
14. Метод ветвей и сечений. Общая схема работы современного решателя целочисленного линейного программирования.
15. Правила выбора активного узла. Правила ветвления.
16. Отсечения Хватала — Гомори.

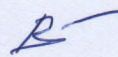
17. Смешанно-целочисленное округление. Дробные отсечения Гомори.
18. Дизъюнктивные неравенства.
19. Техника подъема неравенств.
20. Простые потоковые структуры в методе сечений.
21. Кликовые неравенства. Неравенства для нечетных циклов.
22. Точная процедура отделения.
23. Эвристики округления.
24. Эвристики погружения.
25. Улучшенные эвристики локального поиска.
26. Нормализация и предоптимизационная обработка линейных неравенств.
27. Испытание значений бинарных переменных.
28. Дизагрегация ограничений. Изменение коэффициентов при бинарных переменных.
29. Двойственные фиксации переменных. Рестарт метода ветвей и границ.
30. Метод генерации столбцов. Переформулировка Данцига — Вулфа. Координирующая задача и задача оценивания.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой

доктор физико-математических наук, профессор



В.М.Котов

06 мая 2024 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
