



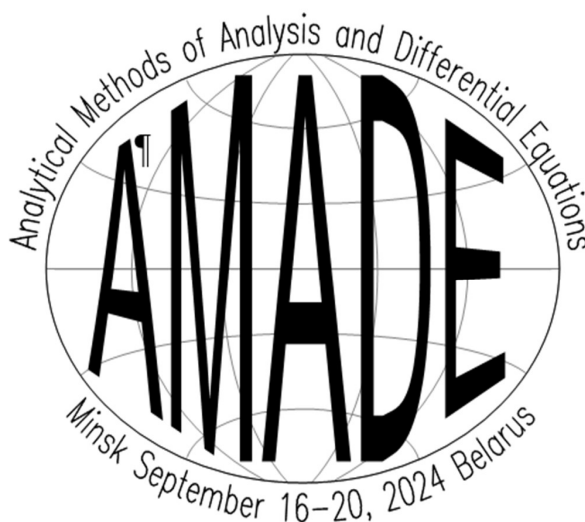
МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ



Экономический
факультет (25)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ANALYTICAL METHODS OF ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS



Материалы 11-го международного научного семинара
16 – 20 сентября 2024 года, Минск, Беларусь

Materials of the 11th International Workshop
September, 16 – 20, 2024, Minsk, Belarus

УДК 517
ББК 22.161+22.162
А 64

Под общей редакцией кандидата
физико-математических наук, доцента С. В. Рогозина

Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений :
А64 материалы 11-го международного семинара 16-20 сентября 2024 г., Минск / БГУ;
под общей редакцией С. В. Рогозина. — Минск : ИВЦ Минфина, 2024 — 76 с.

ISBN 978-985-880-499-2.

В настоящем сборнике представлены материалы 11-го международного научного семинара «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ-2024). Семинар проводится Белорусским государственным университетом.

The materials of the 11th International Workshop «Analytical Methods of Analysis and Differential Equations» (AMADE-2024) are presented in this book. The conference is organized by the Belarusian State University.

УДК 517
ББК 22.161+22.162

ISBN 978-985-880-499-2.

© БГУ, 2024
© Коллектив авторов, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. Об одном классе систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве	7
Авдейчик Е. В. Аналитическое исследование уравнения меридианной кривой осесимметричной односвязной свободной поверхности вращающейся капли	7
Авдошка И. В. Волновые пакеты в слоистой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил	8
Барышева И. В. Об ограниченности частно-интегрального оператора типа потенциала в весовом анизотропном пространстве Лебега	9
Борухов В. Т., Заяц Г. М. Неединственность решений обратной задачи теплопроводности	10
Босяков С. М., Малец Е. Л., Петрова Л. Г. Влияние геометрических параметров слуховой трубы на аэрацию полостей среднего уха	11
Босяков С. М., Назаренко Д. В., Рубникович С. П. Биомеханическое моделирование реакции нижней челюсти с установленным полным протезом на жевательную нагрузку	12
Бритвина Л. Е. Решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных сверток интегральных преобразований	13
Бритвина Л. Е. Опыт внедрения ДОП “Математические основы анализа медицинских данных” в НовГУ	13
Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л. Теорема о среднем для гармонических функций	14
Ванькова Т. Н., Детченя Л. В., Пецевич В. М. Наличие свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка специального вида	15
Васенкова Е. И. Об особенностях развития транспортных систем	16
Герасимова А. В., Лаврова О. А., Полевилов В. К. Численное исследование влияния угла контакта на равновесные формы магнитной жидкости	18
Gladkov A. L. Blow-up problem for a parabolic equation with nonlinear memory and absorption under nonlinear nonlocal boundary condition	19
Господарик Е. Г. Применение математического моделирования для оценки эффектов интеграции	19
Гринь А. А., Кузьмич А. В. Глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона с единственным предельным циклом обобщенной системы Рэлея	20
Громак В. И. О вложимости множеств решений стационарных иерархий первого и второго уравнений Пенлеве	21
Грязнева Е. А. Фундаментальное решение K -полигармонического уравнения Киприянова	22
Деменчук А. К. Линейная зависимость компонент сильно нерегулярного решения линейной однородной периодической дифференциальной системы	23
Докукова Н. А., Ситковская П. П. Асимптотическая устойчивость двухкаскадной виброизоляции машиностроительных конструкций	24
Игнатенко В. В. Способы и инструменты визуализации операторов обобщенного сдвига	25
Игнатенко М. В. К теории интерполирования операторов, заданных на функциональных банаховых алгебрах	26

Карпиеня М. В. Применение дробного исчисления для моделирования экономических рисков микро-, мезо- и макроуровня	27
Карпович И. Н., Николайчик М. А. Механико-математическое моделирование переходных процессов гидрогазодинамики	27
Карпук В. В., Метельский А. В. Спектральное приведение дифференциально-разностной системы с несоизмеримыми запаздываниями	28
Климкович Н. М., Николайчик М. А., Журавков М. А. Оценка напряженно-деформированного состояния подземных сооружений с учетом реологических свойств окружающего породного массива	29
Конон П. Н., Миранович А. А. Образование гидравлического прыжка при движении тонкого слоя вязкой жидкости на вращающемся горизонтальном диске	30
Королевич В. В. Распределение температуры в профилированном полярно-ортотропном кольцевом диске, вращающемся в тепловом поле, с учетом теплообмена с окружающей средой	31
Королевич В. В., Медведев Д. Г. Напряженно-деформированное состояние равномерно вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины	32
Королева А. А., Дутин С. Р., Дутина А. А. Перспективы цифровизации логистики стран ШОС	33
Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of an initial-boundary value problem with a mixed boundary condition for a mildly quasilinear wave equation	34
Кришень У. А. Применение дробно-дифференциальных моделей в анализе котировок международных индексов	35
Лаврова О. А., Полевилов В. К. Согласованный алгоритм расчета равновесных форм магнитной жидкости и концентрации частиц	36
Лаврова О. А., Полевилов В. К. Численное моделирование конвективной неустойчивости в магнитной жидкости	37
Лачугина Е. А. Собственные частоты пятислойной шарнирно опертой пластины	37
Литвинович А. А. Вычисление оптимальных долей ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску	38
Lomovtsev F. E. Riemann formulas of classical solutions to the second mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on a segment	39
Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н. Задача Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения	40
Малютин К. Г. Новые неравенства для ρ -тригонометрически выпуклых функций	41
Мардвилко Т. С. Произведение Бляшке в рациональной аппроксимации четного и нечетного продолжения функции	42
Маслюкова Т. И. Применение превентивных моделей риск-менеджмента в обеспечении экономической безопасности	43
Матюшенко А. Д., Зорина Т. Г. Применение кластерного и дискриминантного анализа в исследовании развития возобновляемых источников энергии в европейских странах	44
Мусафиров Э. В., Гринь А. А., Проневич А. Ф. О периодических решениях допустимо возмущенной системы ОДУ с бесконечным числом предельных циклов	45
Никитин А. В. Разработка математической модели биоккомпозита пористый титан-костная ткань на основе ячейки Гибсона-Эшби	46

Нифагин В. А., Дубровина О. В. Стационарный рост упругопластической трещины и обратная задача механики разрушения	47
Павловский В. А. Равномерно сходящиеся последовательности многочленов, имеющих заданные нули в кольце h -комплексных чисел	48
Павлючик П. Б., Проневич А. Ф. Построение первых интегралов неавтономных полиномиальных многомерных дифференциальных систем по кратным комплекснозначным частным интегралам	49
Панов Е. Ю. Об автомодельных решениях задачи Стефана–Дирихле в угле	50
Петрачков Д. А., Николайчик М. А. Моделирование НДС массива горных пород в окрестности одиночной выработки на различных глубинах с учетом прослоек глины между слоями горных пород	50
Pilipchuk L. A., Ramanouski Y. V. Decomposition approach to linear-fractional optimization problem on the generalized multinetwrok	51
Пискарев С. И. Дробные уравнения и численный анализ	52
Плецинский Н. Б. Обобщенные решения задач сопряжения для уравнения Гельмгольца и уравнений Максвелла	53
Поцейко П. Г., Ровба Е. А. Об аппроксимациях интегралов типа Римана–Лиувилля на отрезке рациональными операторами Фурье–Чебышёва	54
Проневич А. Ф., Хацкевич Г. А. Динамические многофакторные производственные функции, учитывающие расширенно нейтральный по Хиксу научно-технический прогресс	54
Псху А. В. К теории операторов дифференцирования распределенного порядка ..	55
Расолько Г. А., Волков В. М. Спектральный метод Чебышева для численного решения одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений	56
Репников В. И. К анализу свойств согласованности дифференциальной и разностной задач в системном случае	57
Роговцов Н. Н. Многочленные асимптотики для функции Грина уравнения переноса излучения	58
Рогозин С. В., Дубатовская М. В. О дифференцировании многопараметрической функции Ле Руа относительно параметров	58
Рогозин С. В., Примачук Л. П., Дубатовская М. В. Задача R-линейного сопряжения в параболическом случае	59
Ситник С. М. Применение тождества Гильберта для резольвент к вычислению некоторых интегралов от специальных функций	60
Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерное Н-преобразование и его модификации в весовых пространствах измеримых по Лебегу функций	61
Слиняков П. А. Нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения и возможность их аналитического решения	63
Столярчук И. И. Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с дифференциальными полиномами в граничных условиях	64
Суслов К. В. Уравнения равновесия в усилиях для пятислойного стержня	64
Фалейчик Б. В. Монотонные аппроксимации экспоненты для численного решения жестких задач	65
Фролова Е. В. О разрешимости частно-интегрального уравнения со слабой особенностью в $C(D)$	66

Хартовский В. Е. К вопросу стабилизации гибридных линейных непрерывно-дискретных систем.....	67
Хартовский В. Е., Урбан О. И. К вопросу финитной стабилизации систем нейтрального типа по наблюдаемому выходу	68
Хвоцинская Л. А. О представлении решения проблемы Римана в терминах функции Хейна.....	69
Цехан О. Б. Об асимптотической аппроксимации решений одного класса сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием	70
Чеб Е. С. Граничная задача для одного гиперболического уравнения четвертого порядка со смешанными граничными условиями.....	71
Чехменок Т. А. О разрешимости модельной однородной степенной краевой задачи с допустимыми нулями на контуре	72
Шилин А. П. Явное решение интегро-дифференциального уравнения первого порядка с коэффициентами в виде некоторых сумм	73

**Об одном классе систем двух обыкновенных
дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве**
Т. К. Андреева, И. П. Мартынов, В. А. Пронько (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим дифференциальную систему

$$x^{(r)} = a_0 y^k + a_1 y^{k-1} + \dots + a_k, \quad y^{(s)} = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n, \quad (1)$$

где $x^{(r)} = \frac{d^r x}{dz^r}$, $y^{(s)} = \frac{d^s y}{dz^s}$, x, y — комплекснозначные функции от z , z — независимая комплексная переменная, a_i , $i = \overline{0, k}$, b_j , $j = \overline{0, n}$ — аналитические функции по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$, $r, s, k, n \in \mathbb{N}$.

Найдем необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы (1) при $r + s \leq 5$, укажем в каких функциях выражаются решения полученных систем.

При $k = n = 1$ система (1) является линейной, а значит обладает свойством Пенлеве [1, с. 36]. В [2] получены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у системы (1) при $r = s = 1$, $k = n = 2$.

Используя метод малого параметра Пенлеве, Пенлеве-анализ полиномиальных дифференциальных уравнений второго и высших порядков, доказана

Теорема. Для наличия свойства Пенлеве у системы (1) при $r + s \leq 5$ необходимо, чтобы с точностью до обозначения переменных она имела один из видов:

$$x' = a_0 y + a_1, \quad y' = b_0 x^2 + b_1 x + b_2; \quad (2)$$

$$x' = a_0 y + a_1, \quad y' = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3; \quad (3)$$

$$x' = a_0 y^2 + a_1 y + a_2, \quad y' = b_0 x^2 + b_1 x + b_2. \quad (4)$$

Найдены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у систем (2), (3). Заметим, что система (2) содержится в [3]. В [2] получены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у системы (4).

Установлено, что решения полученных систем выражаются либо через эллиптические функции, либо через решения первого или второго уравнений Пенлеве.

В докладе также обсуждается Пенлеве-анализ системы (1) порядка выше пяти.

Литература

1. Голубев В.В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*. М.: ГИТТЛ (1950).
2. Яблонский А.И. Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических особых точек. *Дифференц. уравнения* Т. 2, No. 3 (1966), 752–762.
3. Лукашевич Н.А., Мататов В.И. Системы второго порядка без подвижных критических особых точек. *Дифференц. уравнения* Т. 9, No. 3 (1973), 449–455.

**Аналитическое исследование уравнения меридианной кривой
осесимметричной односвязной свободной поверхности вращающейся капли**
Е. В. Авдейчик (Минск, Беларусь)

В работе рассматривается относительный покой жидкости, расположенной на верхней стороне вращающейся горизонтальной плоскости в однородном поле силы тяжести, направленной вертикально вниз. При этом линия действия вектора угловой скорости совпадает с осью вращательной симметрии слоя и пересекает его. На границе жидкости

и газа имеет место поверхностное натяжение. Форма равновесной свободной поверхности определяется формулой Лапласа, откуда следуют дифференциальные уравнения соответствующей меридианной кривой [1–3].

В ходе исследования аналитически рассчитаны точные границы диапазонов, в которых расположены решения данных уравнений, а также найдены минимальные и максимальные возможные значения различных характеристик капли при заданных входных параметрах. В частности, проведён анализ связи между числом Бонда и критической кривизной прогиба в центре слоя при постоянном числе Вебера.

В работе [2] осуществлено качественное исследование соответствующих меридианых кривых, например, доказано наличие не более одной точки перегиба на них. В статьях [2, 3] произведено численное решение дифференциальных уравнений равновесия, на основании чего в [3] представлены зависимости между различными параметрами задачи, полученные путём интерполяции конечного набора точек, найденных с помощью численных методов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Энергетические и ядерные процессы и технологии” (подпрограмма “Энергетические процессы и технологии”, задание 2.11 “Волновые течения капиллярных струй, слоев, пленок в центробежных, постоянных и переменных температурных полях и их применение в технологических процессах”).

Литература

1. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Гидромеханика невесомости. Под редакцией А.Д. Мышкиса*. М.: Наука (1976).
2. Авдейчик Е.В., Конон П.Н., Могилевский Е.И. Аналитическое и численное исследование форм равновесия ограниченного объёма жидкости на вращающемся горизонтальном основании. *Механика машин, механизмов и материалов*. Т. 51, No. 2 (2020), 91–96.
3. Авдейчик Е.В., Конон П.Н. Численное исследование относительного равновесия капли с односвязной свободной поверхностью на вращающейся плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. No. 3 (2022), 79–90.

Волновые пакеты в слоистой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил И. В. Авдошка (Минск, Беларусь)

Рассмотрим задачу о движении тонкой некруговой цилиндрической оболочки, состоящей из N слоев, подверженной воздействию внешних сил. В работе [1] с использованием гипотез, введенных в [2], были получены уравнения для исследования устойчивости оболочки. В настоящей работе используются аналогичные уравнения для случая движения оболочки с учетом воздействия внешних сил [3]. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4(1 - \varepsilon^3\tau\Delta)\Delta^2\chi - k(\varphi)\frac{d^2F}{ds^2} + \varepsilon^2\Delta_t(1 - \varepsilon^2\kappa\Delta)\chi + \varepsilon^2\frac{d^2}{dt^2}(1 - \varepsilon^2\kappa\Delta)\chi &= 0, \\ \varepsilon^4\Delta^2F + k(\varphi)\frac{d^2}{ds^2}(1 - \varepsilon^2\kappa\Delta)\chi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Delta z = \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{d^2z}{d\varphi^2}$, $\Delta_t z = \frac{d}{d\varphi} \left(t_2 \frac{dz}{d\varphi} \right) + \frac{d}{ds} \left(t_3 \frac{dz}{d\varphi} \right) + \frac{d}{d\varphi} \left(t_3 \frac{dz}{ds} \right) + \frac{d}{ds} \left(t_1 \frac{dz}{ds} \right)$. Здесь F и χ — функции напряжений и перемещений, s, φ — безразмерные продольная и окружная

координаты соответственно, t — время, $t_1(s, \varphi), t_2(s, \varphi), t_3(s, \varphi)$ — безразмерные мембранные усилия [3], ε — естественный малый параметр. Параметры κ, τ вводятся в [2] и учитывают поперечные сдвиги слоев друг относительно друга.

Предполагается, что оболочке сообщаются начальные скорости и перемещения, локализованные в окрестности нулевой образующей. На краях оболочки $s = s_1(\varphi), s = s_2(\varphi)$ заданы условия шарнирного опирания.

Решение поставленной задачи строится с использованием асимптотического комплексного ВКБ-метода [4] в виде суперпозиции n волновых пакетов, локализованных в окрестности подвижной образующей $\varphi = q_n(t)$.

Условия разрешимости задач, получаемых в первом, втором и третьем приближениях соответственно, дают относительно простые дифференциальные уравнения, описывающие связь основных динамических характеристик n -го волнового пакета. Их численное решение позволяет изучить влияние различных параметров задачи на движение волновых пакетов по поверхности оболочки.

Литература

1. *Mikhasev G., Seeger F., Gabbert U.* Local Buckling of Composit Laminated Cylindrical Shells with Oblique Edges under External Pressure: Asymptotic and Finite Element Simulations. *Technische Mechanik*. Band 21, Heft 1 (2001), 1–12.
2. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин. М.: Машиностроение (1988).
3. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит (1995).
4. *Михасев Г.И.* Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями. *Прикл. мат. и мех.* Т. 60, No. 4 (1996), 635–643.

Об ограниченности частно-интегрального оператора типа потенциала в весовом анизотропном пространстве Лебега И. В. Барышева (Липецк, Россия)

Пусть $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n-m}$ — евклидово пространство и $x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}})$, где $x_\alpha \in \mathbb{R}_m$, $x_{\bar{\alpha}} \in \mathbb{R}_{n-m}$ ($1 \leq m \leq n$), а $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$.

Обозначим через $L_{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}(x)}(\mathbb{R}_n)$ весовое анизотропное пространство Лебега, где мультииндекс $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p_i > 1$, $\mathbf{w}(x) = (w_1(x_1), \dots, w_n(x_n))$, $w_i(x_i) > 0$ ($i = \overline{1, n}$), норма в котором определяется равенством $\|u\|_{L_{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}(x)}(\mathbb{R}_n)} = \left(\int_{\mathbb{R}_1} \left(\int_{\mathbb{R}_1} \dots \left(\int_{\mathbb{R}_1} |u(x)|^{p_1} w_1(x_1) dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots w_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} w_n(x_n) dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}$. Если $w_i(x_i) \equiv 1$ ($i = \overline{1, n}$), то получим анизотропное пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}_n)$ [1, с. 9].

Частно-интегральным оператором (ЧИ-оператором) в $\mathbb{R}_n$, отвечающем ядру κ , называется выражение $(K_\alpha^{(m)} u)(x) = \int_{\mathbb{R}_m} \kappa(x; t_\alpha) u(t_\alpha; x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha$, где $x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}})$ и $1 \leq m \leq n$. Оператор

$$(K_m^{(\lambda)} u)(x) = \int_{\mathbb{R}_m} \frac{k(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\lambda} u(t_\alpha; x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha, \quad \lambda < m. \quad (1)$$

называется ЧИ-оператором типа потенциала Рисса. В частном случае при $m = n$ оператор (1) является классическим интегральным оператором типа потенциала (см. [2]). Обычно для ЧИ-оператора справедливо правило Калитвина–Ляхова ограниченности действия в анизотропном пространстве $L_{\mathbf{p}}$ [3, с. 44], [4].

Теорема. Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\nu > 0$ и функции $u(t_\alpha; x_\alpha) \in L_{(p,p^2)}(\mathbb{R}_m, \mathbb{R}_{n-m})$, $k(x; t_\alpha) \in L_{(p, pp', pp')}^{(w_1(x_\alpha), w_2(x_\alpha), w_3(t_\alpha))}(\mathbb{R}_m, \mathbb{R}_{n-m}, \mathbb{R}_m)$. Тогда при $\frac{m}{(p')^2} - \nu < \lambda < \frac{m}{(p')^2}$ $\|K_m^{(\lambda)} u\|_{L_p(\mathbb{R}_n)} \leq A \|u\|_{L_{(p,p^2)}(\mathbb{R}_m, \mathbb{R}_{n-m})} \|k\|_{L_{(p, pp', pp')}^{(w_1(x_\alpha), w_2(x_\alpha), w_3(t_\alpha))}(\mathbb{R}_m, \mathbb{R}_{n-m}, \mathbb{R}_m)}$, где $w_2(x_\alpha) \equiv 1$, $w_3(t_\alpha) = (|t_\alpha|^2 + 1)^{\frac{\nu p'}{2}}$, $w_1(x_\alpha) = \begin{cases} (|x_\alpha|^2 + 1)^{-\frac{\lambda p}{2}}, & \nu(p')^2 > m, \\ (|x_\alpha|^2 + 1)^{-\frac{\lambda p}{2}} (1 + \ln(|x_\alpha|^2 + 1))^{\frac{p}{2(p')^2}}, & \nu(p')^2 = m, \\ (|x_\alpha|^2 + 1)^{-\frac{p(\lambda - \nu + m/(p')^2)}{2(p')^2}}, & \nu(p')^2 < m. \end{cases}$

Литература

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука (1975).
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука (1974).
3. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ (2000).
4. Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I., Trusova N.I. About Fredholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$. *Jornal of Mathematical Sciences*. Vol. 251. № 6. (2020), 839–849.

Неединственность решений обратной задачи теплопроводности В. Т. Борухов, Г. М. Заяц (Минск, Беларусь)

Рассмотрена обратная задача теплопроводности

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (0, b), \quad t \in (0, t_f), \quad (1)$$

$$T(x, 0) = \bar{T}(x), \quad x \in [0, b], \quad T(0, t) = g_1(t), \quad T(b, t) = g_2(t), \quad t \in [0, t_f], \quad (2)$$

$$T(x_*, t) = \tilde{T}(t), \quad x_* \in (0, b), \quad t \in [0, t_f], \quad (3)$$

в которой неизвестным, помимо температуры $T(x, t)$, является коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$.

Согласно критерию Фролова [1] задача восстановления луча $\{kc(T), k\lambda(T) | k > 0\}$ по температурному полю T имеет неединственное решение тогда и только тогда, когда функция T имеет вид бегущей волны

$$T(x, t) = u(f_1), \quad f_1(x, t) = x + h_1 t + h_2, \quad h_1, h_2 - \text{const},$$

либо имеет автомодельное представление

$$T(x, t) = u(f_2), \quad f_2(x, t) = \frac{x + h_1}{(h_2 - t)^{1/2}} + h_3, \quad h_1, h_2, h_3 - \text{const}, \quad h_2 - t_f > 0.$$

Теорема. Пусть правые части равенств (2), (3) имеют вид

$$\bar{T}(x) = u(f(x, 0)), \quad g_1(t) = u(f(0, t)), \quad g_2(t) = u(f(b, t)), \quad \tilde{T}(t) = u(f(x_*, t)),$$

где $u(f)$ — строго монотонная функция, $f(x, t) = f_1(x, t)$ либо $f(x, t) = f_2(x, t)$. Тогда решение обратной задачи (1)–(3) неединственно и задается формулой

$$\lambda(T) = \frac{1}{u'(u^{-1}(T))} \left(h_1 \int_{f_{01}}^{u^{-1}(T)} c(u(s)) u'(s) ds + l \right)$$

либо формулой

$$\lambda(T) = \frac{1}{u'(u^{-1}(T))} \left(\frac{1}{2} \int_{f_{02}}^{u^{-1}(T)} c(u(s)) u'(s) (s - h_3) ds + l \right),$$

где l — произвольный параметр, $f_{0i} = \min_{(x,t) \in \partial\Omega} \{f_i(x,t)\}$, $i \in \{1, 2\}$, $\partial\Omega$ — граница области определения температурного поля T .

Литература

1. Frolov V.V. Uniqueness theorems for the solution of the inverse problem of heat conduction. *J. Eng. Phys. Thermophys.* V. 29 (1) (1975) 923–927.

Влияние геометрических параметров слуховой трубы на аэрацию полостей среднего уха

С. М. Босяков, Е. Л. Малец, Л. Г. Петрова (Минск, Беларусь)

Врожденные расщелины неба являются одним из наиболее распространенных врожденных пороков развития челюстно-лицевой области, характеризующийся множеством патологических симптомокомплексов, среди которых ведущее значение занимает патология среднего уха с нарушением слуховой функции, связанного с возникновением отрицательного давления в барабанной полости. Целью настоящей работы является конечно-элементное моделирование распределения воздуха в евстахиевой трубе, барабанной полости среднего уха, а также в сосцевидном отростке при различных геометрических параметрах, соответствующих патологическим изменениям, связанным с наличием расщелины неба.

Комплексные трехмерные модели, включающие сосцевидный отросток, барабанную полость, колебательную систему среднего уха и евстахиевую трубу, разработаны для детей двух и двенадцати лет на основании томографических данных. При этом учтены анатомически корректные показатели для указанных возрастов, соответствующие состоянию в норме и различным патологическим состояниям [1]. Расчет линий тока и распределений давления воздуха в евстахиевой трубе, барабанной полости и сосцевидном отростке выполнялся в конечно-элементном пакете ANSYS Fluent 2023 R1 при начальной скорости воздуха 15 м/с, подаваемого в евстахиевую трубу в назофарингальной области (направление скорости воздуха перпендикулярно плоскости поперечного сечения). В слуховой трубе, барабанной полости и сосцевидном отростке задавалось начальное давление, равное нормальному атмосферному давлению 760 мм ртутного столба.

Расчет распределения давления и линий тока воздуха в сосцевидном отростке, барабанной полости и евстахиевой трубе осуществлялся для случаев в норме, при патологии проходимости евстахиевой трубы, уменьшающей величины полуосей эллиптических поперечных сечений на трех различных уровнях трубы в два, три и десять раз, патологии сосцевидного отростка, приводящей к уменьшению площади его поверхности на 30% по отношению к площади поверхности в норме. Полученные результаты могут быть использованы при планировании хирургического лечения хронического среднего отита у пациентов детского возраста с врожденной расщелиной неба.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.7.1.4 “Разработка дифференциальных и дробно-дифференциальных методов и их применение к моделированию сложных биомеханических и экономических систем” Государственной программы научных исследований “Конвергенция–2025”.

Литература

1. Monsour S., Magnan J., Haidar H., Nocolas K., Louryan S. *Comprehensive and clinical anatomy of the middle ear*. Springer Berlin, Heidelberg (2013)

Биомеханическое моделирование реакции нижней челюсти с установленным полным протезом на жевательную нагрузку С. М. Босяков, Д. В. Назаренко, С. П. Рубникович (Минск, Беларусь)

При тотальном отсутствии зубов нижней челюсти полные протезы с фиксацией на имплантатах позволяют эффективно восстановить жевательную функцию. При этом установка протеза может осуществляться на различное количество имплантатов для того, чтобы избежать болевых ощущений в слизистой оболочке, а также смещения и микровращений самого протеза. Целью настоящей работы является определение напряженно-деформированного состояния нижней челюсти под действием жевательной нагрузки на полный протез нижней челюсти, установленный на различное количество имплантатов.

Конечно-элементная модель нижней челюсти с полным протезом параметризована по толщинам слизистой оболочки и слоя кортикальной костной ткани. Протез фиксируется на двух, четырех или шести сферических имплантатах.

Предполагалось, что имплантаты полностью остеоинтегрированы в костную ткань и компоненты имплантатов корректно затянуты. Конечно-элементное разбиение модели выполнено в автоматическом режиме. Размер ребра конечного элемента для всех компонентов зубочелюстной системы и имплантата равен 1,0 мм и 0,3 мм соответственно. Физико-механические свойства для элементов модели задавались в соответствии с данными работы [1]. Прикладываемая к протезу нагрузка и граничные условия имитировали действие мышечных сил, соответствующие физиологической жевательной нагрузке [2, 3]. В результате конечно-элементного расчета установлено, что наиболее неблагоприятным для пациента является установка полного протеза на четыре имплантата, поскольку в этом случае для пережевывания одних и тех же продуктов питания необходимо прикладывать большие по величине мышечные силы по сравнению со случаями установки полного протеза на два или шесть имплантатов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.7.1.4 “Разработка дифференциальных и дробно-дифференциальных методов и их применение к моделированию сложных биомеханических и экономических систем” ГПНИ “Конвергенция–2025”.

Литература

1. Moldoveanu S.A.B., Munteanu F., Forna N.C. Impact of implant-retained mandibular overdenture on oral mucosa — a finite element analysis. *Roman. J. Oral Rehabilitat.* Vol. 12 (2020), 6–12.

2. Cruz M., Wassall T., Toledo E.M., Barra L.P., Lemonge A.C. Three-dimensional finite element stress analysis of a cuneiform-geometry implant. *Int. J. Oral Maxillofac. Impl.* Vol. 18 (2003), 675–684.

3. Daas M., Dubois G., Bonnet A.S., Lipinski P., Rignon-Bret C. A complete finite element model of a mandibular implant-retained overdenture with two implants: Comparison between rigid and resilient attachment configurations. *Med. Eng. Phys.* Vol. 30 (2008), 218–225.

Решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных сверток интегральных преобразований

Л. Е. Бритвина (Великий Новгород, Россия)

Математические модели физических, биологических, технологических, экономических и других процессов в большинстве своём опираются на теорию дифференциальных уравнений. В основе построения таких моделей лежит научный анализ эмпирических данных, с помощью которого осуществляется попытка описания процессов с учётом различных факторов, влияющих на них.

С математической точки зрения огромную роль в подобных задачах моделирования играет разработка методов решения различного типа уравнений. Решения большого количества линейных дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, представимы в виде сверточных конструкций. Обычно рассматриваются классические свёртки, связанные с наиболее изученными преобразованиями: Фурье, Лапласа и Меллина. Значительно реже используются преобразования со специальными функциями в ядре, в частности, преобразование Ханкеля.

В докладе дается обзор двух подходов к введению понятия обобщённой свёртки, приводятся примеры обобщённых свёрток, обсуждаются условия их существования. Основной акцент делается на обобщённые свёртки, связанные с дифференциальным оператором Бесселя. Данные конструкции позволяют находить фундаментальные решения задач с осевой симметрией.

На основе введенного понятия обобщённой свёртки даётся общий подход к решению уравнений методом интегральных преобразований и описываются особенности применения данного подхода для решения дифференциальных уравнений.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке федерального проекта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по программе создания и развития Передовой инженерной школы “Распределенные системы управления технологическими процессами”.

Опыт внедрения ДОП “Математические основы анализа медицинских данных” в НовГУ

Л. Е. Бритвина (Великий Новгород, Россия)

Значительные объемы данных, разнообразных как по формату и качеству представления, так и по возможностям их анализа в настоящее время собираются в медицине. Математический аппарат широко применяется для решения классификационных и диагностических задач, поиска закономерностей и причинно-следственных связей, проверки научных гипотез. Развитие математических методов, методов машинного обучения и анализа больших данных с одной стороны открывает новые перспективы, связанные с анализом медицинских данных, с другой стороны повышает уровень требований к математической подготовке специалистов, занимающихся непосредственно данным анализом.

При составлении программы дополнительного образования “Математические основы анализа медицинских данных” учитывались современные тенденции в области анализа данных, материально-техническое и программное обеспечение, которым располагает образовательное учреждение, и особенности собираемых медицинских данных.

Программа дополнительного образования “Математические основы анализа медицинских данных” реализуется в Новгородском государственном университете имени Ярослава Мудрого (НовГУ), начиная с весеннего семестра 2022–2023 учебного года. В

апробации программы приняли участие магистранты первого и второго года обучения направления подготовки 09.04.01 “Информатика и вычислительная техника”. В настоящее время готовятся материалы для создания сопровождающего курса на платформе дистанционного обучения НовГУ (<https://do.novsu.ru/>).

В докладе будут представлены особенности программы дополнительного образования, её возможности, используемые технологии и основные направления развития. Рассматриваются также трудности, выявленные на этапе апробации, и предлагаются возможные пути их преодоления. Акцент будет сделан на раздел программы, посвященный понятиям и методам математического анализа.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по программе создания и развития центра мирового уровня “Цифровой биодизайн и персонализированное здравоохранение” в рамках проекта № 075-15-2022-306.

Теорема о среднем для К-гармонических функций
Ю. Н. Булатов (Елец, Россия), С. А. Рощупкин (Елец, Россия),
Е. Л. Санина (Воронеж, Россия)

Пусть $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : (x_1 > 0, \dots, x_n > 0)\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)\}$. И пусть мультииндекс $-\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n)$ имеет фиксированные отрицательные параметры: $-1 < -\gamma_i < 0$. Сингулярный дифференциальный оператор $\Delta_{B-\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}$, $B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\gamma_i > 0$, называется оператором Киприянова [1]. Рассмотрим область $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ и часть этой области $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}_n^+$, граница которой состоит из двух частей $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^o \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$. Граница $\partial\Omega = \Gamma$ предполагается гладкой в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^o$ ([2], §3.1) и функции из области Ω^+ должны иметь гладкое четное продолжение через границу Γ^o по отношению к каждой координате x_i ([2], с. 21).

Определение. Функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ называется К-гармонической функцией в области Ω^+ , если $\Delta_{B-\gamma} u = 0$ в каждой точке Ω^+ .

Введем оператор $\mathbb{T}$ -сдвига: $\mathbb{T}^y = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i}$, где

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma_i+2}{2})} \int_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} f\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}\right)}{\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}\right)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i.$$

Из равенства (см. [3], лемма 2') $\Delta_{B-\gamma} \mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^y \Delta_{B-\gamma} f(x)$, вытекает, что функции f и $\mathbb{T}^y f(x)$ одновременно К-гармонические.

Теорема. Пусть функция $u(x)$ является К-гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ — n -полусфера радиуса r с центром в начале координат, целиком лежащая в Ω^+ . Тогда

$$u(x) = \frac{1}{|S_r^+(n)|_\gamma} \int_{S_r^+(n)} \mathbb{T}^y u(x) y^{-\gamma} dS_r(y).$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения. *Дифф. уравнения*. Т. 56. No. 12 (2020), 1610–1620.
2. Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи*. М.: Наука (1997).
3. Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рошупкин С.А., Санина Е.Л. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова. *Дифф. уравнения*. Т. 59. No. 4 (2023), 483–493.

Наличие свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка специального вида Т. Н. Ванькова, Л. В. Детченя, В. М. Пецевич (Гродно, Беларусь)

На предмет наличия свойства Пенлеве рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$x'^2 = (\alpha_1 x + \alpha_2)(xy^2 + K_2 xy + K_1 y), \quad y'^2 = xy^2 + K_2 xy + K_1 y, \quad (1)$$

где

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad K_1 \neq 0, \quad (2)$$

x, y — неизвестные функции независимой переменной t , α_1, α_2 — аналитические функции переменной t , K_1, K_2 — некоторые постоянные.

Система (1) является частным случаем системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + \\ &\quad + a_{11}x + a_{10})y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ y'^2 &= (b_{41}y^4 + b_{31}y^3 + b_{21}y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0$, $|b_{41}| + |b_{31}| + |b_{21}| + |b_{11}| + |b_{01}| \neq 0$, a_{ij}, b_{kl} — аналитические функции переменной t .

Система (3), когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$, рассматривалась в [1]. Случай, когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = 0$, $b_{11} \neq 0$, рассматривался в [2]. Случай, когда $|b_{41}| + |b_{31}| \neq 0$, рассматривался в [3].

Система (1) является одной из 7 систем, которые удовлетворяют необходимым условиям наличия свойства Пенлеве у системы

$$\begin{aligned} x'^2 &= (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + \\ &\quad + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ y'^2 &= (y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00}, \end{aligned}$$

где $|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0$ [4]. В [4] система (1) имеет обозначение (4).

Некоторые из систем, полученных в [4], рассматривались в [5], [6]. В [5] рассматривалась система из [4], которая имеет обозначение (7); в [6] рассматривалась система из [4], которая имеет обозначение (10).

Выразив из второго уравнения системы (1) функцию x и подставив в первое уравнение, относительно функции y построим дифференциальное уравнение второго порядка второй степени относительно производной. Используя некоторые леммы из [7], [8], метод малого параметра, метод резонансов, тест Пенлеве, метод сравнения полученных уравнений с уравнениями, аналитические свойства решений которых известны, покажем что справедлива

Теорема. Для того чтобы дифференциальная система (1) при условии (2) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием неизвестных функций x , y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов:

$$\begin{aligned}x'^2 &= H_1(x + H_2)(xy^2 + K_2xy + K_1y), \quad y'^2 = xy^2 + K_2xy + K_1y, \\x'^2 &= H_1e^{H_2t}(xy^2 + K_2xy + K_1y), \quad y'^2 = xy^2 + K_2xy + K_1y,\end{aligned}\tag{4}$$

где H_1 , H_2 , K_1 , K_2 — некоторые постоянные, и при этом $H_1 \neq 0$, $K_1 \neq 0$.

Решения дифференциальной системы (4) выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве.

Литература

1. Ванькова Т.Н., Детченя Л.В., Пецевич В.М., Селивёрстова А.О. Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка без подвижных критических особенностей. *Проблемы физики, математики и техники*. № 4(37) (2018), 62–65.
2. Белько О.Н., Ванькова Т.Н., Пецевич В.М. Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве. *Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы*. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Т. 10. № 3 (2020), 42–49.
3. Детченя Л.В., Кулеш Е.Е., Пецевич В.М. Необходимые условия наличия свойства Пенлеве для системы дифференциальных уравнений второго порядка второй степени специального вида. *Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы*. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Т. 10. № 2 (2020), 30–35.
4. Детченя Л.В., Кулеш Е.Е., Пецевич В.М. Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка. *Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям* : материалы Междунар. математической конф., Минск, 1-4 июля 2021 г. — Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, (2021), 59–60.
5. Детченя Л.В., Кулеш Е.Е., Пецевич В.М. Свойство Пенлеве для дифференциальной системы специального вида. *Еругинские чтения - 2023*. : материалы Междунар. науч. конф. Могилев, 23 - 27 мая 2023 г. Могилев : Белорусско-Российский ун-т, (2023), 11–13.
6. Ванькова Т.Н., Кулеш Е.Е., Пецевич В.М. Свойство Пенлеве для одной дифференциальной системы второго порядка. *Еругинские чтения - 2022*. : материалы Междунар. науч. конф. Новополоцк, 31 мая – 3 июня 2022 г. Новополоцк : Полоцкий гос. ун-т, (2022), 5–7.
7. Пецевич В.М., Пронько В.А. Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени. *Проблемы физики, математики и техники*. № 2(35) (2018), 69–75.
8. Пецевич В.М., Шевченя Д.Н. Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка. *Проблемы физики, математики и техники*. № 1(26) (2016), 48–51.

Об особенностях развития транспортных систем Е. И. Васенкова (Минск, Беларусь)

Глобальные научно-технологические тренды последних десятилетий существенно усилили роль транспортных систем в социально-экономическом развитии государств, поэтому ориентированность на эффективные транспортные системы становится одним из определяющих факторов развития инфраструктуры конкурентных товарных рынков. Анализируя мировые тенденции изменения транспортных систем, можно увидеть

их интенсивное развитие на протяжении последних десятилетий, что связано как с достижениями научно-технического прогресса, появлением передовой техники и технологий, так и с изменением транспортёмкости мирового хозяйства, необходимостью решения транспортных проблем, повышением требований к качеству, комфорту и безопасности транспортных услуг [1].

В качестве основных изменений, произошедших в транспортном комплексе, можно выделить следующие:

- развитие мультимодальных и интермодальных систем перевозки грузов;
- формирование транспортно-логистических структур, включающих различного рода терминалы, транспортно-складские комплексы, распределительные центры и т.п.;
- формирование и развитие интеллектуальных транспортных систем с использованием новейших информационно-управленческих технологий;
- развитие скоростного и высокоскоростного сообщения (в том числе железнодорожного, автомагистралей с усовершенствованным покрытием);
- появление инновационных транспортных средств (например, высокопроизводительных инновационных грузовых вагонов, быстроходных судов, электромобилей и др.).

Для современного этапа развития транспортных систем характерен ряд особенностей, которые определяют перспективные направления их развития. Наряду с различного рода политическими, социальными, естественно-географическими, экономическими, научно-техническими факторами, оказывающими огромное влияние на тенденции развития транспортных систем, в настоящее время определяющими факторами становятся глобальные тренды экономики будущего, формирующие новые вызовы и возможности. К их числу на данном этапе относятся:

1. Прорывные технологии, приводящие к глубинным технологическим изменениям в различных отраслях экономики и сферах жизнедеятельности и способные существенно преобразовать экономические и социальные аспекты жизни общества, существующие бизнес-модели, облик рынков, отраслей и мировой экономики в целом.

2. Цифровизация экономики и общества, предусматривающая социально-экономическую трансформацию в результате внедрения и использования цифровых технологий, позволяющих осуществлять сбор и обработку данных с возможностью последующего обмена и передачи информации.

3. Процессы урбанизации — пространственного развития городских территорий, в том числе на основе стратегической концепции “умный город” (smart city), представляющей собой взаимосвязанную систему современных технологических, информационных и коммуникационных решений, направленных на эффективное управление процессами жизнеобеспечения и жизнедеятельности города и его устойчивое развитие в современных условиях.

4. Глобальная проблема дефицита ресурсов (ресурсообеспечения) и экологических угроз, требующая обеспечения рационализации природопользования, повышения эффективности использования ресурсов, реализации мероприятий по ресурсозамещению и сохранению окружающей среды, в том числе направленных на развитие экономики и социальной сферы учетом неразрушающего окружающую среду воздействия.

5. Изменения в восприятии потребителем процесса перевозки в сторону его оценки с позиции ценности, когда представление о прогнозируемой ценности конкретного продукта транспортной услуги (перевозка пассажиров, грузов, доставка товаров и т.п.) формируется исходя из трех критериев — “лучше, дешевле, быстрее”, позволяющих одновременно оценить качество, стоимость и скорость перевозки.

Транспортная отрасль подвержена наибольшему влиянию новейших технологий развития высоких скоростей, что определяет новые возможности в развитии транспортных

систем с учетом потребностей экономики, бизнеса и населения [2]. Транспортные технологии и автоматизация не только меняют способы передвижения людей и товаров, но и создают новые возможности для бизнеса по повышению эффективности, производительности и удовлетворенности клиентов. Транспортные технологии также создают некоторые проблемы и риски, которые необходимо решать и смягчать (например, проблемы кибербезопасности и конфиденциальности могут поставить под угрозу безопасность и надежность транспортных систем и данных).

Литература

1. Новикова И.И., Павлов Я.П. Мировые тенденции развития интеллектуальных транспортных систем // Экономика и бизнес: теория и практика. (2023). № 9(103) (электронный ресурс). - Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/mirovye-tendentsii-v-razvitii-intellektualnyh-transportnyh-sistem>.
2. Топ-15 технологий транспорта и логистики (электронный ресурс). - Режим доступа: <https://issek.hse.ru/news/584505379.html>.

Численное исследование влияния угла контакта на равновесные формы магнитной жидкости

А. В. Герасимова, О. А. Лаврова, В. К. Полевилов (Минск, Беларусь)

Задача феррогидростатики о равновесных формах свободной поверхности магнитной жидкости формулируется в меридиональной плоскости цилиндрической системы координат, см. Рис. 1 (слева): магнитная жидкость расположена на горизонтальной плоскости при $z = 0$ и контактирует с твердыми поверхностями проводника и горизонтальной плоскости под углами α_1 и α_2 , соответственно. Проводник с силой тока I и радиусом R_0 генерирует магнитное поле с напряженностью $H = I/(2\pi r)$, что приводит к вытягиванию жидкости вдоль проводника при увеличении силы тока.

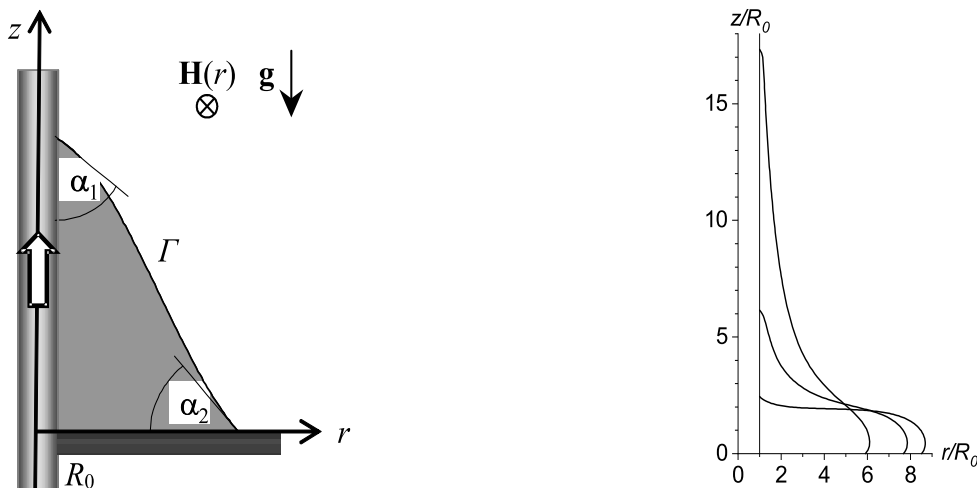


Рис. 1: Слева: постановка задачи; справа: расчеты при $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 135^\circ$.

Следуя подходу в [1], математическая модель формулируется с помощью дифференциальных уравнений для функций $R(s)$, $Z(s)$, $\beta(s)$, где (R, Z) является параметрическим описанием поверхности Γ по длине дуги $0 < s < \ell$,

$$R' = \cos \beta, \quad R(0) = R_0; \quad Z' = \sin \beta, \quad Z(\ell) = 0; \quad (1)$$

$$\beta' = F, \quad \beta(0) = \alpha_1 - \frac{\pi}{2} \text{ для } \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \beta(0) = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \text{ для } \alpha_1 > \frac{\pi}{2}, \quad \beta(\ell) = -\alpha_2, \quad (2)$$

$F = F(\beta, R, Z, H)$. Вычислительный алгоритм строится по аналогии с алгоритмом в [1]: конечно-разностная аппроксимация краевой задачи (1)–(2); линеаризация с введением параметра релаксации; рекуррентные расчеты сначала для переменной β , затем для R и Z . В работе осуществлен сравнительный анализ равновесных форм поверхности Γ для различных значений углов контакта.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, шифр задания 1.4.01.4.

Литература

1. Beresnev S., Polevikov V., Tobiska L. Numerical study of the influence of diffusion of magnetic particles on equilibrium shapes of a free magnetic fluid surface. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* No. 14 (2009), 1403–1409.

Blow-up problem for a parabolic equation with nonlinear memory and absorption under nonlinear nonlocal boundary condition

A. L. Gladkov (Minsk, Belarus)

We consider nonlinear nonlocal parabolic equation

$$u_t = \Delta u + a \int_0^t u^q(x, \tau) d\tau - bu^m, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

with nonlinear nonlocal boundary condition

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

and initial datum

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

where a, b, q, m, l are positive numbers, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ for $N \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, ν is unit outward normal on $\partial\Omega$.

Throughout this paper we suppose that the functions $k(x, y, t)$ and $u_0(x)$ satisfy the following conditions:

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad k(x, y, t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \text{ on } \partial\Omega.$$

The initial boundary value problem (1)–(3) with $a = 0$ has been considered in [1, 2].

We prove finite time blow-up results for solutions with large initial data as well the global existence of solutions for any initial data.

The results of the talk will be published in “Lobachevskii Mathematical Journal”.

References

1. Gladkov A., Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal Neumann boundary condition. *Commun. Pure Appl. Anal.* Vol. 16 (6) (2017), 2053–2068.
2. Gladkov A. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with absorption and nonlinear nonlocal boundary condition. *Lith. Math. J.* Vol. 57 (4) (2017), 468–478.

Применение математического моделирования для оценки эффектов интеграции Е. Г. Господарик (Минск, Беларусь)

Целью настоящей работы является обзор использования математических моделей для оценки эффектов интеграции. Рассмотрены следующие модели: модели глобальной интеграции, модели сводных индексов измерения степени экономической интеграции в объединении, модели значимости интеграционного объединения в мире, межрегиональные модели интеграции на базе Леонтьевских «input-output», система моделей сравнительного анализа динамики скорости интеграции стран в региональное объединение, модель Data Envelopment Analysis (DEA) сравнительной оценки эффективности интеграционных объединений и выгоды их для отдельных стран [1], гравитационные модели взаимной торговли [2], эконометрические модели экономического роста стран с учетом интеграционных эффектов, регрессионные модели воздействия экономической интеграции на рост ВВП, модели оценки влияния интеграции на рост совокупной факторной производительности [3], модели коллективной экономической безопасности интеграционного объединения [4].

Предложенная модель измерения коллективной экономической безопасности интеграционного объединения требует дальнейших исследований для последующей практической имплементации.

Отличительная идея — это применить модели DEA для сравнительного анализа с другими объединениями эффективности интеграционных процессов с точки зрения выбранного результата. Данный метод может применяться также для анализа Парето-оптимальности интеграционных процессов у каждой из стран объединения.

Описанный математический инструментальный анализа эффектов региональных экономических объединений, разумеется, должен дополняться экономическим взглядом на исследуемые процессы.

Литература

1. Господарик Е.Г., Ковалев М.М. Математические модели рейтингового анализа. *Журн. Белорус. гос. ун-та. Экономика.* No. 2 (2023), 4–19.
2. Господарик Е.Г., Маенова Е.С. Эконометрические гравитационные модели взаимной торговли стран ЕАЭС. *Журн. Белорус. гос. ун-та. Экономика.* No. 2 (2021), 77–91.
3. Господарик Е.Г., Ковалев М.М. *ЕАЭС-2050: глобальные тренды и евразийская экономическая политика: моногр.* Минск: Изд. центр БГУ (2015).
4. Господарик Е.Г., Ковалев М.М. Коллективная экономическая безопасность ЕАЭС: постановка проблемы, индикаторы, сводный индекс. *Белорусский экономический журнал.* No. 2 (2022), 23–33.

Глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона с единственным предельным циклом обобщенной системы Рэлея А. А. Гринь, А. В. Кузьмич (Гродно, Беларусь)

Для вещественной автономной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y^{2n-1}, \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda \left(\frac{y^{2n+1}}{n(2n+1)} - c_0 y \right) \equiv Q(x, y, \lambda, n, c_0), \quad c_0 > 0, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

которая при $n = c_0 = 1$ представляет собой классическую систему Рэлея [1], решалась задача доказательства единственности предельного цикла на всей фазовой плоскости

при всех действительных значениях параметра λ . С этой целью аналитический подход к построению трансверсальных овалов, зависящих от параметра λ и образующих алгебраические границы глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Рэлея из работ [1, 2], был адаптирован к системе (1). Внутренняя граница найденного кольца A состоит из овала множества нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса, что доказывает наличие не более одного предельного цикла. Для нахождения внешней границы кольца предложена процедура нахождения многочлена, множество нулевого уровня которого содержит трансверсальный овал. Таким образом, получен следующий результат

Теорема. Система (1) имеет при всех λ единственный предельный цикл на фазовой плоскости, расположенный в кольце Пуанкаре–Бендиксона A , внутренней и внешней границами которого соответственно являются трансверсальные алгебраические овалы:

$$I_\lambda = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} : Q^2(x, y, \lambda, n, c_0) + \frac{y^{2n}}{n} - c_0 = 0 \right\},$$

$$O_\lambda = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} : Q^2(x, y, \lambda, n, c_0) + \lambda y \left(2c_0 - \frac{y^{2n}}{n(2n+1)} \right) Q(x, y, \lambda, n, c_0) + \right.$$

$$+ \frac{y^{2n}}{n} - \lambda^2 \left(\frac{(4n+3)c_0 y^{2n+2}}{n(2n+1)(2n+2)} - c_0^2 y^2 - \frac{y^{4n+2}}{2n^2(2n+1)^2} \right) - (6n+2)c_0 -$$

$$\left. - \frac{\lambda}{n} \sqrt[2n]{\frac{2n(2n+1)c_0}{3n+1}} \left(\frac{6n^2 c_0}{3n+1} \right)^{\frac{3}{2}} - 3\lambda^2 c_0^2 \sqrt[2n]{2n(2n+1)c_0} = 0 \right\}.$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф23У–008).

Литература

1. Grin A.A., Schneider K.R. Global algebraic Poincaré–Bendixson annulus for the Rayleigh equation. *Electron. J. Qual. Theory Diff. Eq.*, Vol. 35 (2023), 1–12.
2. Лу Ю., Гринь А.А., Кузьмич А.В. Уточненное глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона с предельным циклом системы Рэлея. *Дифференц. уравнения*. Vol. 60, No. 6 (2024), 736–749.

О вложимости множеств решений стационарных иерархий первого и второго уравнений Пенлеве В. И. Громак (Минск, Беларусь)

В настоящее время существует определенный интерес в изучении иерархий уравнений Пенлеве, которые являются бесконечными последовательностями нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально–алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, обладают симметриями, индуцированные преобразованиями Беклунда, и при специальных значениях параметров имеют классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения [1]. Для второго уравнения Пенлеве и его иерархии это полиномы Яблонского–Воробьева, которые позволяют построить рациональные решения уравнений иерархии уравнения Кортевега–де Фриза.

Рассмотрим стационарную версию обобщенной иерархии первого уравнений Пенлеве

$$P_1^{[2n-2]} : \mathcal{L}_n[q(z)] - p_n/2 = 0, n \in \mathbb{N}$$

и стационарную версию обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве

$$P_2^{[2n]} : (D + 2w)\mathcal{L}_n[w' - w^2] - p_n w - \alpha_n = 0, n \in \mathbb{N},$$

где оператор $\mathcal{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$D\mathcal{L}_{n+1}[u] = (D^3 + (4u + \beta_n)(D + 2Du))\mathcal{L}_n[u], D = d/dz, \mathcal{L}_1[u] = u, u = u(z), n \in \mathbb{N},$$

а α_n, β_n, p_n — параметры. Обыкновенные дифференциальные уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ имеют соответственно порядок $2n - 2$ и $2n$. Обозначим через G_{2n-2} и H_{2n} множество решений соответственно уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ при фиксированном значении параметров α_n, β_n, p_n . Тогда справедливо включение

$$G_{2n-2} \subset H_{2n}, q(z) = w'(z) - w^2(z), \alpha_n = 0, n \in \mathbb{N},$$

которое определяет соотношение между стационарными иерархиями первого и второго уравнений Пенлеве.

При некоторых соотношениях между параметрами, которые мы здесь не приводим в силу громоздкости, также справедливы включения

$$G_0 \subset G_2 \subset G_4 \subset G_6, H_2 \subset H_4 \subset H_6 \subset H_8.$$

Литература

1. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painleve Differential Equations in the Complex Plane*. De Gruyter. Studies in Mathematics V. 28. Berlin; New-York (2002).

Фундаментальное решение

K -полигармонического уравнения Киприянова

Е. А. Грязнева (Липецк, Россия)

Оператор $\Delta_{-\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}$, $B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $0 < \gamma < 1$ называется оператором Киприянова [1]. K -Гармонической и K -полигармонической функциями Киприянова в области Ω называем дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x)$, четную по каждой координате своего аргумента, удовлетворяющую в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n$ уравнениям

$$\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0, \quad \Delta_{B_{-\gamma}}^m u = 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}_n. \quad (1)$$

Фундаментальное решение оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$, $0 \leq \gamma < 1$ определено в работе [1] (теорема 7). Фундаментальное решение K -полигармонического оператора с точностью до константы совпадает с фундаментальным решением оператора Киприянова и определено следующей теоремой.

Теорема. Пусть $-\gamma = -(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $0 > -\gamma_i > -1$ и $n - |\gamma| > 0$. Тогда фундаментальным решением Δ_B -оператора Киприянова является регулярная $S'_{ev, -\gamma}$ — обобщенная функция

$$\mathcal{E}_{n, -\gamma}(x) = \frac{A_1 |x|^{2-n+|\gamma|}}{(2-n+|\gamma|) |S_1^+(n)|_\gamma}, \quad n+|\gamma| \neq \text{четному числу}, \quad (2)$$

где $|S_1^+(n)|_\gamma$ — площадь нагруженной сферы,

$$A_1 = 2^{2m+1} \prod_{j=0}^{m-1} (k/2 - j) \prod_{s=1}^m \left(\frac{k+n-|\gamma|}{2} - s \right) = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n-|\gamma|}{2} - m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{\frac{n-|\gamma|}{2}}}.$$

Формально полученное решение K -полигармонического оператора совпадает с фундаментальным решением классического полигармонического оператора при $\gamma = 0$, см. [2], с. 521. Отметим невозможность логарифмического решения в этом случае. В случае, если мультииндекс γ состоит из неотрицательных чисел, то логарифмический случай возможен, соответствующая формула фундаментального решения определена в книге [3].

Литература

1. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром. *Дифференц. уравнения* (2022). Т. 58. № 12. 1654–1665.
2. Соболев С. Л. Введение в теорию кубаторных формул. М.: Наука. (1974).
3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука (1997).

Линейная зависимость компонент сильно нерегулярного решения линейной однородной периодической дифференциальной системы А. К. Деменчук (Минск, Беларусь)

Будем рассматривать линейную однородную системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n > 2, \quad (1)$$

в которой $A(t)$ — непрерывная ω -периодическая $n \times n$ -матрица. До середины XX века исследования по периодическим решениям дифференциальных систем базировались на предположении о соизмеримости периодов решения и самой системы. Поэтому другие возможные соотношения частот не изучались.

По-видимому, первым, кто более детально исследовал данную проблему, был Х. Масера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [1]. Этот результат послужил началом нового направления в качественной теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах Я. Курцвейля и О. Вейвуды [2], Н. П. Еругина [3], И. В. Гайшуна [4], Э. И. Груды [5], В. Т. Борухова [6] и др. Такие периодические решения ввиду их необычности, в сравнении с ранее изучавшимися, были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр — асинхронным, а описываемые ими колебания — асинхронными.

В настоящем докладе укажем зависимость между компонентами сильно нерегулярного периодического решения системы (1).

Для непрерывной на всей числовой оси ω -периодической вещественнозначной матрицы $F(t)$ определим её среднее значение $\hat{F} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega F(t) dt$ и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}$. Через $\text{rank}_{\text{col}} F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ — наибольшее число её линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать.

Укажем необходимое условие существования асинхронных колебаний. Справедлива

Лемма. Если система (1) имеет нетривиальное сильно нерегулярное периодическое

решение, то выполняется оценка

$$\text{rank}_{\text{col}} \tilde{A}(t) < n. \quad (2)$$

Оказывается, что в случае разрешимости между компонентами искомого решения системы (3) существует линейная зависимость, тесно связанная с оценкой (2) леммы. Имеет место

Теорема. Пусть для системы (1) разрешима задача возбуждения асинхронных колебаний и $x = x(t) = \text{col} (x_1, \dots, x_n)$ – сильно нерегулярное периодическое решение системы (1). Тогда найдутся два набора попарно различных упорядоченных натуральных индексов

$$1 \leq i_1 < \dots < i_{n-r_2} \leq n; \quad 1 \leq i_{n-r_2+1} < \dots < i_n \leq n$$

и некоторая постоянная $r_2 \times (n - r_2)$ -матрица H такие, что между координатами вектора x имеется линейная зависимость вида

$$\text{col} (x_{i_{n-r_2+1}}, \dots, x_{i_n}) = F \text{col} (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r_2}}).$$

Благодарности. Результат получен по ГПНИ “Конвергенция”, подпрограмма “Математические модели и методы” в рамках гранта Президента Республики Беларусь.

Литература

1. *Massera J.L.* Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Bol. de la Facultad de Ingenieria.* (1950). V. 4, № 1. 37–45.
2. *Курицвейль Я., Вейвода О.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Чехосл. матем. журнал* (1955). Т. 5, № 3. 362–370.
3. Еругин Н.П. О периодических решениях дифференциальных уравнений. *Прикл. матем. и механика.* (1956). Т. 20, вып. 1. 148–152.
4. *Гайшун, И.В.* Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами. *Докл. АН БССР.* (1979). Т. 23, № 8. 684–686.
5. *Грудо Э.И., Деменчук А. К.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем. *Дифференц. уравнения.* (1987). Т. 23, № 3. 409–416.
6. *Борухов В.Т.* Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы. *Дифференц. уравнения.* (2018). Т. 54, № 5. 585–591.

Асимптотическая устойчивость двухкаскадной виброизоляции машиностроительных конструкций

Н. А. Докукова, П. П. Ситковская (Минск, Беларусь)

Во многих технических устройствах, инженерных сооружениях в мобильной технике присутствуют биения соприкасающихся частей конструкций как неотъемлемая часть функционирования подобных механизмов. Возникающие при этом вибрации приводят к разрушению деталей, снижению производительности оборудования и даже опасным условиям труда для операторов [1]. Поэтому разработка эффективных моделей виброгашения, обеспечивающих асимптотическую устойчивость, является одной из актуальных задач. Новые двухкаскадные модели виброгашения позволяют контролировать и уменьшать уровни вибраций, обеспечивая стабильную работу систем.

Представлено несколько конструктивных вариантов гидроопор, использующих перечисленные свойства, для которых записаны математические модели, получены зависимости законов движений виброизолируемых тел, позволяющих обеспечить стабильный устойчивый режим колебаний, возникающий от действия внутренней и внешней периодических нагрузок, с минимально допустимыми амплитудами и амплитудами собственных колебаний, асимптотически убывающими до нуля. Для новых конструкций гидроопор получены зависимости между физическими и геометрическими параметрами, обеспечивающие асимптотически устойчивые собственные колебания и минимально возможные амплитуды законов движений виброизолируемых тел. Установлена закономерность соотношений собственных и парциальных частот механической системы с новыми видами гидроопор с использованием критериев устойчивых, асимптотически устойчивых и устойчивых с запасом движений [2]. Выведенные формулы, закономерности и зависимости, связывающие основные физические параметры, могут быть использованы в конструкторских бюро машиностроительного комплекса РБ [3, 4].

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания ГПНИ “Конвергенция–2025”, “Математические модели и методы - 1.7.01.7”.

Литература

1. *Biderman V.L. Theory of Mechanical Oscillations.* М.: Higher School (1980).
2. *Voronov V.S. Stability indicators of robust control systems. Proceedings of the RAS. Theory and control systems.* No. 6 (1995), 49–54.
3. *Dokukova N.A., Konon P.N. Dynamic oscillations of deformable elastic spring with free end. Free boundary problems: theory, experiment and applications : book of abstracts VIII All-Russian Conference with foreign participants (July 3-7, 2023, Tomsk, Russia).* Tomsk: TSU Press. (2023), 88–90.
4. *Докукова Н.А. Выбор рациональных параметров гидроопоры с пористым элементом. Проблемы машиностроения и надежности машин.* No. 4 (2003), 15–18.

Способы и инструменты визуализации операторов обобщенного сдвига В. В. Игнатенко (Великий Новгород, Россия)

Операторы обобщенного сдвига имеют многочисленные применения как в прикладных исследованиях, например, в цифровой обработке сигналов, так и в теоретических, в частности, при построении теории почти периодических функций. Особую роль операторы обобщенного сдвига играют в теории дифференциальных уравнений, где с их помощью конструируются различные операторы типа свёртки.

Часто операторы обобщенного сдвига являются интегральными, могут содержать специальные функции и бывают достаточно громоздкими. Это усложняет не только их исследование, но и приложение к решению различных задач. Визуализация действия операторов обобщенного сдвига позволяет понять особенности изучаемых математических объектов, выдвинуть гипотезы, касающиеся их свойств и получить наглядный образ при анализе.

В докладе представлены различные подходы к визуализации операторов обобщенного сдвига, они демонстрируются на конкретных примерах. Дается обзор различных инструментов, которые могут быть использованы для подобной визуализации. В дальнейшем предполагается применение полученных результатов для наглядного представления обобщенных свёрточных конструкций, которые используются при решении дифференциальных уравнений.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке федерального проекта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по программе создания и развития Передовой инженерной школы “Распределенные системы управления технологическими процессами”.

**К теории интерполирования операторов,
заданных на функциональных банаховых алгебрах
М. В. Игнатенко (Минск, Беларусь)**

Пусть B — банахова алгебра над полем комплексных чисел с операцией умножения $\circ$. Обозначим

$$l_{nk}[x] = (x - x_0) \circ (x - x_1) \circ \dots \circ (x - x_{k-1}) \circ (x - x_{k+1}) \circ \dots \circ (x - x_n), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Рассмотрим оператор $F : B \rightarrow B$ и точки $x_0, x_1, \dots, x_n \in B$ такие, что для $l_{nk}[x_k]$ существует обратный элемент $l_{nk}^{-1}[x_k]$.

Теорема. Операторный многочлен

$$L_n[F; x] = \sum_{k=0}^n F[x_k] \circ l_{nk}[x] \circ l_{nk}^{-1}[x_k] \quad (2)$$

удовлетворяет интерполяционным условиям $L_n[F; x_j] = F[x_j]$, $j = 0, 1, \dots, n$. Интерполяционная формула (2) инвариантна относительно операторных многочленов

$$P_n[x] = z + \sum_{i=1}^n y_i \circ \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_i,$$

где z и y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — фиксированные элементы из B .

В случае линейной интерполяции и операции умножения $\circ$ на множестве функций, определяемой сверткой

$$(x \circ y)(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t x(s)y(t-s)ds,$$

формула (2) примет вид

$$L_1[F; x](t) = F[x_0](t) + \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_0^t (F[x_1](t-s) - F[x_0](t-s)) \times \\ \times \frac{d}{ds} \int_0^s (x(s-\nu) - x_0(s-\nu)) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp\{\nu\theta\}}{\theta \Lambda[x_1 - x_0](\theta)} d\theta d\nu ds,$$

где $\Lambda[x](t) = \int_0^\infty \exp\{-st\} x(s)ds$ — преобразование Лапласа функции x , i — мнимая единица, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографии [1].

Литература

1. Янович Л.А., Игнатенко М.В. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц*. Минск: Беларус. навука (2020).

Применение дробного исчисления для моделирования экономических рисков микро-, мезо- и макроуровня М. В. Карпиеня (Минск, Беларусь)

Дробное исчисление и дробные дифференциальные уравнения, которые используют производные и интегралы нецелых порядков, представляют собой мощные и удобные инструменты для моделирования процессов в экономике.

Примером исследования риска как процесса с памятью на микроуровне может служить дробная модель волатильности GARCH (FIGARCH) [1]:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|r_{t-i}|^\delta - \theta_i)^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \lambda D^{-\alpha} \sigma_t^2. \quad (1)$$

В данной модели риск связан с изменчивостью волатильности σ_t которая отражает уровень неопределенности и потенциальные колебания цен актива. Учет дробной составляющей $D^{-\alpha}$ позволяет моделировать долгосрочные зависимости, что дает более полное представление о риске.

Управление кредитными рисками часто включает анализ портфелей кредитов, поведения групп заемщиков или даже целых секторов экономики, что характерно для мезоэкономического уровня [2]. Оценка кредитных рисков включает в себя анализ вероятности дефолта $P(t)$ и ожидаемых потерь при дефолте:

$$D^\alpha P(t) = \lambda P(t)(1 - P(t)). \quad (2)$$

Модель экономического роста, где учитывается влияние долговременных эффектов памяти на динамику валового внутреннего продукта (ВВП), является примером дробного исчисления для моделирования экономического риска макроуровня [3]:

$$D^\alpha Y(t) = \alpha Y(t) - bY(t)^2 + c. \quad (3)$$

Применение дробного исчисления для моделирования экономических рисков предоставляет ценные инструменты для более точного анализа и прогнозирования. Учет долговременных зависимостей и эффектов памяти с помощью дробных моделей позволяет более точно оценивать и управлять этими рисками, что важно для принятия обоснованных финансовых решений и повышения устойчивости экономических систем.

Литература

1. Baillie R.T., Bollerslev T., Mikkelsen H.O. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. Vol.74. (1996), 3–30.

2. Leland Hayne E. Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *The Journal of Finance*. Vol.49. No. 4 (1994), 1213–1252.

3. Podlubny I. *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego. (1999).

**Механико-математическое моделирование переходных
процессов гидрогазодинамики
И. Н. Карпович, М. А. Николайчик (Минск, Беларусь)**

В процессе производства фосфорной кислоты важную роль играет система охлаждения, где используется фазовый переход для понижения ее температуры. Исходная смесь, состоящая из воды и фосфорной кислоты, подается в специальную емкость, где за счет пониженного давления, создаваемого присоединенным к емкости газопроводом, происходит кипение смеси. В ходе парообразования возникает явление брызгоуноса, когда капли жидкости с потоком пара попадают в элементы конструкций производственного процесса и это приводит к забиванию газопровода и другим нарушениям производственного процесса.

При оценке интенсивности брызгоуноса и разработке мер по его снижению применяется совмещенный алгоритм CFD-DPM (Computational fluid dynamics — discrete phase model) моделирования [1, 2]. Предложенный алгоритм моделирования позволяет как описывать поведение смеси (в жидкой и газообразной фазах), так и производить оценку брызгоуноса путем отслеживания динамики введенных дискретных частиц.

Чтобы описать поведение жидкостной и газовой фазы, используются классические уравнения Навье-Стокса. Для отслеживания поверхностей между фазами разрешающими уравнениями предложенного подхода являются [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_v \rho_v) + \nabla(\alpha_v \rho_v \vec{V}_v) = \dot{m}_{l,v} - \dot{m}_{v,l} \quad (1)$$

$$\dot{m}_{lv} = coeff * \alpha_v \rho_v \frac{T_l - T_{sat}}{T_{sat}} \quad (2)$$

где нижний индекс v указывает на смесь, находящуюся в парообразном состоянии; α_v — объемная доля пара; ρ_v — плотность пара; $\vec{V}_v$ — скорость паровой фазы; $\dot{m}_{l,v}, \dot{m}_{v,l}$ — скорости массопереноса за счет испарения и конденсации соответственно; $coeff$ — коэффициент интенсивности массообмена; α_v и ρ_v — объемная доля и плотность фазы соответственно.

Выполнены расчеты с использованием совмещенного алгоритма CFD-DPM. Результаты моделирования дают количественную оценку брызгоуноса и его зависимость от режимов работы производственного узла.

Литература

1. Sun, Dongliang; Xu, Jinliang; Chen, Qicheng (2014). Modeling of the Evaporation and Condensation Phase-Change Problems with FLUENT. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 66(4), 326–342. doi:10.1080/10407790.2014.915681
2. Tan, Z., Li, X., Chen, J., Cheng, K., Huai, X. (2023). CFD-VOF-DPM numerical simulation of enhanced boiling heat transfer characteristics of microencapsulated phase change material slurry. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 1–14. doi.org/10.1080/10407782.2023.2230352

**Спектральное приведение дифференциально-разностной системы
с несоизмеримыми запаздываниями
В. В. Карпук, А. В. Метельский (Минск, Беларусь)**

Изучается линейная автономная дифференциально-разностная система

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - d_i) + bu(t), t > 0. \quad (1)$$

Здесь x — n -вектор-столбец решения системы (1) ($n \geq 2$); $0 < d_1 < \dots < d_m$ — постоянные запаздывания; A_i — постоянные $n \times n$ -матрицы ($i = \overline{0, m}$); b — постоянный n -столбец; u — скалярное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих ' обозначает операцию транспонирования. Не ограничивая общности, полагаем, что $b = [0; \dots; 0; 1]'$ и что последние строки матриц A_i ($i = \overline{0, m}$) — нулевые.

Считаем, что в системе (1)

$$d_i = \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij} h_j, \quad i = \overline{1, m},$$

где k_{ij} — целые числа, $0 < h_1 < \dots < h_{\mu}$ — произвольные, в частности, несоизмеримые запаздывания. Обозначим $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\mu})$, $A(\Lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}$, $\lambda_j = e^{-ph_j}$, $i = \overline{1, m}$, $p \in \mathbb{C}$.

Пусть

$$M(p, \Lambda) = [M_1(p, \Lambda), \dots, M_n(p, \Lambda)]', \quad (2)$$

— алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки характеристической матрицы замкнутой системы

$$F\varphi(p, \Lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \dots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \dots & p - a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) \\ -\varphi_1(\Lambda) & \dots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $a_{ij}(\Lambda)$ — элементы матрицы $A(\Lambda)$; $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, — полиномы с действительными коэффициентами, которые подбираем такими, чтобы

$$|F\varphi(p, \Lambda)| = d_0(p),$$

где $d_0(p)$ — некоторый полином степени $\nu = \deg d_0(p) \geq n$. Если это возможно, то систему (1) назовем спектрально приводимой.

Теорема. Система (1) спектрально приводима, если и только если редуцированный базис Гребнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \dots > \lambda_{i_{\mu}} > p$) для системы полиномов (2) содержит некоторый полином $\tilde{d}_0(p)$.

**Оценка напряженно-деформированного состояния
подземных сооружений с учетом реологических
свойств окружающего породного массива
Н. М. Климович, М. А. Николайчик,
М. А. Журавков (Минск, Беларусь)**

В данном исследовании приведены результаты изучения длительного поведения некоторых исследовательских выработок на Петриковском месторождении калийных солей. В качестве основного метода исследования были использованы подходы численного моделирования на базе метода конечных элементов (МКЭ) [1]. В предложенном алгоритме численного моделирования, длительное поведение породных масс в окрестности исследовательских выработок определялось при помощи разработанной модели ползучести (1).

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{C_2} t^{C_3} + C_4 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{C_2} \quad (C_1 > 0, C_4 > 0, C_2 \geq 1, C_3 < 0) \quad (1)$$

где $\dot{\epsilon}_{cr}$ — скорость эквивалентной деформации ползучести, σ — эквивалентное напряжение по Мизесу в нарушенном массиве, σ_0 — эквивалентное напряжение по Мизесу в нетронутом массиве, t — время, C_n — некоторые константы, определяемые опытным путем.

В основе принятой модели лежит модель ползучести «Combined Time Hardening» (2), применяемая в конечно-элементном программном комплексе Ansys Mechanical APDL [2]. В данном исследовании модель ползучести (2) была модифицирована для учета изменения состояния породного массива при ведении горных работ относительно его начального напряженного состояния.

$$\epsilon_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} \frac{t^{C_3+1}}{C_3+1} e^{-C_4/T} + C_5 \sigma^{C_6} t e^{-C_7/T} \quad (C_1 > 0, C_5 > 0) \quad (2)$$

где ϵ_{cr} — эквивалентная деформация ползучести, T — температура.

Важной особенностью предложенной модели является то, что она позволяет учесть первичную и вторичную стадию ползучести. Кроме того, для учета различного геомеханического поведения в кровле, подошве и боках выработки, константа C_2 определяется как функция от ϕ , где ϕ — полярный угол, отсчитываемой от горизонтальной оси.

Результаты численного моделирования верифицированы данными мониторинга за деформированием контуров исследовательских выработок.

Литература

1. Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Минск: БГУ (2002).
2. Басов К.А. Справочник пользователя ANSYS. М.: ДМК-пресс (2005).

**Образование гидравлического прыжка при движении тонкого слоя
вязкой жидкости на вращающемся горизонтальном диске**
П. Н. Конон, А. А. Миранович (Минск, Беларусь)

Вертикальная струя жидкости падает на горизонтальный вращающийся диск и растекается в радиальном направлении, образуя тонкую пленку. На определенном расстоянии от точки падения толщина пленки резко увеличивается — наблюдается гидравлический скачок. До последнего времени существовало мнение, что такие тонкопленочные прыжки создаются за счет гравитации [1]. Однако в недавних работах, например [2], показано, что прыжкам способствует поверхностное натяжение и сила тяжести не играет существенной роли.

В данной работе исследовано движение тонкого слоя вязкой жидкости с неизвестной границей на вращающемся с постоянной угловой скоростью горизонтальном диске в поле сил инерции и поверхностного натяжения. Рассмотрена гидродинамическая модель в случае осесимметричного течения, экспериментально наблюдаемого для жидкостей с большой вязкостью [3]. Приближением вида пограничного слоя и прямым методом Капицы-Шкадова [4], получена система уравнений эволюции слоя вязкой жидкости. Исследовано установившееся течение при постоянной подаче жидкости на вращающийся диск. Разработан численный метод, определен вид свободной поверхности и поле скоростей для разных параметров задачи. Показано, что силы поверхностного натяжения играют ключевую роль в формировании свободной поверхности как на начальном участке течения, сглаживая ее, так и вдали от оси вращения, формируя гидравлический прыжок. Используя условия на прыжке [1], найдена его высота и проведено сращивание решений. Результаты работы могут быть применены при анализе режимов течения в вопросах нанесения покрытий, слоев на горизонтальную поверхность вращением.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 2.11 ГПНИ Беларуси “Энергетические и ядерные процессы и технологии”.

Литература

1. *Ipatova A., Smirnov K. V., Mogilevskiy E. I.* Steady circular hydraulic jump on a rotating disk. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 927. (2021), A24.
2. *Bhagat R. K., Jha N. K., Linden P. F., Wilson D. I.* On the origin of the circular hydraulic jump in a thin liquid. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 851. (2018), R5.
3. *Конон П. Н., Кулаго А. Е., Сицко Г. Н., Конон Н. П.* Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске. *Теоретическая и прикладная механика*. Вып. 31. (2016), 87–94.
4. *Шкадов В. Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. *Изв. АН СССР, МЖГ*. No. 1 (1967), 43–48.

**Распределение температуры в профилированном полярно-
ортотропном кольцевом диске, вращающемся в тепловом поле,
с учетом теплообмена с окружающей средой**
В. В. Королевич (Прага, Чехия)

Для расчета напряженно-деформированного состояния быстровращающегося профилированного анизотропного диска в тепловом поле важно первоначально знать распределение температуры $T(r)$ в нем. Методом Лиувилля нами было получено линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции температуры $\Theta_0(r) = T(r) - T_0$, где T_0 — температура окружающей среды. Теплообмен полярно-ортотропного

кольцевого диска переменной толщины $h(r)$ с окружающей средой происходит через оба основания диска.

$$\Theta_0(t) = \lambda \int_0^t K_0^{(T)}(t, \tau) \Theta_0(\tau) d\tau + f(t), \quad (1)$$

где $\lambda \frac{1}{\Omega}$ — числовой параметр; $\Omega = \sqrt{\frac{2Hr_0}{\lambda_r}}$ — безразмерная величина; H — коэффициент теплоотдачи, $[H] = \frac{Bm}{m^2 \cdot ^\circ C}$; λ_r — радиальный коэффициент теплопроводности, $[\lambda_r] = \frac{Bm}{m \cdot ^\circ C}$; $t = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ — безразмерная переменная; $t \in \left[0, \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)\right]$; r_0 и R — внутренний и внешний радиусы диска соответственно;

$$K_0^{(T)}(t, \tau) = \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \Omega^2 \left(1 + \sqrt{\frac{r_0^4 e^{4\tau}}{h^2(\tau)} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)^2 r_0^2 e^{2\tau}} \right) \right] \sin \Omega(t - \tau) - \Omega \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cos \Omega(t - \tau) - \text{ядро интегрального уравнения (1)};$$

$C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t$ — свободный член интегрального уравнения (1); C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (1) записывается с помощью *резольвенты* $R^{(T)}(t, s; \lambda)$:

$$\Theta_0(t) = \lambda \int_0^t R^{(T)}(t, s; \lambda) f(s) ds + f(t),$$

где функция $R^{(T)}(t, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}^{(T)}(t, s)$.

Повторяющиеся, или итерированные, ядра $K_m^{(T)}(t, s)$ вычисляются по рекуррентным формулам.

В качестве примера рассчитывалось распределение температуры в полярно-ортотропном диске степенного профиля из углепластика.

Напряженно-деформированное состояние равномерно вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины В. В. Королевич (Прага, Чехия), Д. Г. Медведев (Минск, Беларусь)

Ранее методом Лиувилля нами получено линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для радиального перемещения $u(r)$ в равномерно вращающемся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг нормальной оси полярно-ортотропном кольцевом диске переменной толщины $h(r)$:

$$u(t) = \lambda_2 \int_0^t K_2(t, \tau) u(\tau) d\tau + f_2(t), \quad (1)$$

где $\lambda_2 = \frac{1}{k}$ — числовой параметр, $k = \sqrt{E_\theta/E_r} > 1$;

$$K_2(t, \tau) = \left\{ \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' - \nu_{\theta r} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \right] \cdot \text{sh}(k(t - \tau)) - k \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cdot \text{ch}(k(t - \tau)) \right\} - \text{ядро}$$

интегрального уравнения (1);

$$f_2(t) = C_1 \cdot \operatorname{sh}(kt) + C_2 \cdot \operatorname{ch}(kt) - \frac{(k^2 - \nu_{\theta r}^2)}{kE_{\theta}} \rho \omega_0^2 r_0^3 \int_0^t e^{3\tau} \operatorname{sh}(k(t - \tau)) d\tau - \text{свободный член}$$

интегрального уравнения (1); $t = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ — безразмерная переменная; $t \in \left[0, \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)\right]$; r_0 и R — внутренний и внешний радиусы диска соответственно; C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (1) записывается с помощью *резольвенты* $R_2(t, s; \lambda_2)$:

$$u(t) = \lambda_2 \int_{r_0}^r R_2(t, s; \lambda_2) f_2(s) ds + f_2(t).$$

Здесь функция $R_2(t, s; \lambda_2)$ определяется функциональным рядом:

$$R_2(t, s; \lambda_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_2^m K_{2,m+1}(t, s),$$

который для непрерывных ядер $K_{2,m}(t, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или итерированные, ядра $K_{2,m}(t, s)$ вычисляются по рекуррентным формулам.

Компоненты радиального $\sigma_r(r)$ и тангенциального $\sigma_{\theta}(r)$ напряжений выражаются через радиальное перемещение $u(r)$.

В качестве примера рассчитывались напряжения $\sigma_r(r), \sigma_{\theta}(r)$ и радиальное перемещение $u(r)$ в полярно-ортотропном диске степенного профиля из углепластика.

Перспективы цифровизации логистики стран ШОС

А. А. Королева, С. Р. Дутин, А. А. Дутина (Минск, Беларусь)

Цифровизация транспортной логистики дает значительный эффект в случае создания с ее помощью новых бизнес-моделей. Новые цифровые бизнес-модели создаются, как правило, в качестве результата совместной работы IoT, экосистем, дополненной реальности (Augmented Reality – AR) и искусственного интеллекта.

Беларусь достаточно быстро включается в мировой процесс цифровизации транспортной логистики, в частности происходит переход к электронному документообороту товаровоспроваждающих и коммерческих документов при международных перевозках, формируется единая цифровая платформа транспортно-логистических систем на основе интеграции с международными цифровыми системами. Все перечисленные процессы несомненно вносят определенный экономический эффект: повышается уровень прогрессивности применяемых технологий, расширяет конкурентные возможности, происходит увеличение объема перевозок, происходит совершенствование организационной структуры компании.

Модель, представленная в статье [1] позволяет количественно оценить экономический эффект цифровизации и его вклад в добавленную стоимость транспортной отрасли Республики Беларусь, а также подтверждает, что рост ВДС зависит в большей степени от роста инвестиций в ИКТ, чем инвестиций в остальной капитал. Таким образом, цифровые технологии служат источником дополнительной прибыли при организации внутригосударственных и международных перевозок и хранении грузов [2].

В 2024 году Беларусь стала полноправным членом стала членом Шанхайской организации сотрудничества. ШОС для Беларуси – стратегическая перспектива в торгово-экономическом и инвестиционном взаимодействии, развитии транспортно-логистической, информационно-коммуникационной и иной инфраструктуры. В связи с этим, целесообразно дальнейшее расширение бизнес-моделей подключения к грузоперевозкам посредством онлайн-каналов малого и среднего бизнеса в рамках нового партнерства.

В работе применена методика оценки экономической эффективности цифровой транспортной логистики и ее вклада в добавленную стоимость транспортной отрасли в отдельности к каждой стране-партнеру ШОС и даны рекомендации по дальнейшей гармонизации цифровых логистических систем в рамках ШОС.

Литература

1. 1. Васенкова Е.И., Королева А.А., Дутин С.Р. Методика оценки экономической эффективности и ее вклада в добавленную стоимость (на примере транспортной отрасли). *Фин. экон.* № 5 (2023), 146–148.

2. Королева А.А. Экономические эффекты цифровой логистики. *Журн. Бел. гос. ун-та. Экономика.* №1 (2019), 68–76.

Classical solution of an initial-boundary value problem with a mixed boundary condition for a mildly quasilinear wave equation V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko (Minsk, Belarus)

In this report, we shall consider the question of global solvability in $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty)$ of the following initial-boundary value problem

$$\square_a u(t, x) = f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \in [0, t_*], \quad (3)$$

$$\partial_x u(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \in [t_*, \infty), \quad (4)$$

where $\square_a = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$, $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$, t_* and a are positive real numbers, f is a function given on the set $Q \times \mathbb{R}^3$, φ and ψ are functions given on the half-line $[0, \infty)$, μ_1 is a function given on the half-open interval $[0, t_*)$, and μ_2 is a function given on the half-line $[t_*, \infty)$.

Theorem. Let the conditions $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3)$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^2([0, t_*])$, and $\mu_2 \in C^1([t_*, \infty))$ be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition $|f(t, x, u, u_t, u_x) - f(t, x, z, z_t, z_x)| \leq L(t, x)(|u - z| + |u_t - z_t| + |u_x - z_x|)$ with a continuous function $L: \bar{Q} \mapsto [0, \infty)$. The initial-boundary value problem (1)–(4) has a unique solution u in the class $C^2(\bar{Q})$ if and only if conditions

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad (5)$$

$$\mu_1'(0) = \psi(0), \quad (6)$$

$$\mu_1''(0) = f(0, 0, \varphi(0), \psi(0), \varphi'(0)) + a^2 \varphi''(0), \quad (7)$$

$$\mu_2(t_*) = \partial_x u(t_* - 0, 0), \quad \mu_2'(t_*) = \partial_t \partial_x u(t_* - 0, 0). \quad (8)$$

are satisfied.

Remark. The conditions (8) are well-defined, since we need the Cauchy conditions (2) and only one boundary condition (3) to define the solution u of the problem (1) on the set

$\Omega = \overline{Q} \cap \{(t, x) \mid x > at - at_*\}$. This solution belongs to the class $C^2(\Omega)$ if and only if the conditions (5)–(7) are satisfied.

The talk is based on a recent preprint [1].

Acknowledgments. This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of implementing the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement No. 075-15-2022-284) and the National Academy of Sciences of Belarus (agreement No. 2024-25-141).

References

1. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. *Classical Solutions of a Mixed Problem with the Zaremba Boundary Condition for a Mildly Quasilinear Wave Equation*. Durham, 2024 – (Preprint / Research Square).

Применение дробно-дифференциальных моделей в анализе котировок международных индексов У. А. Кришень (Минск, Беларусь)

Рассмотрим применение дробно-дифференциальных моделей, а именно модели классов ARFIMA и ARCH/GARCH в анализе котировок (далее — Close) индексов DJI и SSE Composite, которые представляют американские и китайские валютно-фондовые биржи соответственно. Для индекса DJI (ряд включает в себя выборку из 387 наблюдений) была построена следующая модель класса ARFIMA:

$$\begin{aligned} CLOSE = & 64402.0265(Prob.0.9910) - 0.00017 * E^2(Prob.0.0000) + \\ & + 0.4854 * D(Prob.0.0000) + 0.9998 * AR(2) - 0.7123 * MA(2) \end{aligned}$$

Видно, что в модель учитывает длинную память временного ряда с его сложной внутренней структурой остатков. Был построен перспективный прогноз по модели класса ARFIMA на 3 будущих периода. Ошибка прогноза MAPE составила 7%, что является удовлетворительным результатом. Прогнозирование изменений ряда при использовании моделей условной гетероскедастичности показало более точные результаты: ошибка прогноза не превышала 4%. Модели индекса SSE Composite представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} CLOSE = & 448.4570(Prob.0.0422) + 0.8191 * SSE(-1)(Prob.0.0000) + \\ & + 0.1679 * E(-2)(Prob.0.0057) + 0.2205 * D(Prob.0.0005) + \\ & + 0.2161 * AR(5)(Prob.0.0348) + 0.1724 * AR(4)(Prob.0.0060) \\ & + 0.1967 * MA(7)(Prob.0.0009) \\ D(Close) = & -16.8733(Prob.0.2367) - 0.8870 * E(-1) * (Prob.0.0000) \\ & + 0.0913 * AR(4)(Prob.0.0900) + 0.9530 * MA(1)(Prob.0.0000) \\ GARCH = & 2642.6826(Prob.0.0033) + 0.4003 * RESID(-1)^2(Prob.0.0000) \\ & + 0.5615 * GARCH(-1)(Prob.0.0000) \end{aligned}$$

Полученные выводы по индексу SSE Composite соответствуют выводам, полученным по индексу DJI: ошибка прогноза по модели ARFIMA больше, чем по модели ARCH/GARCH (5.96% к 5.14%). Полученные по моделям выводы свидетельствует о

том, что модели класса ARFIMA обладают существенными недостатками: не учитывают условную гетероскедастичность длинных временных рядов, таких как котировки индексов различных бирж. В связи с этим, вопрос выбора модели для прогнозирования длинных временных рядов без учета иных, сторонних факторов, остается на выбор аналитика.

Литература

1. *K Granger C. W. J., Joyeux R.* An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*. Vol. 1 (1) (1980), 15–29.
2. *Engle R.F.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. Vol. 50, No. 4 (1982), 987–1007.
3. *Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K.* Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of applied econometrics*. Vol. 21 (1) (2006), 79–109.

Согласованный алгоритм расчета равновесных форм магнитной жидкости и концентрации частиц О. А. Лаврова, В. К. Полевилов (Минск, Беларусь)

Рассматривается математическая модель задачи феррогидростатики в цилиндрической системе координат (r, z) с учетом осевой симметрии, которая состоит из уравнений для расчета свободной поверхности магнитной жидкости и уравнений для расчета концентрации C магнитных наночастиц внутри магнитной жидкости с учетом заданного магнитного поля $H = I/(2\pi r)$, созданного проводником с током I радиуса R_0 . Требуется найти равновесные формы свободной поверхности $\Gamma = \{(r, z) \mid r = R(s), z = Z(s), s \in [0, \ell]\}$ с учетом влияния магнитного поля, гравитации, капиллярных сил и концентрации магнитных наночастиц внутри магнитной жидкости. На основе уравнения Юнга-Лапласа строится краевая задача для расчета свободной поверхности, см. [1],

$$R'' = -Z'F, \quad 0 < s < \ell; \quad R(0) = R_0, \quad R'(\ell) = \cos \alpha_2; \quad (1)$$

$$Z'' = R'F, \quad 0 < s < \ell; \quad Z'(0) = -\cos \alpha_1, \quad Z(\ell) = 0; \quad (2)$$

с дополнительным интегральным условием сохранения объема жидкости и заданными углами контакта α_1 и α_2 ; $F = F(R, Z, Z', H, C)$. На основе уравнения массопереноса взаимодействующих наночастиц в магнитной жидкости строится алгебраическое уравнение для расчета концентрации C в произвольной точке свободной поверхности Γ , см. [1],

$$\Phi(H, C) = \gamma, \quad \text{где } H = I/(2\pi R(s)), \quad 0 < s < \ell. \quad (3)$$

При этом неизвестная константа γ определяется из дополнительного интегрального условия сохранения концентрации частиц в объеме жидкости.

Численный алгоритм задачи основан на итерационном согласовании конечно-разностной аппроксимации краевой задачи (1)–(2) с методом Ньютона для системы из алгебраических уравнений вида (3). В расчетах используется адаптивная сетка $\{s_i, i = \overline{0, N}\}$, которая сгущается в области максимального искривления свободной поверхности. Неизвестными величинами являются представление свободной поверхности в виде набора точек $(r_i := R(s_i), z_i := Z(s_i))$, $i = \overline{0, N}$, а также значения концентрации C_i , $i = \overline{0, N}$ только в точках, представляющих свободную поверхность. Численно получены равновесные формы жидкости с вытягиванием вдоль проводника в 14 раз относительно формы, полученной без учета влияния магнитного поля, см. [1].

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, шифр задания 1.4.01.4.

Литература

1. Lavrova O., Polevikov V. Numerical study of ferrofluid covering of a current-carrying conductor, taking into account diffusion of interacting particles. *Magnetohydrodynamics*. Vol. 60, No. 1 (2024), 21–38.

Численное моделирование конвективной неустойчивости в магнитной жидкости

О. А. Лаврова, В. К. Полевиков (Минск, Беларусь)

В неизотермической магнитной жидкости в условиях невесомости при наложении неоднородного магнитного поля возбуждается конвективное движение, обусловленное зависимостью намагниченности жидкости от температуры. Но если градиент магнитного поля коллинеарен температурному градиенту, в жидкости возможно состояние механического равновесия [1]. Основная цель работы: численное исследование конвективной неустойчивости цилиндрического слоя магнитной жидкости. Построены две математические модели термомагнитной конвекции в цилиндрическом слое магнитной жидкости, покрывающем проводник с током, в магнитном поле проводника при его однородном нагреве. В одной из моделей пренебрегается зависимость от азимутальной координаты, в другой — от аппликаты вдоль оси цилиндра. Обе модели представлены в [1].

Магнитная жидкость находится в кольцевом зазоре между двумя твердыми коаксиальными цилиндрами: внутренний из которых представляет собой бесконечно длинный проводник с током I и имеет радиус R_1 , а внешний цилиндр — радиус R_2 . Температура проводника $T_1 = \text{const}$ превышает температуру внешней оболочки $T_0 = \text{const}$.

Построен вычислительный алгоритм, основанный на монотонной аппроксимации конвективных уравнений. Получены предварительные результаты (см. Рис. 1).

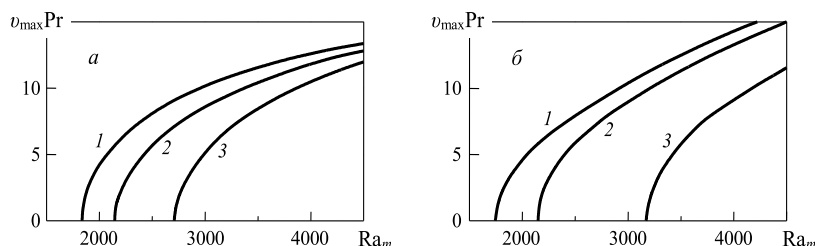


Рис. 1: Интенсивность движения в закритической области Ra_m : *a* — осесимметричная задача при $L/D = 5$; *б* — плоская задача; {1; 2; 3} — $R_2/R_1 = \{1.5; 3; 5\}$. L/D — отношение длины слоя к ширине, Ra_m — магнитное число Рэлея, Pr — число Прандтля.

Решение задачи имеет важное значение для приложений магнитной жидкости, позволяя определять Ra_m , при которых конвекция не наступает, и при которых она становится определяющей в гидродинамическом процессе.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, шифр задания 1.4.01.4.

Литература

1. Берковский Б. М., Полевиков В. К. *Вычислительный эксперимент в конвекции*. Минск: Университетское (1988).

**Собственные частоты пятислойной
шарнирно опертой пластины
Е. А. Лачугина (Гомель, Беларусь)**

Необходимость разработки математических моделей, учитывающих квазистатический и динамический характер нагрузок, обуславливается широким применением слоистых конструкций в различных областях промышленности. Методы расчета и постановка краевых задач для слоистых элементов рассмотрены в работах [1–3]. Здесь для несимметричной по толщине круговой пятислойной пластины с легкими заполнителями приведены уравнения движения в перемещениях. Вывод уравнений движения проведен в цилиндрической системе координат r, ϕ, z , которая связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в заполнителях — гипотеза Тимошенко. В заполнителях не учитывается работа касательных напряжений.

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2w_{,r} + a_3\psi_1 - a_4\psi_2) &= 0, \\ L_2(a_3u + a_5w_{,r} + a_6\psi_1) &= 0, \\ L_2(-a_4u - a_7w_{,r} + a_8\psi_2) &= 0, \\ L_3(a_2u - a_9w_{,r} + a_{10}\psi_1 + a_{11}\psi_2) - M_0\ddot{w} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $M_0\ddot{w}$ — поперечные инерционные силы, $M_0 = (\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3 + \rho_4h_4 + \rho_5h_5)r_0^2$, a_i — коэффициенты, L_2, L_3 — линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

После решения системы (1) для рассматриваемой пластины, шарнирно опертой по контуру, получим трансцендентное уравнение собственных чисел и уравнение частот собственных колебаний:

$$\begin{aligned} J_0(\beta r_0)[a_{12}\left(\beta I_0(\beta r_0) - \frac{I_1(\beta r_0)}{r_0}\right) + \frac{a_{13}}{r_0}I_1(\beta r_0)] + \\ + I_0(\beta r_0)[a_{12}\left(\beta J_0(\beta r_0) - \frac{J_1(\beta r_0)}{r_0}\right) + \frac{a_{13}}{r_0}J_1(\beta r_0)] = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}.$$

Литература

1. Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах. Минск: БГУ (2002).
2. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела. Минск: БГУ (2021).
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. *Mechanics of Solid Deformable Body*. Singapore: Springer (2023).

**Вычисление оптимальных долей ввода в эксплуатацию
общей площади жилых домов по областям и г. Минску
А. А. Литвинович (Минск, Беларусь)**

Предположим, что в t -ом году в Беларуси суммарное взвешенное значение j -ого показателя результативности жилищной политики не должно превышать планового значения $B_j(t)$ [1]. Тогда оптимальное решение динамической оптимизационной задачи в случае использования в модели только одного показателя результативности жилищной политики и только одного социально-экономического показателя будет иметь вид:

$$\beta_i(t) = b_i \gamma_i \sum_{\tau=t}^{T_1} \alpha_i(\tau) (1 - \gamma_i)^{\tau-t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \quad (1)$$

$$w_i(t) := \frac{\beta_i(t)}{c_i(t) \sum_{i=1}^n \beta_i(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \quad (2)$$

$$x_i(t) = w_i(t) B(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}. \quad (3)$$

Подставив найденные значения β_i , γ_i , $\alpha_i(\tau)$ (см. [2]) в формулу (1), получим значения коэффициентов $\beta_i(\tau)$, подставление которых в (2) позволяет рассчитать оптимальные доли ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску (табл. 1).

Таблица 1: Оптимальные доли $w_i(t)$ ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску, %

Номер года	Брестская обл.	Витебская обл.	Гомельская обл.	Гродненская обл.	г. Минск	Минская обл.	Могилевская обл.
1	12,20	12,53	10,71	17,21	16,75	14,15	16,45
2	12,57	11,76	10,38	17,34	17,18	15,12	15,65
3	13,00	10,86	9,92	17,38	17,62	16,57	14,66
4	13,42	9,80	9,31	17,24	18,00	18,77	13,45
5	13,77	8,58	8,51	16,82	18,22	22,11	11,98

Литература

1. Литвинович А.А., Аксень Э.М. Моделирование влияния объемов жилищного строительства на социально-экономические показатели с учетом запаздывания. *Экономика, моделирование, прогнозирование*. Сборник 17. Минск: Научно-исследовательский институт Министерства экономики Республики Беларусь. (2023), 258–265.

2. Литвинович А.А., Еременко М.М., Аксень Э.М. Методика моделирования оптимального распределения показателей результативности жилищной политики с учетом запаздывания. *Белорусский экономический журнал*. № 2. (2024), 81–97.

**Riemann formulas of classical solutions
to the second mixed problem for the general telegraph
equation with variable coefficients on a segment
F. E. Lomovtsev (Minsk, Belarus)**

On $Q_n = [0, d] \times [0, d_{n+1}]$ a global correctness theorem is derived for the problem:

$$u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_t(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)u(x, t) = f(x, t),$$

$$(x, t) \in \dot{Q}_n =]0, d[\times]0, d_{n+1}[; a \in C^2(Q_n), b, c, q \in C^1(Q_n), n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 < x < d, \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = \mu_1(t), u_x|_{x=d} = \mu_2(t), 0 < t < d_{n+1}, d_n = (n-1)h^{(2)}[d/2, g_2(0.0)]. \quad (3)$$

The characteristic equations $dx - (-1)^i a(x, t) dt = 0$ give the implicit characteristics $g_i(x, t) = C_i, i = 1, 2$. If $a(x, t) \geq a_0 > 0$, then they decrease strictly in t at $i = 1$ and increase at $i = 2$ with increasing x . Therefore, the implicit functions $y_i = g_i(x, t)$ have the inverse functions $x = h_i\{y_i, t\}, t = h^{(i)}[x, y_i]$. If coefficient $a \in C^2(G_\infty)$, then functions $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2$ to the variables $x, t, y_i, i = 1, 2$ [1].

First, in [1], a global correctness theorem with explicit formulas for classical solutions and Hadamard's correctness criterion to the second mixed problem for the model telegraph equation in first quarter G_∞ of the plane is proved by Lomovtsev's «implicit characteristics method». Using Schauder's continuation method with respect to a parameter and author's theorem on increasing the smoothness of strong solutions, the existence of a unique and stable classical solution to the auxiliary mixed problem for the general telegraph equation in G_∞ was established [1].

Then, in [2], the Riemann formulas for classical solutions of this auxiliary mixed problem are derived by «compensation method of the boundary regime with the right-hand side of the general telegraph equation». The global correctness theorem with the Riemann formulas to the second mixed problem (1)–(3) on the segment is derived by the author's «method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string (wave equation on the half-line)» from the global correctness theorem of the auxiliary mixed problem on the half-line. The statement of mixed problem (1)–(3) imply the necessity for some smoothness requirements and all matching conditions. The some integral requirements on f is deduced by author «correction method».

References

1. Lomovtsev F. E. The second mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients in the first quarter of the plane. In: *Vesnik of the Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Information. Computing and Control*. Vol. 12. No. 3 (2022), 50–70.
2. Lomovtsev F. E. Compensation method the boundary mode with the right-hand side of the telegraph equation with variable coefficients in solving the second mixed problem on a half-line. In: *Vesnik of the Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Information. Computing and Control*. Vol. 13. No. 1 (2023), 39–63.

Задача Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения

Л. Н. Ляхов (Воронеж, Россия), Ю. Н. Булатов (Елец, Россия)

Пусть $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : (x_1 > 0, \dots, x_n > 0)\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)\}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i > -1$, $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\Delta_{B_\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}$.

Пусть $x \in \mathbb{R}_n^+$, $y \in \mathbb{R}_m^+$. Рассмотрим сингулярное ультрагиперболическое уравнение $(\Delta_{B_\beta})_y u(x, y) = (\Delta_{B_\gamma})_x u(x, y)$, где координаты мультииндексов $\beta_i > -1$ и $\gamma_i > -1$.

Постановка задачи Коши: найти функцию $u \in C_{ev}^2(\overline{\mathbb{R}_n^+})$ такую, что

$$(\Delta_{B_\beta})_y u(x, y) = (\Delta_{B_\gamma})_x u(x, y), u(x, y) \Big|_{|y|=0} = f(|x|), \frac{\partial u(x, y)}{\partial y_i} \Big|_{y_i=0} = 0. \quad (1)$$

И пусть выполнено условие Киприянова [1] о размерности Δ_B операторов, стоящих в левой и правой части уравнения (1): $n + |\gamma| - 1 = m + |\beta| - 1 = s$.

Теорема. Предположим, что координаты мультииндексов β и γ удовлетворяют условиям $\beta_i > -1$, $\gamma_i > -1$. Решение задачи Коши (1) с условием Киприянова существует и представлено следующими формулами.

1. Пусть $s > 0$, то решение задачи определено первой формулой Пуассона [2]:

$$u(x, y) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\alpha}\right) \sin^{2s}\alpha \, d\alpha.$$

2. Для $s = 0$ решение задачи (1) имеет вид формулы Даламбера:

$$u(x, y) = \frac{f(|x| + |y|) + f(|x| - |y|)}{2}.$$

3. Если $0 > s > -1$, тогда решение задачи Коши (1) определено формулой:

$$u(x, y) = \mathbb{T}^y f(x) = \frac{\Gamma(s+1)(xy)^{2s}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{f\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\alpha}\right)^{2s}} \sin^{2s}\alpha \, d\alpha,$$

где оператор $\mathbb{T}^y$ — обобщенный псевдосдвиг [3].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. Ляхов Л.Н., Половинкин И.П., Шиликина Э.Л. Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения. *Дифф. уравнения*. Т. 50. No. 4 (2014), 516–526.
2. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. *Успехи мат. наук*. Т. 6. No. 2(42) (1951), 102–143.
3. Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рошупкин С.А., Санина Е.Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова. *Дифф. уравнения*. Т. 58. No. 12 (2022), 1654–1665.

Новые неравенства для ρ -тригонометрически выпуклых функций

К. Г. Малютин (Курск, Россия)

Исследуется связь ρ -тригонометрически выпуклых функций с классом субгармонических функций. Установленная связь используется для доказательства новых неравенств, характеризующих ρ -тригонометрически выпуклые функции и нахождения интегральных уравнений первого рода, которым удовлетворяют ρ -тригонометрические функции.

Теорема. Пусть h — не тождественно равная $-\infty$ нигде не обращающаяся в $+\infty$ полунепрерывная сверху функция на интервале (α, β) . Для того, чтобы h была ρ -тригонометрически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\theta \in (\alpha, \beta)$ и для любого $R \in (0, 1]$ такого, что $[\theta - \arcsin R, \theta + \arcsin R] \subset (\alpha, \beta)$ выполнялось неравенство

$$h(\theta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2R \cos(\varphi - \theta) + R^2)^{\frac{\rho}{2}} h(\operatorname{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})) d\varphi,$$

где $\text{Arg}(e^{i\theta} + Re^{i\varphi})$ определяется из условия, что он принадлежит написанному выше сегменту.

При более детальной разработке этой темы появляется свёрточное интегральное уравнение

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta - u) d\sigma(u),$$

где σ — конечная финитная мера. Результаты по теории этого уравнения излагаются следуя А.Ф. Леонтьеву (см. [1], [2]), который изучал его в связи с теорией рядов Дирихле. Используя интерполирующую функцию Леонтьева, предлагаются дополнительные условия, гарантирующие, что непрерывное решение уравнения

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} a_R(u) h(\theta - u) du$$

при фиксированном R будет ρ -тригонометрической функцией.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00006, <https://rscf.ru/project/24-21-00006/>.

Литература

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент*. М.: Наука (1976).
2. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент*. М.: Наука ГИФМЛ (1980).

Произведение Бляшке в рациональной аппроксимации четного и нечетного продолжения функции Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)

Для функции $f \in C[-1, 1]$ введем наилучшее равномерное рациональное приближение. Именно

$$R_n(f; [-1, 1]) = \inf \|f - r\|_{C[-1, 1]},$$

где инфимум берется по всем рациональным функциям r степени не выше n .

Через f^+ и f^- будем обозначать соответственно четное и нечетное продолжение $f \in C[0, 1]$ на отрезок $[-1, 1]$, т. е.

$$f^+(x) = f(|x|) \quad \text{и} \quad f^-(x) = f(|x|)\text{sign } x.$$

Мы также предполагаем, что $f(0) = 0$.

Рациональные и полиномиальные приближения функций f^+ и f^- изучались в работах [1, 2, 3]. Здесь мы обсудим полученные в [2] верхние оценки величины $R_n(f^\pm; [-1, 1])$ через $R_n(f^\mp; [-1, 1])$ и одну дополнительную характеристику f , связанную с произведением Бляшке.

Нам понадобится произведение Бляшке для правой полуплоскости

$$B_n(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - x_k}{x + x_k}, \quad x_k \in (0, 1], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Для функции $f \in C[0, 1]$ с $f(0) = 0$ введем характеристику

$$\rho_n(f) = \inf \|f \cdot B_n^2\|_{C[0, 1]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где инфимум берется по всем произведениям Бляшке вида (1).

Теорема. Пусть $f \in C[0, 1]$ и $f(0) = 0$. Тогда для любых натуральных $n \geq 2$ и $m \leq n/2$ имеют место неравенства

$$R_n(f^\mp; [-1, 1]) \leq 2\rho_m(f) + R_{n-2m}(f^\pm; [-1, 1]).$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”.

Литература

1. Мардвилко Т.С., Пекарский А.А. Применение действительного пространства Харди-Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022. No. 3 (2022), 16–36.
2. Мардвилко Т.С. Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжений функций. *Матем. заметки.* Т. 115, No. 2 (2024), 261–269.
3. Мардвилко Т.С. Соотношения между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями функций и их четными и нечетными продолжениями. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.* Т. 229 (2023), 47–52.

Применение превентивных моделей риск-менеджмента в обеспечении экономической безопасности Т. И. Маслюкова (Минск, Беларусь)

Под экономической безопасностью предприятия принято понимать определенное состояние защищенности от оказания отрицательного воздействия различных угроз на макро- и микроуровне, дестабилизирующих факторов, при котором реализуется процесс по обеспечению устойчивого развития. Соблюдение требований экономической безопасности для субъектов ведения бизнеса обуславливает их стабильность деятельности, а также достижение целей устойчивого развития [1].

Риск-менеджмент можно рассматривать как отдельную категорию риск менеджмента, основной задачей которого является принятие и реализация управленческих решений в условиях риска и неопределенности. При этом главная цель риск-менеджмента — предупреждение и минимизация воздействия рисков факторов на деятельность организации.

Очевидно, что чем ниже риски в сфере деятельности организации, тем выше уровень экономической безопасности. Поэтому понятие риска и понятие экономической безопасности связаны друг с другом. Управление рисками не направлено на полное устранение рисков и не дает гарантий полного устранения всех рисков факторов, действующих на организацию. Целью управления рисками является обеспечение непрерывного функционирования организации, предотвращение тяжелых рисков, обеспечение устойчивого функционирования организации.

В настоящее время многие организации ставят своей целью направить риск-менеджмент в сторону построения системы превентивной модели [2]. Система предварительного контроля построена на постоянной диагностике состояния организации, постоянном наблюдении за внутренней и внешней средой, определении рисков факторов, и разработке предупреждающих мероприятий. Методов построения превентивной системы управления рисками существует достаточно много. Среди них можно отметить: процедуру стресс-тестирования (становится очень распространенной, и показала свою состоятельность); метод “Стандарт по риск-менеджменту Австралии и Новой Зеландии”

(имеет универсальный межотраслевой характер); методика диагностики Марка Ричардсона.

В заключение можно отметить следующее: профессиональное управление в области рисков различной природы способствует повышению экономической безопасности организации, поэтому приемы и методы риск-менеджмента очень актуальны и тесно связаны с обеспечением экономической безопасности.

Литература

1. Суглобов А.Е., Воронцов Я.Н. К актуальным аспектам обеспечения экономической безопасности российских предприятий функционирующих за рубежом. *Russian Journal of Management*. (2021). №. 3. 146–150. DOI: <https://doi.org/10.29039/2409-6024-2021-9-3-146-150>.

2. Ряховская А.Н., Крюкова О.Г., Кузнецова М.О. *Риск-менеджмент — основа устойчивости бизнеса: учебное пособие*. М.: Магистр: ИНФРА-М, (2024).

Применение кластерного и дискриминантного анализа в исследовании развития возобновляемых источников энергии в европейских странах А. Д. Матюшенко, Т. Г. Зорина (Минск, Беларусь)

В настоящее время возобновляемые источники энергии приобретают все большее значение в производстве электроэнергии не только в связи с исчерпанием природных ресурсов, таких как продукты нефтепереработки, газ, уголь, но и в связи со значительными изменениями в окружающей среде и климате. Стоит учитывать и экономический фактор: для стран, не обладающих собственными природными ресурсами, стоимость выработки электроэнергии в разы выше за счет покупки природных ресурсов у стран, обладающих полезными ископаемыми.

Для исследования развития возобновляемых источников энергии в европейских странах авторы выдвинули гипотезу о том, что существуют группы стран со схожим уровнем развития определенных факторов, для которых применение определенных видов генерации электроэнергии является наиболее характерным.

К числу факторов, которые предопределяют возможность использования того или иного вида генерации электроэнергии, можно отнести следующие: уровень экономического развития (показатель – ВВП на душу населения в тыс. дол. США); размер выбросов загрязняющих веществ в атмосферу (показатель – выбросы CO_2 в т на душу населения); уровень запасов энергоресурсов (показатель – доля использования собственных ископаемых энергоресурсов (угля, природного газа и нефти) при производстве электрической энергии в %). Для анализа указанных показателей была собрана информация по 39 европейским странам за 2010 г. Стоит отметить, что в авторы производили расчеты за 2010 год, исходя из длительного временного лага с момента создания и до запуска любой из электростанций, оказывающее влияние на различные факторы.

Для выделения групп стран со схожим уровнем развития указанных выше факторов использовался метод иерархического кластерного анализа. Мерой сходства был выбран квадрат евклидова расстояния. Квадрат евклидова расстояния представляет собой сумму квадратов разностей в значениях для каждой переменной. Это наиболее часто используемая мера сходства. На основе анализа шагов агломерации было определено, что оптимальным для классификации данной совокупности является 3 кластера. Для деления стран на кластеры использовался программный пакет SPSS. С целью проверки гипотезы о наличии характерных для каждого кластера направлений был использован множественный дискриминантный анализ. В качестве зависимой переменной выступила принадлежность страны к кластерам, а в качестве предикторов – используемые страна-

ми виды генерации электроэнергии.

Целью дискриминантного анализа являлось выявление соответствий между выделенными на основе характеристик стран (уровень экономического развития; размер выбросов загрязняющих веществ в атмосферу; уровень запасов энергоресурсов) кластерами и определенными на основе дискриминантных функций группами стран по набору применяемых ими источников генерации электроэнергии. Совпадение кластеров и дискриминантных групп позволит сделать вывод о наличии взаимосвязей между характеристиками стран и используемых ими направлений развития возобновляемых источников генерации электроэнергии. По результатам дискриминантного анализа страны были разделены на 3 группы.

При построении модели использовался прямой метод, который предполагает включение всех предикторов в модель. Выполнение дискриминантного анализа осуществлялось с помощью программного пакета SPSS. В результате чего были получены 2 дискриминантные функции.

Литература

1. Zoryna T., Matyushenko A. Analysing the development of renewable energy sources in European countries. *E3S Web of Conferences*. EDP Sciences. Т. 470. С. 01043 (2023).

О периодических решениях допустимо возмущенной системы ОДУ с бесконечным числом предельных циклов

Э. В. Мусафиров, А. А. Гринь, А. Ф. Проневич (Гродно, Беларусь)

Для вещественной автономной дифференциальной системы третьего порядка, имеющей бесконечно много (континуум) предельных циклов (см. [1–3]),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0x - a_1y + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz, \\ \dot{y} &= a_1x + a_0y - a_2x^2 - a_3xy + a_4yz - a_5xz, \\ \dot{z} &= 2(a_0z + a_4z^2); \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

при $a_2 = a_3 = 0$ получено множество допустимо (т. е. с сохранением отражающей функции Мироненко [4]) возмущенных систем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a_0x - a_1y + a_4xz + a_5yz)(1 + \alpha_1(t)) + x\alpha_2(t) + y\alpha_3(t), \\ \dot{y} &= (a_1x + a_0y + a_4yz - a_5xz)(1 + \alpha_1(t)) + y\alpha_2(t) - x\alpha_3(t), \\ \dot{z} &= 2z(a_0 + a_4z)(1 + \alpha_1(t)),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\alpha_i(t)$ — произвольные скалярные непрерывные нечетные функции. С использованием теории отражающей функции Мироненко доказан следующий результат.

Теорема. Пусть $\alpha_i(t)$ — скалярные дважды непрерывно дифференцируемые нечетные функции ($i = \overline{1, 3}$), $a_4 \neq 0$, $a_1 \neq -a_0a_5/a_4$, $\omega := \pi |a_4|/|a_0a_5 + a_1a_4|$ и правая часть системы (1) есть 2ω -периодическая по t . Тогда $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такого, что $a_0k/a_4 < 0$, решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $x(-\omega) = \sqrt{-a_0k/a_4}$, $y(-\omega) = 0$, $z(-\omega) = -a_0/a_4$, есть 2ω -периодическое.

Литература

1. Булгаков В.И., Гринь А.А. Об одной бифуркации негрубого фокуса автономной системы третьего порядка. *Дифференциальные уравнения*. Т. 32, No. 12 (1996), 1703.

2. Гринь А.А., Мусафиров Э.В., Проневич А.Ф. Вещественная автономная квадратичная система трех дифференциальных уравнений с бесконечным числом предельных

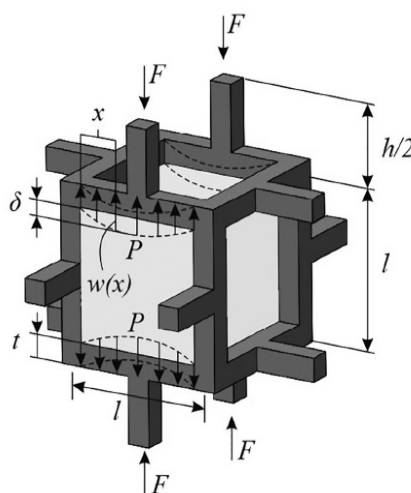
циклов. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук* Т. **58**, No. 2 (2022), 135–143.

3. Musafirov E., Grin A., Pranevich A., Munteanu F., Șterbeți C. 3D Quadratic ODE systems with an infinite number of limit cycles. *ITM Web Conf.* Vol. **49** (2022), 02006.

4. Мироненко В.И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем*. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины (2004).

Разработка математической модели биокompозита пористый титан–костная ткань на основе ячейки Гибсона–Эшби А. В. Никитин (Минск, Беларусь)

На данный момент для прогнозирования эффективных свойств пористых материалов наиболее удачной считается модель Гибсона–Эшби, которая представляет собой ячейку в виде куба, ребрами которой являются одномерные конечные элементы типа балка [1]. Используя теорию расчета балок на упругом винклеровском основании была разработана математическая модель для изучения влияния эффекта вставания костных тканей в открытые поры титановых ячеистых имплантов [2]. Для этого внутри ячейки Гибсона–Эшби моделировался дополнительный объем, имитирующий кость. Геометрическое представление такой модели отображено на рисунке ниже.



Применение теории балок для классической модели Гибсона–Эшби позволило получить формулы расчета, демонстрирующие удовлетворительное соответствие расчётных результатов с данными из литературы и подтвердили гипотезу о том, что деформация высокопористых образцов в основном обусловлена прогибом горизонтальных перемычек. Также было установлено, что при снижении пористости деформация ячейки происходит в большей степени за счет сжатия вертикальных стоек.

Литература

1. Никитин А.В., Михасев Г.И. Оценка эффективного модуля Юнга пористого титана с открытыми порами на основе трехмерного массива ячеек Гибсона–Эшби. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* (2022). № 1, 75–82.

2. Никитин А.В., Михасев Г.И., Ботогова М.Г. Определение эффективного модуля юнга биокompозита кость–титан, образованного в результате полной остеointеграции имплантата. *Механика машин механизмов и материалов.* (2023). № 2(63). 69–74.

**Стационарный рост упругопластической трещины
и обратная задача механики разрушения**
В. А. Нифагин, О. В. Дубровина (Минск, Беларусь)

В [1] введен контурный интеграл, вычисляемый на заданном распределении σ_{ij} , u_i , допускающий энергетическое толкование, как компоненты вектора потока энергии в вершину трещины инвариантный относительно выбора контура, который обобщается для упругопластичности

$$\int_{\Gamma} \left(\left(W_0(\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{2} \rho \dot{\gamma}^2 u_{i,x_1} u_{i,x_1} \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,x_1} \right) ds.$$

Здесь контур Γ охватывает вершину трещины в тонкой пластинке (для определенности будем рассматривать плоскую деформацию) и выходит своими концами на берега трещины, свободные от напряжений, u_{i,x_1} — производные компонент вектора перемещений, ρ — плотность материала, W_0 — полная работа напряжения на соответствующих деформациях (потенциал, характеризующий свойства упругопластического материала), $\dot{\gamma}$ — скорость распространения вершины трещины. Ось x_1 направлена вдоль оси трещины.

Решение задач о жесткой концентрации строится в асимптотической постановке, причем для упругопластичности главный член разложения вблизи точки сингулярности содержит наряду с неопределенным множителем, неизвестный показатель особенности, относящийся к тонкой, а в ряде задач и сверхтонкой структуре в рамках многоуровневого масштабирования.

Случай распространяющейся трещины еще более контрастен, так как число характерных асимптотик здесь может достигать трех [2]. Для устранения указанного произвола полезным оказывается использование энергетического интегрального инварианта. Второе направление применения J -интеграла связано с формулировкой условий предельного равновесия и распространения трещины, когда для растущей в упругопластической среде трещины величину J можно интерпретировать, в обобщенном смысле, как изменение полной энергии в области с границей Γ на единицу приращения длины трещины. Поэтому энергетическое условие предельного равновесия принимает вид $J = J_c$, где J_c — положительная величина, зависящая от длины трещины, скорости и истории нагружения, геометрии и внешних усилий, свойств среды, интерпретируемая как удвоенная эффективная поверхностная энергия [3].

Тогда условием распространения стационарной трещины в упругопластической среде с инкрементальными уравнениями состояния можно считать условие $J = 2A^*$, являющееся энергетическим критерием для стационарного роста упругопластической трещины. Здесь A^* — удельная работа разрушения является положительной константой и оценивается экспериментально. Использование энергетического критерия для различных материалов предполагает известную величину удельной работы и величин под интегралом, формально вычисляемых из асимптотического решения прямой задачи. Далее задача сводится к обратной задаче механики разрушения определению функции $\dot{\gamma}(r, \varphi)$ по критическому значению J -интеграла на семействе окружностей с центром на оси x_1 . При этом для однозначной разрешимости задачи подинтегральная функция в J должна быть четной по x_2 .

Предположим, что у нас есть набор величин $u(r_i, \varphi_i)$, $\sigma(r_i, \varphi_i)$ — для заданных точек сетки в окрестности вершины трещины, а также известны граничные условия на берегах. Строим нейронную сеть, обучение которой производится путем минимизации функции потерь, измеряющей разницу между предсказанными и наблюдаемыми значениями параметров удельной работы разрушения.

Нейронная сеть с подкреплением обучалась с помощью данных решения прямой задачи, полученного методом асимптотических разложений [2] на основе программного модуля созданного инструментами фреймворка PyTorch.

Литература

1. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. М.: Наука (1974).
2. Нифагин В.А. *Асимптотические методы в задачах упругопластической теории трещин*. LAP LAMBERT Academic Publishing (2017).
3. Матвиенко Ю.Г. *Модели и критерии механики разрушения*. М.: Физматлит (2006).

Равномерно сходящиеся последовательности многочленов, имеющих заданные нули в кольце h -комплексных чисел В. А. Павловский (Минск, Беларусь)

Пусть $\mathbb{C}_h$ — кольцо h -комплексных чисел вида $z = x + jy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$ с делителями нуля вида $z = (1 \pm j)t$, $t \in \mathbb{R}$ [1]. В $\mathbb{C}_h$ норма: $\|z\| = |x| + |y|$.

Определение 1. Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется h -целой, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ и выполняются условия $u'_x = v'_y$, $u'_y = v'_x$ [2].

Определение 2. Порядком h -целой функции $f(z)$ назовём число $\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$, где $M_f(r) = \max_{\|z\|=r} |f(z)|$. Типом h -целой функции $f(z)$ порядка ρ назовём число $\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$. Функция $f(z)$ имеет нормальный тип, если $0 < \sigma < +\infty$.

Теорема 1. Пусть $\{c_{k,m}\}$, $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n_m$ — множество h -комплексных чисел, удовлетворяющих условиям:

- 1) $0 < \delta \leq \|c_{1,m}\| \leq \|c_{2,m}\| \leq \dots \leq \|c_{k-1,m}\| \leq \|c_{k,m}\| \leq \dots \leq \|c_{n_m,m}\|$,
- 2) $c_{k,m}$ не являются делителями нуля $\forall m \in \mathbb{N}$.

Последовательность многочленов

$$P_m(z) = \prod_{k=1}^{n_m} \left(1 - \frac{z}{c_{k,m}}\right) = 1 + d_1^m z + d_2^m z^2 + \dots + d_{n_m}^m z^{n_m} \quad (1)$$

такова, что при некотором $p \in \mathbb{N}$ выполняется $\sum_{k=1}^{n_m} \|c_{k,m}\|^{-(p+1)} \leq M$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) и $\|d_k^m\| \leq M$, $k = 1, 2, \dots, p$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность (1) равномерно ограничена в любом h -круге $\{\|z\| \leq r\}$ и верна оценка

$$\|P_m(z)\| \leq e^{A_p M r^{p+1} + \frac{1}{p} \sigma_p r^p + \dots + \frac{1}{2} \sigma_2 r^2 + \sigma_1 r},$$

где $A_p, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p > 0$ — некоторые константы. Если $\sum_{k=1}^{n_m} \|c_{k,m}\|^{-1} \leq M$, то $\|P_m(z)\| \leq e^{Mr}$.

Теорема 2. Пусть в (1) все $c_{k,m}$ — вещественные и последовательность $P_m(z)$ равномерно сходится в некоторой окрестности нуля к функции, не равной тождественному нулю. Тогда эта последовательность сходится равномерно в любом h -круге $\{\|z\| \leq r\}$. При этом предельная функция — h -целая порядка не выше $p + 1$ и нормального типа.

Литература

1. Павловский В. А. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце h -комплексных чисел. *Весці БДПУ*. Сер. 3. No. 4 (2020), 25–31.
2. Павловский В. А. Некоторые оценки роста h -целых функций. *Весці БДПУ*. Сер. 3. No. 2 (2022), 18–23.

Построение первых интегралов неавтономных полиномиальных многомерных дифференциальных систем

по кратным комплекснозначным частным интегралам

П. Б. Павлючик, А. Ф. Проневич (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^m P_{ij}(t, x) dt_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \leq n, \quad (1)$$

где $P_{ij}: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, суть полиномы по зависимым переменным $x_1, \dots, x_n$ с голоморфными по независимым переменным $t_1, \dots, t_m$ на области $T \subset \mathbb{R}^m$ коэффициентами. При $m = 1$ система (1) является неавтономной полиномиальной обыкновенной дифференциальной системой n -го порядка.

В данной работе выделены классы неавтономных систем в полных дифференциалах (1), у которых первые интегралы находятся по кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам (см. определение в [1, с. 173]).

Так, например, имеет место следующее утверждение.

Теорема [2]. Если дифференциальная система (1) имеет кратный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}$ кратности $\mathfrak{z} = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{f}_{\zeta}$ и существует такое $\zeta \in \{1, \dots, \mathfrak{e}\}$, что при фиксированном $\mathfrak{g}_{\zeta} \in \{1, \dots, \mathfrak{f}_{\zeta}\}$ у кофакторов частного интеграла $\Re \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta} \mathfrak{g}_{\zeta} j}$, $j = 1, \dots, m$, вещественные части

$$\Re \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta} \mathfrak{g}_{\zeta} j}(t, x) = \lambda_j \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m,$$

то скалярная функция

$$F: (t, x) \rightarrow \Re \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta} \mathfrak{g}_{\zeta}}(t, x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j t_j \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$$

будет первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (1).

Литература

1. Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем. Гродно: ГрГУ (2006).
2. Горбузов В.Н., Павлючик П.Б., Проневич А.Ф. Кратность комплекснозначных полиномиальных частных интегралов неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы*. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Т. 13, № 3 (2023), 33–48.

Об автомодельных решениях задачи Стефана–Дирихле в угле Е. Ю. Панов (Великий Новгород, Россия)

В угле $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \alpha < x/t < \beta\}$, где $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, рассмотрим многофазную задачу Стефана для уравнения теплопроводности

$$u_t = a_i^2 u_{xx}, \quad u_i < u < u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad (1)$$

где $u_\alpha = u_0 < u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = u_\beta$, u_i , $i = 1, \dots, m$ — температуры фазовых переходов, $a_i > 0$, $i = 0, \dots, m$, — коэффициенты диффузии i -ой фазы. На неизвестных линиях $x = x_i(t)$ фазовых переходов, где $u = u_i$, должно выполняться условие Стефана

$$d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(t, x_i(t)-) = 0, \quad (2)$$

в котором $k_i > 0$ — коэффициент теплопроводности i -ой фазы, а $d_i \geq 0$ — скрытая удельная теплота i -го фазового перехода. На неподвижных границах $\{(t, \alpha t) \mid t > 0\}$, $\{(t, \beta t) \mid t > 0\}$ (при $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ они меняются на, соответственно, вертикальные лучи $(0, x)$, $x < 0$, $x > 0$) ставится условие Дирихле

$$u(t, \alpha t) = u_\alpha, \quad u(t, \beta t) = u_\beta. \quad (3)$$

Решение задачи (1)–(3) автомодельно, $u = u(x/\sqrt{t})$, и имеет следующий вид: при $i = 0, \dots, m$

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)} (F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad \xi_i < \xi < \xi_{i+1}, \quad (4)$$

где $\xi_0 = \alpha, \xi_{m+1} = \beta$; $F(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-s^2/4} ds$. Величины ξ_i , $i = 1, \dots, m$, подлежат определению из условий Стефана (2):

$$d_i \xi_i/2 + \frac{k_i(u_{i+1} - u_i)F'(\xi_i/a_i)}{a_i(F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i))} - \frac{k_{i-1}(u_i - u_{i-1})F'(\xi_i/a_{i-1})}{a_{i-1}(F(\xi_i/a_{i-1}) - F(\xi_{i-1}/a_{i-1}))} = 0.$$

Оказалось, что эта нелинейная алгебраическая система имеет градиентную форму $\nabla E(\bar{\xi}) = 0$, где потенциал

$$E(\bar{\xi}) = - \sum_{i=0}^m k_i(u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)) + \sum_{i=1}^m d_i \xi_i^2/4,$$

$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega$, открытый выпуклый конус $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задан неравенствами $\alpha < \xi_1 < \dots < \xi_m < \beta$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. Функция $E(\bar{\xi})$ коэрцитивна и строго выпукла в Ω . Поэтому, она имеет единственную критическую точку $\bar{\xi}_0 \in \Omega$, которая является точкой её глобального минимума. Координаты этой точки определяют единственное решение (4) задачи (1), (2), (3).

Моделирование НДС массива горных пород в окрестности одиночной выработки на различных глубинах с учетом прослоек глины между слоями горных пород

Д. А. Петрачков, М. А. Николайчик (Минск, Беларусь)

Наличие в массиве горных пород ослаблений в виде глинистых прослоек существенно уменьшает несущую способность массива при проведении горных работ [1]. В работе представлены варианты способов моделирования напряжённо-деформированного состояния (НДС) слоистого массива горных пород в окрестности одиночной выработки на различных глубинах с учетом прослоек глины между слоями горных пород, в частности способы математического представления глинистых прослоек и учет изменения свойств контактного взаимодействия между слоями горных пород при наличии между ними глинистых прослоек [2]. Решение модельных задач представлено в виде алгоритма моделирования контактной задачи с трением для системы деформируемых тел. Критерий пластичности породного массива по поверхностям скольжения записан в соответствии с законом Кулона-Мора [3]:

$$f = C + \sigma_n \tan \phi - \tau_n,$$

где τ_n — касательное напряжение, σ_n — нормальное напряжение, ϕ — угол внутреннего трения пород, C — сцепление пород.

Рассмотрены случаи и выявлены различия поведения массива около выработки, находящейся на малых (600 м), средних (800 м) и больших (1150 м) глубинах.

Численное моделирование выполнено на основе метода конечных элементов. Проведен анализ образовавшегося НДС и выявлены различия несущей способности геомеханической системы “одиночная выработка — слоистый массив горных пород” при решении с учетом и без учета глинистых прослоек.

Литература

1. Петровский А. Б., Прушак В. Я., Лутович Е. А. Физико-механические свойства пород, слагающих и перекрывающих Третий калийный пласт Старобинского месторождения. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. Том. 65, No. 4 (2021), 484-494.
2. Федосеев А. К. Оценка влияния подработки на опасность газодинамического разрушения горных пород на Старобинском месторождения калийных солей. *Горное эхо*. No. 1 (2022), 62-67.
3. Константинова С. А., Чернопазов Д. С. Контактная задача с трением для системы вязкоупругих тел и некоторые ее практические приложения *Известия высших учебных заведений. Горный журнал* No. 7 (2010), 46-52.

Decomposition approach to linear-fractional optimization problem on the generalized multinetwork

L. A. Pilipchuk, Y. V. Ramanouski (Minsk, Belarus)

For a generalized multinetwork $G = (I, U)$, we consider the following linear-fractional optimization problem

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} p_{ij}^k x_{ij}^k + \beta}{\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} q_{ij}^k x_{ij}^k + \gamma} \longrightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k, i \in I^k, k \in K; \quad \sum_{k \in K_0(i,j)} x_{ij}^k \leq d_{ij}^0, (i,j) \in U_0; \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, p = \overline{1, l}; \quad x_{ij}^k \geq 0, k \in K_0(i,j), (i,j) \in U_0; \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq d_{ij}^k, k \in K_1(i,j), (i,j) \in U; \quad x_{ij}^k \geq 0, k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j), (i,j) \in U \setminus U_0;$$

$$I_i^+(U^k) = \{j \in I^k : (i,j)^k \in U^k\}; \quad I_i^-(U^k) = \{j \in I^k : (j,i)^k \in U^k\}. \quad (4)$$

Here K ($|K| < \infty$) is a set of different products (types of flow) transported through the multinet network G . Without loss of generality, let's put $K = \{1, \dots, |K|\}$. Let us denote the connected network corresponding to a certain type k of flow with $S^k = (I^k, U^k)$, where I^k is the set of nodes and U^k is the set of arcs which are available for the flow of type k , $k \in K$. Also, we define for each node $i \in I$ the set of types of flows $K(i) = \{k \in K : i \in I^k\}$ and for each multiarc $(i,j) \in U$ the set $K(i,j) = \{k \in K : (i,j)^k \in U^k\}$. We assume that the denominator $q(x)$ of the objective function (1) does not change sign on a set of multiflows X , $x \in X$.

We use constructive decomposition theory [1] for constructing solutions to a class of *mathematical programming problems*: extremal inhomogeneous problems of linear-fractional flow programming on a generalized multinet network (1)–(4). The work is devoted to methods, algorithms and technologies for constructing *optimal and suboptimal solutions* in synthesis with modern innovative technologies of sparse matrix analysis [2], algorithmic graph theory, theoretical computer science. The presented algorithms and computing technologies make it possible to construct solutions to large sparse linear systems with matrices of full and incomplete rank using parallel computing.

Литература

1. Pilipchuk L.A. *Linear-fractional extremal inhomogeneous problems network flow programming*. Minsk: BSU, (2013). (in Russian).
2. Pilipchuk L.A. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk: BSU, (2013).

Дробные уравнения и численный анализ

С. И. Пискарев (Москва, Россия)

Рассматривается дискретизация уравнений в частных производных разностными схемами. А именно, рассматривается дробное уравнение

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad (1)$$

в банаховом пространстве E с дробной производной $D^\alpha u(t)$ по Капуто и оно аппроксимируются явными и неявными разностными схемами. Такие задачи отличаются от классической ситуации тем, что гладкость исходных данных и скорость сходимости разностных схем имеют [1]–[4] неожиданную связь $O(\tau^\alpha)$. Это касается и схем, предложенных в работах Бажлековой, Апыралыева, Подлубного, Понче и др. Как выяснилось скорость сходимости в большей степени зависит от показателя производной, а не от схемы, аппроксимирующей (1).

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 23-21-00005.

Литература

1. Li Liu, Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev S. Convergence Rates of a Finite Difference Method for the Fractional Subdiffusion Equations. *Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer Cham Switzerland. V. 423 (2023), 89–113.
2. Li Liu, Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev S. Discrete almost maximal regularity and stability for fractional differential equations in $L_p([0, 1], E)$. *Applied Mathematics and Computation*. V. 389 (2021), Article 125574.
3. Piskarev S., Siegmund S. Unstable manifolds for fractional differential equations. *Eurasian journal of mathematical and computer applications*. V. 10 (2022), 58–72.
4. Piskarev S., Ovchinnikov A. *Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations*. Singapore: World Scientific. (2023).

Обобщенные решения задач сопряжения для уравнения Гельмгольца и уравнений Максвелла Н. Б. Плещинский (Казань, Россия)

Задачи дифракции электромагнитных волн на тонких проводящих экранах сводятся к задачам сопряжения для уравнений Максвелла или для уравнения Гельмгольца в двумерном случае. Например, нужно найти уходящие на бесконечность решения $u^-(x, z)$ и $u^+(x, z)$ уравнения Гельмгольца в полосе $0 < x < a$ при $z < 0$ и $z > 0$, удовлетворяющие некоторым условиям при $z = 0$. Искомые решения можно представить в виде

$$u^\pm(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^\pm \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot e^{\pm i \gamma_n z},$$

где $\gamma_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2}$, $\operatorname{Re} \gamma_n > 0$ или $\operatorname{Im} \gamma_n > 0$, k — волновое число. Эти ряды сходятся при $z \neq 0$ при любых наборах чисел $u_n^\pm$, но не ясно, что будет при $z \rightarrow 0 \pm 0$.

Построены специальные классы обобщенных функций — линейных непрерывных функционалов на пространствах линейных комбинаций некоторых базисных функций, образующих о.н.с. на поперечном сечении волновода. В случае плоского волновода в качестве таких функций берутся $\sin \frac{\pi n}{a} x$ или $\cos \frac{\pi n}{a} x$, в случае прямоугольного волновода — произведения синусов и косинусов. Для закрытого волновода произвольного сечения — системы собственных функций оператора Лаласа, удовлетворяющих условию Дирихле или условию Неймана на границе сечения. В случае открытого пространства удобно использовать функции Эрмита, если выбраны декартовы координаты, или функции Лагерра, если выбраны цилиндрические координаты.

Операции над обобщенными функциями вводятся так, что значения нового функционала определяются через значения исходного функционала на преобразованных базисных функциях. В отличие от классической теории распределений Шварца, в некоторых случаях существуют не все производные обобщенных функций, а, например, только четного порядка.

В качестве обобщенных решений уравнения Гельмгольца или уравнений Максвелла рассматриваются отображения, которые значения продольной координаты z переводят в обобщенную функцию из пространства, выбранного в соответствии с геометрией задачи. Существенно, что условия обращения в нуль обобщенной функции на части области определения базисных функций позволяют формулировать задачу дифракции на экране как бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных u_n^+ или u_n^- .

Литература

1. Плещинский Н.Б. *Обобщенные решения координатных задач дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах*. Казань: Казанский федеральный университет (2022).

Об аппроксимациях интегралов типа Римана–Лиувилля на отрезке рациональными операторами Фурье–Чебышёва П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба (Гродно, Беларусь)

Функции, представимые интегралом Римана–Лиувилля, нашли широкое применение в различных областях науки и техники [1]. Ряд задач полиномиальной [2, 3] и рациональной аппроксимаций [4, 5] основаны на их использовании. Вместе с тем в указанных выше исследованиях ряды Фурье применяются эпизодически. Нами [6] изучены аппроксимации интегралов типа Римана–Лиувилля на отрезке $[-1, 1]$ методом, основанным на представлении его плотности частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва. Получены оценки поточечных и равномерных приближений в случае, когда плотность принадлежит некоторым классам непрерывных функций на отрезке. В 1979 году Е.А. Ровба [7] ввел интегральный оператор на отрезке $[-1, 1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

Целью настоящей работы является исследование рациональных аппроксимаций интегралов типа Римана–Лиувилля, основанное на представлении его плотности рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва. Получены поточечные и равномерные оценки приближений и установлена зависимость оценок от выбора полюсов аппроксимирующей рациональной функции и положения точки на отрезке. Причем на концах отрезка скорость выше чем в целом на отрезке.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований “Конвергенция–2020”, № 20162269.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника (1987).

2. Никольский С.М. О наилучшем приближении дифференцируемых непериодических функций многочленами. *Acta scien. math.* Vol. 12 (1950), 185–197.

3. Тюленева А.А. Приближение интегралов Римана–Лиувилля алгебраическими полиномами на отрезке. *Известия Саратовского университета*. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 14, вып. 3 (2014), 305–311.

4. Старовойтов А.П. Сравнение скоростей рациональных и полиномиальных аппроксимаций дифференцируемых функций. *Математические заметки*. Т. 44, № 4 (1988), 528–535.

5. Ровба Е.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля, рациональными операторами. *ДАН Беларуси*. Т. 40, № 6 (1996), 18–22.

6. Поцейко П.Г., Ровба Е.А. Аппроксимация интегралов типа Римана–Лиувилля на отрезке некоторыми методами основанными на суммах Фурье–Чебышева. *Математические заметки*. Т. 116, № 1 (2024), 122–138.

7. Ровба Е.А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации. *ДАН БССР*. Т. 23, № 11 (1979), 968–971.

**Динамические многофакторные производственные функции,
учитывающие расширенно нейтральный по Хиксу
научно-технический прогресс**

А. Ф. Проневич (Гродно, Беларусь), Г. А. Хацкевич (Минск, Беларусь)

Рассмотрим многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in G \times \mathbb{R}_+, \quad G \subset \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}, \quad (1)$$

где y — выпуск продукции, $x = (x_1, \dots, x_n)$ есть вектор затрат производственных ресурсов, t — параметр времени из полуоткрытого числового луча $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $G \times \mathbb{R}_+$.

Цель данной работы — предложить концепцию *расширенно нейтральности по Хиксу* в многофакторном случае (для случая $n = 2$ см., например, [1]) и установить аналитические виды динамических многофакторных ПФ, учитывающих расширенно нейтральный по Хиксу НТП.

Будем говорить, что НТП является *расширенно нейтральным по Хиксу относительно факторов* x_i и x_j , $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$, $k \leq n$, если предельная норма замещения $MRTS_{ij}(f)$ не зависит от параметра t НТП. Если условие нейтральности выполняется при всех индексах $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, $k \leq n$, то скажем, что НТП является *расширенно нейтральным по Хиксу относительно факторов* $x_1, \dots, x_k$, а при $k = n$ — просто *расширенно нейтральным по Хиксу*.

Основной результат выражает следующее утверждение, которое обобщает положения работы [2] и расширяет представления для ПФ, полученные в [3].

Теорема. ПФ (1) учитывает расширенно нейтральный по Хиксу относительно факторов производства $x_1, \dots, x_k$, $k \leq n$, НТП тогда и только тогда, когда она представима в форме $f(x, t) = \Phi(\Psi(x), x_{k+1}, \dots, x_n, t)$, где функции Φ (неотрицательная) и Ψ являются непрерывно дифференцируемыми.

Благодарности. Работа выполнена в рамках НИР “Экономико-математическое моделирование научно-технического прогресса в контексте производственных функций для прогнозирования экономического роста Республики Беларусь”, договор с БРФФИ № Г23-089 от 02.05.2023 г., № ГР 20221093.

Литература

1. Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А. Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение. *Белорусский экономический журнал*. № 3 (2020), 87–105.
2. Blackorby Ch., Lovell C.A.K., Thursby M.C. Extended Hicks neutral technical change. *The Economic Journal*. Vol. 35, No. 344 (1976), 845–852.
3. Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А. Концепция нейтральности научно-технического прогресса по Хиксу для многофакторных производственных функций. *Экономика, моделирование, прогнозирование*. Вып. 17 (2023), 84–93.

К теории операторов дифференцирования распределенного порядка

А. В. Псху (Нальчик, Россия)

Рассмотрим оператор

$$D_{0x}^{[\mu]} f(x) = \int_{\mathbb{R}} D_{0x}^t f(x) \mu(dt), \quad (1)$$

где D_{0x}^t — дробная производная (интеграл) Римана–Лиувилля порядка t по переменной x с началом в точке $x = 0$, μ — знакопеременная борелевская мера на $\mathbb{R}$.

Оператор (1) относится к классу операторов дифференцирования (интегрирования) распределенного порядка [1].

Запишем (1) в виде

$$D_{0x}^{[\mu]} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} (f * \Phi_\mu)(x),$$

где

$$\Phi_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{-t-1}}{\Gamma(-t)} \mu_n(dt), \quad (2)$$

μ_n — сдвиг меры μ на n , $n = \min\{k : k \geq \beta, k \in \mathbb{N}_0\}$, $\beta = \sup \operatorname{supp} \mu < \infty$.

В докладе обсуждаются вопросы обращения оператора (1). В частности, используя обобщенное преобразование Станковича [2], для ядра (2) найдена пара Сонина [3, 4], в терминах которой построен обратный оператор и доказаны формулы Ньютона–Лейбница.

Литература

1. *Нахушев А.М.* К теории дробного исчисления. *Дифференц. уравнения*. Т. 24, No. 2 (1988), 313–324.
2. *Pskhu A.* Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives. *Bol. Soc. Mat. Mex.* V. 29, No. 93 (2003), 1–17.
3. *Сонин Н.Я.* Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: ГИТТЛ (1954).
4. *Рубин Б.С.* Теорема вложения для образов операторов свертки на конечном отрезке и операторы типа потенциала, I. *Изв. вузов. Матем.* No. 1(236) (1982), 53–63.

Спектральный метод Чебышева для численного решения одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений Г. А. Расолько, В. М. Волков (Минск, Беларусь)

Рассмотрим класс интегро-дифференциальных уравнений, используемых для описания аэродинамики крыла конечной длины [1]:

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x,t) \Gamma'(t) dt + \int_{-1}^1 v(x,t) \Gamma(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Здесь $B(x)$, $v(x,t)$, $g(x,t)$ и $f(x)$ — заданные функции, $-1 < x < 1$, $\Gamma(x)$ — искомая функция, удовлетворяющая граничными условиями $\Gamma(\pm) = 0$.

Выделяя сингулярную часть уравнения (1), $u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt$, и применяя формулу обращения сингулярного интеграла в классе функций $h(0)$ по Мусхелишвили [2], имеем:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x,t) u(t) dt, \quad H(x,t) = \ln \frac{1 - xt + \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{|t-x|}.$$

Для приближенного решения задачи используем разложение неизвестной функции $u(x) \simeq u_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x)$, где $U_k(x)$ — многочлены Чебышева второго рода. Далее,

согласно методике [3], приближенное полиномиальное представление известных функций уравнения (1) с учетом ортогональности многочленом Чебышева и спектральных соотношений для сингулярных интегралов позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов c_k , решение которой дает приближенное решение задачи:

$$\Gamma(x) \simeq \Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x).$$

Численные эксперименты показывают высокую точность предложенного метода. В частности, погрешность приближенного решения $\delta \leq 10^{-14}$ достигается уже при $n \leq 20$.

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. Прямые методы решения уравнения теории крыла. Изв. вузов. Матем., (1974), № 2, 29–44.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, (1968).

К анализу свойств согласованности дифференциальной и разностной задач в системном случае В. И. Репников (Минск, Беларусь)

На примере модельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0, \quad A = A^T > 0 \quad (1)$$

обсуждается техника исследования различных уровней согласованности в поведении решений исходной дифференциальной и аппроксимирующей ее разностной задач. Как показано, например, в [1], функцией устойчивости любого линейного одношагового метода является матричная функция $Q(\tau A)$, где $Q(z)$, $z = \tau\lambda$ — функция устойчивости соответствующего метода, примененного к стандартному скалярному модельному уравнению $\dot{u}(t) + \lambda u(t)$, т.е. разностное уравнение в нашем случае имеет вид $\hat{y} = Q(\tau\lambda)y$. Поэтому использование разложения разностных решений по базису из собственных векторов матрицы A (которые в нашем случае образуют ортонормированную систему, что значительно упрощает выкладки) $y = \sum_{i=1}^n C_i \xi^i$, $\hat{y} = \sum_{i=1}^n \hat{C}_i \xi^i$ позволяет получить соотношения, связывающие коэффициенты разложений $\hat{C}_i = Q(z_i)C_i$, $z_i = \tau\lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, в которых λ_i — собственные значения матрицы A (считаем их упорядоченными, например, по убыванию).

Теперь легко получается традиционно используемое в качестве условия устойчивости (понимаемой как монотонное убывание квадрата некоторой энергетической нормы решения $\delta_k(y) = (A^k y, y)$) ограничение на величину параметра дискретизации τ (это касается чаще всего явных методов) вида $\tau \leq \frac{a}{\lambda_n}$, где a — некоторая константа, являющаяся решением неравенства $|Q(z)| \leq 1$. Более детальный анализ показывает, что остается диапазон значений τ , имеющий вид $\left(\frac{2}{\lambda_n}, \frac{2}{\lambda_1}\right)$, при котором возможно устойчивое поведение разностного решения. Например, непосредственное решение неравенства $\delta_k(\hat{y}) < \delta_k(y)$ позволяет получить ограничение вида $\tau < \frac{a}{\mu_{k+1}(y)}$, $\mu_{k+1} = \frac{\delta_{k+2}}{\delta_{k+1}}$. В то же время величина μ_k на точном решении модельной системы, отличном от гармоники, также является монотонно убывающей. Поэтому имеет смысл также требовать выполнения этого свойства на разностном решении (в надежде получить максимально слабое

ограничение на величину τ). Обсуждаются также функционалы более сложного вида, правильно ведущие себя на точном решении задачи (1) [2] и их использование в конструкции аппроксимирующих разностных уравнений.

Литература

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир. (1988).
2. Репников В.И. О свойствах некоторых функционалов, связанных с линейными дифференциальными системами. Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ., мат., информ. (2001), № 2. 60–65.

Многочленные асимптотики для функции Грина уравнения переноса излучения Н. Н. Роговцов (Минск, Беларусь)

В статье [1] было получено аналитическое представление для функции Грина $\tilde{G}_\infty(\tau, \Omega; \tau_1, \Omega_1; \omega_0)$, которое является решением такой краевой задачи:

$$\mu \frac{\partial \tilde{G}_\infty(\tau, \Omega; \tau_1, \Omega_1; \omega_0)}{\partial \tau} = -\tilde{G}_\infty(\tau, \Omega; \tau_1; \omega_0) +$$

$$+ \frac{\omega_0}{4\pi} \int p(\Omega \cdot \Omega') \tilde{G}_\infty(\tau, \Omega; \tau_1, \Omega_1; \omega_0) d\Omega' + \delta(\tau - \tau') \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi') \quad (1)$$

$$(\tau, \tau_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)), \quad \omega_0 \in (0, 1), \quad (\Omega, \Omega_1) \in \Omega \times \Omega;$$

$$\lim_{|\tau - \tau_1| \rightarrow +\infty} \tilde{G}_\infty(\tau, \Omega; \tau_1, \Omega_1; \omega_0) = 0. \quad (2)$$

При отыскании этого представления считалось, что функция $p(\mu)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $[-1, 1]$, которое не всегда можно использовать при решении прикладных проблем теории переноса излучения (РТТ).

Установлена верность следующих утверждений:

Утверждение 1. Аналитическое представление для $\tilde{G}_\infty(\tau, \Omega; \tau_1, \Omega_1; \omega_0)$, полученное в [1] справедливо и тогда, когда $p(\mu) \in L_8(-1, 1)$.

Утверждение 2. Если $p(\mu) \in L_8(-1, 1)$, то многочисленные асимптотики для функции Грина при $|\tau - \tau_1| \rightarrow +\infty$ могут быть записаны в виде аналитических выражений, содержащих собственные значения и собственные функции, соответствующие дискретным спектрам приведенных характеристических уравнений РТТ [1, 2].

Литература

1. Роговцов Н.Н. Конструктивная теория скалярных характеристических уравнений теории переноса излучения. II. Алгоритмы отыскания решений и их аналитические представления. ДУ, (2015), 51, N 5, 650–662.
2. Роговцов Н.Н. Конструктивная теория скалярных характеристических уравнений теории переноса излучения. I. Основные утверждения теории и условия применимости метода усечения. ДУ, (2015), 51, N 2, 263–276.

**О дифференцировании многопараметрической
функции Ле Руа относительно параметров
С. В. Рогозин, М. В. Дубатовская (Минск, Беларусь)**

В [1] предложено следующее обобщение функции типа Ле Руа [2]

$$F_{(\alpha, \beta)_m}^{(\gamma)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod_{j=1}^m [\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{\gamma_j}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

определенной для всех $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{C}$ вне исключительного множества

$$\mathcal{P}_0 \equiv \{(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^2 : \exists k, \alpha_j k + \beta_j = 0, -1, -2, \dots \text{ \& } \operatorname{Re} \gamma_j \leq 0\}.$$

Следуя идеям работы [3] установлены формулы дифференцирования функции (1) по параметрам

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{(\alpha, \beta)_m}^{(\gamma)}(z)}{\partial \alpha_n} &= -\gamma_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \psi(\alpha_n k + \beta_n) z^k}{\prod_{j=1}^m [\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{\gamma_j}}, \\ \frac{\partial F_{(\alpha, \beta)_m}^{(\gamma)}(z)}{\partial \beta_n} &= -\gamma_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(\alpha_n k + \beta_n) z^k}{\prod_{j=1}^m [\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{\gamma_j}}, \\ \frac{\partial F_{(\alpha, \beta)_m}^{(\gamma)}(z)}{\partial \gamma_n} &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln[\Gamma(\alpha_n k + \beta_n)] z^k}{\prod_{j=1}^m [\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{\gamma_j}}. \end{aligned}$$

Справедливость этих формул вытекает из равномерной по параметрам сходимости рядов в правой части формул, доказанной с помощью неравенств для ψ -функции (дигамма функции) $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ [4, Ch. 5] и классической Γ -функции (см. [5]).

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”.

Литература

1. Rogosin S., Dubatovskaya M. Multi-parametric Le Roy function revisited. *Fract Calc Appl Anal.* Vol. 27 (2024), 64–81. <https://doi.org/10.1007/s13540-023-00221-9>
2. Garrappa R., Rogosin S., Mainardi F. On a generalized three-parameter Wright function of Le Roy type. *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. 20 (5) (2017), 1196–1215. <https://doi.org/10.1515/fca-2017-0063>
3. Apelblat A.; Mainardi F. Differentiation of the Wright functions with respect to parameters and other results. *Appl. Sci.*, Vol. 12 (2022), 12825. <https://doi.org/10.3390/app122412825>
4. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Edited by Frank W.J. Olver (editor-in-chief), D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark. Gaithersburg, Maryland, National Institute of Standards and Technology, and New York, Cambridge University Press, 951 + xv pages and a CD, (2010).
5. Alzer H. On some inequalities for the Gamma and Psi functions. *Mathematics of Computation*, Vol. 66 (217) (1997), 373–389. doi:10.1090/S0025-5718-97-00807-7

Задача R-линейного сопряжения в параболическом случае

С. В. Рогозин, Л. П. Примачук, М. В. Дубатовская (Минск, Беларусь)

Рассмотрена разрешимость задачи R-линейного сопряжения на единичной окружности

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad |t| = 1, \quad (1)$$

в параболическом случае, т.е. когда $|a(t)| \equiv |b(t)|$.

Известно [1], что задача (1) на единичной окружности (т.е. с $\mathcal{L} = \mathbb{T}$) эквивалентна векторно-матричной задаче C-линейного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (2)$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a(t)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \frac{1}{a(t)} \begin{pmatrix} \overline{a(t)}f(t) - b(t)\overline{f(t)} \\ -\overline{f(t)} \end{pmatrix},$$

и неизвестные аналитические векторы связаны с φ^+, φ^- соотношениями:

$$\Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(z) \\ \Phi_2^+(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+(z) \\ \varphi^-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^-(z) \\ \Phi_2^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^-(z) \\ \varphi^+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \end{pmatrix}.$$

В параболическом случае $G(t) = G_1(t)G_2(t)$, где

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a(t)}} \end{pmatrix}, \quad G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Факторизуя, следуя [2], коэффициент $G(t)$ получаем следующее утверждение

Теорема. (i) Пусть либо $|a(t)| > |b(t)|$, либо $|a(t)| = |b(t)|$, $\varkappa = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$ и $\varkappa_b = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} b(t) \geq 0$. Тогда дефектные числа краевой задачи (2) равны $l = \max\{0, 2\varkappa\}$, $l' = \max\{0, -2\varkappa\}$.

(ii) Пусть $|a(t)| = |b(t)|$ и $\varkappa_b < 0$, $\lambda = \varkappa + \varkappa_b < 0$, $\mu = \varkappa - \varkappa_b > 0$. Тогда дефектные числа краевой задачи (2) равны $l = 2\varkappa - 2\varkappa_b$, $l' = 2\varkappa + 2\varkappa_b$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”.

Литература

1. Литвинчук, Г.С. Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение. *Изв. вузов. Матем.* No. 12 (1967), 47–57.
2. Primachuk, L., Rogosin, S.V. Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order. *Lobachevsky J. Math.* V. 39 (6) (2018), 809–817. doi 10.1134/S1995080218010213

**Применение тождества Гильберта для резольвент
к вычислению некоторых интегралов от специальных функций
С. М. Ситник (Белгород, Россия)**

Рассмотрим два никак не связанных между собой математических факта. Первый из них — это тождество Гильберта для резольвент [1]

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A). \quad (1)$$

Второй факт — формула для резольвенты оператора дробного интегрирования Римана–Лиувилля

$$R_\lambda f(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x) - \frac{1}{\lambda^2} \int_a^x E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-y)^\alpha}{\lambda} \right) (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \quad (2)$$

где $E_{\alpha,\alpha}(t)$ —функция Миттаг–Лефлера [2]–[5]. Эта формула была впервые выписана в работе Э. Хилле и Я.Д. Тамаркина [4] в 1930 г. без доказательства, первое известное мне опубликованное доказательство приведено в книге М.М. Джрбашяна [5].

Основная идея доклада состоит в подстановке (2) в (1), на этом пути можно получить ряд определённых интегралов со специальными функциями в ядрах. Например:

Теорема. Справедлива формула

$$\begin{aligned} & \int_t^x (y-t)^{\alpha-1} (x-y)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(y-t)^\alpha}{\mu} \right) E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-y)^\alpha}{\lambda} \right) dy = \\ & = \frac{\mu\lambda}{\lambda-\mu} (x-t)^{\alpha-1} \left(E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-t)^\alpha}{\mu} \right) - E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-t)^\alpha}{\lambda} \right) \right). \end{aligned}$$

Эта формула содержит частные случаи с гипергеометрическими функциями ${}_0F_m$ со специальными наборами параметров.

При выборе других резольвент со специальными или элементарными функциями в ядрах можно получить дополнительно ряд подобных формул.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука (1981).
2. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. *Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications. Second edition*. Springer (2020).
3. Shishkina E.L., Sitnik S.M. *Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*. Elsevier (2020).
4. Hille E., Tamarkin J.D. On the theory of linear integral equations. *Ann. Math.* No. 31 (1930), 479–528.
5. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. М.: Наука (1966).

**Многомерное Н-преобразование и его модификации
в весовых пространствах измеримых по Лебегу функций
С. М. Ситник (Белгород, Россия)
О. В. Скоромник, М. В. Папкович (Новополоцк, Беларусь)**

Рассматриваются многомерное интегральное Н-преобразование [1]:

$$(Hf)(\mathbf{x}) = \int_0^\infty H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\mathbf{x} \mathbf{t} \left| \begin{array}{c} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x} > 0; \quad (1)$$

и отдельные его модификации. Здесь (см., например, [1]; [2, §28.4]) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{n=1}^n x_n t_n$; $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$; $\int_0^\infty = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty$; $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$; $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$; $d\mathbf{t} = dt_1 \dots dt_n$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$; $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $m_1 = \dots = m_n$; $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $p_1 = p_2 = \dots = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ($0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$, $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$); $\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, $1 \leq i \leq \mathbf{p}$, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C}$ ($i_1 = 1, 2, \dots, p_1; \dots; i_n = 1, 2, \dots, p_n$); $\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$, $1 \leq j \leq \mathbf{q}$, $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{C}$ ($j_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; j_n = 1, 2, \dots, q_n$); $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$, $1 \leq i \leq \mathbf{p}$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($i_1 = 1, 2, \dots, p_1; \dots; i_n = 1, 2, \dots, p_n$); $\bar{\beta}_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n})$, $1 \leq j \leq \mathbf{q}$, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($j_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; j_n = 1, 2, \dots, q_n$). Функция

$$H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\mathbf{x} \mathbf{t} \left| \begin{array}{c} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1,q} \end{array} \right. \right] = \prod_{k=1}^n H_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[x_k t_k \left| \begin{array}{c} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k} \end{array} \right. \right] \quad (2)$$

представляет собой произведения H -функций $H_{p,q}^{m,n}[z]$ (см., например, [3, §1.1]).

Введем постоянные, определяемые через параметры H -функции (2): $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ и $a_k^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_k} \alpha_{i_k} - \sum_{i=\bar{n}_k+1}^{p_k} \alpha_{i_k} + \sum_{j=1}^{m_k} \beta_{j_k} - \sum_{j=m_k+1}^{q_k} \beta_{j_k}$, $\Delta_k = \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{j_k} - \sum_{i=1}^{p_k} \alpha_{i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$); $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ и $\mu_k = \sum_{j=1}^{q_k} b_{j_k} - \sum_{i=1}^{p_k} a_{i_k} + \frac{p_k - q_k}{2}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Работа продолжает исследования, начатые авторами ранее, и посвящена исследованию функциональных и композиционных свойств преобразования (1) и отдельных его модификаций в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ измеримых по Лебегу функций $f(\mathbf{x})$:

$$\|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \dots \left\{ x_n^{r_n/r_{n-1}} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty,$$

где $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq \bar{r} < \infty$, $r_1 = r_2 = \dots = r_n$; $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$, когда постоянные $a_k^* = \Delta_k = 0$, $\text{Re}(\mu_k) \leq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Схема изучения аналогична процессу построения теории одномерного Н-преобразования [3, (3.1.1)], центральное место в которой отведено вопросам ограниченного и взаимно однозначного действия соответствующего интегрального оператора в пространствах интегрируемых функций с весом, сосредоточенным в нуле и на бесконечности. С

помощью применения техники многомерного преобразования Меллина авторами получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1) из одних пространств интегрируемых функций в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для исследуемого преобразования. Настоящая работа обобщает результаты, полученные А.А. Килбасом и М. Сайго ранее, для соответствующего одномерного преобразования [3, §4.1 и 4.2].

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, задание 1.2.01.

Литература

1. *Sitnik S.M. and Skoromnik O.V.* Multi-Dimensional Integral Transform with Fox Function in Kernel in Lebesgue-Type Spaces. *Mathematics* (2024), 12, 1829.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, (1987).
3. *Kilbas A.A. and Saigo M.* *H-Transforms. Theory and Applications.* Chapman and Hall, Boca Raton, (2004).

Нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения и возможность их аналитического решения П. А. Слиняков (Минск, Беларусь)

В теории нейронных сетей рассматриваются сети со скрытыми слоями $\{\mathbf{h}_t\}$, которые удовлетворяют рекуррентному соотношению вида:

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{h}_{t-1} + f(\mathbf{h}_{t-1}, \theta_{t-1}), \quad (1)$$

где f нелинейная, зависящая от некоторых параметров (весов) θ_t .

В работе [1] вводится *нейронное дифференциальное уравнение* как инфинитезимальный аналог уравнения (1):

$$\frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} = f(\mathbf{h}(t), t, \theta), \quad (2)$$

где справа функция, в общем случае зависящая от скрытого слоя $\mathbf{h}(t)$, переменной t и параметра θ . В той же работе [1] приведен алгоритм для численного решения уравнения (2) *методом сопряженных систем*, предложенным Понтрягиным [2]. В настоящей работе исследуется возможность существования аналитического решения уравнения (2).

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы функции $\mathbf{H}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Theta(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, вектор $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^n$ а также скалярная функция $\sigma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} = \sigma(\mathbf{H}(t) \cdot \Theta(t)), \\ \mathbf{H}(t_0) = \mathbf{H}_0 \end{cases} \quad (3)$$

где $\cdot$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Конструкция в правой части уравнения называется *ридж-функцией* и обусловлена употребимостью в приложениях. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Пусть $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, и $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Пусть также функции $\mathbf{H}(t), \Theta(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[t_0, t_1]$, а функция $\sigma(t)$ — липшицева на данном отрезке. Тогда у задачи Коши (3) существует единственное непрерывно дифференцируемое решение, определенное на $[t_0, t_1]$, непрерывно зависящее от начальных данных и устойчивое при малых их возмущениях.

Схема доказательства. Модифицируя метод доказательства теоремы Пикара–Линделёфа [3], получаем соответствующие оценки и сжимаемость соответствующего интегрального оператора в $C^1(\mathbb{R})$.

Литература

1. *Chen R.T.Q., Rubanova Y., Bettencourt J., Duvenaud D.* Neural Ordinary Differential Equations. *Advances in Neural Information Processing Systems* Vol. 31 (2018), 6571–6583.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука (1983).
3. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения. Минск: БГУ (2012).

Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с дифференциальными полиномами в граничных условиях И. И. Столярчук (Минск, Беларусь)

Рассмотрим на множестве $\bar{Q} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, x_0 \in [0; +\infty), x_1 \in [0; l]\}$ следующую смешанную задачу для волнового уравнения

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = 0, \quad (1)$$

с начальными условиями типа Коши

$$u|_{x_0} = \varphi(x_1), \partial_{x_0} u|_{x_0} = \psi(x_1), x_1 \in [0; l] \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\sum_{|\alpha| \leq n_j} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1}}(x_0, j) = \mu^{(j)}(x_0), j \in \{0, l\}, n_j \in \mathbb{N}, n_j \geq 2. \quad (3)$$

Теорема. Пусть функции $\mu^{(j)}, r_j^{(\alpha)} \in C^{n_j+k\zeta_j}([0; +\infty)), \varphi \in C^{2n_m+k\zeta_j}, \psi \in C^{2n_m-1+k\zeta_j}, j \in \{0, l\}$ где $n_m = \max(n_0, n_l)$, ζ_j - определяет разность порядков производных. Тогда классическое решение u задачи (1)–(3) существует и единственно в классе $C^{n_m}([0; \frac{kl}{a}] \times [0; l])$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\sum_{\nu_j=0}^{n_j-1} d^i \beta_{\nu_j}^{(j)}(j) C_{\nu_j}^{(0)} + \sum_{\nu_j=0}^{n_j-1} d^{i+n_0} \left(\beta_{\nu_j}^{(j)}(z) \int_{\xi_j}^z \frac{W_{\nu_j+1}^{(j)}(\tau)}{r_j^{n_j}(\tau) W^{(j)}(\tau)} d\tau \right), i = \overline{0, k\zeta_j},$$

где $\beta_{\nu_j}^{(j)}$ — функции фундаментальной системы решений уравнения (3), $W^{(j)}$ — определитель Вронского данной системы.

Замечание. Если $\zeta_j = 0, j \in \{0, l\}$, то существование и единственность классического решения u задачи (1)–(3) можно доказать для $x_0 \in [0; +\infty)$.

Схема доказательства. Данная теорема доказывается с использованием метода характеристик, описанного в [1, с. 134] и сведений о разрешимости линейных дифференциальных уравнений [2, с. 92].

Литература

1. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. М.: URSS (2021).
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб.: Лань (2023).

Уравнения равновесия в усилиях для пятислойного стержня К. В. Суслов, (Гомель, Беларусь)

Многослойные конструкции нашли обширное применение в машиностроении, строительстве и транспорте. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей для практического применения слоистых элементов конструкций. Здесь приведены методы расчета и постановка краевых задач для слоистых элементов [1–3]. В данной работе для симметричного по толщине пятислойного стержня с легкими заполнителями приведены уравнения равновесия в усилиях. Вывод уравнений равновесия проведен в линейной системе координат r, z , которая связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя. Для тонких несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, для заполнителей справедлива гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости нормали, которая поворачивается на дополнительный угол ψ .

$$\begin{aligned} u_x^{(4)} &= -cw_{,x} + z\psi, \quad (c + h \leq z \leq c + h + h_1), \\ u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi, \quad (h \leq z \leq c + h), \\ u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, \quad (h \leq z \leq h), \\ u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi, \quad (-h - c \leq z \leq -h), \\ u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, \quad (-h - h_1 - c \leq z \leq -h - c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z — расстояние от центрального слоя до рассматриваемого слоя, c — толщина заполнителя, $2h$ — толщина центрального несущего слоя, h_1 — толщина наружного несущего слоя.

Используя вариация работы внешней поверхностной нагрузки, вариация работы контурных усилий, вариация работы сил упругости получим уравнения равновесия в усилиях, используя перемещения (1):

$$\begin{aligned} H_{,x} - Q &= 0, \\ M_{,xx} + b_0 p &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Литература

1. Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах. Минск: БГУ (2002).
2. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела. Минск: БГУ (2021).
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. *Mechanics of Solid Deformable Body*. Singapore: Springer (2023).

Монотонные аппроксимации экспоненты для численного решения жестких задач Б. В. Фалейчик (Минск, Беларусь)

В докладе рассматривается новый класс стабилизированных (чебышевских) явных методов типа Рунге–Кутты (РК) второго порядка точности, обладающих, помимо расширенной вдоль вещественной оси области устойчивости, дополнительным свойством: расширенным интервалом монотонности.

Как правило [1, сс. 43–49], явные стабилизированные методы для численного решения задачи $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, строятся исходя из условий двух типов: 1) традиционных условий порядка и 2) условий максимизации длины области устойчивости $S = \{z \in \mathbb{C} : |R_s(z)| \leq 1\}$, где R_s — многочлен устойчивости метода, s — число его стадий. Стремление к расширению длины области устойчивости вдоль вещественной оси является вполне естественным: для систем линейных уравнений вида

$$y'(x) = Ay(x) \quad (1)$$

любой явный метод РК дает приближенное решение вида $y_1 = R_s(hA)y_0 \approx e^{hA}y_0 = y(x_0 + h)$, поэтому свойство $R_s(h\lambda) \approx e^{h\lambda} \forall \lambda \in \Lambda$ весьма полезно. Множество Λ здесь — спектр матрицы A , которую считаем диагонализируемой, а соответствующее уравнение (1) — жестким, то есть $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$, $\lambda_n/\lambda_1 \gg 0$.

В дополнение к приведенным выше условиям 1) и 2) мы добавляем требование положительности и монотонности R_s , аналогичное условию спектральной монотонности [2]:

$$R_s(z) > 0, \quad R'_s(z) \geq 0 \quad \forall z \in (-m, 0), \quad m \rightarrow \max.$$

Функции устойчивости, удовлетворяющие данным условиям, определяются с помощью многочленов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ по формулам

$$R'_s(z) = \frac{1 + T_{s-1}(\frac{2z}{m_s} + \delta)}{1 + T_{s-1}(\delta)}, \quad R_s(z) = \int_{-m_s}^z R'_s(\zeta) d\zeta,$$

и по условиям второго порядка $R_s(0) = 1$, $R''_s(0) = 1$ ($R'_s(0) = 1$ по построению).

В докладе обсуждаются вопросы построения соответствующих вычислительных схем и результаты численных экспериментов.

Литература

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, (1999).
2. Бобков В. В. Спектрально-монотонные приближения матричной экспоненты и их приложения. Вестн. БГУ. Сер. 1. (2011). № 3.

О разрешимости частно-интегрального уравнения

со слабой особенностью в $C(D)$

Е. В. Фролова (Липецк, Россия)

Различные задачи математической физики, дифференциальных уравнений в частных производных [1] приводятся к уравнению вида

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi(x) = f(x). \quad (1)$$

Здесь $D = \{x : a_i < x_i < b_i, i = \overline{1, n}\}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$, $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$; m — размерность параллелепипеда D_{x_α} ($1 \leq m \leq n$) и частно-интегральный оператор со слабой особенностью определяется равенством

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \kappa_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha; x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha, \quad (2)$$

с ядром

$$\kappa_\alpha = \frac{k_\alpha(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}, \quad \beta < m.$$

Уравнение (1) обычно называют частно-интегральным уравнением. Различные свойства таких уравнений и соответствующих им операторов в $\mathbb{R}_2$ изучены в [1]. Ранее ЧИ-операторы в пространствах непрерывных функций в $\mathbb{R}_2$ изучались в работе [2], где были получены условия обратимости одномерных частно-интегральных операторов. Аналогичные условия получены в данной работе для m -мерных операторов.

Через $C(\bar{D})$ обозначим пространство непрерывных функций с $\sup$ -нормой, а функцию $k_\alpha(x; t_\alpha)$ будем называть L_1 -непрерывной и L_1 -ограниченной, если она является непрерывной при каждом x функцией со значениями в пространстве L_1 . Соответствующее пространство функций, заданных в параллелепипеде D , с нормой

$$\|k_\alpha\|_{CL_1} = \sup_{x \in \bar{D}} \int_{D_{t_\alpha}} |k_\alpha(x; t_\alpha)| dt_\alpha$$

обозначим $CL_1 = C(D; L_1(D_{t_\alpha}))$.

Заметим, что для L_1 -непрерывной и L_1 -ограниченной функции $k_\alpha(x; t_\alpha)$ функция $\frac{k_\alpha(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}$, $\beta < m$ также L_1 -непрерывна и L_1 -ограничена. Пространство CL_1 является анизотропным пространством функций.

Теорема 1. Пусть функция $k_\alpha(x; t_\alpha)$ L_1 -непрерывна и L_1 -ограничена, тогда уравнение (1) однозначно разрешимо в $C(D)$ при условии обратимости оператора $K_\alpha^{(m)}$ ([2]) и его решение имеет вид исходного оператора.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. *Partial Differential Operators and Integro-Differential Equations*. CRC Press (2000).
2. Калитвин А.С., Фролова Е.В. *Линейные уравнения с частными интегралами С-теория*. Липецк: ЛГПУ (2004).

К вопросу стабилизации гибридных линейных непрерывно-дискретных систем В. Е. Хартовский, (Гродно, Беларусь)

Пусть объект управления описывается линейной непрерывно-дискретной системой с импульсным управляющим воздействием и известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{1j}u(t_{k-j}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \\ x_2(t_{k+1}) &= A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{2j}u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \dots, \\ y(t_k) &= \sum_{j=0}^m (C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})), \quad k = m, m+1, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$, $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{0, m}$, u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал, $t_k = kh$, $k = \mathbb{Z}$, $h > 0$ — шаг квантования. Начальное условие для системы (1) является неизвестным имеет вид $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2$, $a_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $u(t_j) = 0$, $j < 0$.

Определим регулятор с обратной связью по неполным измерениям

$$u(t_k) = \sum_{j=0}^{m_1} (U_{11}^j y(t_{k-j}) + U_{12}^j x_3(t_{k-j})), \quad x_3(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m_1} (U_{21}^j y(t_{k-j}) + U_{22}^j x_3(t_{k-j})), \quad (2)$$

$$k = k_1, k_1 + 1, \dots, \quad k_1 = 2m + m_1.$$

Здесь $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, — вспомогательная переменная, удовлетворяющие начальному условию $x_3(t_k) = a_{3k}$, $k = \overline{0, m + m_1}$, где $a_{3k} \in \mathbb{R}^{n_3}$ — любые заданные векторы, U_{ij} — постоянные матрицы подходящих размеров.

Определение. Регулятор (2), для которого существует число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что каковы-бы ни были начальные условия, для решения замкнутой системы (1), (2) выполняются равенства $x_1(t) = 0$, $t \geq t_{k_0}$, $x_2(t_k) = 0$, $x_3(t_k) = 0$, $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, назовем регулятором финитной стабилизации по выходу.

В работе получены критерий существования регулятора финитной стабилизации по выходу и метод его построения. Показано, что регулятор финитной стабилизации по выходу существует тогда и только тогда, когда система (1) является слабо финально наблюдаемой и полностью управляемой. В идейном плане работа продолжает исследования задачи финитной стабилизации по неполным измерениям, начатой для систем нейтрального типа в [1].

Литература

1. Хартовский В.Е. Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа. *Дифференциальные уравнения*. Т. 60. № 5 (2024), С. 686–706.

К вопросу финитной стабилизации систем нейтрального типа по наблюдаемому выходу

В. Е. Хартовский, О. И. Урбан (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0,$$

где x — решение этой системы, u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал (выход), $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ — единичная матрица, λ_h — оператор сдвига, определяемый для заданного $h = \text{const} > 0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$, $k \in \mathbb{N}$; $D(\lambda) = \sum_{i=1}^m D_i \lambda^i$, $A(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^m B_i \lambda^i$, $C(\lambda) = \sum_{i=0}^m C_i \lambda^i$; $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$. Решение уравнения (1) однозначно задается начальным условием $x(t) = \varphi(t)$, $u(t) \equiv 0$, $t \in [-mh, 0]$. Считаем, что φ — неизвестная кусочно-непрерывная функция, $p_D = d/dt$ — оператор дифференцирования.

В работе получен критерий существования и способ построения регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу вида

$$u(t) = U_{11}(p_D, z_h)y(t) + U_{12}(p_D, z_h)\tilde{x}(t),$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = U_{21}(p_D, z_h)y(t) + U_{22}(p_D, z_h)\tilde{x}(t), \quad t > t_0, \quad (2)$$

который обеспечит выполнение следующих условий: а) какова бы ни была начальная функция φ существует число $t_1 > 0$ такое, что $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$; б) замкнутая система

является линейной однородной автономной системой нейтрального типа с конечным спектром. В (2) $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ — вспомогательная переменная, $U_{ij}(p, \lambda)$ — полиномиальные матрицы.

Теорема. Для того чтобы для системы (1) существовал регулятор (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\text{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \text{rank} [I_n - D(z), B(z)] = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(z) \\ C(z) \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

где $W(p, z) = p(I_n - D(z)) - A(z)$.

Вопрос построения регулятора (2) в частном случае ($C_0 = E_n$, $C_i = 0_{n \times n}$, $i = \overline{1, m}$) изучен в работе [1].

Литература

1. Метельский, А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа. *Дифференциальные уравнения*. Т. 52. No. 3 (2016), 391–403.

О представлении решения проблемы Римана в терминах функции Хейна Л. А. Хвоцинская (Минск, Беларусь)

В работе выделены случаи, при которых решения проблемы Римана для двух функций с четырьмя особыми точками выражается в терминах функции Хейна (см., например, [1])

$$H\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad |z| < 1, \quad (1)$$

где коэффициенты определены рекуррентным образом

$$c_0 = 1, \quad a\gamma c_1 - qc_0 = 0, \quad R_j c_{j+1} - (Q_j + q)c_j + P_j c_{j-1} = 0,$$

$$P_j = (j-1-\alpha)(j-1+\beta), \quad Q_j = j((j-1+\gamma)(1+a) + a\delta\varepsilon), \quad R_j = a(j+1)(j+\gamma).$$

Известно, что функция Хейна (1) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} w = 0, \quad (2)$$

четырьмя особыми точками $0, 1, a, \infty$. Дифференциальное уравнение (2) аналогично дифференциальному уравнению класса Фукса, представляющего собой решение проблемы Римана с 4 особыми точками

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^4 \frac{1 - \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \frac{1}{z - b} \right) y' + \frac{1}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)} \left[\rho\sigma z - \rho b + \sum_{k=1}^3 (\rho_k \sigma_k - \tau_k) a_k + \frac{q}{z - b} + \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k \sigma_k}{z - a_k} \prod_{j=1, j \neq k}^3 (a_j - a_k) \right] y = 0. \quad (3)$$

Поскольку уравнение (2) имеет 5 независимых параметров, а уравнение (3) содержит 8 параметров, из которых 6 являются независимыми, то представление решений проблемы Римана для двух функций с четырьмя особыми точками через функцию Хейна возможно только в ряде специальных случаев.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”.

Литература

1. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Edited by Frank W.J. Olver (editor-in-chief), D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark. Gaithersburg, Maryland, National Institute of Standards and Technology, and New York, Cambridge University Press, 951 + xv pages and a CD, (2010).

2. Rogosin S., Khvoshchinskaya, L. Construction of Fuchsian system with five singular points. *Lobachevskii J. Math.* 42 (2021), 830–849. <https://doi.org/10.1134/S199508022104017X>.

Об асимптотической аппроксимации решений одного класса сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием О. Б. Цехан (Гродно, Беларусь)

Дана нестационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_1(t, e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})y(t) + B_1(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t), \quad t \geq t_0, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad \mu \in (0, \mu^0], \quad \mu^0 \ll 1, \\ \{x(\theta), y(\theta)\} &= \{\phi(\theta), \psi(\theta), \theta \in T_h \triangleq [t_0 - h, t_0]\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь e^{-ph} , $h > 0$, — оператор запаздывания: $e^{-ph}f(t) = f(t - h)$, $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$, $i = 1, 2$, — матричные операторы, $A_{ij}(t)$, $B_i(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_k(t)$, $k = 3, 4$, — непрерывные матричные функции, $u(t)$, $t \geq t_0$, $\phi(\theta)$, $\psi(\theta)$, $\theta \in T_h$ — кусочно-непрерывные вектор-функции подходящих размеров.

Определим систему, параметры которой выражаются через параметры (1):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph})\xi(t) + \mathbf{B}_\xi(t, \mu, e^{-ph})u(t) + F_\xi(t, \mu), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \geq t_0, \\ \frac{d}{d\tau}\eta(\tau) &= \tilde{\mathbf{A}}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph})\eta(\tau) + \tilde{\mathbf{B}}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph})\tilde{u}(\tau) + \tilde{F}_\eta(\tau, \mu), \quad \tau = \frac{t-t_0}{\mu} \geq 0, \\ \xi(\theta, \mu) &= \bar{\xi}(\theta, \mu), \quad \eta(\theta, \mu) = \bar{\eta}(\theta, \mu), \quad \theta < t_0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \tilde{u}(\tau) = u(t_0 + \mu\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема. Пусть функции системы (1) продолжены на $[t_0 - 2h, t_0]$ так, что $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -c < 0$, $\forall t$, $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, имеют ограниченные на $T_h \cup T$ производные, функции $\phi(\theta)$, $\psi(\theta)$ дифференцируемы и имеют ограниченные производные на T_h и продолжены влево: $\phi(\theta) \equiv 0$, $\psi(\theta) \equiv 0$, $\theta < t_0 - h$; $u(t) \equiv 0$, $t < t_0$. Тогда для достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$ решение системы (1) равномерно (по t) асимптотически (по μ) аппроксимируется по следующим формулам (где $L_j^m(t)$, $H_j^m(t)$ выражаются через матрицы системы (1)):

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi(t) + \mu H_0^0(t)\eta\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right) + \mu H_1^0(t)\eta\left(\frac{t-h-t_0}{\mu}\right) + O(\mu^2), \\ y(t) &= (E_{n_2} - \mu L_0^0(t)H_0^0(t))\eta\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right) - \mu L_0^0(t)H_1^0(t)\eta\left(\frac{t-t_0-h}{\mu}\right) - \\ &\quad - (L_0^0(t) + \mu L_0^1(t))\xi(t) - \mu L_1^1(t)\xi(t-h) + O(\mu^2), \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Схема доказательства следует доказательству теоремы из [1] с использованием асимптотической аппроксимации 2-го порядка расщепляющего преобразования, которое для системы (1) строится аналогично [2].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, проект № Ф22-050.

Литература

1. Цехан, О.Б. Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием. *Веснік Гродз. дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Мат. Фіз. Інф., выліч. тэхн. і кіраванне*. Т. 14. № 1. (2024), 37–47.
2. Tsekhan, O. Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay *Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Springer, Cham. – Vol. 407. (2022), 77–97.

Граничная задача для одного гиперболического уравнения четвертого порядка со смешанными граничными условиями Е. С. Чеб (Минск, Беларусь)

Рассматривается корректно поставленная смешанная задача для линейного нестроого гиперболического уравнения в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, в случае наличия у него одной кратной характеристики. Получены условия существования единственного классического решения, непрерывно зависящего от начальных и граничных данных.

Рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + 4a \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} + 6a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + 4a^3 \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, (x, t) \in Q_n, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l]. \quad (2)$$

Пусть коэффициент $a > 0$. Уравнение (1) имеет одну характеристику $x - at$ кратности четыре.

Добавим к уравнению (1) граничные условия вида

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial x^s} \right|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t \in [0, t_{n+1}], \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^{s+1} u}{\partial x^{s+1}} \right|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t \in [t_1, t_{n+1}], \quad s = 0, 1, \quad (4)$$

Здесь $Q_n = \bigcup_{k=0}^n G_k$, $G_0 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq at, x \in [0, l], t \in [0, t_1]\}$, $G_k = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : (k-1)l \leq at - x \leq kl, x \in [0, l], t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]\}$, $t_k = kl/a$, $k = \overline{0, n}$.

Выбор таких граничных условий гарантирует корректность задачи (1)–(4) в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций [1].

Теорема. Задача (1)–(4) на Q_n имеет единственное классическое решение $u \in C^4(Q_n)$ при выполнении условий гладкости $\varphi_j \in C^{(7-j)}[0, l]$, $j \in \overline{0, 3}$, $\mu_i \in C^{(6-i)}[0, t_{k+1}]$, $\nu_i \in C^{(6-i)}[t_1, t_{n+1}]$, $i = 1, 2$, основных условий согласования $\varphi_j(0) = \mu_1^{(3-j)}(0)$, $\varphi_j'(0) = \mu_2^{(3-j)}(0)$, $j = \overline{0, 3}$, $a^4 \mu_1^{(4)} = -\varphi_0^{(4)}(0) - 4a^3 \varphi_1^{(3)}(0) - 6a^2 \varphi_2^{(2)}(0) - 4a \varphi_3'(0)$ и дополнительных условий согласования по типу [2].

Литература

1. Чеб Е.С., Симинская Е.С. О классическом решении смешанной задачи для линейного нестроого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой. *Вестник БелГУ. Прикладная математика. Физика.* Т. 1, No. 1 (2020), 11–18.
2. Чеб Е.С. Классическое решение граничной задачи для уравнения четвертого порядка с младшей производной и одной кратной характеристикой. В сб. *Труды 10-го Междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021, (13-17 сентября 2021 г., Минск).* (Редактор Рогозин С.В.) Минск: ИВЦ Минфина. (2022), 127–132.

О разрешимости модельной однородной степенной краевой задачи с допустимыми нулями на контуре Т. А. Чехменок (Минск, Беларусь)

Рассмотрим модельную краевую задачу:

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = t^\chi [\Phi^-(t)]^\beta, \quad t \in L, \quad (1)$$

где контур L — единичная окружность, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\chi \in \mathbb{Z}$, в классе функций $\mathcal{A}_{0,0,r}$ — классе функций однозначных аналитических соответственно в областях $D^\pm$, непрерывно продолжимых на контур L слева и справа, не имеющих нулей в областях $D^\pm$, и r — количество точек контура, в окрестности которых имеет место асимптотика $\Phi^\pm(t) = A(t - \tau_j)^{\alpha_j}$, $t \rightarrow \tau_j$, $j = \overline{1, r}$ ($\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, r}$). Следуя [2] функции $\Phi^\pm(z)$ считаются решениями данной задачи, если существуют однозначные ветви многозначных функций $[\Phi^+(z)]^\alpha$ и $[\Phi^-(z)]^\beta$, предельные значения которых на контуре L удовлетворяют краевому условию (1).

В работе [1] получена структура порядков нулей решений краевой задачи (1) на контуре, доказана ограниченность числа нулей решений в случае α и β рациональных, и неограниченность, когда хотя бы один из показателей α, β иррационален. В отличие от указанной статьи получены критерии разрешимости модельной нелинейной краевой задачи (1).

Теорема. При $\chi < 0$ задача (1) не имеет решений ни в одном из классов вида $\mathcal{A}_{0,0,r}$. При $\chi \geq 0$ и фиксированном $r \geq 1$ критерием разрешимости задачи (1) является существование чисел $k_j, l_j, m_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{2, r}$, $\alpha_1 > 0$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + \sum_{j=2}^r (\alpha k_j + \beta l_j + m_j) = \kappa, \\ \alpha k_j + \beta l_j + m_j > 0, \quad j = \overline{2, r}. \end{cases} \quad (2)$$

При его выполнении все решения определяются формулами:

$$\Phi^+(z) = \left[C \prod_{j=1}^r (z - \tau_j)^{\alpha_j} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad z \in D^+, \quad \Phi^-(z) = \left[C \prod_{j=1}^r \left(\frac{z - \tau_j}{z} \right)^{\alpha_j} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad z \in D^-,$$

где $\alpha_j = \alpha k_j + \beta l_j + m_j$, $j = \overline{2, r}$, $\alpha_1 = \chi - \sum_{j=2}^r \alpha_j$.

Рассмотрим вопрос о разрешимости системы (2) в целых неотрицательных числах. Пусть все α_j , $j = \overline{2, r}$, постоянны и равны между собой.

Утверждение. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, индекс $\chi \in \mathbb{N}$, $r < \chi + 1$. Если $\text{НОД}(\alpha; \beta) = 1$, $a \in \mathbb{N}$ таково, что $a(r - 1) < \chi$, то система (2) имеет решение вида

$$(k_2, \dots, k_r; l_2, \dots, l_r; m_2, \dots, m_r; \alpha_1), \quad (3)$$

где $m_j, j = \overline{2, r}$, — произвольные фиксированные целые числа, числа $l_j, j = \overline{2, r}$, являются решениями сравнений

$$\beta l_j \equiv a - m_j \pmod{\alpha}, \quad j = \overline{2, r}, \quad (4)$$

$k_j, j = \overline{2, r}$, — вычисляются по формулам $k_j = \frac{a - m_j - \beta l_j}{\alpha}$, $j = \overline{2, r}$. Если $\text{НОД}(\alpha, \beta) = d \neq 1$, то система (2) имеет решение вида (3) тогда и только тогда, когда $m_j, j = \overline{2, r}$, зафиксировано так, что $\text{НОД}(a - m_j; \alpha) = d, j = \overline{2, r}$, причём каждое из сравнений (4) имеет d . При этом $\alpha_1 = \chi - a(r - 1)$.

Также получены критерии разрешимости модельной нелинейной краевой задачи (1) в случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+$. Когда же хотя бы один из показателей α, β иррационален найдено одно из решений системы.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы “Конвергенция–2025” (ГПНИ на 2021–2025 гг.), задание 1.7.01.04.

Литература

1. Аксентьева Е.П. О порядках граничных нулей решений степенной задачи Римана. *Труды мат. центра им. Н.И. Лобачевского*. (2002). Т. 14, 61–71.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. 3-е изд., М.: Наука (1977).; Engl. Transl. Oxvord-London etc.: Pergamon Press (1966).

Явное решение интегро-дифференциального уравнения первого порядка с коэффициентами в виде некоторых сумм А. П. Шилин (Минск, Беларусь)

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — два множества, элементы которых упорядочены и могут перемножаться, $n \in \mathbb{N}$. Будем составлять произведения вида $A = c_1 c_2 \dots c_n$, где для каждого $k = \overline{1, n}$ либо $c_k = a_k$, либо $c_k = b_k$. Обозначим $L_s(a_k, b_k; n)$ сумму всевозможных произведений вида A таких, в которых множители a_k встречаются s раз (и, следовательно, множители b_k встречаются $n - s$ раз), $s = \overline{0, n}$.

Пусть L — простая замкнутая гладкая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Зададим H -непрерывную (т.е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $f(t)$ и H -непрерывно дифференцируемые функции $p_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, $t \in L$. Будем искать на этой кривой H -непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} L_{2s} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) \varphi'(t) - \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} L_{2s} \left(p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}; n \right) \varphi(t) + \\ + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} L_{2s-1} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \\ - \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} L_{2s-1} \left(p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (1)$$

Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару; интегралы с $\tau - t$ в знаменателе совпадают при этом с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши. Квадратные скобки означают целую часть числа.

При $n = 1$ и $n = 2$ уравнение (1) записано в развернутой форме и решено в явном виде в работах соответственно [1] и [2]. Теперь дается явное решение уравнения (1) для $n \geq 3$. Случай $n = 3$ проиллюстрирован примером.

Литература

1. Зверович Э.И., Шилин А.П. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида. *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* Т. 54, № 4. (2018), 404–407. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>.

2. Шилин А.П. Решение интегро-дифференциального уравнения с коэффициентами, выражающимися через две заданные функции. Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. Сб. статей по материалам XVIII Всероссийской с международным участием н.-техн. конф. Россия, г. Пенза, 6–10 ноября 2023. В 2-х частях. Ч.1. Пенза: изд-во ПГУ, (2023), 104–107.

Научное издание

**Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений
(АМАДЕ-2024)**

**Материалы 11-го международного семинара
16-20 сентября 2024 г., Минск, Беларусь**

Scientific edition

**Analytical methods of analysis and differential equations
(AMADE-2024)**

**Materials of the 11th International Workshop
September 16-20, 2024, Minsk, Belarus**

Редактор С. В. Рогозин

Технический редактор О. В. Дубровина

Подписано в печать 19.08.2024

Формат 60x84/8. Уч.-изд. л. 8,8. Тираж экз. 70. Заказ 303.

Республиканское унитарное предприятие

“Информационно-вычислительный центр Министерства финансов Республики Беларусь”.
Свидетельства о государственной регистрации издателя, изготовителя и распространителя
печатных изданий

№1/161 от 27.01.2014. № 2/41 от 29.01.2014. Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.