Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики

СОГЛАСОВАНО Заведующий кафедрой __________________ Д.Ф. Базылев «01» июля 2024 г.	СОГЛАСОВАНО Декан факультета __________________ С.М. Босяков «02» июля 2024 г.

Методы решения задач по геометрии

Электронный учебно-методический комплекс для специальности:
6-05-0533-06 «Математика»

Регистрационный № 2.4.2-24/498

Автор:
Карневич О.Н., заместитель декана;
Тухолко Л.Л., кандидат физико-математических наук, доцент.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ 29.08.2024 г., протокол № 1.

Минск 2024

УДК514(075.8)(076.2)
К 246

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
Протокол № 1 от 29.08.2024 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 11 от 02.07.2024 г.

А в т о р ы:

Карневич Оксана Николаевна, заместитель декана по идеологической и воспитательной работе, старший преподаватель кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета БГУ;

Тухолко Людмила Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математики и методики преподавания математики физико-математического факультета БГПУ им. М.Танка.

Рецензенты:

кафедра математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка» (зав. кафедрой Н.В. Гриб, кандидат физико-математических наук, доцент);

Тихонов С.В., заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.

Карневич, О. Н. Методы решения задач по геометрии : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0533-06 «Математика» / Карневич О. Н., Тухолко Л. Л. ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. геометрии, топологии и методики преподавания математики. – Минск : БГУ, 2024. – 59 с. : ил. – Библиогр.: с. 58–59.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Методы решения задач по геометрии» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика».

В ЭУМК содержатся материалы лекционных и практических занятий, вопросы к зачету, примерные задания для контрольной работы, список рекомендуемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Методы решения задач по геометрии» предназначен для студентов второго курса специальности 6-05-0533-06 «Математика».

Комплекс подготовлен в соответствии с требованиями Положения об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования, утвержденного Постановлением министерства образования Республики Беларусь от 26.07.2011 № 167.

Содержание ЭУМК соответствует образовательным стандартам, структуре и тематике учебной программы по дисциплине «Методы решения задач по геометрии» и включает следующие разделы:

- теоретический, содержащий материалы лекций по темам, предусмотренным учебной программой, в объеме, установленном учебным планом по специальности;

- практический, включающий системы задач для проведения лабораторных занятий;

- раздел контроля знаний, который представлен вопросами к зачёту, примерными задачами проверочных и контрольных работ.

- вспомогательный раздел с рекомендованной литературой.

Изучение дисциплины «Методы решения задач по геометрии» обусловлено необходимостью обобщения, углубления и систематизации знаний студентов по наиболее сложным темам школьного курса геометрии.

Цель учебной дисциплины – овладение студентами общими и частными методами и приёмами решения геометрических задач, развитие навыков творческой поисковой математической деятельности.

Задачи учебной дисциплины:

1. Обучение будущих учителей математики общим и частным методам решения геометрических задач.
2. Формирование прочных умений и навыков решения задач школьной геометрии.
3. Развитие творческих способностей студентов путём решения задач повышенной сложности и нестандартных задач.
4. Формирование общих приёмов поиска решения задач.

Требования к компетенциям

Изучение дисциплины «Методы решения задач по геометрии» направлено на формирование у будущих преподавателей математики универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций.

Требования к универсальным компетенциям

Специалист должен:

УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации.

УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий.

УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности.

УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности.

Требования к базовым профессиональным компетенциям

Специалист должен:

БПК-4. Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности.

БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

БПК-10. Планировать, организовывать и вести педагогическую деятельность с использованием современных педагогических теорий и методических разработок.

БПК-11. Применять методику аксиоматического построения математической теории.

Требования к специализированным компетенциям

Специалист должен:

СК-1. Осуществлять анализ контекста и поставленной проблемы, аргументированно выбирать оптимальный способ ее решения, согласовывать частичные проекты решения в общую согласованную архитектуру, выполнять реализацию проекта с учетом оценки накопленных и поступающих данных.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- геометрические понятия и формулы;
- основные методы решения задач по геометрии;
- приёмы эвристических рассуждений;

уметь:

- использовать геометрические понятия и их свойства для доказательства теорем;
- применять основные методы решения геометрических задач;
- использовать эвристические рассуждения и приёмы при решении задач.

владеть:

- навыками применения геометрических понятий и их свойств для доказательства теорем;
- методами решения геометрических задач;
- эвристическими методами поиска способов решения задач.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 4-ом семестре очной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Методы решения задач по геометрии» отведено 90 часов, в том числе 34 аудиторных часа, из них: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 12 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

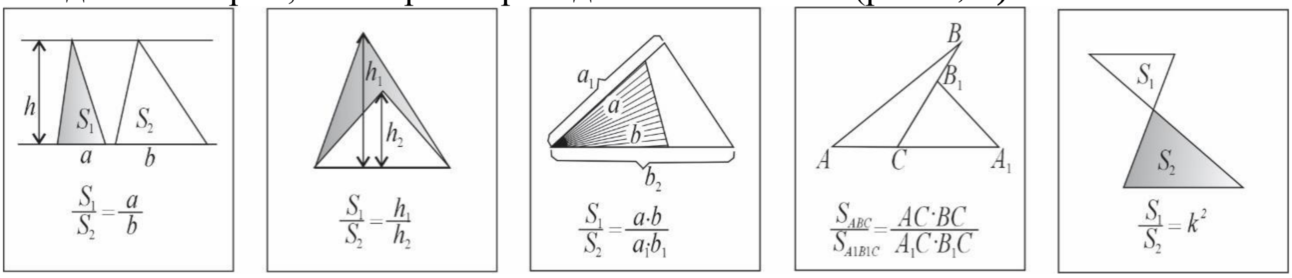
1.1. ПЛАНИМЕТРИЯ

1.1.1. Отношение площадей треугольников

При решении геометрических задач используется *метод площадей, который* состоит в приравнивании различных выражений для вычисления площади одной фигуры или составлении равенства отношений площадей различных фигур с целью нахождения неизвестного из полученного уравнения.

Для составления равенства отношений площадей геометрических фигур используют следующие утверждения.

Утверждение 1 (*об отношении площадей двух треугольников с равными высотами*). Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как длины сторон, к которым проведены эти высоты (рис. 1, *а*).



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рисунок 1

Утверждение 2 (*об отношении площадей двух треугольников с равными сторонами*). Если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как длины высот, которые проведены к этим сторонам (рис. 1, *б*).

Утверждение 3 (*об отношении площадей треугольников с равными углами или углами, дополняющими друг друга до* 180°). Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника или дополняет его до 180°, то площади этих треугольников относятся как произведения длин сторон, заключающих равные углы (рис. 1, *в, г*).

Утверждение 4 (*об отношении площадей подобных треугольников*). Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия (рис. 1, *д*).

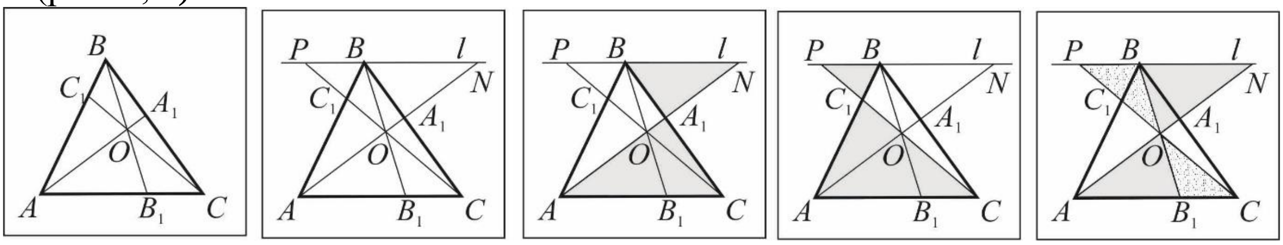
Доказательства утверждений 1-4 проводятся с использованием формул площадей треугольников: $S=\frac{1}{2}ah_a$, $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, где a, b – длины сторон треугольника, h_a – высота, проведённая к стороне a, C – угол между сторонами a и b.

1.1.2. Теоремы Чевы и Менелая

При решении задач методом площадей удобно использовать теоремы Чевы и Менелая.

Теорема *Чевы*. Если прямые AA_1, BB_1, CC_1, проходящие через вершины треугольника ABC, проходят через одну точку или параллельны между собой, пересекают его стороны BC, AC, AB или их продолжения в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, то справедливо равенство $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$.

► Рассмотрим первый случай: прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O (рис. 2, *а*).



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рисунок 2

1) Проведем через вершину B прямую l параллельно AC (рис. 2, *б*).
2) Из подобия треугольников A_1NB и A_1AC (рис. 2, *в*) имеем:

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{AC} \ (1).$$

3) Из подобия треугольников C_1PB и C_1CA A_1AC (рис. 2, *г*) имеем:

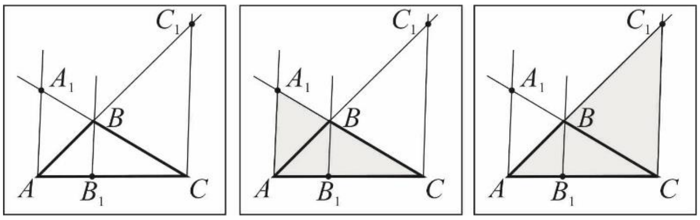
$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{BP} \ (2).$$

4) Из подобия треугольников PBO и CB_1O, NBO и AB_1O A_1AC (рис. 2, *д*) имеем: $\frac{CB_1}{BP}=\frac{B_1O}{OB}=\frac{AB_1}{BN}$, следовательно:

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BP}{BN} \ (3).$$

5) Перемножая равенства (1), (2), (3), получим: $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$.

Рассмотрим второй случай: прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны (рис. 3, *а*).



а) *б)* *в)*

Рисунок 3

1) По теореме Фалеса (рис. 3, *б)* $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{A_1B}{BC}$ (4);

2) $\dfrac{BC_1}{C_1A}=\dfrac{B_1C}{CA}$; $\dfrac{B_1C}{CA}=\dfrac{BC}{CA_1}$ (рис. 3, *в)*), следовательно, $\dfrac{BC_1}{C_1A}=\dfrac{BC}{CA_1}$ (5),

3) Перемножая равенства (4), (5), получим $\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}=1$. ◄

Теорема, обратная теореме Чевы. Если точки A_1, B_1, C_1 расположены на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC или на их продолжениях соответственно так, что $\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}=1$, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

► Предположим, что прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O, а прямая BB_1 не проходит через точку O (рис.4).

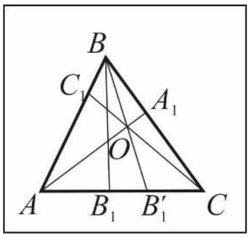


Рисунок 4

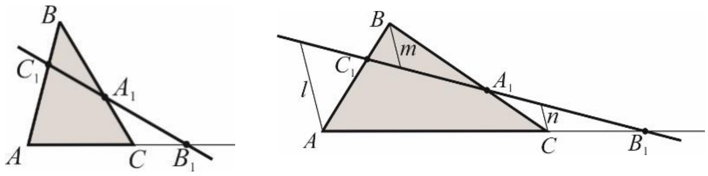
Пусть прямая BO пересекается с прямой AC в точке B_1'. Тогда на основании прямой теоремы Чевы имеем: $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1'}{B_1'A}=1$, а по условию $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$.

Следовательно, $\dfrac{CB_1'}{B_1'A}=\dfrac{CB_1}{B_1A}$, значит, точка B_1' совпадает с точкой B_1, т.е. прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Заметим, что если прямые AA_1 и BB_1 параллельны, то и прямая CC_1 им параллельна. ◄

Прямые, проходящие через вершины треугольника и пересекающиеся в одной точке, называются ***чевианами***.

Теорема *Менелая*. Если треугольник ABC пересечен прямой, не параллельной стороне AC и пересекающей две его стороны AB и BC соответственно в точках C_1 и A_1, а прямую AC – в точке B_1, то $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$ (рис. 5, *а*).



а) *б)*

Рисунок 5

► Из вершин треугольника ABC проведем прямые, параллельные друг другу, до пересечения с секущей прямой (рис.5, *б*).

Из подобия трех пар подобных треугольников получаем: $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{l}{m}$, $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{n}{l}$. Перемножая полученные равенства, получим $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$. ◄

Теорема, обратная теореме Менелая. Если точки A_1, B_1, C_1 принадлежат прямым BC, CA, AB соответственно, т.е. лежат на сторонах треугольника ABC

или их продолжениях, при этом $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$, то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

►Предположим, что точка B_1 не лежит на прямой A_1C_1, пусть B^* – точка пересечения прямых A_1C_1 и AC (рис. 6). Тогда, согласно теореме Менелая, $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB^*}{B^*A}=1$, а по условию $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$, откуда $\frac{CB^*}{B^*A}=\frac{CB_1}{B_1A}$ и следовательно, точка B_1 совпадает с точкой B^*. Значит, точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.◄

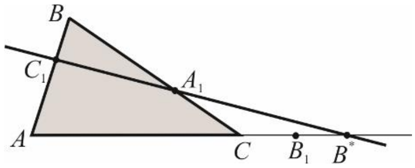
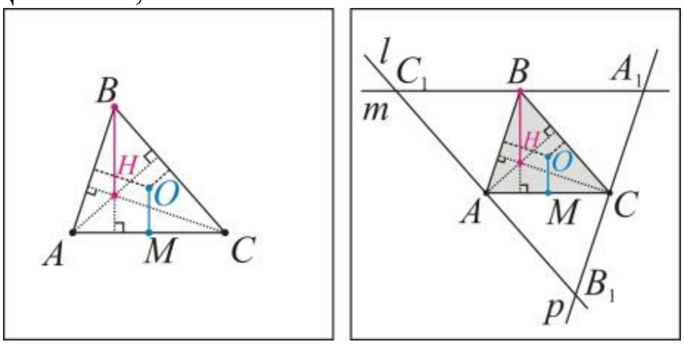


Рисунок 6

1.1.3. Прямая Эйлера. Окружность Эйлера. Формула Эйлера

Лемма. Расстояние от вершины треугольника до точки пересечения его высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной данной вершине стороны.

► 1) Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 7, *а*), O – центр описанной около него окружности, отрезок $OM\perp AC$, $M\in AC$, то есть $OM = d\ (O;\ AC)$. Докажем, что BH=2OM.



а) *б)*

Рисунок 7

2) Через вершины треугольника ABC проведём прямые m, l, p, параллельные его противолежащим сторонам AC, BC и AB соответственно (рис. 7, *б*). Пусть $m\cap l=C_1$, $l\cap p=B_1$, $m\cap p=A_1$. $\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta ABC$ с коэффициентом подобия, равным 2.

3) Точка H пересечения высот треугольника ABC является точкой пересечения серединных перпендикуляров треугольника $A_1B_1C_1$, то есть центром описанной около него окружности. Отрезок HB – расстояние от центра H описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности до стороны A_1C_1, сходственной со стороной AC треугольника ABC. Значит, отрезки HB и OM – сходственные элементы подобных треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC, следовательно, их отношение равно коэффициенту подобия, т.е. BH=2OM. ◄

Теорема *о прямой Эйлера*. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, M – точка пересечения его медиан, H – ортоцентр. Тогда точки O, M, H лежат на одной прямой, называемой **прямой Эйлера**, причём точка M делит отрезок OH в отношении 2:1, считая от точки H.

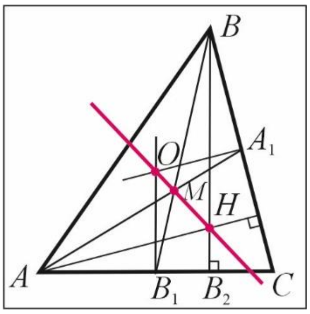


Рисунок 8

► 1) Пусть $AM \cap BC = A_1$, $BM \cap AC = B_1$. $BH \cap AC = B_2$. Докажем, что $M \in OH,\ MH = 2OM$ (рис. 8).

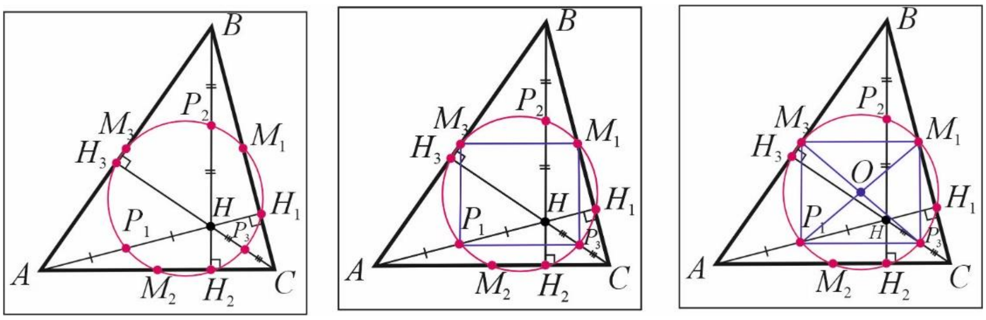
Пусть $M_1 = OH \cap BB_2$. Тогда $\Delta M_1OB_1 \sim \Delta M_1HB$ (у них две пары равных углов: вертикальные при вершине M_1 и внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых OB_1 и BB_2 секущей BB_1) $\Rightarrow \frac{OM_1}{M_1H} = \frac{OB_1}{BH} = \frac{B_1M_1}{M_1B}$.

3) По лемме $\frac{OB_1}{BH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{B_1M_1}{M_1B} = \frac{1}{2}$. Если медиана делится точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника, то точка M_1 – центроид треугольника, т.е. точка M_1 совпадает с точкой M, значит, точки O, M, H лежат на одной прямой.

4) Из пунктов 2-3 имеем $\frac{OM_1}{M_1H} = \frac{1}{2} = \frac{OM}{MH}$. ◄

Теорема *об окружности Эйлера*. В любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности, называемой **окружностью девяти точек** или **окружностью Эйлера**.

► Пусть точки H_1, H_2, H_3 – основания высот треугольника ABC, проведённых к сторонам BC, AC, AB соответственно, точка H – его ортоцентр (рис. 9, *а*); точки M_1, M_2, M_3, середины тех же сторон; точки P_1, P_2, P_3 – середины отрезков AH, BH, CH соответственно. Докажем, что точки H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3 лежат на одной окружности.



а) *б)* *в)*

Рисунок 9

1) Рассмотрим четырёхугольник $P_1M_3M_1P_3$ (рис. 9, *б*), у него $P_1M_3 \parallel P_3M_1 \parallel BH$ и $P_1M_3 = P_3M_1$ (как средние линии треугольников ABH и CBH), значит, $P_1M_3M_1P_3$ – параллелограмм. Кроме того, $P_1M_3 \perp M_3M_1$ (M_3M_1 – средняя линия треугольника ABC, $M_3M_1 \parallel AC$ и $AC \perp BH$), значит, $P_1M_3M_1P_3$ – прямоугольник, точки P_1, M_3, M_1, P_3 равноудалены от точки O пересечения его диагоналей (рис. 9, *в*).

2) Аналогично доказывается, что точка O равноудалена от вершин четырёхугольников $M_3P_2P_3M_2$ и $P_2M_1M_2\,P_1$, то есть точки M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3 лежат на окружности с центром в точке O.

3) Треугольник P_1MH_1 – прямоугольный, центр описанной около него окружности – середина гипотенузы P_1M, то есть точка O, а радиус равен половине этой гипотенузы, значит, точка H_1 лежит на той же окружности, что и шесть рассмотренных выше точек. Аналогично доказывается принадлежность точек H_2 и H_3 указанной окружности. ◄

Теорема о центре окружности Эйлера. Центром окружности девяти точек треугольника является середина отрезка, концами которого служат: ортоцентр треугольника и центр описанной около него окружности; радиус окружности девяти точек равен половине радиуса описанной около треугольника окружности.

Теорема о формуле Эйлера. Расстояние между центрами O и I описанной и вписанной окружностей треугольника и радиусы R и r этих окружностей связаны формулой $OI^2 = R^2 - 2Rr$, называемой ***формулой Эйлера***.

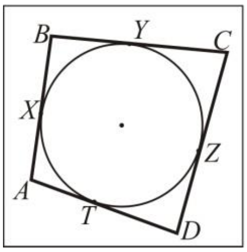
1.1.4. Вписанные и описанные многоугольники

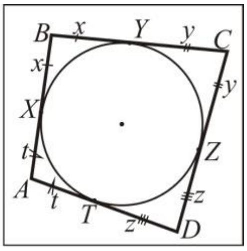
Теорема *о четырёхугольнике, в который можно вписать окружность*. Для того чтобы в четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противолежащих сторон были равны.

$\Rightarrow$ (*свойство четырёхугольника, в который можно вписать окружность*)

Дано: ω – вписанная в четырёхугольник $ABCD$ окружность (рис. 10, *а*).

Доказать: $AB + CD = AD + BC$.





а) *б)*

Рисунок 10

►Так как отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны, то $BX = BY = x$, $CY = CZ = y$, $DZ = DT = z$, $AX = AT = t$ (рис. 10, *б*). Тогда:

$AB + CD = (AX + XB) + (CZ + ZD) = t + x + y + z;$

$BC + AD = (BY + YC) + (AT + TD) = x + y + t + z;$

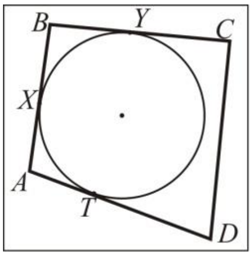
отсюда следует, что $AB + CD = AD + BC$. ◄

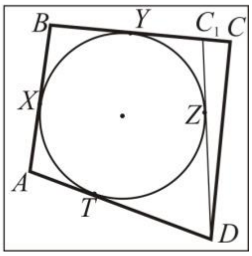
$\Leftarrow$ (*признак четырёхугольника, в который можно вписать окружность*)

Дано: четырёхугольник $ABCD$, $AB + CD = AD + BC$

Доказать: в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

► Рассмотрим окружность, которая касается трёх сторон четырёхугольника $ABCD$: AD, AB и BC в точках T, X, Y соответственно. Пусть для определённости сторона CD не имеет с окружностью общих точек (рис.11, *а*).





а) *б)*

Рисунок 2

1) Проведём из точки D к окружности касательную DZ (Z – точка касания), пересекающую прямую BC в точке C_1 (рис.11, *б*). Тогда четырёхугольник ABC_1D описан около рассматриваемой окружности, у него $AB + C_1D = AD + BC_1$ (1) по свойству четырёхугольника, в который можно вписать окружность.

2) По условию $AB + CD = AD + BC$, то есть $AB + CD = AD + BC_1 + CC_1$, (2). Вычтем из равенства (2) равенство (1), получим: $CD - C_1D = CC_1$. Отсюда следует, что в треугольнике CC_1D имеем $CD = C_1D + CC_1$, что противоречит неравенству треугольника. Таким образом, предположение неверно, значит, окружность касается всех сторон четырёхугольника $ABCD$. ◄

Следствие. В любой ромб можно вписать окружность.

Задача 1. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в многоугольник, можно найти по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S и p – соответственно площадь и полупериметр многоугольника.

Теорема *о четырёхугольнике, вписанном в окружность*. Для того чтобы около четырёхугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы градусных мер его противолежащих углов были равны 180°.

$\Rightarrow$ (*свойство четырёхугольника, вписанного в окружность*)

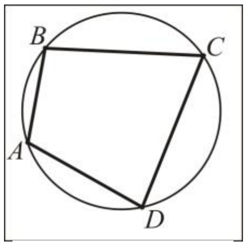


Рисунок 12

Дано: ω – описанная около четырёхугольника $ABCD$ окружность (рис.12).

Доказать: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

►1) $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$, так как углы A и C – вписанные в окружность, тогда $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

2) $\angle B + \angle D = 180° - (\angle A + \angle C) = 180°$, так как сумма градусных мер углов четырёхугольника равна 360°.◄

⇐ (***признак четырёхугольника, вписанного в окружность***)

Дано: четырёхугольник $ABCD$, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

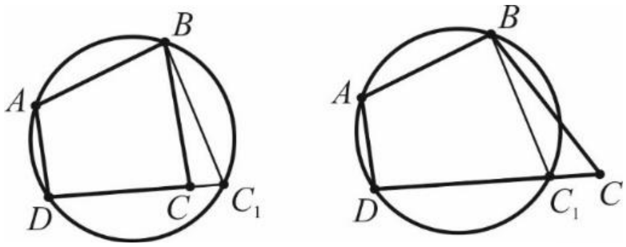
Доказать: около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

►Пусть в четырехугольнике $ABCD$ выполняется равенство $\angle A + \angle C = 180°$. Опишем около треугольника ABD окружность. Тогда для точки C возможны три случая:

а) точка C лежит внутри круга (рис. 13, *а*);

б) точка C лежит на окружности;

с) точка C лежит вне круга (рис. 13, *б*).



а) *б)*

Рисунок 33

Покажем, что случаи а) и с) невозможны.

Пусть выполняется случай а): точка C_1 – точка пересечения продолжения стороны DC с описанной окружностью. Тогда четырехугольник ABC_1D является вписанным, а значит, $\angle A + \angle C_1 = 180°$. По условию $\angle A + \angle BCD = 180°$, значит, $\angle C_1 = \angle BCD$. Получаем противоречие, так как внешний угол $\angle BCD$ треугольника BCC_1 больше его внутреннего угла C_1.

Пусть выполняется случай с): точка C_1 – точка пересечения стороны DC с описанной окружностью. Тогда четырехугольник ABC_1D является вписанным, а, значит $\angle A + \angle BC_1D = 180°$. По условию $\angle A + \angle C = 180°$, значит, $\angle BC_1D = \angle C$. Получаем противоречие, так как внешний угол $\angle BC_1D$ треугольника BCC_1 больше его внутреннего угла C.

Таким образом, точка C лежит на окружности, значит, существует окружность, описанная около четырёхугольника $ABCD$. ◄

Следствие 1. Около любого прямоугольника можно описать окружность.

Следствие 2. Вписанная в окружность трапеция является равнобедренной.

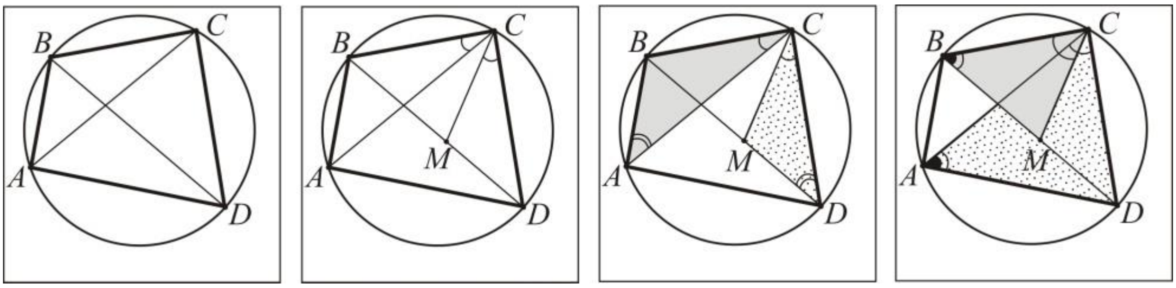
Радиус окружности, описанной около четырёхугольника, можно найти как радиус окружности, описанной около треугольника, заданного любыми тремя вершинами этого четырёхугольника.

Теорема *Птолемея*. Если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений его противолежащих сторон равна произведению диагоналей.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω (рис. 14, *а*).

Доказать: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

►Выберем на диагонали *BD* точку *M* так, что $\angle MCD = \angle BCA$ (рис.14, *б*).



а) *б)* *в)* *г)*

Рисунок 4

1) $\Delta BCA \sim \Delta MCD$ ($\angle BAC = \angle MDC$ как вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну дугу, $\angle MCD = \angle BCA$ по построению, рис. 14, *в*), следовательно, $\frac{AB}{DM} = \frac{AC}{CD}$, т.е. $AB \cdot CD = DM \cdot AC$ (6).

2) $\Delta CBM \sim \Delta CAD$ ($\angle CBM = \angle CAD$ как вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну дугу, $\angle BCM = \angle ACD$, т.к. $\angle MCD = \angle BCA$, рис. 14, *г*), следовательно, $\frac{BC}{AC} = \frac{BM}{AD}$, т.е. $BC \cdot AD = AC \cdot BM$ (7).

3) Сложим равенства (6) и (7), получим $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot (DM + BM) = AC \cdot BD$, что и требовалось доказать. ◄

Задача 2 (*аналог формулы Герона, формула Брахмагупты*). Докажите, что площадь *S* вписанного четырёхугольника со сторонами *a*, *b*, *c*, и *d* находится по формуле $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

1.2.СТЕРЕОМЕТРИЯ

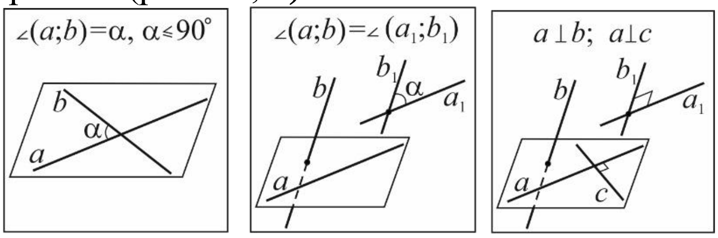
1.2.1. Углы в пространстве

Существуют различные интерпретации понятия угла для объектов пространства: одни углы рассматриваются как фигуры (двугранный угол, линейный угол двугранного угла), а другие – как величины (угол между прямыми – пересекающимися, параллельными, скрещивающимися; между прямой и плоскостью; между двумя плоскостями).

1.2.1.1.Угол между прямыми в пространстве

Определение 1. *Углом между двумя пересекающимися* прямыми называется **градусная мера** меньшего из плоских углов, образующихся при пересечении этих прямых (рис. 15, *а*).

Определение 2. *Углом между двумя скрещивающимися* прямыми называется угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым (рис. 15, *б*).



а) б) в)

Рисунок 55

Определение 3. *Угол между двумя параллельными* прямыми равен 0°.

Определение 4. *Взаимно перпендикулярными прямыми* называются прямые, угол между которыми равен 90°(рис. 15, *в*).

Основное свойство. Угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки, через которую проходят пересекающиеся прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым. Одна из выбранных пересекающихся прямых может совпадать с какой-либо из двух данных скрещивающихся прямых.

Доказательство оформить самостоятельно, опираясь на рисунок 16.

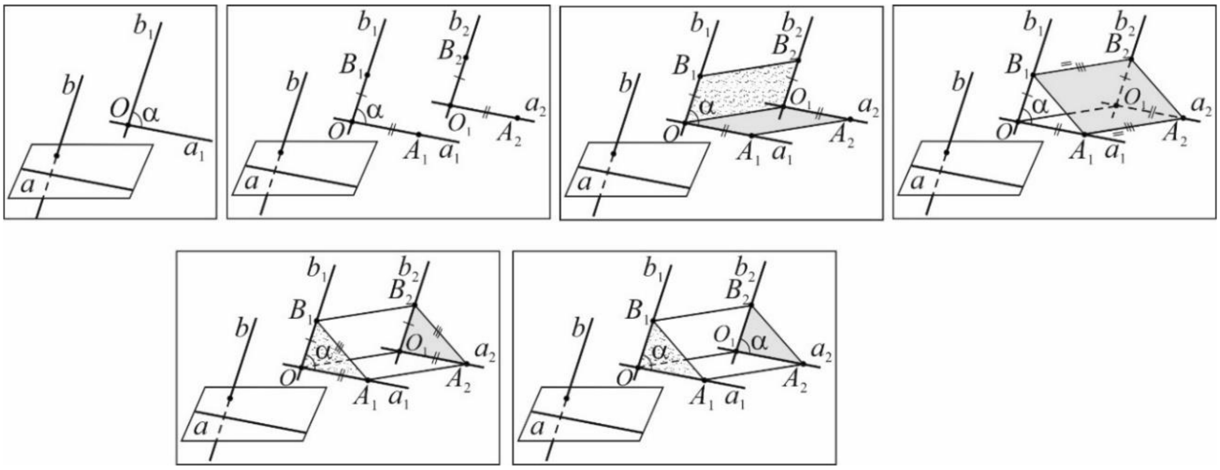


Рисунок 16

Алгоритмы построения угла, градусная мера которого равна углу между двумя данными скрещивающимися прямыми:

Способ 1. Построение начинается с выбора точки, не лежащей на данных прямых.

1. Выбрать некоторую точку пространства.
2. Через выбранную точку и одну из скрещивающихся прямых провести плоскость.
3. В построенной плоскости через указанную точку провести прямую, параллельную лежащей в ней прямой.
4. Через ту же точку и вторую из скрещивающихся прямых провести плоскость.
5. В построенной плоскости через указанную точку провести прямую, параллельную лежащей в ней прямой.
6. Выделить меньший из углов, образующихся при пересечении построенных прямых. Его градусная мера равна углу между двумя данными скрещивающимися прямыми.

Способ 2. Построение начинается с выбора точки, лежащей на одной из данных прямых.

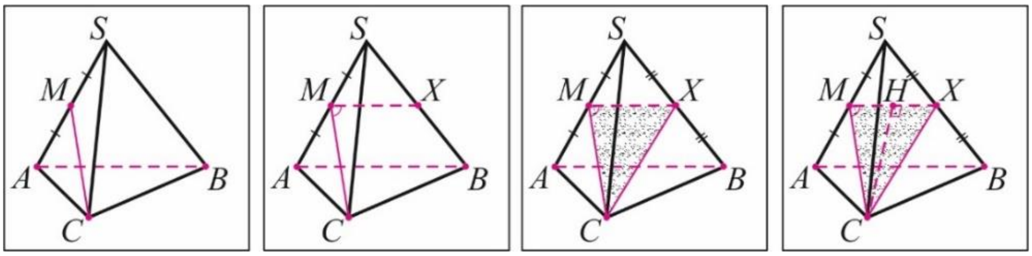
1. На одной из прямых выбрать точку.
2. Через выбранную точку и вторую из скрещивающихся прямых провести плоскость.
3. В построенной плоскости через указанную точку провести прямую, параллельную лежащей в ней прямой.
4. Выделить меньший из углов, образующихся при пересечении построенной и данной прямыми. Его градусная мера равна углу между двумя данными скрещивающимися прямыми.

Способ 3. Построение начинается с плоскости, в которую заключается одна из данных прямых.

1. Одну из данных прямых заключить в плоскость.
2. Найти точку пересечения второй прямой с этой плоскостью.
3. Через найденную точку в этой плоскости построить прямую, параллельную данной прямой.

4. Выделить меньший из углов, образующихся при пересечении этих прямых. Его градусная мера равна углу между двумя данными скрещивающимися прямыми.

Задача 1. В тетраэдре *SABC* точка *M* – середина ребра *AS*. Найдём угол между прямыми *AB* и *CM* (рис. 17, а).



а) *б)* *в)* *г)*

Рисунок 17

Решение.

1) Т.к. $AB \subset (ABC)$, $MC \cap (ABC) = C$ и $C \notin AB$, то *AB* и *CM* – скрещивающиеся прямые по признаку скрещивающихся прямых.

2) Построим угол, градусная мера угла которого равна $\angle(AB; CM)$.

a. Выберем точку $M \in CM$.

b. Рассмотрим плоскость $(M, AB) = ASB$.

c. Построим в ней прямую $MX \parallel AB$, $X \in SB$.

d. $\angle(AB; CM) = \angle(MX; CM) = \angle CMX$.

3) Рассмотрим $\Delta\ CMX$. Пусть $AB = a$.

a. *MX* – средняя линия $\Delta\ CMX$ по теореме Фалеса, следовательно, по свойству средней линии треугольника $MX = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$;

b. $CM = CX = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ как медианы равносторонних треугольников *ASC* и *BSC*.

c. Медиана *CH* является высотой.

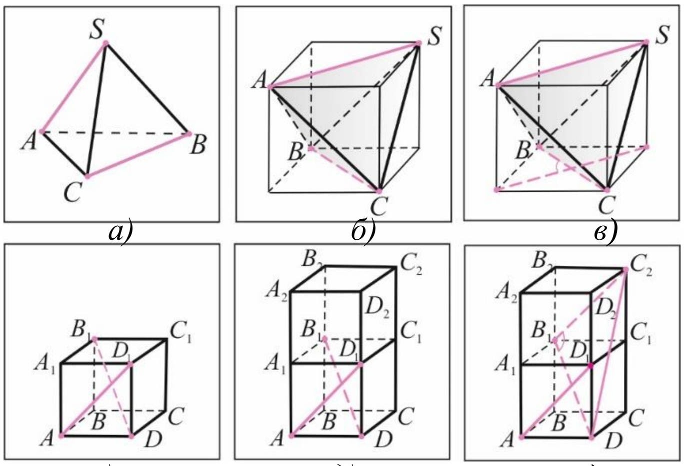
d. В $\Delta\ CMH$ ($\angle H = 90°$, $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MH = \frac{a}{4}$) $\cos CMH = \frac{MH}{MC} = \frac{a}{4} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, значит, $\angle CMX = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Опорные задачи по теме «Угол между прямыми»

Отметим, что в данном учебно-методическом комплексе рассматриваются способы вычисления углов между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями средствами элементарной математики, поэтому опорные задачи, демонстрирующие возможность использования векторов и координат для нахождения углов, не приводятся, так как в Республике Беларусь тема «Векторы и координаты» рассматривается на повышенном уровне.

Опорная задача 1. Вычислите угол между непересекающимися рёбрами тетраэдра (рассмотреть тетраэдр в контексте куба, рис. 18, *а – в*).



а) б) в)

г) д) е)

Рисунок 18

Опорная задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AD_1 и B_1D (*Дополнить данную геометрическую конструкцию кубом* $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ *и, вычислив угол между прямыми* B_1D *и* B_1C_2*, найти искомый угол*, рис. 18, *г – е*).

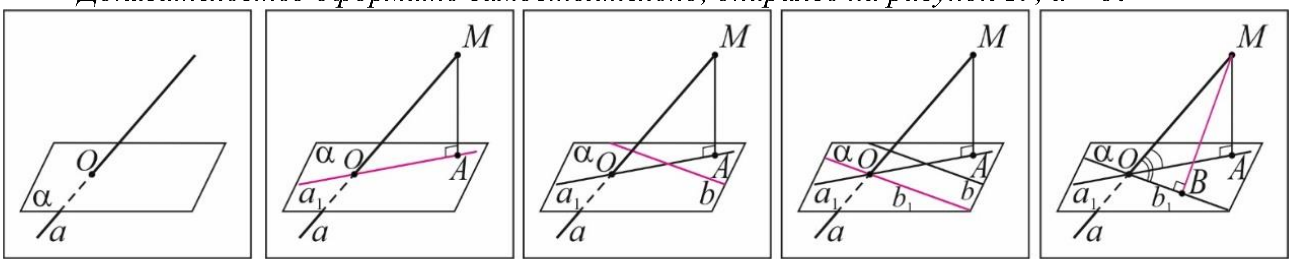
1.2.1.2. Угол между прямой и плоскостью

Определение 5. *Углом между прямой, не перпендикулярной плоскости, и плоскостью* называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Угол между прямой и перпендикулярной ей плоскостью принимается равным 90°.

Основное свойство. Угол между прямой и плоскостью является наименьшим из всех углов, образованных данной прямой с прямыми, лежащими в данной плоскости.

Доказательство оформить самостоятельно, опираясь на рисунок 19, а – д.



а) б) в) г) д)

Рисунок 19

Алгоритмы построения угла между данной прямой и данной плоскостью:

Способ 1.

1) Найти точку пересечения данной прямой и данной плоскости (основание наклонной).

2) Построить перпендикуляр из любой другой точки данной прямой к данной плоскости (предварительно определить, в какой точке окажется основание перпендикуляра).

3) Построить проекцию данной прямой (изображается отрезком, соединяющим основания перпендикуляра и наклонной).

4) Выделить угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Его градусная мера равна углу между данными прямой и плоскостью.

Способ 2. Построение начинается с какого-нибудь перпендикуляра к плоскости. (Этот способ помогает определиться с основанием «главного перпендикуляра»).

Способ 3. Построение начинается с плоскости, перпендикулярной данной. (Данная прямая заключается в плоскость, перпендикулярную данной плоскости).

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдём угол между диагональю DB_1 и плоскостью ABC.

Решение.

1) Построим угол, градусная мера угла которого равна $\angle(DB_1; ABC)$ (рис. 20).

a. $DB_1 \cap (ABC) = D$ – основание наклонной.

b. $BB_1 \perp (ABC)$, B – основание перпендикуляра.

c. DB – проекция наклонной DB_1 на плоскость ABC.

d. $\angle(DB_1; ABC) =\angle B_1DB$.

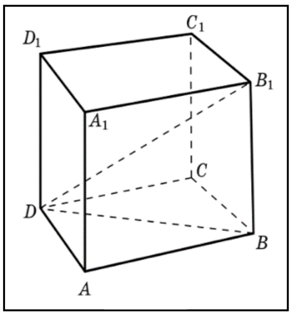


Рисунок 20

2) Рассмотрим ΔDBB_1 ($\angle B_1BD = 90°$).

a. Пусть $BB_1 = a$, тогда $BD = a\sqrt{2}$, $tgB_1DB=\frac{BB_1}{BD}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. $\angle B_1DB = arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Опорная задача 3. Докажите, что если боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания, то основание перпендикуляра, проведённого из вершины пирамиды к плоскости основания, совпадает с центром окружности, описанной около многоугольника основания пирамиды (рис.21).

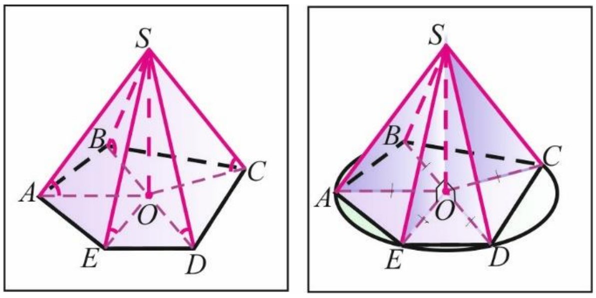
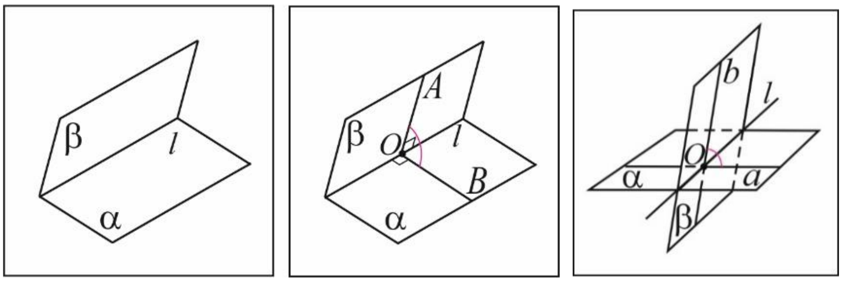


Рисунок 21

1.2.1.3. Двугранный угол, угол между двумя плоскостями

Определение 6. Двугранным углом называется геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей границей – ребром двугранного угла – и частью пространства, для которой эти полуплоскости служат границей (рис.22, *а*).



а) *б)*

Рисунок 22

Определение 7. *Линейным углом двугранного угла* называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, проведенные в его гранях перпендикулярно ребру (рис.22, *б*).

Основное свойство. Все линейные углы двугранного угла равны.

Доказательство оформить самостоятельно.

Определение 8. Углом между пересекающимися плоскостями называется **градусная мера** меньшего из линейных углов двугранных углов, образующихся при пересечении этих плоскостей (рис.22, *в*).

Угол между двумя параллельными плоскостями равен 0°.

Определение 9. *Перпендикулярными плоскостями* называются плоскости, угол между которыми равен 90°.

Под **углом между гранями многогранника** понимается угол между плоскостями, содержащими эти грани.

Алгоритмы построения линейного угла двугранного угла:

Способ 1.

1) Выбрать некоторую внутреннюю точку двугранного угла и провести через нее плоскость, перпендикулярную ребру этого угла.

2) Найти (построить) лучи, по которым эта плоскость пересекает грани двугранного угла.

3) Выделить угол между найденными (построенными) лучами. Построенный угол – искомый (он может быть тупым!).

<u>Способ 2.</u>

1) Выбрать точку на ребре двугранного угла.

2) Провести из этой точки в гранях этого угла перпендикуляры к его ребру.

3) Выделить угол между построенными перпендикулярами. Построенный угол – искомый.

Алгоритмы построения угла, градусная мера которого равна углу между двумя данными плоскостями:

<u>Способ 1.</u>

1) Выбрать некоторую точку пространства и провести через нее плоскость, перпендикулярную прямой пересечения данных плоскостей.

2) Найти прямые, по которым эта плоскость пересекает данные плоскости.

3) Выделить меньший из углов, образующихся при пересечении этих прямых. Его градусная мера равна углу между двумя данными плоскостями (он не может быть тупым!).

<u>Способ 2.</u>

1) Выбрать наименьший из двугранных углов, образующихся при пересечении данных плоскостей.
2) Взять точку на ребре выбранного двугранного угла.
3) Провести из этой точки в гранях двугранного угла перпендикуляры к его ребру.
4) Выделить угол между построенными перпендикулярами. Его градусная мера равна углу между двумя данными плоскостями

<u>Способ 3.</u> Построение начинается с точки на одной из плоскостей: строятся три перпендикуляра (один из них – ко второй плоскости, два других – к прямой пересечения двух данных плоскостей).

Задача 3. В тетраэдре *DABC* точка *M* – середина ребра *AD*. Найдите угол между плоскостями *MBC* и *ABC*.

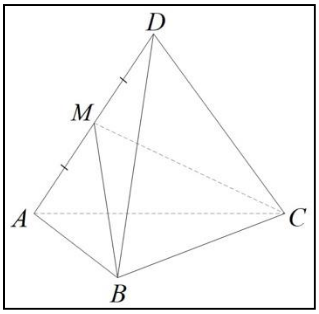


Рисунок 23

1) Искомый угол равен градусной мере линейного угла двугранного угла *MBCA* (рис. 23). Построим этот линейный угол.

a. $BM \perp AD$, так как тетраэдр правильный, а значит ΔABC равносторонний, следовательно, медиана *BM* является его высотой.

b. $CM \perp AD$, так как ΔADC равносторонний, следовательно, медиана *CM* является его высотой.

c. Линейный угол двугранного угла *MBCA* равен углу *BMC*, значит, $\angle(MBC; ABC) = \angle BMC$.

2) Рассмотрим Δ BMC. Пусть $BC = a$, тогда $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов $\cos BMC = \frac{BM^2 + CM^2 - BC^2}{2MB \cdot CM} = \frac{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$, следовательно, $\angle BMC = \arccos\frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Опорная задача 4. Докажите, что площадь $S_{орт}$ ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость равна произведению его площади S на косинус угла φ между плоскостью треугольника и плоскостью проекции: $S_{орт} = S \cdot \cos\varphi$ (рис.24).

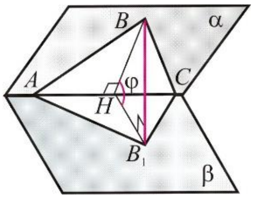


Рисунок 24

Аналогичное утверждение можно доказать для любого плоского многоугольника.

Опорная задача 5. Докажите, что если в пирамиде двугранные углы при основании равны, то основание перпендикуляра, проведённого из вершины пирамиды к плоскости основания, совпадает с центром окружности, вписанной в многоугольник основания пирамиды (рис.25).

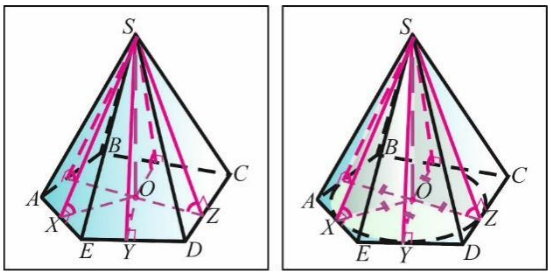


Рисунок 25

1.2.1.4. Многогранный угол. Свойства трехгранного угла

Определение 10. *Многогранным углом* называется геометрическая фигура, являющаяся объединением плоских углов, удовлетворяющих перечисленным ниже требованиям, и части пространства, для которой эти углы служат границей (рис.26).

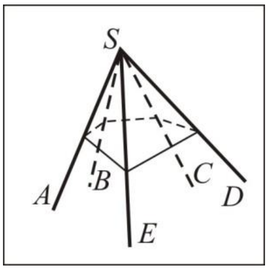


Рисунок 6

Требования к плоским углам многогранного угла:

1) Никакие два угла не имеют общих точек, кроме их общей вершины или стороны.

2) У каждого из таких углов каждая сторона является общей со стороной только одного угла.

3) Никакие два угла с общей стороной не лежат в одной плоскости.

Плоские углы, образующие многогранный угол, называются его *гранями*, а их стороны – *ребрами*, их общая вершина – *вершиной многогранного угла.*

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой его грани.

По числу граней многогранный угол может быть *трехгранным*, *четырехгранным*, …, n-гранным.

На рисунке 26 изображен пятигранный угол $SABCDE$. Его вершиной является точка S, гранями – плоские углы ASB, BSC, CSD, DSE и ESA, ребрами – лучи SA, SB, SC, SD, SE.

Каждые две грани, имеющие общее ребро, определяют *двугранный угол многогранного угла*.

В элементарной математике обычно рассматриваются выпуклые многогранные углы, плоские углы которых меньше 180°.

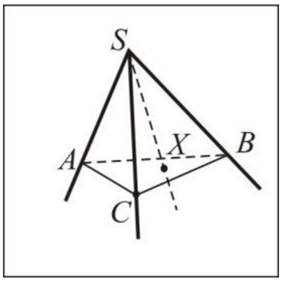


Рисунок 7

Два трехгранных угла называются *равными*, если равны их соответственные элементы: плоские углы и двугранные углы.

Точка X называется *внутренней точкой трехгранного* угла $SABC$, если луч SX пересекает плоскость ABC в точке, которая является внутренней точкой треугольника ABC (рис.27).

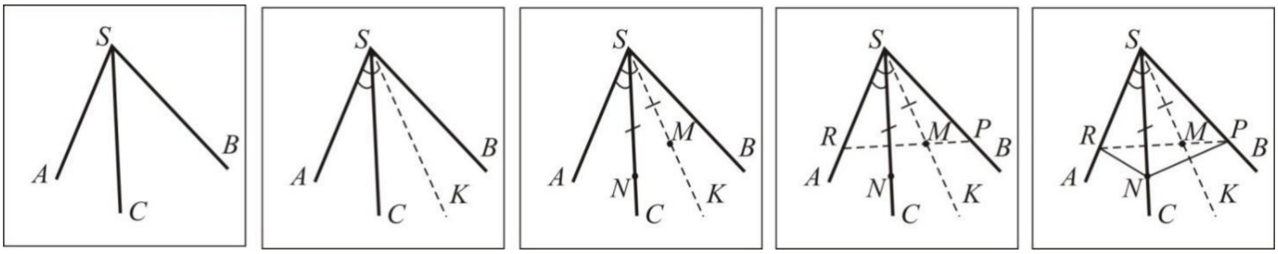
Геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его граней, называется *пространственной биссектрисой этого угла*.

Свойства многогранных углов

Теорема о *свойстве плоских углов трехгранного угла.* Градусная мера каждого плоского угла трехгранного угла меньше суммы градусных мер двух других плоских углов.

► 1) Рассмотрим трехгранный угол *SABC* (рис. 28, *а*). Пусть угол *ASB* его наибольший плоский угол. Покажем, что $\angle ASB < \angle ASC + \angle CSB$.

2) Построим в плоскости *ASB* угол *ASK*, равный углу *ASC* (рис.28, *б*). От точки *S* на луче *SK* отложим отрезок *SM* (рис.28, *в*). На луче *SC* отложим *SN* = *SM* (рис.28, *г*). Через точку *M* в плоскости *ASB* проведем прямую до пересечения с лучами *SA* и *SB* в точках *R* и *P* (рис.28, *д*). Соединим точки *R* и *P* с точкой *N*. Получим равные треугольники *SRM* и *SRN* (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон *RM* = *RN*.



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рисунок 8

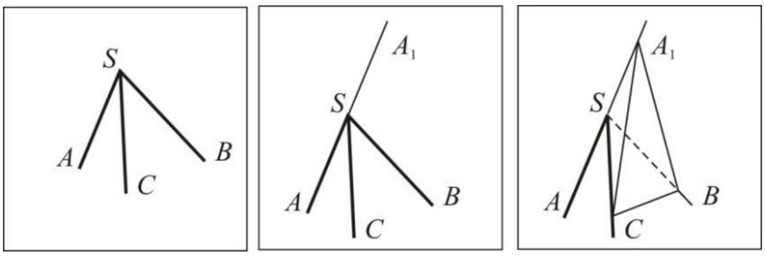
3) Согласно неравенству треугольника в треугольнике *RPN* выполняется *RP* < *RN* + *NP*, т.е. *RM* + *MP* < *RN* + *NP*, откуда *MP* < *NP*.

4) В треугольниках *SPM* и *SPN* по две равные стороны, следовательно, против большей стороны лежит больший угол, т.е. $\angle NSP > \angle MSP$, прибавляя к обеим частям этого неравенства по равным углам *RSM* и *RSN*, получим $\angle ASB < \angle ASC + \angle CSB$.◄

Теорема о *свойстве плоских углов многогранного угла*. Сумма градусных мер всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360º.

► Доказательство проведем для трехгранного угла.

1) Рассмотрим трехгранный угол *SABC* (рис.29, *а*). Построим луч SA_1, противоположный лучу *SA* (рис.29, *б*).



а) *б)* *в)*

Рисунок 9

2) Рассмотрим трехгранный угол SA_1BC (рис. 29, *в*). Его плоскими углами являются $\angle BSC$, $\angle A_1SC = 180° - \angle ASC$, $\angle A_1SB = 180° - \angle ASB$. Применим к ним теорему о свойстве плоских углов трехгранного угла, получим:

$$\angle BSC < 180° - \angle ASC + 180° - \angle ASB, \text{т.е. } \angle ASB + \angle ASC + \angle BSB < 360°. ◄$$

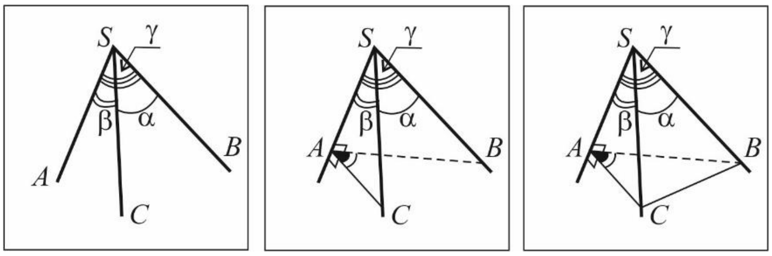
Опорная задача 6. Если два плоских угла трехгранного угла равны, то их общее ребро проецируется на биссектрису третьего плоского угла или ее продолжение.

Рассмотрим *зависимости между плоскими и двугранными углами многогранного угла.*

Теорема *косинусов для трехгранного угла.* Косинус плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух остальных плоских углов, сложенному с произведением синусов этих же углов и косинуса двугранного угла, противолежащего этому плоскому двугранному углу.

► 1) Пусть в трехгранном угле $SABC$ плоские углы $\angle CSB = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$ (рис.30, *а*), а двугранный угол при ребре SA равен A. Докажем, что:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$



а) *б)* *в)*

Рисунок 10

2) Построим линейный угол двугранного угла при ребре SA. (Из точки A проведем перпендикуляры AB и AC к ребру SA в гранях ASB и ASC, рис. 30, *б*)

3) $\Delta\, BAC$: по теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos\angle A$ (1).

$\Delta\, BSC$ (рис. 30, *в*): по теореме косинусов $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB\cdot SC\cos\alpha$ (2).

Из равенств (1) и (2) следует $AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos\angle A$ = $SB^2 + SC^2 - 2SB\cdot SC\cos\angle\alpha$ (3)

4) ΔASB ($\angle A = 90°$): $SB^2 = AS^2 + AB^2$, ΔASC ($\angle A = 90°$): $SC^2 = AS^2 + AC^2$,

Из равенства 3 имеем: $SB\cdot SC\cos\alpha = SA^2 + AB\cdot AC\cos\angle A$.

Разделив обе части этого равенства на произведение $SB\cdot SC$, получим

$$\cos\alpha = \frac{SA}{SB}\cdot\frac{SA}{SC} + \frac{AB\cdot AC}{SB\cdot SC}\cos\angle A = \cos\gamma\cdot\cos\beta + \sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\cos\angle A. \blacktriangleleft$$

Доказательство для случая тупых плоских углов следует из приведенного доказательства заменой данных тупых углов смежными им углами.

Теорема *синусов для трехгранного угла.* В трехгранном угле синусы плоских углов пропорциональны синусам противолежащих им двугранных углов, т.е.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\angle A} = \frac{\sin\beta}{\sin\angle B} = \frac{\sin\gamma}{\sin\angle C}.$$

Доказательство следует из теоремы косинусов для трехгранного угла.

1.2.1.5. Метод прямоугольного тетраэдра

Определение 11. *Прямоугольным тетраэдром* называют треугольную пирамиду, все грани которой – прямоугольные треугольники.

Можно доказать, что существуют только такие прямоугольные тетраэдры, у которых прямые плоские углы располагаются парами: два при одной из вершин, два – при другой. Следовательно, прямоугольный тетраэдр с точностью до подобия может быть задан двумя любыми острыми углами, принадлежащими разным граням.

Теория прямоугольного тетраэдра и методика его применения для решения задач стереометрии разработаны А.М. Фельдманом.

Теорема *о длине ребра прямоугольного тетраэдра.* В прямоугольном тетраэдре квадрат длины ребра, который является общей гипотенузой двух прямоугольных треугольников, равен сумме квадратов трёх рёбер, которые являются общими катетами прямоугольных треугольников, т.е.:

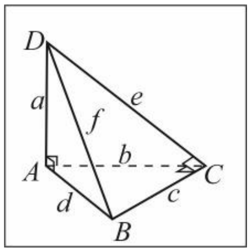
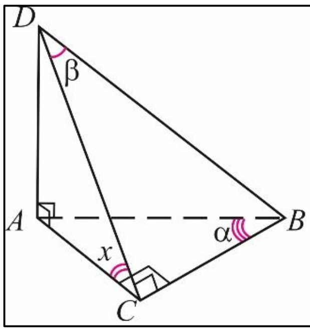


Рисунок 11

$f^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где f – ребро, которое является общей гипотенузой двух прямоугольных треугольников, a, b, c – рёбра, которые являются общими катетами прямоугольных треугольников (рис.31).

Алгоритм нахождения связи между любыми тремя <u>острыми</u> плоскими углами прямоугольного тетраэдра, взятыми по одному в его гранях:

1) Записать треугольники, содержащие три рассматриваемые угла (углы должны принадлежать разным граням, рис. 32).



x	DAC	C	<u>CA</u>
α	ABC		CB
β	DBC		<u>CD</u>

$$\cos x = \frac{CA}{CD} = \frac{CA}{1} \cdot \frac{1}{CD} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CB}{CD} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

Рисунок 3212

2) Найти общую вершину этих треугольников.

3) Указать рёбра, содержащие найденную вершину.

4) Записать тригонометрическую функцию одного из углов, которая может быть выражена через отношение двух из найденных рёбер.

5) Умножить числитель и знаменатель полученной дроби на длину третьего оставшегося ребра.

6) Заменить образовавшиеся отношения тригонометрическими функциями двух оставшихся углов.

Этот алгоритм используется при решении геометрических задач ***методом прямоугольного тетраэдра.*** <u>*Суть метода*</u> состоит в вычленении из данной конфигурации прямоугольного тетраэдра, у которого известны градусные меры двух острых плоских углов, и нахождении градусных мер двух других острых плоских углов (все рассматриваемые углы принадлежат разным граням).

Задача 4. Найти градусную меру двугранного угла при основании правильной четырёхугольной пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания этой пирамиды равен α.

Дано: *SABCD* – правильная пирамида;

$\angle(SC;ABC)=\alpha$;

Найти: $\angle(SCD;ABC)-?$

Решение.

1) Пусть *O*=*AD*∩*BC*, тогда *SO*⊥(*ABC*).

2) *SC* – наклонная, *OC* – перпендикулярная проекция *SC* на плоскость *ABC*, значит, $\angle(SC;ABC)=\angle SCO=\alpha$.

3) Пусть *OH*⊥*DC*, *H*∈*DC*, тогда *SH*⊥*DC* по теореме о трёх перпендикулярах, значит, $\angle(SCD;ABC)=\angle SHO$. Обозначим ∠*SHO*=*x*.

4) Пирамида *SOCH* – прямоугольный тетраэдр:
∠*SOC*=∠*SOH*=∠*OHC*=∠*SHC*=90°.

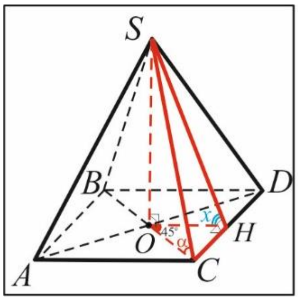


Рисунок 3313

α	*SOC*		*OS*
x	*SHO*	*O*	*OH*
45°	*OHC*		*OC*

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{OS}{OH}=\frac{OS}{1}\cdot\frac{1}{OH}=$$

$$=\frac{OS}{OC}\cdot\frac{OC}{OH}=\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\frac{1}{\cos 45^\circ}=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$x=arctg\left(\sqrt{2}tg\alpha\right)$.

Ответ. $arctg\left(\sqrt{2}tg\alpha\right)$.

1.2.2. Расстояния в пространстве

*1.2.2.*1 Понятие расстояния в пространстве

Определение 1. *Расстоянием между двумя точками* называется длина отрезка, соединяющего данные точки.

Определение 2. *Расстоянием между двумя геометрическими фигурами* F_1 и F_2 (если оно существует) называется наименьшее из расстояний между двумя точками, одна из которых принадлежит фигуре F_1, а другая – фигуре F_2 (рис. 34). Обозначается $\rho(F_1;F_2)$.

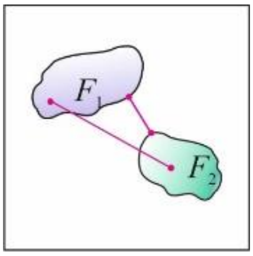


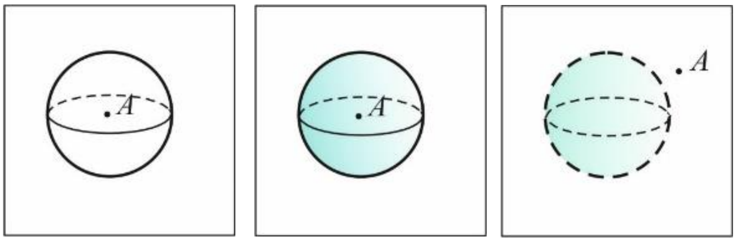
Рисунок 3414

Если геометрические фигуры имеют общую точку, то расстояние между ними принимается равным 0.

Примеры. 1) Расстояние от центра сферы до этой сферы равно её радиусу (рис. 35, *а*).

2) Расстояние от центра шара до этого шара равно нулю (рис. 35, *б*).

3) Пусть дан шар ($O; R$) без границы и точка A, такая, что $OA > R$. Расстояние от точки A до такого шара не существует (рис. 35, *в*).



а) *б)* *в)*

Рисунок 15

Теорема *о расстоянии от точки до прямой*. *Расстояние от точки, не лежащей на прямой, до этой прямой* равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.

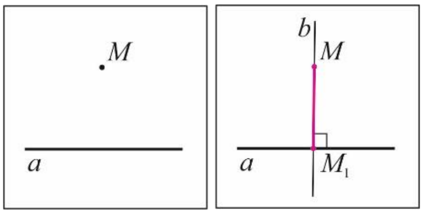


Рисунок 3616

Дано (рис.36): прямая a, точка M, $M \notin a$;

прямая $b \perp a$, $M \in b$, $b \cap a = M_1$.

Доказать: $\rho\ (M; a) = MM_1$.

►

1) На прямой a выберем произвольную точку M_2 (рис.37).

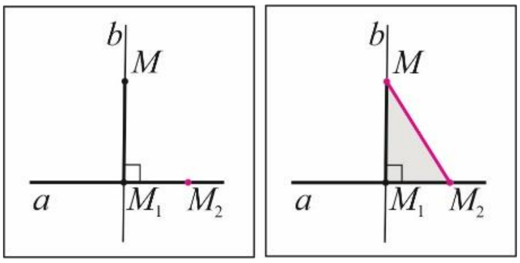


Рисунок 37

2) В ΔMM_1M_2 ($\angle M_1 = 90°$) катет MM_1 меньше гипотенузы MM_2.

3) Длина отрезка MM_1 – наименьшее из расстояний между точкой M и точками прямой a, следовательно, по определению расстояния между геометрическими фигурами, $\rho\ (M; a) = MM_1$. ◄

Задача 1. Найдите расстояние от точки M до луча AB, если расстояние от точки M до прямой AB равно 3 см, а проекция точки M на эту прямую не лежит на луче AB и удалена от его начала на 4 см.

Теорема *о расстоянии от точки до плоскости*. *Расстояние от точки, не лежащей на плоскости, до этой плоскости* равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной плоскости.

Доказательство оформить самостоятельно.

Теорема *о расстоянии между параллельными плоскостями.* *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно расстоянию между произвольной точкой одной плоскости и другой плоскостью.

Дано (рис.38): плоскости α, β; α || β;

точка $A \in \beta$;

Доказать: $\rho(\alpha ; \beta) = \rho(A; \alpha)$.

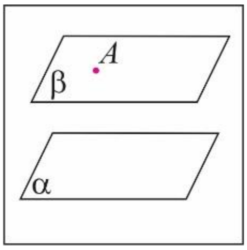


Рисунок 17

▶

1) По теореме о расстоянии от точки до плоскости расстояние $\rho(A; \alpha) = AA_1$, где $AA_1 \perp \alpha$, $A_1 \in \alpha$.

2) Пусть B – произвольная точка плоскости β, отличная от точки A. По теореме 21 расстояние $\rho(B; \alpha) = BB_1$, где $BB_1 \perp \alpha$, $B_1 \in \alpha$ (рис.39).

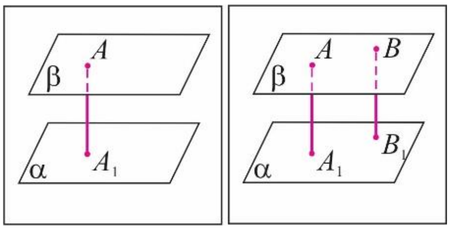


Рисунок 18

3) Т.к. $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$ по признаку параллельных прямых, тогда $AA_1 = BB_1$ как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями.

4) Длина отрезка AA_1 – наименьшее из расстояний между точками плоскостей α и β, следовательно, по определению расстояния между геометрическими фигурами, $\rho(\alpha ; \beta) = \rho(A; \alpha)$. ◀

Следствие 1. *Расстояние от любой геометрической фигуры, лежащей в одной из параллельных плоскостей, до другой плоскости* равно расстоянию между этими плоскостями.

Следствие 2. *Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости* равно расстоянию от произвольной точки этой прямой до плоскости.

Основываясь на теореме о расстоянии между параллельными плоскостями можно найти расстояние между двумя геометрическими фигурами, лежащими в параллельных плоскостях, в случае, если их проекции на одну из плоскостей пересекаются (рис.32).

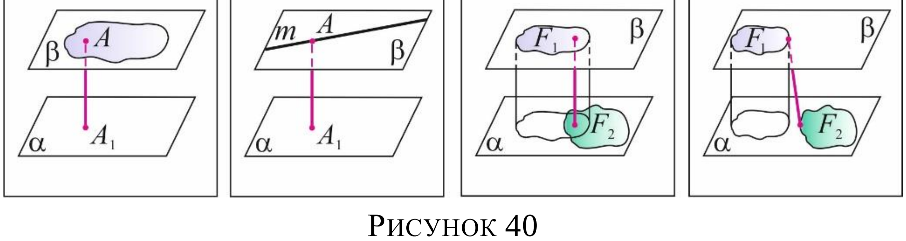


Рисунок 40

Опорная задача 1. Если вершины основания пирамиды равноудалены от вершины пирамиды (боковые рёбра равны), то основание перпендикуляра, проведённого из вершины пирамиды к плоскости основания, совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды (рис.41).

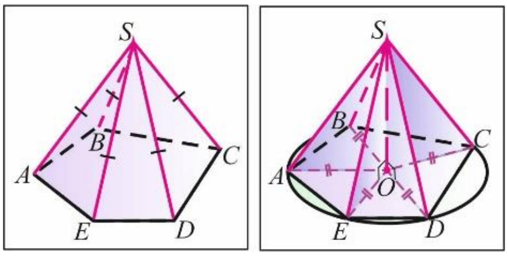


Рисунок 41

Опорная задача 2. Если стороны основания пирамиды равноудалены от вершины пирамиды (высоты боковых граней пирамиды равны), то основание

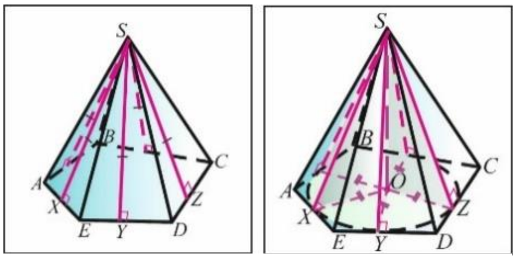


Рисунок 19

перпендикуляра, проведённого из вершины пирамиды к плоскости основания, совпадает с центром окружности, вписанной в основание пирамиды (рис. 42).

1.2.2.2. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых

В данном ЭУМК рассматриваются способы вычисления расстояния между фигурами средствами элементарной математики, поэтому опорные задачи, демонстрирующие возможность использования векторов и координат для нахождения расстояний, не приводятся.

Напомним, что при изучении темы «Параллельность плоскостей» доказывается, что через две скрещивающиеся прямые a и b можно провести две параллельные плоскости α и β ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$), и притом такая пара плоскостей единственная.

Определение 3. *Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых* называется перпендикулярный им отрезок, концы которого лежат на данных прямых.

Теорема о расстоянии между скрещивающимися прямыми. *Расстояние между скрещивающимися прямыми* равно расстоянию между параллельными плоскостями, каждая из которых содержит одну из двух данных скрещивающихся прямых.

Дано (рис.43): прямые a и b; плоскости α, β; $\alpha \parallel \beta$; $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

Доказать: $\rho\ (a;\ b) = \rho\ (\alpha\ ;\ \beta)$.

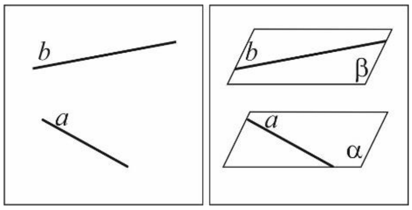


Рисунок 43

►

1) Пусть A – произвольная точка прямой b. Т.к. $A \in b$ и $b \subset \beta$, то $A \in \beta$. По теореме о расстоянии между параллельными плоскостями расстояние $\rho\ (\alpha\ ;\ \beta) = AA_1$, где $AA_1 \perp \alpha$, $A_1 \in \alpha$, то есть длина отрезка AA_1 – наименьшее из расстояний между двумя точками, одна из которых принадлежит плоскости α, а другая – плоскости β (рис. 44). Докажем, что существует отрезок $CC_1 = AA_1$, один из концов которого

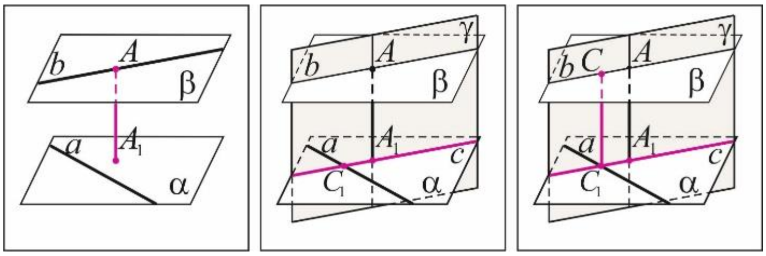


Рисунок 44

принадлежит прямой a, а второй – прямой b.

2) Зададим плоскость $\gamma = (b;\ AA_1)$, $\gamma \cap \alpha = c$, $c \cap a = C_1$. Проведём прямую $C_1C \parallel AA_1$, $C \in b$.

3) Т.к. $C_1C \parallel AA_1$ (по построению) и $c \parallel b$ (т.к. плоскость γ проходит через прямую $b \parallel \alpha$), то AA_1C_1C – параллелограмм, следовательно, по свойству параллелограмма $CC_1 = AA_1$.

4) Т.к. точка $C \in b$, точка $C_1 \in a$ и $CC_1 = AA_1$, то CC_1– наименьший из отрезков, один из концов которого лежит на прямой a, а второй – на прямой b, следовательно, расстояние $\rho\ (a;\ b) = \rho\ (\alpha\ ;\ \beta)$. ◄

Т.к. $CC_1 \parallel AA_1$ и $AA_1 \perp a$, $AA_1 \perp b$, то $CC_1 \perp a$, $CC_1 \perp b$.

Следствие 1. *Расстояние между скрещивающимися прямыми* равно длине их общего перпендикуляра.

Следствие 2. *Расстояние между скрещивающимися прямыми* равно расстоянию от одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой.

Алгоритмы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми:

1 способ

1) Найти параллельные плоскости, каждая из которых содержит одну из скрещивающихся прямых.

2) Выбрать на одной из плоскостей точку и провести из неё перпендикуляр ко второй плоскости.

3) Вычислить длину перпендикуляра.

2 способ

1) Найти плоскость, проходящую через одну из скрещивающихся прямых и параллельную второй прямой.

2) Выбрать на второй прямой точку и провести из неё перпендикуляр к построенной плоскости.

3) Вычислить длину перпендикуляра.

<u>3 способ</u>

1) Найти общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых.

2) Вычислить длину перпендикуляра.

Опорная задача 3. Докажите, что объём треугольной пирамиды можно найти по формуле $V=\frac{1}{6}abd\sin\varphi$, где a и b – длины двух скрещивающихся рёбер этой пирамиды, d – расстояние между ними, φ – угол между прямыми,

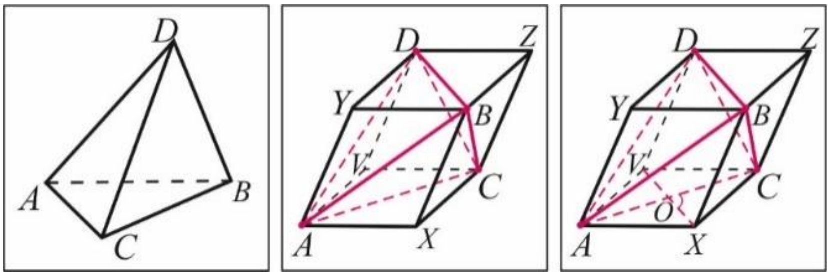


Рисунок 45

содержащими эти скрещивающиеся рёбра.

► Рассмотрим треугольную пирамиду *DABC* в контексте параллелепипеда *AVCXYDZB* (рис. 45), диагоналями граней которого служат рёбра данной пирамиды. Пусть $AC = a$, $BD = b$, $\angle(AC;\ BD) = \varphi$, $\rho(AC;\ BD)=d$.

1) Объём пирамиды *DABC* равен разности объёма параллелепипеда *AVCXYDZB* и объёмов пирамид *AYDB*, *CBDZ*, *BAX*C, *DAVC*, отсекаемых от параллелепипеда плоскостями граней пирамиды *DABC*.

2) Перечисленные пирамиды равновелики, так как равны площади их оснований и высоты, проведённые к основаниям. Кроме того, объем каждой их них равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда, например: $V_{BACX}=\frac{1}{3}h\cdot S_{ACX}=\frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}S_{AVCX}=\frac{1}{6}V_{AVCXYDZB}$, $h=\rho(B;\ ACX)$.

3) $V_{DABC}=V_{AVCXYDZB}-4\cdot\frac{1}{6}V_{AVCXYDZB}=\frac{1}{3}\ V_{AVCXYDZB}$.

4) $V_{AVCXYDZB}=S_{AVCX}\cdot h=\frac{1}{2}AC\cdot VX\cdot\sin\angle COX\cdot h$. Учитывая, что $VX = BD = b$, $\angle COX=\angle(AC;\ BD)=\varphi$; $h=\rho(AC;\ BD)=d$, то $V_{DABC}=\frac{1}{3}V_{AVCXYDZB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\sin\varphi\cdot d=\frac{1}{6}abd\sin\varphi$. ◄

1.2.2.3. Методы вспомогательного объема и ортогонального проецирования при вычислении расстояний и углов в пространстве

Суть метода вспомогательного объёма для вычисления расстояний в пространстве.

1. По аналогии с методом площадей объём рассматриваемой пирамиды выразить дважды: через искомое расстояние и любым другим способом.

2. Приравнять полученные выражения объёма, найти искомое расстояние.

Задача 2 (I способ). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка N – середина ребра AA_1. Вычислите расстояние между прямыми AB_1 и DN, если длина ребра куба равна a.

Решение методом вспомогательного объёма

1) Рассмотрим пирамиду ANB_1D (рис.46). Её объём $V_{ANB_1D} = \frac{1}{6} DN \cdot AB_1 \cdot d \sin\varphi$, где $d = \rho(AB_1; DN)$, $\varphi = \angle(AB_1; DN)$. Иначе $V_{ANB_1D} = \frac{1}{3} S_{AND} \cdot A_1B_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot AN \cdot A_1B_1 = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^3}{12}$.

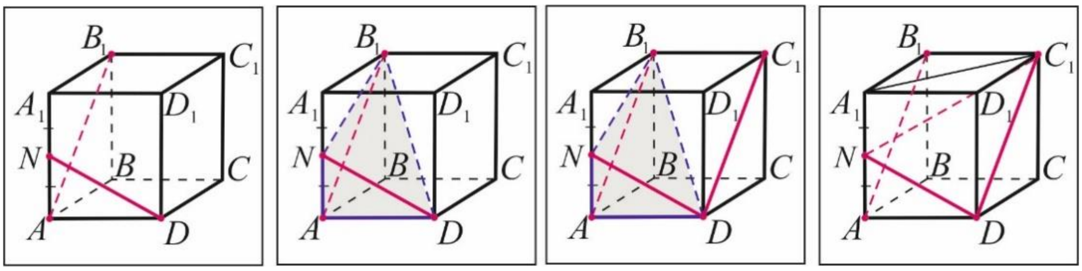


Рисунок 20

2) Имеем: $\frac{1}{6} DN \cdot AB_1 \cdot d \sin\varphi = \frac{a^3}{12}$. В этом равенстве $DN = \sqrt{a + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AB_1 = a\sqrt{2}$. Найдём значение $\sin\varphi$.

3) $DC_1 \parallel AB_1$, следовательно, по определению угла между скрещивающимися прямыми, $\varphi = \angle(DC_1; DN)$

4) В треугольнике DNC_1 ($DN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $DC_1 = a\sqrt{2}$; $NC_1 = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}$) по теореме косинусов $\cos\varphi = \frac{DN^2 + DC_1^2 - NC_1^2}{2DN \cdot DC_1} = \frac{\frac{5}{4} + 2 - \frac{9}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, тогда $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

5) Решая относительно d уравнение $\frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot d \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{a^3}{12}$ находим $d = \frac{a}{3}$.

Ответ: $\dfrac{a}{3}$.

<u>Суть метода ортогонального проецирования при вычислении</u> ***<u>расстояний</u>*** *<u>и</u>* ***<u>мер углов</u>*** *<u>в пространстве.</u>*

1. Выбрать плоскость, на которую одна из скрещивающихся прямых ортогонально проецируется в точку.
2. Найти проекцию второй прямой на эту плоскость.
3. Использовать следующие утверждения:

a. *Расстояние между скрещивающимися* прямыми равно расстоянию от точки пересечения одной из данных прямых с перпендикулярной ей плоскостью до проекции другой прямой на эту плоскость (рис. 47).

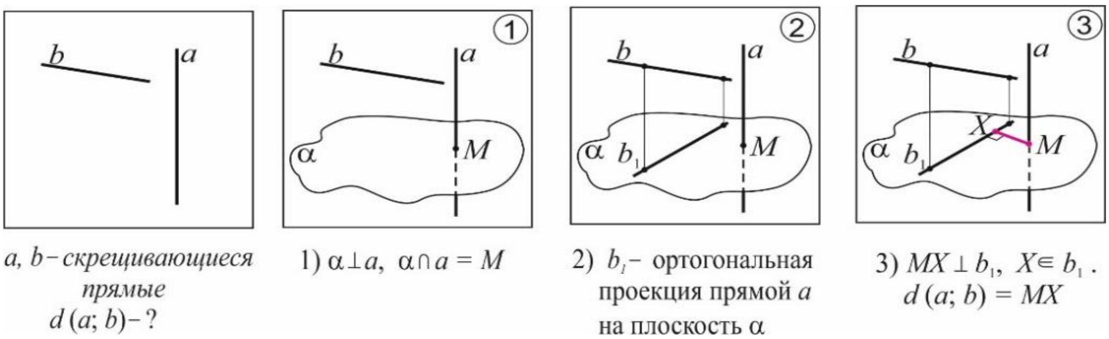


Рисунок 47

b. *Синус угла между скрещивающимися прямыми* равен отношению длины проекции некоторого отрезка одной из прямых на плоскость, перпендикулярную второй прямой, к длине этого отрезка (рис. 48).

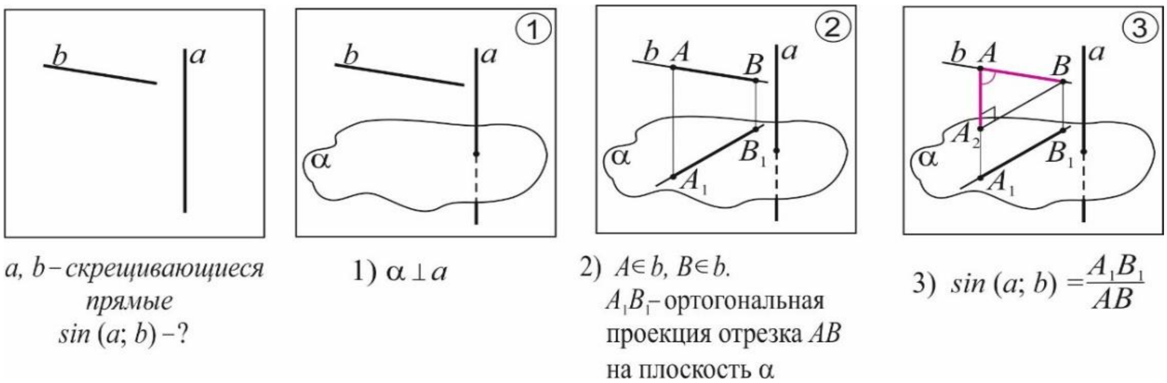


Рисунок 48

Задача 2 (II способ). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка N – середина ребра AA_1. Вычислите расстояние и синус угла между прямыми AB_1 и DN, если длина ребра куба равна a.

Решение методом ортогонального проецирования (рис.49)

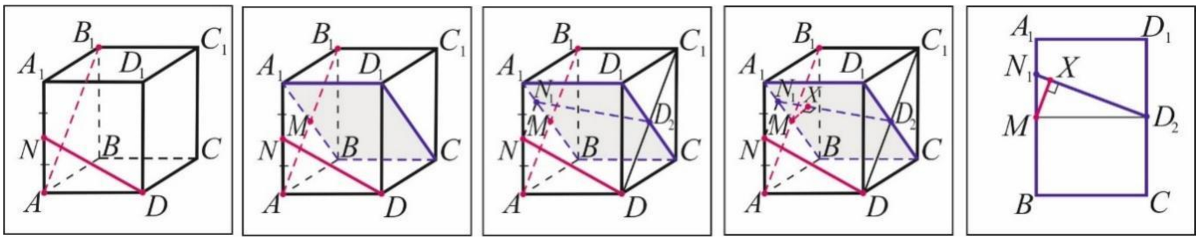


Рисунок 21

1) Плоскость $(A_1BC)\perp AB_1$, так как $A_1B\perp AB_1$ и $BC\perp AB_1$ ($BC\perp(ABB_1)$, $AB_1\subset(ABB_1)$). $(A_1BC)\cap AB_1=M$.

2) Прямая N_1D_2 – ортогональная проекция прямой ND на плоскость A_1BC ($D_2=DC_1\cap D_1C$; $N_1\in A_1B$; $NN_1 \parallel AB_1$).

3) Отрезок $MX \perp N_1D_2$, $X\in N_1D_2$. Расстояние $\rho(AB_1;\ DN) = MX$; $\sin(AB_1;\ DN)=\dfrac{N_1D_2}{ND}$. Вычислим длины отрезков MX, N_1D_2 и ND.

4) В ΔAND ($\angle A$=90°; $AD=a$, $AN=\dfrac{a}{2}$) гипотенуза $ND=\sqrt{a+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

5) В ΔMN_1D_2 ($\angle M$=90°; $MD_2=a$, $MN_1=\dfrac{1}{4}BA_1=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$) гипотенуза $N_1D_2 = \sqrt{a+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$. Используя метод площадей, составляем равенство: $\dfrac{1}{2}MX\cdot N_1D_2=\dfrac{1}{2}MN_1\cdot MD_2$, откуда находим $MX=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot a}{\frac{3\sqrt{2}a}{4}}=\dfrac{a}{3}$. $\sin(AB_1;\ DN)=\dfrac{N_1D_2}{ND}$ = $\dfrac{\frac{3\sqrt{2}a}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $\dfrac{a}{3}$; $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

1.2.3. Многогранники. Площади поверхностей и объёмы многогранников. Отношение объемов частей пирамиды

1.2.3.1. Понятие многогранника

Определение 1. *Многогранником* называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, любые два смежные из которых не лежат в одной плоскости.

Многоугольники, образующие границу многогранника, называются *гранями*, их стороны – *рёбрами*, а вершины – *вершинами* многогранника.

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю многогранника*.

Площадью поверхности многогранника называется сумма площадей всех его граней.

Многогранники подразделяются на выпуклые и невыпуклые многогранники.

Определение 2. Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от каждой из плоскостей, содержащих его грани. Многогранник, не являющийся выпуклым, называется *невыпуклым*.

Определение 3. *Эйлеровой характеристикой многогранника* называется число $b+g-r$, где b – количество вершин, g – количество граней, r – количество рёбер многогранника.

Теорема Эйлера. Эйлерова характеристика любого выпуклого многогранника равна 2.

Проверим справедливость этого утверждения для частных случаев.

▷ Для n-угольной призмы b=2n, g=n+2, r=2n+n=3n. Имеем: $b+g-r=2n+n+2-3n=2$.

Справедливость утверждения для пирамиды проверьте самостоятельно.

1.2.3.2. Призма

Определение 4. *Призмой* (*n-угольной*) называется многогранник, у которого две грани – равные n-угольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные ***n*** граней – параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются сторонами оснований.

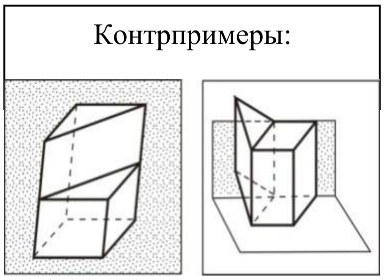


Рисунок 22

На рисунке 50 изображены контрпримеры к определению 4.

Определение 5. *Ортогональное сечение призмы* – это сечение призмы плоскостью, пересекающей все боковые рёбра и перпендикулярной им.

Опорная задача 1. Докажите, что

1) площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра её ортогонального сечения $P_{орт.сеч}$ на длину l бокового ребра : $S_{бок}=l\cdot P_{орт.сеч}$

2) объём наклонной призмы равен произведению площади её ортогонального сечения $S_{орт.сеч}$ на длину l бокового ребра: $V=l\cdot S_{орт.сеч}$.

Доказательство оформить самостоятельно, опираясь на рисунок 51.

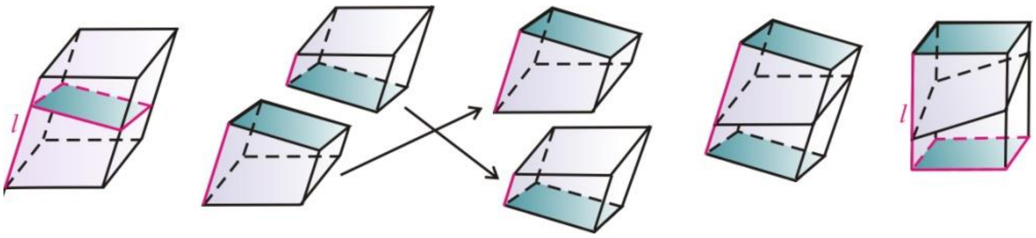


Рисунок 23

Опорная задача 2. Докажите, что в призме, боковое ребро которой образует равные углы с прилежащими рёбрами основания, высота, проведённая из вершины призмы, принадлежащей этому ребру, проецируется на прямую, содержащую биссектрису угла между рассматриваемыми рёбрами основания призмы (рис. 52). *(Используйте результат решения опорной задачи 6 из пункта 1.2.1.4.)*

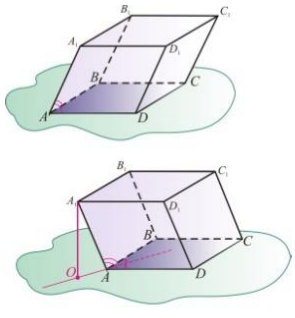


Рисунок 24

1.2.3.3. Пирамида

Определение 6. Пирамидой *(n-угольной)* называется многогранник, у которого одна грань – n-угольник, а остальные n граней – треугольники с общей вершиной, у каждого из которых сторона, противолежащая этой вершине, является одной из сторон основания.

Опорная задача 3. Докажите, что если в пирамиде все боковые рёбра равны или образуют равные углы с плоскостью основания, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды (рис. 53). *См. результаты решённых ранее опорных задач.*

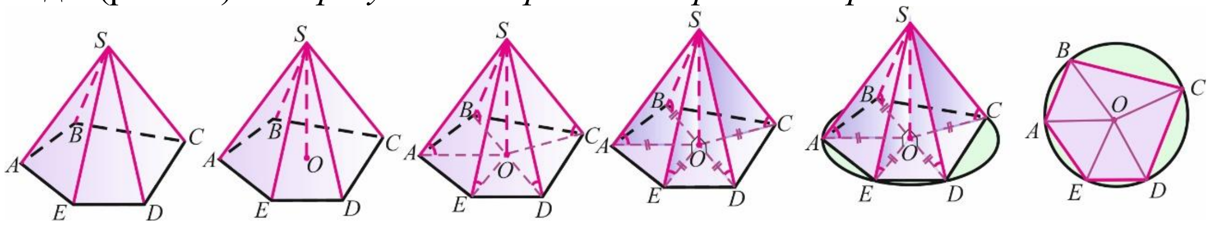


Рисунок 25

Опорная задача 4. Докажите, что если в пирамиде все высоты боковых граней равны или все двугранные углы при рёбрах основания равны, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание пирамиды (рис. 54). *См. результаты решённых ранее опорных задач.*

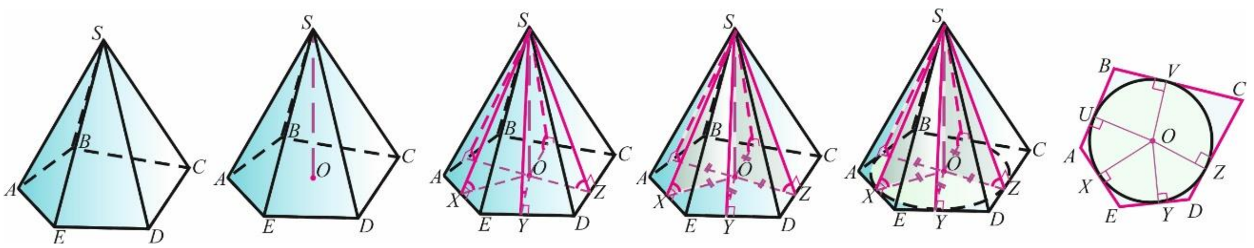


Рисунок 26

Опорная задача 5. Докажите, что если в пирамиде все двугранные углы при рёбрах основания равны, то площадь её боковой поверхности можно вычислить по формулам:

1) $S_{бок} = \frac{1}{2} l \cdot P_{осн}$ (l – высота боковой грани)

2) $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$ (α – мера двугранного угла при ребре основания).

Опорная задача 6. Докажите, что объёмы треугольных пирамид, имеющих общий трёхгранный угол, относятся как произведения длин трёх рёбер этих пирамид, выходящих из вершины этого трёхгранного угла.

Т.е. для пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$, имеющих общий трехгранный угол с вершиной S верно равенство $\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}$.

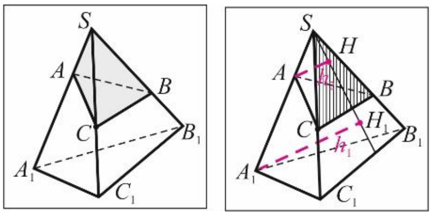


Рисунок 27

►Пусть AH и A_1H_1 – высоты пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ (рис.55).

1) Т.к. $AH \perp (SBC)$, $A_1H_1 \perp (SBC)$, то $AH \parallel A_1H_1$. $\Delta ASH \sim \Delta A_1SH_1$ (по двум углам), следовательно, $\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{AS}{A_1S_1}$.

2) $$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{3} S_{SBC} \cdot AH}{\frac{1}{3} S_{SB_1C_1} \cdot A_1H_1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SC \cdot SB \cdot AH}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SC_1 \cdot SB_1 \cdot A_1H_1} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}.$$ ◄

Опорная задача 7. Докажите, что объём пирамиды равен трети произведения площади её поверхности на радиус сферы, вписанной в пирамиду. $V = \frac{1}{3} S_{полн} \cdot r$

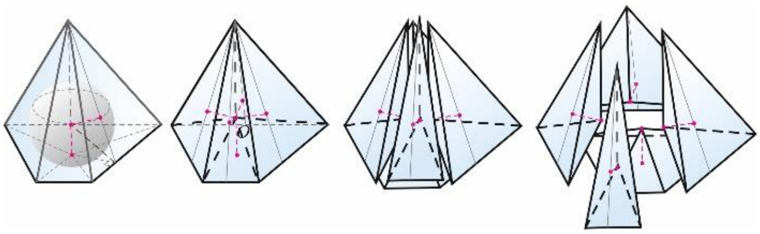


Рисунок 28

Опорная задача 8. Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания – многоугольник, подобный основанию; площади сечения и основания относятся как квадраты расстояний от вершины до плоскостей, в которых расположены сечение и основание пирамиды.

1.2.3.Комбинации шара с многогранниками

1.2.3.1. Шар, описанный около многогранника

Определение 1. *Шар* (*сфера*) называется *описанным около многогранника* (*многогранник – вписанным в шар* (*сферу*)), если все вершины многогранника лежат на поверхности шара (на сфере).

Центр шара (сферы), описанной около многогранника – точка, равноудалённая от всех вершин этого многогранника. Около наклонной призмы нельзя описать шар, так как не существует точки, равноудаленной от всех вершин такой призмы.

Теорема о шаре, описанном около призмы. Около призмы можно описать единственный шар тогда и только тогда, когда эта призма прямая и около ее основания можно описать окружность.

► ⇒ Пусть около призмы описана сфера. Докажем, что призма прямая и около ее основания можно описать окружность.

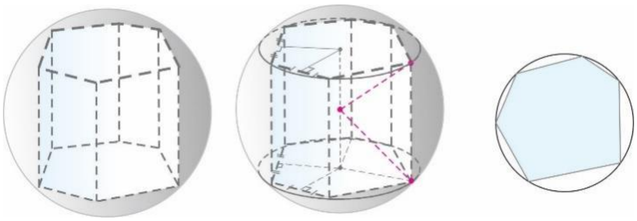


Рисунок 29

1) Так как все вершины многогранника, вписанного в шар, лежат на поверхности этого шара, то каждая грань призмы вписана в окружность – сечение поверхности шара плоскостью этой грани, следовательно, около основания призмы, вписанной в шар, можно описать окружность.

2) Так как боковые грани призмы – параллелограммы, вписанные в окружность, то они являются прямоугольниками, следовательно, по определению, призма прямая.

⇐ *Существование и единственность.* Пусть дана прямая призма, около основания которой можно описать окружность. Докажем, что около этой призмы можно описать шар.

Вершины данной призмы лежат на окружностях оснований цилиндра. Согласно теореме о шаре, описанном около цилиндра, существует единственный шар, описанный около рассматриваемого цилиндра. ◄

Вывод: Центр шара (сферы), описанного около прямой призмы – середина отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований этой призмы. Радиус шара равен длине отрезка, соединяющего центр шара с вершиной призмы.

Теорема *о шаре, описанном около пирамиды.* Около пирамиды можно описать единственный шар тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.

►⇒

Самостоятельно

⇐ *Существование и единственность.* Пусть дана пирамида, около основания которой можно описать окружность. Возьмём три вершины основания и вершину пирамиды. Эти четыре точки не лежат в одной плоскости, поэтому, согласно лемме, через них проходит единственная сфера. Плоскость основания пирамиды пересекает эту сферу по

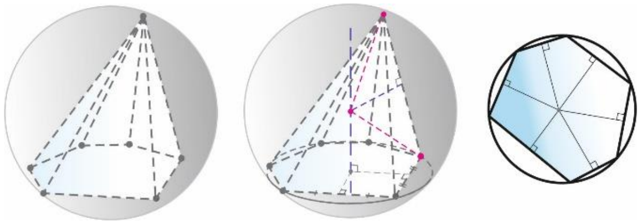


Рисунок 58

окружности, описанной около треугольника, заданного выбранными вершинами основания. Учитывая, что около треугольника можно описать единственную окружность, на этой окружности лежат все вершины основания пирамиды. Таким образом, существует единственный шар, описанный около данной пирамиды.

Вывод: 1) Центр шара (сферы), описанного около пирамиды – точка пересечения перпендикуляра, проведённого к плоскости основания пирамиды через центр окружности, описанной около этого основания, и плоскости, перпендикулярной боковому ребру пирамиды и проходящей через его середину.

2) Центр шара (сферы), описанного около пирамиды – точка пересечения двух прямых, которые проходят через центры окружностей, описанных около двух граней пирамиды, и перпендикулярных им.

1.2.3.2. Шар, *вписанный в многогранник*

Определение 2. *Шар* (*сфера*) называется *вписанной в многогранник* (*многогранник – описанным около шара* (*сферы*)), если шар (сфера) касается всех граней многогранника.

Центр шара (сферы), вписанного в многогранник – точка, равноудалённая от всех граней этого многогранника.

Теорема *о шаре, вписанном в призму*. В призму можно вписать единственный шар тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности.

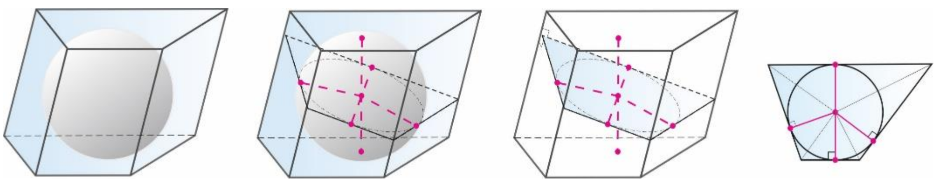


Рисунок 30

► $\Rightarrow$ Пусть в призму вписан шар. Так как радиусы шара, проведённые в точки касания поверхности шара с боковой поверхностью призмы, перпендикулярны плоскостям боковых граней, то они перпендикулярны боковым ребрам призмы. А так как они проходят через одну точку (центр шара), то они лежат в одной плоскости. Эта плоскость является плоскостью перпендикулярного сечения призмы. Так как эта плоскость проходит через центр шара, то в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность, радиус которой равен радиусу шара. Так как плоскости оснований призмы параллельны и касаются поверхности шара, то высота призмы равна диаметру шара. Таким образом, высота призмы, в которую вписан шар, равна диаметру окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы.

$\Leftarrow$ *Существование и единственность.* Пусть дана призма, в перпендикулярное сечение которой можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности. Докажем, что в эту призму можно вписать единственную сферу.

1) Множество точек, равноудаленных от двух смежных граней призмы – биссектор двугранного угла, образованного этими гранями. Биссекторы двугранных углов при боковых рёбрах призмы пересекают её перпендикулярное сечение по биссектрисам углов этого сечения. Так как в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность, то биссектрисы его углов пересекаются в точке Q – центре окружности, вписанной в это сечение, следовательно, биссекторы двугранных углов при боковых рёбрах призмы пересекаются по прямой, проходящей через точку Q.

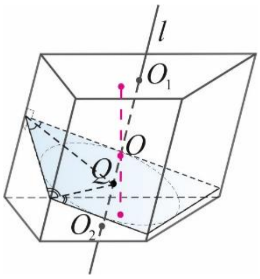


Рисунок 31

2) Проведём через точку Q прямую l, параллельную боковому ребру призмы. Пусть прямая l пересекает основания призмы в точках O_1 и O_2. Докажем, что шар с центром в середине O отрезка O_1O_2 и радиусом $\frac{d}{2}$ касается всех граней призмы. Действительно, расстояния от центра этого шара до плоскостей боковых граней призмы равны радиусу, окружности, вписанной в ортогональное сечение призмы, который равен радиусу шара. Расстояния от центра этого шара до плоскостей оснований равны половине высоты призмы, которая равна диаметру шара.

3) Так как центр O шара и его радиус r определяются однозначно (O – середина отрезка O_1O_2, $r = \frac{d}{2}$), то вписанный шар единственный.◄

Вывод: Центр шара (сферы), вписанного в призму – середина отрезка, соединяющего точки оснований призмы и проведённого параллельно боковым рёбрам призмы через центр окружности, вписанной в ее перпендикулярное сечение.

В частности, центр шара, вписанного в прямую призму, высота которой вдвое больше радиуса окружности, вписанной в основание, – середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания призмы.

Теорема *о шаре, вписанном в пирамиду*. В пирамиду можно вписать единственный шар тогда и только тогда, когда а) биссекторы двугранных углов при всех боковых рёбрах пересекаются по одной прямой; б) двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны между собой.

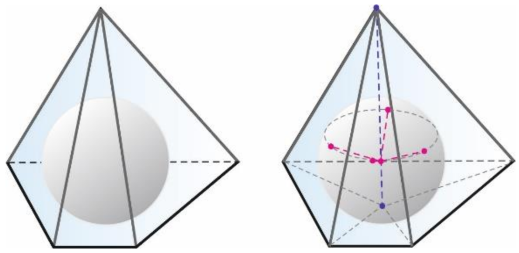


Рисунок 32

Вывод: 1) Центр шара (сферы), вписанной в пирамиду – точка пересечения биссекторов трёх двугранных углов при рёбрах пирамиды, выходящих из одной вершины.

2) Центр шара (сферы), вписанной в пирамиду, боковые грани которой одинаково наклонены к плоскости основания, – точка пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла двугранного угла при основании.

1.2.4. Комбинации тел вращения

1.2.4.1. *Комбинации шара с цилиндром*

Определение 1. *Шар* (*сфера*) называется *вписанным в цилиндр* (*цилиндр – описанным около шара* (*сферы*)), если шар (сфера) касается оснований цилиндра и каждой его образующей.

Теорема *о шаре, вписанном в цилиндр.* В цилиндр можно вписать единственный шар тогда и только тогда, когда высота цилиндра равна диаметру его оснований.

►$\Rightarrow$ Пусть в цилиндр с осью O_1O_2 и диаметром оснований, равным d, вписан шар. Докажем, что $O_1O_2 = d$. Рассмотрим осевое сечение цилиндра – прямоугольник $ABCD$, где $AB = O_1O_2$, $AD=d$, O_1 и O_2 – середины отрезков BC и AD соответственно (рис.62). Плоскость этого сечения пересекает шар по большому кругу, вписанному в прямоугольник $ABCD$. Отсюда заключаем, что $ABCD$ – квадрат, следовательно, $O_1O_2 = AB=AD=d$.

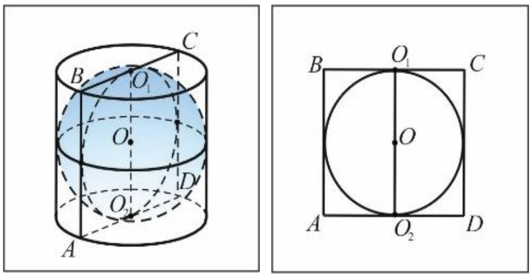


Рисунок 33

$\Leftarrow$ *Существование и единственность*. Пусть длина оси O_1O_2 цилиндра равна диаметру d его оснований. Докажем, что существует единственный шар, вписанный в этот цилиндр.

1) Множество точек, равноудаленных от образующих цилиндра – ось цилиндра. Множество точек, равноудалённых от плоскостей оснований цилиндра – параллельная им плоскость, проходящая через середину их общего перпендикуляра. Следовательно, центр шара, вписанного в цилиндр – середина O оси O_1O_2 цилиндра. Докажем, что шар $W\left(O; \frac{d}{2}\right)$ является вписанным в данный цилиндр (рис.63).

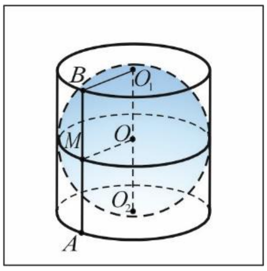


Рисунок 34

2) Отрезки OO_1 и OO_2 – перпендикуляры, проведённые из центра шара к плоскостям оснований цилиндра, их длины равны $\frac{d}{2}$, следовательно, по теореме о взаимном расположении сферы и плоскости, плоскости оснований цилиндра являются касательными шару $W\left(O; \frac{d}{2}\right)$.

3) Пусть AB – произвольная образующая цилиндра, отрезок OM – перпендикуляр, проведённый из центра шара к образующей AB. Т.к. OO_1BM – параллелограмм (образующая AB и отрезок OO_1 перпендикулярны верхнему основанию цилиндра, следовательно, они параллельны; отрезки OM и O_1B перпендикулярны образующей AB, следовательно, они параллельны), то

$OM=O_1B=\frac{d}{2}$, следовательно, прямая AB – касательная к шару $W\left(O\ ;\ \frac{d}{2}\right)$. Таким образом, шар W касается оснований данного цилиндра и каждой его образующей, и, значит, вписан в этот цилиндр.

4) Так как центр O шара и его радиус r определяются однозначно (O – середина отрезка O_1O_2, $r=\frac{d}{2}$), то вписанный шар единственный.◄

Вывод: Центр и радиус шара (сферы), вписанного в цилиндр, совпадают соответственно с центром и радиусом круга (окружности), вписанного в осевое сечение этого цилиндра (оно является квадратом).

Определение 2. *Шар* (*сфера*) называется *описанным около цилиндра* (*цилиндр – вписанным в шар* (*сферу*)), если все точки окружностей оснований цилиндра принадлежат поверхности шара (сфере).

Лемма. Через четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, проходит единственная сфера.

Теорема *о шаре, описанном около цилиндра.* Около любого цилиндра можно описать единственный шар.

►*Существование.*

1) Множество точек, равноудаленных от окружностей оснований цилиндра – прямая, содержащая его ось. Следовательно, если существует шар, описанный

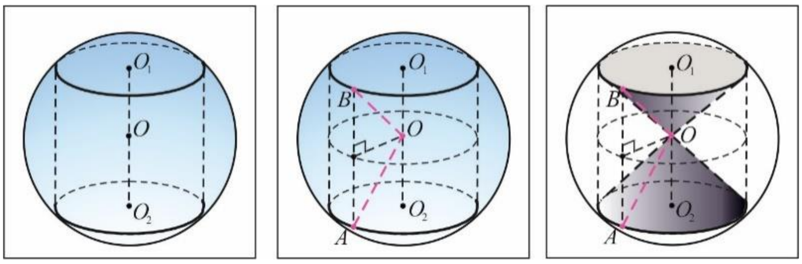


Рисунок 35

около цилиндра, то его центр принадлежит оси цилиндра. Множество точек, равноудалённых от концов произвольной образующей AB цилиндра – плоскость, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная к нему. Пусть эта плоскость пересекает ось OO_1 данного цилиндра в точке O (такая точка существует, т.к. плоскость, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую прямую) (рис.54). Обозначим $OA=OB=R$. Докажем, что шар $W(O\ ;\ R)$ является описанным около данного цилиндра. Для этого докажем, что все точки окружностей оснований цилиндра удалены от точки O на расстояние R.

2) Рассмотрим два конуса с общей вершиной O, основаниями которых служат основания цилиндра. Длина любой образующей конуса с осью OO_1 равна длине отрезка OB, а длина любой образующей конуса с осью OO_2 равна длине отрезка OA. Так как $OA=OB=R$, то длины всех образующих конусов равны R, следовательно, все точки окружностей оснований цилиндра принадлежат поверхности шара $W(O\ ;\ R)$.

Единственность. Возьмём на окружности одного основания цилиндра три точки X, Y, Z, а на окружности другого основания – точку V. Точки X, Y, Z, V не лежат в одной плоскости. Согласно лемме через эти четыре точки проходит единственная сфера, следовательно, не существует другой сферы, описанной около данного цилиндра ◄.

Вывод: Центр и радиус шара (сферы), описанного около цилиндра, совпадают соответственно с центром и радиусом круга (окружности), описанного около осевого сечения этого цилиндра (оно является прямоугольником).

1.2.4.2. *Комбинации шара с конусом*

Определение 3. *Шар* (*сфера*) называется *вписанным в конус* (*конус – описанным около шара* (*сферы*)), если шар (сфера) касается основания конуса и каждой его образующей.

Теорема *о шаре, вписанном в конус.* В любой конус можно вписать единственный шар.

►*Существование*

1) Множество точек, равноудаленных от образующих конуса – ось конуса. Следовательно, если существует шар, вписанный в конус, то его центр

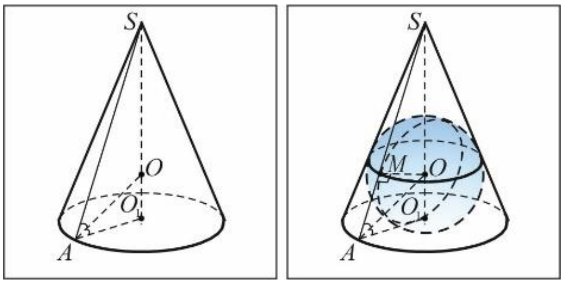


Рисунок 36

принадлежит оси конуса. Пусть SA – произвольная образующая конуса (рис.55). Возьмём на оси SO_1 конуса точку O такую, что $\angle SAO=\angle O_1AO$, обозначим $OO_1=r$. Докажем, что шар $W\,(O\,;\,r)$ является вписанным в данный конус.

1) Отрезок OO_1 – перпендикуляр, проведённый из центра шара к плоскости основания конуса, его длина равна r , следовательно, по теореме о взаимном расположении сферы и плоскости, плоскость основания конуса является касательной к шару $W\,(O\,;\,r)$.

2) Пусть OM – перпендикуляр, проведённый из центра шара к образующей AB. По свойству биссектрисы угла $OM=OO_1= r$, следовательно, прямая AB – касательная к шару $W\,(O\,;\,r)$. Таким образом, шар W касается основания данного конуса и каждой его образующей, и, значит, вписан в этот конус.

Единственность. Предположим, что существует ещё один шар W' с центром в точке O', вписанный в данный конус (рис.56). Рассмотрим осевое сечение конуса плоскостью, проходящей через точку O', – равнобедренный треугольник TSE. Плоскость этого осевого сечения пересекает шар W' по большому кругу, который вписан в равнобедренный треугольник TSE. Отсюда заключаем, что точка O' равноудалена от сторон треугольника TSE, то есть является центром вписанной в него окружности, и следовательно, совпадает с точкой O пересечения его биссектрис. Кроме того, радиус шара W' равен $OO_1=r$, поэтому шары W и W' совпадают. ◄

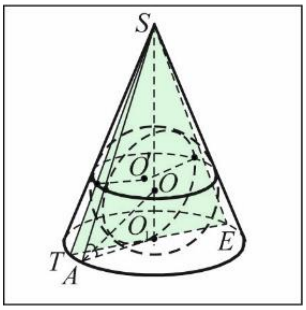


Рисунок 37

Вывод: Центр и радиус шара (сферы), вписанного в конус, совпадают соответственно с центром и радиусом круга (окружности), вписанного в осевое сечение этого конуса (оно является равнобедренным треугольником).

Определение 4. *Шар* (*сфера*) называется *описанным около конуса* (*конус – вписанным в шар* (*сферу*)), если вершина конуса принадлежит сфере, а основание является сечением данного шара (шара, ограниченного данной сферой).

Теорема *о шаре, описанном около конуса.* Около любого конуса можно описать единственный шар.

Вывод: Центр и радиус шара (сферы), описанного около конуса, совпадают соответственно с центром и радиусом круга (окружности), описанного около осевого сечения этого конуса (оно является равнобедренным треугольником).

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. ПЛАНИМЕТРИЯ

2.1.1. Отношение площадей треугольников

№1. Через середину K стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1 см^2, и вершину A проведена прямая, которая пересекается с диагональю BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OKCD$.

№2. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как 3:1. Найдите отношение площадей треугольников ACD и BOC, где O – точка пересечения диагоналей трапеции.

№3. Длина боковой стороны трапеции равна 6, а расстояние от неё до середины противоположной стороны равно 4. Найдите площадь трапеции.

№4. В трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) AB=5см, CD=8см. На средней линии трапеции выбрана точка M, удаленная от сторон AB и CD соответственно на 2см и 1см. Найдите площадь трапеции.

№5. На сторонах AB, BC, AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M, T так, что $AK:KB$=2:1, $BM:MC$=1:1, $AT:TD$=1:3. Найдите отношение площадей треугольников KBT и BMT.

№6. Через точку, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых – треугольники, имеющие площади 2, 8 и 18. Найдите площадь треугольника ABC.

№7. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $AD:DC$=1:5. В каком отношении точка N делит сторону BC, если отрезок DN делит площадь треугольника ABC на две равные части?

№8. Основания равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равны 40 см и 24 см. Найдите площадь трапеции.

№9. В трапеции длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 8. Найдите площадь трапеции, если длины её диагоналей равны 30 см и 34 см.

№10. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB медианы, проведённые к боковым сторонам, равны *30* и пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOC, если AB=32.

2.1.2. Теоремы Чевы и Менелая

№1. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении $BD:DC= 1:3$, а точка O делит AD в отношении $AO:OD=5:2$. В каком отношении прямая BO делит отрезок AC?

№2. В $\triangle ABC$ на стороне AC взята точка M, а на стороне BC – точка K так, что $AM: MC= 2:3$, $BK: KC$= 4:3. В каком отношении AK делит отрезок BM?

№3. В треугольнике ABC, описанном около окружности, $AB = 8, BC = 5, AC = 4$. Точки A_1, B_1 и C_1 – точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC, AC и BA. Точка P – точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1. Найдите отношение $AP:PA_1$.

№4. Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

№5. На стороне AC в треугольнике ABC взята точка K. $AK = 1, KC = 3$. На стороне AB взята точка L. $AL:LB=2:3$. Q – точка пересечения прямых BK и CL. $S_{AQC} = 1$. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.

№6. Через вершину B ΔABC проведена прямая, параллельная биссектрисе $\angle$ C и пересекающая продолжение стороны AC в точке D. Пусть E – середина отрезка BD. Определить, в каком отношении прямая AE делит площадь ΔABC, если известно, что $AC=5, BC=10$.

№7. Медиана BD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке F. Найти площадь треугольника ABC, если $AF=3FE, BD=4, AE=6$.

№8. На стороне NP квадрата $MNPQ$ взята точка A, а на стороне PQ – точка B так, что $NA:AP = PB:BQ = 2:3$. Точка L является точкой пересечения отрезков MA и NB. В каком отношении точка L делит отрезок MA?

№9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K, причем $BE:ED=1:2$, $CK:KD=1:4$. Найдите отношение длин оснований трапеции.

№10. В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, M лежат на ребрах AD, DB и BC соответственно, причем $AK:KD = 4:1$, $DL:LB = 1:1$, $MB:MC = 1:2$. Через точки K, L, M проведена плоскость. Если плоскость KLM пересекает ребро CA в точке N, то $CN:NA$ равно…

№11. В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, M лежат на ребрах AD, DB и BC соответственно, причем $AK:KD = 3:1$, $DL:LB = 2:1$, $MB = MC$. Через точки K, L, M проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит ребро AC?

№12. На продолжении ребра AC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ с вершиной D взята точка K так, что $KA:KC=3:4$, а на ребре DC взята точка L так, что $DL:LC=2:1$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки B, L и K?

2.1.3. Прямая Эйлера. Окружность Эйлера. Формула Эйлера

№1. Перпендикуляр, восстановленный в вершине C параллелограмма $ABCD$ к прямой CD, пересекает в точке F перпендикуляр, опущенный из вершины A на диагональ BD, а перпендикуляр, восстановленный из точки B к прямой AB, пересекает в точке E серединный перпендикуляр к отрезку AC. В каком отношении отрезок EF делится стороной BC?

№2. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, а медианы — в точке O. Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 2$, а разность углов B и C равна 300.

№3. В треугольнике ABC $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{19}$. Центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

2.1.4. Вписанные и описанные многоугольники

№1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CK. Найдите длину отрезка EK, если периметры треугольников ABC и BEK равны соответственно 5 см и 3 см, а радиус окружности, описанной около треугольника BAC, равен 1.

№2. Четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями вписан в окружность радиуса R. Докажите, что суммы квадратов противолежащих сторон четырехугольника равны $4R^2$.

№3. В окружность вписан четырехугольник с углами $120°$, $90°$, $60°$, $90°$. Площадь четырехугольника равна $9\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

№4. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AB в точке D, стороны AC – в точке E. Найдите площадь треугольника ADE, если известно, что $AD=6$, $EC=2$, $\angle BCA=60°$.

№5. В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса r. Найдите площадь трапеции, если меньшее основание в два раза меньше ее высоты.

№6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит сторону AC на отрезки m и n. Найдите площадь треугольника, если у него $\angle B=60°$.

№7. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее большей боковой стороны на *3* см и *9* см. Найдите стороны трапеции.

№8. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Длина отрезка касательной, заключенного между боковыми сторонами треугольника, равна 2. Найдите основание треугольника.

2.2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

2.2.1. Углы в пространстве

Угол между скрещивающимися прямыми

№1. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны между собой. Точки E, O, T, F – середины отрезков A_1C, C_1B_1, BB_1, CO соответственно. Найдите угол между прямыми EF и CT.

№2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AA_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}AB$. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 *и* BC_1.

№3. Найдите угол между высотами DD_1 и AA_1 граней DAB и ABC правильного тетраэдра $DABC$.

№4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O – центр нижнего основания. Найдите угол между прямыми A_1O и CB_1.

Угол между прямой и плоскостью

№5. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 45°. На ребре SC взята точка F, а на ребре AB взята точка O – середины этих ребер. Найдите угол, который образует прямая AF с плоскостью SOC.

№6. Дан тетраэдр $ABCD$ с равными ребрами. Точка F – середина ребра AB. Найдите угол между прямой FD и плоскостью BDC.

№7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M – середина ребра C_1D_1. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABB_1.

Двугранный угол, угол между двумя плоскостями

№8. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точка E делит ребро AD в отношении 2:1, считая от вершины A. Найдите угол между плоскостями EBC и ABC.

№9. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания и BS =1 см, BC =2 см. На ребре SC взята точка O так, что $CO:OS$ =1:3. Найдите угол между плоскостью ABO и плоскостью основания пирамиды.

№10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки T и K— середины ребер CC_1 и DC соответственно. Найдите угол между плоскостями ATD и A_1D_1K.

№11. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, угол при основании которого равен 75°, а боковая сторона 14 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проведённой через основание треугольника под углом $\arccos\frac{7}{11}$ к его плоскости, если известно, что сечение является треугольником.

№12. Вершина B ромба $ABCD$ является основанием перпендикуляра, проведенного из точки O к плоскости, в которой лежит ромб. Вычислите расстояние от точки O до плоскости ABC, если угол BAD равен 45°, AB =2 см, двугранный угол $OADB$ равен 60°.

№13. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ отношение высоты к длине стороны основания равно $\sqrt{6} : 4$. Найдите угол между плоскостями SBC и SDE.

№14. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь сечения плоскостью, проведённой через центр основания параллельно стороне основания и перпендикулярно грани, проходящей через эту сторону.

2.2.2. Расстояния в пространстве

№1. Боковое ребро FB пирамиды $FABCD$, основанием которой служит прямоугольник $ABCD$ ($\angle ACD$=60°), перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 3 см. Найдите расстояние от вершины F до диагонали AC, если расстояние от вершины F до стороны AD равно $\sqrt{21}$ см.

№2. К плоскости треугольника ABC проведён перпендикуляр AM. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если AC = 10 см; AB =17 см, BC=21 см, AM=15 см.

№3. Точка D удалена от каждой из сторон треугольника ABC на расстояние 12 см, а от каждой из вершин на расстояние 13 см. Найдите площадь треугольника ABC.

№4. Точка M удалена от вершин треугольника на 7 см, 7 см и $\sqrt{29}$ см, а от каждой стороны равнобедренного треугольника на $\sqrt{13}$ см. Определите расстояние от точки M до плоскости треугольника.

№5. Все рёбра прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны между собой, $\angle BAD$=30°, точка O – середина ребра CC_1. Вычислите расстояние от точки C до плоскости AOD, если периметр сечения параллелепипеда плоскостью AOD равен $4(2+\sqrt{5})$ см.

№6. $ABCA_1B_1C_1$– правильная призма, AB=4 см, AA_1=2 см. Вычислите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через вершину A_1 и прямую BC.

№7. Точка D удалена от каждой из вершин прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^\circ$) на расстояние 13 см. Найдите расстояние от точки D до плоскости треугольника ABC, если AC = 6 см, BC = 8 см.

№8. Вычислите расстояние между прямыми, содержащими скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба с ребром a.

№9. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Вычислите расстояние между прямыми A_1C и DC_1.

№10. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ площадь основания равна $5\sqrt{3}$, а боковое ребро $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние между медианой AM основания и диагональю A_1B боковой грани призмы.

№11. В правильной четырёхугольной призме площадь основания равна 45, а боковое ребро $6\sqrt{5}$. Найдите расстояние между стороной основания и диагональю призмы, не пересекающейся с ней.

2.2.3. Многогранники. Площади поверхностей и объёмы многогранников. Отношение объемов частей пирамиды

№1. На ребре *SC* пирамиды *SABC* взята точка *P* такая, что $SP:SC=7:10$, на рёбрах *AB* и *SA* взяты соответственно точки *M* и *Q* – середины этих рёбер. Найдите отношение объёмов многогранников, получающихся при пересечении пирамиды плоскостями, проходящими через прямую *BP*, параллельно следующим прямым: а) *AC*; б) *CM*; в) *CQ*.

№2. На рёбрах *SA* и *SB* пирамиды *SABC* взяты соответственно точки *P* и *Q* такие, что *SP*:*SA*=*SQ*:*SB*=2:3, а на медиане *SN* грани *SBC* взята точка *R* – середина этой медианы. Найдите отношение объёмов многогранников, получающихся при пересечении пирамиды следующими плоскостями: а) *BPR*; б) *AQR*; в) *PQR*.

№3. В каком отношении делит объём треугольной пирамиды *ABCD* плоскость, проходящая через точку *M* на ребре *AB* такую, что $AM=\frac{1}{3}AB$ и через середины медиан треугольников *ABC* и *ABD*, выходящих из вершины *A*?

№4. В каком отношении делит объём треугольной пирамиды *ABCD* плоскость, проходящая через вершину *A* и середины медиан треугольников *ABC* и *ABD*, выходящих из вершины *B*?

№5. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* плоскость, проходящая через ребро *AB* и точку *M*, принадлежащую ребру *SC*, делит её на две части. Найдите отношение объёмов этих частей, если $SM:MC=1:2$.

№6. В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит параллелограмм *ABCD*. На ребре *SA* взята точка *M* так, что *AM*=2*SM*. Через точку *M* и середины рёбер *SB* и *SD* проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

№7. В каком отношении делит объём треугольной пирамиды плоскость, параллельная двум её скрещивающимся рёбрам и делящая одно из других рёбер в отношении 2:1?

№8. В основании пирамиды *SABC* лежит правильный треугольник, а её боковое ребро *SA* перпендикулярно плоскости основания и *SA*=*AB*. На ребре *SB* взята точка *M* – середина этого ребра. Найдите отношение объёмов многогранников, получающихся при пересечении пирамиды плоскостями, проходящими через точку *M* перпендикулярно *AC*.

№9. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник *ABC* ($\angle C=90°$), *BC*=*6* см, *AB*=*10* см. Точки *F* и *T* – середины ребер *AB* и *BC* соответственно (рис. 1, *а*). Вычислите объем меньшего из многогранников, на которые плоскость A_1TF разбивает призму, если $CC_1=12$ см.

2.2.4. Комбинации сферы с многогранниками

Сфера, описанная около многогранника

№1. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 3 см. Двугранный угол при боковом ребре пирамиды – прямой. Площадь сечения, проведённого через одну из боковых сторон треугольника нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания, равна 7,5 см^2. Вычислите площадь сферы, описанной около призмы.

№2. Боковое ребро прямой призмы имеет длину $\frac{8\sqrt{15}}{3}$ см, а в ее основании лежит выпуклый четырехугольник ABCD, у к-го $\angle B = 120°$, $\angle D = 60°$, AD = 8 см, CD = 12 см. Доказать, что около такой призмы можно описать сферу и найти объем полученного шара.

№3. Сторона основания правильной 4-хугольной пирамиды равна ***a***. Боковая грань образует с ее основанием угол α. Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы.

№4. В шар вписана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна ***a***. Найдите радиус шара, если высота пирамиды образует с боковыми ребрами угол α.

№5. В основании пирамиды лежит прямоугольник, две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие составляют с ним углы α и β. Найти поверхность описанной сферы, если известно, что высота пирамиды равна h.

№6. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и углом при основании 30°. Ребро, проходящее через вершину основания равнобедренного треугольника, перпендикулярно основанию пирамиды. Двугранный угол при ребре AC равен arctg4. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

№7. В основании пирамиды SABCD лежит квадрат. Высота пирамиды проходит через середину ребра AD и равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Расстояние между прямыми AD и SG, где G – середина ребра BC, равно $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Сфера, вписанная в многогранник

№8. Около шара описан прямой параллелепипед, диагонали основания которого равны a и b. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

№9. Шар вписан в прямую призму, основанием которой служит прямоугольный треугольник, в котором перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен h и составляет с одним из катетов угол α. Найдите объём призмы.

№10. Основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной **a**. Одно из боковых ребер образует со сторонами основания острые углы, каждый из которых равен α. Известно, что в параллелепипед вписана сфера, касающаяся всех его граней. Найти радиус вписанной сферы.

№11. Расстояния между боковыми рёбрами наклонной треугольной призмы последовательно равны 5, 7 и 8. Найдите объём вписанного в неё шара.

№12. Боковые рёбра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°, длина стороны её основания равна 12 см. Вычислите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

№13. Высота правильной четырёхугольной пирамиды в три раза больше радиуса вписанной в неё сферы. Найдите площадь сферы, если сторона основания пирамиды равна $\boldsymbol{a}$.

№14. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом β. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найти объем пирамиды.

№15. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 9,10 и 17. Все боковые грани наклонены под углом 45° к основанию пирамиды. Найти радиус вписанного шара.

№16. В треугольной пирамиде *SABC* рёбра *SA, SB* и *SC* взаимно перпендикулярны, а площади граней *SAB, SAC* и SBC равны соответственно 24; 10,8 и 14,4. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

№17. Основание пирамиды – квадрат со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а большее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.

2.2.5. Комбинации тел вращения

№1. Около правильной треугольной пирамиды, каждое ребро которой имеет длину $4\sqrt{2}$, описан цилиндр. Найдите объём цилиндра.

№2. В полушар радиуса *R* вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на его сферической поверхности. Вычислите объём куба.

№3. В конус, радиус основания которого 6 и образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°, вписан прямой параллелепипед, в основании которого квадрат. Найдите объём параллелепипеда, если угол между его диагональю и основанием равен 60°.

№4. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна *S*, а угол между высотой и образующей конуса равен α. Найдите объём шара.

№5. В конусе радиус основания 5, а высота 12. В него вписан цилиндр такой высоты, что его боковая поверхность равновелика боковой поверхности малого конуса, стоящего на его верхнем основании. Найдите высоту цилиндра.

№6. Отношение поверхности сферы, вписанной в конус, к площади основания конуса равно *k*. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса.

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Примерный перечень задач к контрольной работе

№1. На сторонах *AB, BC, AD* параллелограмма *ABCD* взяты соответственно точки *M,S,T* так, что *AM*:*MB*=3:1, *BS*:*SC*=1:1, *AT*:*TD*=1:5. Найдите отношение площадей треугольников *MBT* и *BST*.

№2. В треугольнике *ABC* проведена прямая, параллельная *AC*. Эта прямая пересекает сторону *AB* в точке *P*, медиану *AM* – в точке *T*, а сторону *BC* в точке *K*. Найти длину *AC*, если *PT=3*, *TK=5*.

№3. В окружность вписан четырёхугольник *ABCD*, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке *E*. Прямая, проходящая через точку *E* и перпендикулярная к *BC*, пересекает сторону *AD* в точке *M*. Доказать, что *EM* – медиана треугольника *AED*, и найти её длину, если AB = 7 см, CE = 3 см и $\angle ADB = 30^0$.

№4. Дан тетраэдр *DABC*, все ребра которого равны *a*. Точка *K* – середина ребра *DB,* точка *F* – середина ребра *AB.* Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми *FK* и *CA.*

№5. В правильном тетраэдре *SABC* точка *K* – середина ребра *AS*. Найдите градусную меру угла между прямыми *AB* и *CK*.

3.2. Примерный перечень вопросов к зачету

1. Утверждения об отношениях площадей треугольников.
2. Теорема Чевы. Теорема, обратная теореме Чевы.
3. Теорема Менелая. Теорема, обратная теореме Менелая.
4. Окружность Эйлера.
5. Прямая Эйлера. Формула Эйлера.
6. Вписанные многоугольники. Теоремы о вписанном в окружность четырехугольнике.
7. Описанные многоугольники. Теоремы о четырехугольнике, в который можно вписать окружность.
8. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между скрещивающимися прямыми.
9. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
10. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями.
11. Многогранные углы. Свойства плоских углов многогранного угла.
12. Теорема косинусов для трехгранного угла.
13. Теорема синусов для трехгранного угла.
14. Понятие расстояния в пространстве. Расстояние между точкой и

плоскостью, двумя плоскостями, двумя прямыми.

15. Основные способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми.
16. Призма. Площадь поверхности и объем наклонной призмы.
17. Пирамида. Свойства пирамиды, у которой боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания.
18. Пирамида. Свойства пирамиды, у которой боковые грани образуют равные углы с плоскостью основания.
19. Площадь поверхности и объем пирамиды.
20. Сфера, вписанная в призму
21. Сфера, вписанная в пирамиду.
22. Сфера, описанная около призмы.
23. Сфера, описанная около пирамиды.
24. Комбинации шара с цилиндром.
25. Комбинации шара с конусом.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Перечень основной литературы

1. Барвенов, С.А. Математика: ЦТ за 60 уроков / С.А. Барвенов, Т.П. Бахтина. – 2-е изд., перераб. – Минск : Аверсэв, 2021. – 302 с.
2. Казаков, В.В. Геометрия в 7 классе : учебно-методическое пособие для учителей учреждений образования, реализующих образовательные программы общего среднего образования, с русским языком обучения / В. В. Казаков, О. О. Казакова. – Минск : Нар. асвета, 2024. – 134 с.
3. Пирютко, О. Н. 60 уроков стереометрии : 10 кл. : пособие для учителей учрежд. общ. ср. образования с рус. яз. обучения / О. Н. Пирютко, А. А. Черняк, И. Г. Арефьева. – Минск : Нар. асвета, 2022. – 167 с.
4. Тухолко, Л. Л. Развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении стереометрии / Л. Л. Тухолко ; М-во образования Республики Беларусь, Бел. гос. педагогический ун-т им. М. Танка. – Минск : БГПУ, 2019. – 245 с.
5. Шлыков, В. В. Изучаем геометрию в 7 классе : учеб. пособие / В. В. Шлыков. – Минск : Нар. асвета, 2019. – 239 с. Сендер, А. Н. Методологический компонент в изучении школьного систематического курса геометрии : учебно-методическое пособие / А. Н. Сендер, Л. В. Фёдорова ; УО "Брестский гос. ун-т им. А. С. Пушкина". – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2020. – 146 с.
6. Эвристические задания, занятия, интернет-занятия для студентов-математиков и студентов-механиков : учебно-методическое пособие для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям 1-31 03 02 "Математика (по направлениям)", 1-31 03 02 "Механика и математическое моделирование" / БГУ ; [науч. ред. А. Д. Король ; редкол. Н. И. Морозова и др.]. – Минск : БГУ, 2019. – 91 с.

4.2. Перечень дополнительной литературы

1. Азаров, А.И. Математика для старшеклассников. Методы решения планиметрических задач. 8-11 классы : пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / А.И. Азаров, В.В.Казаков, Ю.Д. Чурбанов. – Мн. : Аверсэв, 2005. – 336 с.
2. Амелькин, В. В. Геометрия на плоскости : теория, задачи, решения : учеб. пособие по математике для общеобразоват. шк. / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич, В. Л. Тимохович. – М. : ОНИКС 21 век, 2003. – 590 с.
3. Барвенов, С.А. Математика: ЦТ за 60 уроков / С.А. Барвенов, Т.П. Бахтина. – 2-е изд., перераб. – Минск : Аверсэв, 2021. – 302 с.
4. Готман, Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения. – М. : МЦНМО, 2006. – 160 с.

5. Гусев, В.А. Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1992. – 352 с.
6. Зив, Б. Г. Геометрия. 7–11 классы. Задачи : учеб. пособие / Б. Г. Зив, А. Г. Баханский, В. М. Мейлер. – 16-е изд. – М. : Просвещение, 2021. – 271 с.
7. Лисова, М. И. Планиметрия: итоговое повторение : пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / М. И. Лисова, О. Н. Пирютко. – Минск : Аверсэв, 2004. – 415 с.
8. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике. Геометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. ин-тов / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М. : ABF, 1995. – 352 с.
9. Пирютко, О. Н. 60 уроков стереометрии : 10 кл. : пособие для учителей учрежд. общ. ср. образования с рус. яз. обучения / О. Н. Пирютко, А. А. Черняк, И. Г. Арефьева. – Минск : Нар. асвета, 2022. – 167 с.
10. Прасолов, В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука, 1989. – 288 с.
11. Рогановский, Н.М. Геометрия. 10-11 классы. Многообразие идей и методов : пособие для учителей общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. Обучения / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская, О.И. Тавгень. – Минск : Аверсэв, 2011. – 208 с.
12. Тавгень, О. И. Математика в задачах. Теория и методы решений. Планиметрия, стереометрия, текстовые задачи : пособие для учащихся / О. И. Тавгень, А. И. Тавгень. - Минск : Аверсэв, 2005. – 511 с.
13. Фельдман, А. М. Математики в школе много не бывает: из опыта работы преподавания некоторых тем учебной программы по математике / А. М. Фельдман. – Минск : Нар. асвета, 2017. – 143 с.
14. Шарыгин, И.Ф. Задачи по геометрии (стереометрия). – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 160 с.
15. Шлыков, В. В. Задачи по планиметрии : учеб. пособие для 7–9 кл. общеобразов. шк. / В. В. Шлыков. – Минск : Асар, 1997. – 288 с.
16. Шлыков, В. В. Задачи по стереометрии : учеб. пособие для 10 –11 кл. общеобразов. шк. с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков, Т. В. Валаханович. – Минск : Асар, 1998. – 239 с.

4.3. Электронные ресурсы

1. Образовательный портал БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=489. – Дата доступа: 18.09.2024.
2. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/287838. – Дата доступа: 18.09.2024.