



БЕЛОРУССКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ  
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

# МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

---

JOURNAL  
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

# MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.  
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

---

**3**

**2020**

---

МИНСК  
БГУ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор** ХАРИН Ю. С. – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители главного редактора** КРОТОВ В. Г. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный секретарь** МАТЕЙКО О. М. – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.  
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Альтенбах Х.* Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.  
*Антоневич А. Б.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Бауэр С. М.* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.  
*Беняш-Кривец В. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Берник В. И.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Бухштабер В. М.* Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
*Вабищевич П. Н.* Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.  
*Волков В. М.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Гладков А. Л.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Го В.* Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.  
*Гогинава У.* Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.  
*Головкин В. А.* Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.  
*Гороховик В. В.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Громак В. И.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Демидо Г.* Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.  
*Донской В. И.* Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия.  
*Егоров А. Д.* Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
*Еремеев В. А.* Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.  
*Жоландек Х.* Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.  
*Журавков М. А.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.  
*Залесский П. А.* Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.  
*Зубков А. М.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.  
*Каплунов Ю. Д.* Университет Кииле, Кииле, Великобритания.  
*Кашин Б. С.* Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.  
*Келлерер Х.* Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.

- Княжице Л. Б.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Кожанов А. И.** Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никоноров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Тузиков А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

## EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief**      **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief**      **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary**      **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
*Altenbach H.* Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.  
*Antonevich A. B.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
*Bauer S. M.* Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.  
*Beniash-Kryvets V. V.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
*Bernik V. I.* Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
*Buchstaber V. M.* Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
*Vabishchevich P. N.* Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
*Volkov V. M.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
*Gladkov A. L.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
*Guo W.* University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.  
*Goginava U.* Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.  
*Golovko V. A.* Brest State Technical University, Brest, Belarus.  
*Gorokhovich V. V.* Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
*Gromak V. I.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
*Dzemyda G.* Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.  
*Donskoy V. I.* V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia.  
*Egorov A. D.* Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
*Eremeyev V. A.* Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.  
*Zoladek H.* Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.  
*Zhuravkov M. A.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.  
*Zalesskii P. A.* University of Brazilia, Brazilia, Brazil.  
*Zubkov A. M.* Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
*Kaplunov J. D.* Keele University, Keele, United Kingdom.  
*Kashin B. S.* Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.  
*Kellerer H.* University of Graz, Graz, Austria.  
*Knyazhishche L. B.* Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
*Kozhanov A. I.* Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.  
*Kotov V. M.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.

- Krasnoproshin V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Laurinchikas A. P.** Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
- Madani K.** Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
- Makarov E. K.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Matus P. P.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Medvedev D. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Mikhasev G. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Nesterenko Y. V.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Trofimov V. A.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Filzmoser P.** Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
- Chernousov V. I.** University of Alberta, Edmonton, Canada.
- Chizhik S. A.** National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

---

---

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

---

## MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

---

---

УДК 512.542

### О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕТКИ ТОТАЛЬНО $\sigma$ -ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И. Н. САФОНОВА<sup>1)</sup>, В. Г. САФОНОВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Все рассматриваемые в статье группы являются конечными. Пусть  $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$  – некоторое разбиение множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ . Если  $n$  – целое число,  $G$  – группа и  $\mathfrak{F}$  – класс групп, то  $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ,  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$  и  $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$ . Функция  $f$  вида  $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$  называется формационной  $\sigma$ -функцией. Для всякой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  класс  $LF_\sigma(f)$  определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G | G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  имеет место  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , то класс  $\mathfrak{F}$  называют  $\sigma$ -локальным, а формационную  $\sigma$ -функцию  $f$  –  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{F}$ . Всякую формацию считают 0-кратно  $\sigma$ -локальной.

---

#### Образец цитирования:

Сафонова ИН, Сафонов ВГ. О некоторых свойствах решетки totally  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:6–16 (на англ.). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-6-16>

#### For citation:

Safonova IN, Safonov VG. On some properties of the lattice of totally  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020; 3:6–16. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-6-16>

---

#### Авторы:

**Инна Николаевна Сафонова** – кандидат физико-математических наук, доцент; заместитель декана по научной работе факультета прикладной математики и информатики.  
**Василий Григорьевич Сафонов** – доктор физико-математических наук, профессор; проректор по научной работе, профессор кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета.

#### Authors:

**Inna N. Safonova**, PhD (physics and mathematics), docent; deputy dean for scientific affairs, faculty of applied mathematics and computer science.  
[safonova@bsu.by](mailto:safonova@bsu.by)  
<https://orcid.org/0000-0001-6896-7208>  
**Vasily G. Safonov**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; vice-rector for scientific affairs and professor at the department of higher algebra and information security, faculty of mechanics and mathematics.  
[vgsafonov@bsu.by](mailto:vgsafonov@bsu.by)  
<https://orcid.org/0000-0003-0682-3107>

При  $n > 0$  формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальной, если  $\mathfrak{F} = (1)$  – класс всех единичных групп или  $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$ , где  $f(\sigma_i)$  является  $(n-1)$ -кратно  $\sigma$ -локальной формацией для всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ . Формацию называют totally  $\sigma$ -локальной, если она  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальна для всякого целого неотрицательного числа  $n$ . Цель данной работы – изучение свойств решетчатки totally  $\sigma$ -локальных формаций. В частности, мы доказываем, что решетчатка всех totally  $\sigma$ -локальных формаций является алгебраической и дистрибутивной.

**Ключевые слова:** конечная группа; формационная  $\sigma$ -функция; формация конечных групп; totally  $\sigma$ -локальная формация; решетчатка формаций.

## ON SOME PROPERTIES OF THE LATTICE OF TOTALLY $\sigma$ -LOCAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I. N. SAFONOVA<sup>a</sup>, V. G. SAFONOV<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Throughout this paper, all groups are finite. Let  $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$  be some partition of the set of all primes  $\mathbb{P}$ . If  $n$  is an integer,  $G$  is a group, and  $\mathfrak{F}$  is a class of groups, then  $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ,  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ , and  $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$ . A function  $f$  of the form  $f: \sigma \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$  is called a formation  $\sigma$ -function. For any formation  $\sigma$ -function  $f$  the class  $LF_{\sigma}(f)$  is defined as follows:

$$LF_{\sigma}(f) = \left( G \text{ is a group} \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and } G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G) \right).$$

If for some formation  $\sigma$ -function  $f$  we have  $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$ , then the class  $\mathfrak{F}$  is called  $\sigma$ -local and  $f$  is called a  $\sigma$ -local definition of  $\mathfrak{F}$ . Every formation is called 0-multiply  $\sigma$ -local. For  $n > 0$ , a formation  $\mathfrak{F}$  is called  $n$ -multiply  $\sigma$ -local provided either  $\mathfrak{F} = (1)$  is the class of all identity groups or  $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$ , where  $f(\sigma_i)$  is  $(n-1)$ -multiply  $\sigma$ -local for all  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ . A formation is called totally  $\sigma$ -local if it is  $n$ -multiply  $\sigma$ -local for all non-negative integer  $n$ . The aim of this paper is to study properties of the lattice of totally  $\sigma$ -local formations. In particular, we prove that the lattice of all totally  $\sigma$ -local formations is algebraic and distributive.

**Keywords:** finite group; formation  $\sigma$ -function; formation of finite groups; totally  $\sigma$ -local formation; lattice of formations.

### Introduction

All groups under consideration are finite. The notations and definitions we use are borrowed from [1–3]. The basic properties and various applications of  $\sigma$ -local formations can be found in the articles [4–10].

A. Skiba presented [4] the concept of generalised locality or  $\sigma$ -locality of formations as a tool for studying the  $\sigma$ -properties of groups, i. e. properties depending on some partition  $\sigma$  of the set of all primes. In [4], using  $\sigma$ -local formations, A. Skiba studied (weakly)  $S_i^{\sigma}$ -closed and (weakly)  $M_i^{\sigma}$ -closed classes of finite groups. Some general properties of  $\sigma$ -local formations as well as their applications for studying  $\Sigma_i^{\sigma}$ -closed classes of meta- $\sigma$ -nilpotent groups [5] and (weakly)  $\Gamma_i^{\sigma}$ -closed classes of finite groups [6], were obtained Ch. Zhang and A. Skiba. Applications of the theory of  $\sigma$ -local formations were obtained by A. Skiba [7] for a lattice characterization of  $\sigma$ -soluble  $P\sigma T$ -groups, and also for constructing new sublattices of the lattice of all subgroups of the group generated by formation Fitting sets [10].

In [8; 9] Ch. Zhang, V. Safonov and A. Skiba described some general properties and examples of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations and also consider one application of such formations in the theory of finite factorisable groups. In particular, in their paper [9] it was proved that the lattice of all  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups is algebraic and modular.

A. Tsarev [11] proved that every law of the lattice of all formations is fulfilled in the lattice of all  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups and that the lattice of all  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups is modular but is not distributive for any non-negative integer  $n$ .

At the same time, the question on the algebraicity, modularity or distributivity of the lattice of all totally  $\sigma$ -local formations was an open problem. Note that the question on the distributivity or modularity of the lattice of all totally  $\sigma$ -local formations of finite groups was discussed by A. Tsarev in [11, question 3.2].

In this paper we will prove that the set  $l_\infty^\sigma$  of all totally  $\sigma$ -local formations of finite groups is a complete algebraic and distributive lattice. In the work, we study also some general properties of totally  $\sigma$ -local formations of finite groups.

We also note that the concept of generalised locality of formations was developed in papers [12; 13], where the main properties and some examples of Baer- $\sigma$ -local formations were considered.

### Definitions and notations

The basic definitions, notations and general properties of  $\sigma$ -local formations were discussed in the papers [4–10]. Recall some of the basic concepts of the theory of  $\sigma$ -local formations.

Let  $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$  be some partition of the set of all primes  $\mathbb{P}$ . If  $n$  is an integer,  $G$  is a group, and  $\mathfrak{F}$  is a class of groups, then  $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ,  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ , and  $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$ .

A group  $G$  is called [14]:  $\sigma$ -primary if  $G$  is a  $\sigma_i$ -group for some  $i$ ;  $\sigma$ -nilpotent if every chief factor  $H/K$  of  $G$  is  $\sigma$ -central in  $G$ , that is, the semidirect product  $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$  is  $\sigma$ -primary;  $\sigma$ -soluble if  $G = 1$  or  $G \neq 1$  and every chief factor of  $G$  is  $\sigma$ -primary.

We write  $\mathfrak{S}_\sigma$  to denote the class of all  $\sigma$ -soluble groups and  $\mathfrak{N}_\sigma$  to denote the class of all  $\sigma$ -nilpotent groups. A class of groups  $\mathfrak{F}$  is called a formation if: (1)  $G/N \in \mathfrak{F}$  whenever  $G \in \mathfrak{F}$ , and (2)  $G/N \cap R \in \mathfrak{F}$  whenever  $G/N \in \mathfrak{F}$  and  $G/R \in \mathfrak{F}$ .

Any function  $f$  of the form  $f : \sigma \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$  is called a formation  $\sigma$ -function. For any formation  $\sigma$ -function  $f$  the class  $LF_\sigma(f)$  is defined as follows:

$$LF_\sigma(f) = \{G \text{ is a group} | G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and } G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)\}.$$

If for some formation  $\sigma$ -function  $f$  we have  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , then the class  $\mathfrak{F}$  is called  $\sigma$ -local and  $f$  is called a  $\sigma$ -local definition of  $\mathfrak{F}$ . We write  $F_{\{\sigma_i\}}(G)$  instead of  $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = G_{\mathfrak{S}_{\sigma_i} \mathfrak{S}_{\sigma_i}}$ .

Every formation is called 0-multiply  $\sigma$ -local. For  $n > 0$ , the formation  $\mathfrak{F}$  is called  $n$ -multiply  $\sigma$ -local provided either  $\mathfrak{F} = (1)$  is the class of all identity groups or  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , where  $f(\sigma_i)$  is  $(n-1)$ -multiply  $\sigma$ -local for all  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ . A formation is called totally  $\sigma$ -local if it is  $n$ -multiply  $\sigma$ -local for all non-negative integer  $n$ .

The symbol  $l_\infty^\sigma$  denotes the set of all totally  $\sigma$ -local formations. Formations from  $l_\infty^\sigma$  are called  $l_\infty^\sigma$ -formations.

For any collection of groups  $\mathfrak{X}$ ,  $l_\infty^\sigma \text{ form}(\mathfrak{X})$  denotes the totally  $\sigma$ -local formation generated by  $\mathfrak{X}$ , i. e.  $l_\infty^\sigma \text{ form}(\mathfrak{X})$  is the intersection of all totally  $\sigma$ -local formations containing the collection of groups  $\mathfrak{X}$ . If  $\mathfrak{X} = \{G\}$  for some group  $G$ , then  $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma \text{ form}(G)$  is called a one-generated totally  $\sigma$ -local formation. For any two classes of groups  $\mathfrak{M}$  and  $\mathfrak{N}$  we put  $\mathfrak{M} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{N} = l_\infty^\sigma \text{ form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N})$ .

If  $f$  is a formation  $\sigma$ -function, then the symbol  $\text{Supp}(f)$  denotes the support of  $f$ , that is, the set of all  $\sigma_i$  such that  $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ . A formation  $\sigma$ -function  $f$  is called  $l_\infty^\sigma$ -valued if  $f(\sigma_i)$  is a totally  $\sigma$ -local formation for every  $\sigma_i \in \text{Supp}(f)$ ; integrated if  $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$  for all  $i$ .

If  $m$  and  $h$  are  $l_\infty^\sigma$ -valued formation  $\sigma$ -functions, then  $m \vee_\infty^\sigma h$  is a formation  $\sigma$ -function such that  $(m \vee_\infty^\sigma h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \vee_\infty^\sigma h(\sigma_i)$  for all  $i$ ; we use also  $m \cap h$  to denote the formation  $\sigma$ -function such that  $(m \cap h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \cap h(\sigma_i)$  for all  $i$ .

Every sequence  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  from  $\sigma$  is called a  $\sigma$ -sequence. For any  $\sigma$ -sequence  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  and for any collection of groups  $\mathfrak{X}$ , the class of groups  $\mathfrak{X}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$  is defined recursively in the following way:

$$(1) \mathfrak{X}(\alpha_1) = \{G/F_{\{\alpha_1\}}(G) | G \in \mathfrak{X}\}; (2) \mathfrak{X}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = \{G/F_{\{\alpha_n\}}(G) | G \in \mathfrak{X}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1})\}.$$

For any  $l_\infty^\sigma$ -formation  $\mathfrak{F}$ , we set  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma(\sigma_i) = l_\infty^\sigma \text{ form}(\mathfrak{F}(\sigma_i))$ , if  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ , and  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma(\sigma_i) = \emptyset$ , if  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$ .

If  $\mathfrak{F} \in l_\infty^\sigma$ , then the symbol  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma$  denotes the smallest  $l_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}$ , i. e.  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma = \bigcap_{j \in J} f_j$ , where  $\{f_j | j \in J\}$  is the set of all  $l_\infty^\sigma$ -valued definitions of  $\mathfrak{F}$ .

We say that a  $\sigma$ -sequence  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  is suitable for  $\mathfrak{F}$  (or  $\mathfrak{F}$ -suitable), if  $\alpha_1 \in \sigma(\mathfrak{F})$  and for any  $j \in \{2, \dots, n\}$  we have  $\alpha_j \in \sigma(\mathfrak{F}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{j-1}))$ .

Let  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  be an  $\mathfrak{F}$ -suitable  $\sigma$ -sequence. Then the  $l_\infty^\sigma$ -valued  $\sigma$ -function  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  is defined recursively as follows: (1)  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 = \left( \mathfrak{F}_\infty^\sigma(\alpha_1) \right)_\infty^\sigma$ ; (2)  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_n = \left( \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}(\alpha_n) \right)_\infty^\sigma$ .

For any group  $G$  and a non-empty formation  $\mathfrak{F}$  by  $G^\mathfrak{F}$  denote the  $\mathfrak{F}$ -residual of  $G$ , i. e. the intersection of all subgroups  $N$  of  $G$  such that  $G/N \in \mathfrak{F}$ . If  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{H}$  are formations, then  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \mid G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}\}$  is called the Gaschütz product of formations  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{H}$ .

### Auxiliary results

We need some well-known results, which we present in the form of the following lemmas.

**Lemma 1** [9]. *If the class of groups  $\mathfrak{F}_j$  is an  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation for all  $j \in J$ , then the class  $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  is also  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation.*

Recall that if  $f$  is a formation  $\sigma$ -function, then the symbol  $\text{Supp}(f)$  denotes the support of  $f$ , that is, the set of all  $\sigma_i$  such that  $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ .

**Lemma 2** [5; 9]. *Let  $f$  and  $h$  be formation  $\sigma$ -functions and let  $\Pi = \text{Supp}(f)$ . Suppose that  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$ .*

(1)  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ .

(2)  $\mathfrak{F} = \left( \bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{G}_\Pi$ . Hence  $\mathfrak{F}$  is a saturated formation.

(3) *If every group in  $\mathfrak{F}$  is  $\sigma$ -soluble, then  $\mathfrak{F} = \left( \bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{G}_\Pi$ .*

(4) *If  $\sigma_i \in \Pi$ , then  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$ .*

(5)  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ , where  $F$  is the unique formation  $\sigma$ -function such that  $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$  for all  $\sigma_i \in \Pi$  and  $F(\sigma_i) = \emptyset$  for all  $\sigma_i \in \Pi'$ . Moreover,  $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{F}$  for all  $i$ .

**Lemma 3** [9]. *If  $\mathfrak{F}$  is a non-empty formation and  $f(\sigma_i) = \mathfrak{F}$  for all  $i$ , then  $LF_\sigma(f) = \mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{F}$ .*

**Lemma 4** [9]. *If  $\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  and  $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$  for all  $j \in J$ , then  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , where  $f(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$  for all  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcap_{j \in J} \sigma(\mathfrak{F}_j)$  and  $f(\sigma_i) = \emptyset$  for all  $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{F})$ . Moreover, if  $f_j$  is integrated for all  $j \in J$ , then  $f$  is also integrated.*

**Lemma 5** [2, p. 41]. *Let  $A$  be a monolithic group and let  $\text{Soc}(A)$  be a non-abelian group. Let  $\mathfrak{M}$  be some homomorph. If  $A \in l_n$  form  $\mathfrak{M}$ , then  $A \in \mathfrak{M}$ .*

**Lemma 6** [2, p. 152]. *Let  $G$  be a group such that  $O_p(G) = 1$ , let  $N_1 \times \dots \times N_k = \text{Soc}(G)$ , where  $N_i$  is a minimal normal subgroup of  $G$  ( $k \geq 2$ ). Let  $M_i$  denote a maximal normal subgroup of  $G$ , which contains  $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_k$  and does not contain  $N_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Then*

(a) *the group  $G/M_i$  is a monolithic and  $\text{Soc}(G/M_i) = N_i M_i / N_i$  for any  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;*

(b)  *$N_i M_i / N_i$  is  $G$ -isomorphic to  $N_i$ ;*

(c)  *$O_p(G/M_i) = 1$ ;*

(d)  *$M_1 \cap \dots \cap M_k = 1$ .*

### The main results

Let  $\mathfrak{X}$  be some collection of groups,  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ , then the class of groups  $\mathfrak{X}(\sigma_i)$  is defined as follows:  $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \left( G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{X} \right)$ .

**Lemma 7.** *Let  $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma \text{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$  be the totally  $\sigma$ -local formation generated by  $\mathfrak{X}$ , where  $f$  is an  $l_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}$ , and let  $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$ . Let  $h$  be the formation  $\sigma$ -function such that  $h(\sigma_i) = l_\infty^\sigma \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$  for all  $\sigma_i \in \Pi$  and  $h(\sigma_i) = \emptyset$  for all  $\sigma_i \in \Pi'$ . Then*

(1)  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ ;

(2)  *$h$  is an  $l_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}$ ;*

(3)  *$h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$  and for all  $i$ .*

**Proof.** Since  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$  we have  $\Pi \subseteq \sigma(\mathfrak{F})$ . In view of [9, remark 2.4 (ii)], the class of all  $\Pi$ -groups  $\mathfrak{G}_\Pi$  is a totally  $\sigma$ -local formation. Hence  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_\Pi$ . Therefore,  $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \Pi$  and statement (1) holds.

Let  $\mathfrak{h} = LF_\sigma(h)$ . Then it is clear that  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{h}$ . On the other hand, since  $h$  is an  $I_\infty^\sigma$ -valued, which implies that  $\mathfrak{h}$  is a totally  $\sigma$ -local formation. Therefore,  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{h}$ .

Since  $\mathfrak{X}(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$  and the formation  $f(\sigma_i)$  is totally  $\sigma$ -local we have  $h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$  for all  $\sigma_i \in \sigma$ . Therefore,  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{F}$ . Hence  $\mathfrak{F} = \mathfrak{h}$  and so statements (2) and (3) hold. The lemma is proved.

**Lemma 8.** Let  $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$  be a totally  $\sigma$ -local formation, where  $f_j$  is the smallest  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}_j$ ,  $j \in J$ . Then  $\bigvee_\infty^\sigma(f_j | j \in J)$  is the smallest  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F} = \bigvee_\infty^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J)$ .

*Proof.* Let  $l$  be the smallest  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}$ ,  $f = \bigvee_\infty^\sigma(f_j | j \in J)$ , and  $\Pi = \sigma(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j) = \bigcup_{j \in J} \sigma(\mathfrak{F}_j)$ . Then  $\sigma(\mathfrak{F}) = \Pi$  by lemma 7 (1). Now we show that  $l(\sigma_i) = f(\sigma_i)$  for all  $\sigma_i \in \sigma$ .

Let  $\sigma_i \in \sigma \setminus \Pi$ . Then for any  $j \in J$  we have  $f_j(\sigma_i) = \emptyset$  by lemma 7. Hence  $f(\sigma_i) = \emptyset$ . Similarly, in view of lemma 7,  $l(\sigma_i) = \emptyset$ . Therefore,  $l(\sigma_i) = f(\sigma_i)$ .

Now suppose that  $\sigma_i \in \Pi$ . Then there exists  $j_i \in J$  such that  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}_{j_i})$ . From lemma 7 it follows that  $f_{j_i}(\sigma_i) \neq \emptyset$  and

$$\begin{aligned} l(\sigma_i) &= I_\infty^\sigma \text{ form} \left( G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) = I_\infty^\sigma \text{ form} \left( \bigcup_{j \in J} I_\infty^\sigma \text{ form} \left( G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_j \right) \right) = \\ &= I_\infty^\sigma \text{ form} \left( \bigcup_{j \in J} f_j(\sigma_i) \mid j \in J \right) = \left( \bigvee_\infty^\sigma(f_j | j \in J) \right)(\sigma_i) = f(\sigma_i). \end{aligned}$$

Therefore,  $l(\sigma_i) = f(\sigma_i)$  for all  $\sigma_i \in \Pi$ . Thus,  $l = f$ . The lemma is proved.

**Lemma 9.** Let  $\mathfrak{h}_j = LF_\sigma(h_j)$ , where  $h_j$  is integrated  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{h}_j$ ,  $j = 1, 2$ . Then  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \bigvee_\infty^\sigma \mathfrak{h}_2 = LF_\sigma(h)$ , where  $h = h_1 \bigvee_\infty^\sigma h_2$  is integrated.

*Proof.* Let  $l$  be the smallest  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{h}$  and let  $H$  be the canonical  $\sigma$ -local definition of  $\mathfrak{h}$ . Let  $l_j$  be the smallest  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{h}_j$  and let  $H_j$  be the canonical  $\sigma$ -local definition of  $\mathfrak{h}_j$ ,  $j = 1, 2$ . In view of lemmas 2 (5) and 7 we have  $l_j(\sigma_i) \subseteq h_j(\sigma_i) \subseteq H_j(\sigma_i)$  for all  $\sigma_i$ . Besides, lemmas 2 (5) and 7 imply also that

$$\begin{aligned} l(\sigma_i) &= I_\infty^\sigma \text{ form} \left( (\mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2)(\sigma_i) \right) = I_\infty^\sigma \text{ form} \left( \mathfrak{h}_1(\sigma_i) \cup \mathfrak{h}_2(\sigma_i) \right) = I_\infty^\sigma \text{ form} \left( l_1(\sigma_i) \cup l_2(\sigma_i) \right) \subseteq \\ &\subseteq I_\infty^\sigma \text{ form} \left( h_1(\sigma_i) \cup h_2(\sigma_i) \right) = h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} l(\sigma_i) = H(\sigma_i). \end{aligned}$$

Hence  $l(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$  for all  $\sigma_i$ . Therefore,  $\mathfrak{h} = LF_\sigma(h)$ . The lemma is proved.

**Lemma 10.** Let  $\mathfrak{F}$  be a non-empty formation. Then the formation  $\mathfrak{G}_\sigma \mathfrak{F}$  is totally  $\sigma$ -local.

*Proof.* Let  $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_\sigma \mathfrak{F}$ . By lemma 3 the formation  $\mathfrak{h} = \mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{M}$  is  $\sigma$ -local and  $\mathfrak{h} = LF_\sigma(h)$ , where  $h(\sigma_i) = \mathfrak{M}$  for all  $\sigma_i \in \sigma$ . Since the Gaschütz product of formations is associative,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_\sigma (\mathfrak{G}_\sigma \mathfrak{F}) = (\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{G}_\sigma) \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\sigma \mathfrak{F} = \mathfrak{M}.$$

Therefore  $\mathfrak{M}$  is a  $\sigma$ -local formation. On the other hand,  $h(\sigma_i) = \mathfrak{M}$  for all  $\sigma_i \in \sigma$ . Hence  $\mathfrak{M} = \mathfrak{h} = LF_\sigma(h)$  is 2-multiply  $\sigma$ -local. Therefore, the formation  $\mathfrak{M}$  is  $n$ -multiply  $\sigma$ -local for any positive integer  $n$ . Consequently  $\mathfrak{M}$  is totally  $\sigma$ -local. The lemma is proved.

**Lemma 11.** If  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$  and  $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$  for some  $\sigma_i \in \sigma(G)$ , then  $G \in \mathfrak{F}$ .

*Proof.* Since  $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ , we have  $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ . But then  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$  by lemma 2 (1). Moreover,  $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$  imply also that  $G^{f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}} \subseteq O_{\sigma_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Hence  $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ . In view of lemma 2 (4) we have  $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$ . The lemma is proved.

**Lemma 12.** Let  $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$ , where  $f_j$  is an integrated  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}_j$ ,  $j \in J$ . If  $\mathfrak{F} = \bigcap(\mathfrak{F}_j | j \in J)$ , then  $f = \bigcap(f_j | j \in J)$  is an integrated  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}$ .

*Proof.* First note that  $\mathfrak{F}_j$  is an  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation for all positive integer  $n$ . Then in view of lemma 1,  $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  is an  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation for all positive integer  $n$ . Therefore  $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  is totally  $\sigma$ -local. Besides, since  $f = \bigcap(f_j | j \in J)$  and  $f_j$  is an  $I_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}_j$ , we see that  $f$  is an  $I_\infty^\sigma$ -valued  $\sigma$ -function.

Let  $\mathfrak{H} = LF_{\sigma}(f)$ . Now we show that  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ . First assume that  $G \in \mathfrak{H}$  and let  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . Then  $G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$ . Hence  $G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f_j(\sigma_i)$  for all  $j \in J$ . Therefore for all  $\sigma_i \in \sigma(G)$  we obtain  $G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f_j(\sigma_i)$ . But then  $G \in \mathfrak{F}_j$  for all  $j \in J$  and consequently,  $G \in \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$ . Thus  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ .

Now suppose that  $G \in \mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  and let  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . Then  $G \in \mathfrak{F}_j$  for all  $j \in J$ . Therefore,  $G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f_j(\sigma_i)$  for all  $j \in J$ . Hence  $G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i) = f(\sigma_i)$  for all  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . Consequently,  $G \in \mathfrak{H}$  and  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ .

Finally, since  $f_j$  is integrated for all  $j \in J$ , we have  $f(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i) \subseteq f_j(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}_j$  for all  $\sigma_i \in \sigma$ . Hence  $f(\sigma_i) \subseteq \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$  and  $f$  is an integrated  $I_{\infty}^{\sigma}$ -valued definition of  $\mathfrak{F}$ . The lemma is proved.

### Algebraicity of the lattice of all totally $\sigma$ -local formations

**Theorem 1.** *The set  $I_{\infty}^{\sigma}$  of all totally  $\sigma$ -local formations is a complete algebraic lattice in which, for any set  $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq I_{\infty}^{\sigma}$ , the intersection  $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  is the greatest lower bound and  $I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$  is the smallest upper bound of  $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$  in  $I_{\infty}^{\sigma}$ .*

*Proof.* It is clear that the set  $I_{\infty}^{\sigma}$  is partially ordered with respect to set inclusion. Since by [9, remark 2.4 (ii)], the formation of all groups  $\mathfrak{G}$  is totally  $\sigma$ -local we have  $\mathfrak{G}$  is the largest element in  $I_{\infty}^{\sigma}$ . It follows from lemma 12 that  $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \in I_{\infty}^{\sigma}$ . Therefore,  $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  is the greatest lower bound of  $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$  in  $I_{\infty}^{\sigma}$ , which implies that  $I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$  is the smallest upper bound of  $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$  in  $I_{\infty}^{\sigma}$ .

Now we show that for every group  $A$  the one-generated totally  $\sigma$ -local formation  $I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(A)$  is a compact element in  $I_{\infty}^{\sigma}$ . Let  $A$  is counterexample minimal order and

$$\mathfrak{F} = I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(A) \subseteq I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j),$$

where  $\mathfrak{F}_j$  is a totally  $\sigma$ -local formation,  $j \in J$ . If  $A$  is a  $\sigma_i$ -group for some  $i$ , then  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Since  $\mathfrak{F} \subseteq I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$ , we have  $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j) = \bigcup_{j \in J} \sigma(\mathfrak{F}_j)$  by lemma 7. Therefore, there is  $j_s$  such that  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}_{j_s})$ . But then  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}_{j_s}$  by lemma 2. This contradiction shows that  $A$  is not  $\sigma$ -primary.

Now we show that  $A$  is monolithic. Suppose that it is false and let  $N_1, N_2$  be minimal normal subgroups of  $A$ , where  $N_1 \neq N_2$ . Let  $\mathfrak{L} = I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(A/N_1)$ ,  $\mathfrak{M} = I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(A/N_2)$ . It is clear that  $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\infty}^{\sigma} \mathfrak{M}$ . By inductive hypothesis for groups  $A/N_1$  and  $A/N_2$  our statement is true. Then since

$$\mathfrak{L} = I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(A/N_1) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j), \quad \mathfrak{M} = I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(A/N_2) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j),$$

there are  $j_1, \dots, j_k$  and  $s_1, \dots, s_n$  such that

$$\mathfrak{L} \subseteq I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\mathfrak{F}_{j_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{j_k}) \text{ and } \mathfrak{M} \subseteq I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\mathfrak{F}_{s_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{s_n}).$$

But then we have

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\infty}^{\sigma} \mathfrak{M} \subseteq I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\mathfrak{F}_{j_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{j_k} \cup \mathfrak{F}_{s_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{s_n}),$$

a contradiction. Hence  $A$  is a monolithic group.

Let  $P = \text{Soc}(A)$ . Assume that  $P$  is not a  $\sigma$ -primary group. Since  $A \in I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$  we have  $A \in \mathfrak{S}_{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$  by lemma 10. But  $P$  is not a  $\sigma$ -primary group, therefore,  $A \in \text{form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$ . Using lemma 5, we obtain  $A \in \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ . Hence there is  $j_m \in J$  such that  $A \in \mathfrak{F}_{j_m}$ . This contradiction shows that  $P$  is a  $\sigma_i$ -group for some  $i$ . Therefore,  $F_{\{\sigma_i\}}(A) = O_{\sigma_i}(A)$ .

Let  $f_j, f, h$  are smallest  $I_{\infty}^{\sigma}$ -valued definitions of formations  $\mathfrak{F}_j, \mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{H} = I_{\infty}^{\sigma} \text{ form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$ , respectively. In view of lemma 8 we have  $h = \bigvee_{\infty}^{\sigma} (f_j \mid j \in J)$ . Since  $O_{\sigma_i}(A) = F_{\{\sigma_i\}}(A)$  and  $A \in \mathfrak{H}$ , we have

$$A/O_{\sigma_i}(A) = A/F_{\{\sigma_i\}}(A) \in h(\sigma_i) = \bigvee_{\infty}^{\sigma} (f_j(\sigma_i) \mid j \in J).$$

Since  $|A/O_{\sigma_i}(A)| < |A|$ , by our inductive hypothesis there are  $j_1, \dots, j_t \in J$  such that

$$l_\infty^\sigma \text{ form} (A/O_{\sigma_i}(A)) \subseteq f_{j_1}(\sigma_i) \vee_\infty^\sigma \dots \vee_\infty^\sigma f_{j_t}(\sigma_i).$$

By lemma 8,  $l = f_{j_1} \vee_\infty^\sigma \dots \vee_\infty^\sigma f_{j_t}$  is the smallest  $l_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathcal{L} = \mathfrak{F}_{j_1} \vee_\infty^\sigma \dots \vee_\infty^\sigma \mathfrak{F}_{j_t}$ . But then  $A/O_{\sigma_i}(A) \in l(\sigma_i) = f_{j_1}(\sigma_i) \vee_\infty^\sigma \dots \vee_\infty^\sigma f_{j_t}(\sigma_i)$ . Since  $l$  is integrated,  $A \in \mathcal{L}$  by lemma 11.

Thus,  $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma \text{ form} (A) \subseteq \mathcal{L} = \mathfrak{F}_{j_1} \vee_\infty^\sigma \dots \vee_\infty^\sigma \mathfrak{F}_{j_t}$ . This contradiction shows that every one-generated totally  $\sigma$ -local formation  $l_\infty^\sigma \text{ form} (A)$  is a compact element in  $l_\infty^\sigma$ .

It is clear that for any totally  $\sigma$ -local formation  $\mathfrak{F}$  we have  $\mathfrak{F} = l_\infty^\sigma \text{ form} (\cup_{t \in T} \mathfrak{F}_t)$ , where  $\{\mathfrak{F}_t | t \in T\}$  is the set of all one-generated totally  $\sigma$ -local formations contained in  $\mathfrak{F}$ . Hence the lattice  $l_\infty^\sigma$  is algebraic. The theorem is proved.

In the classical case, when  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$  we get from theorem 1 the following known results.

**Corollary 1** [15]. *The lattice  $l_\infty$  of all totally local formations is algebraic.*

**Corollary 2** [2, p. 180]. *The lattice of all soluble totally local formations is algebraic.*

### Distributivity of the lattice of all totally $\sigma$ -local formations

Recall that if  $\mathfrak{F}$  is a totally  $\sigma$ -local formation, then  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma$  denotes the smallest  $l_\infty^\sigma$ -valued definition of  $\mathfrak{F}$ . If  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  is an  $\mathfrak{F}$ -suitable  $\sigma$ -sequence, then the  $l_\infty^\sigma$ -valued  $\sigma$ -function  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  is defined recursively as follows: (1)  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 = (\mathfrak{F}_\infty^\sigma(\alpha_1))_\infty^\sigma$ ; (2)  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_n = (\mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}(\alpha_n))_\infty^\sigma$ .

Let  $\mathfrak{F}, \mathfrak{M},$  and  $\mathfrak{X}$  be totally  $\sigma$ -local formations. Let  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  be some suitable  $\sigma$ -sequence for  $\mathfrak{F}, \mathfrak{M},$  and  $\mathfrak{X}$ . Then by  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma, \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma, \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1, \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1, \dots, \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_n, \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_n$  we denotes formation  $\sigma$ -functions such that

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma &= (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M}_\infty^\sigma \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma), \quad \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma = (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}_\infty^\sigma) \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma, \\ \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1 &= (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \alpha_1 \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M}_\infty^\sigma \alpha_1 \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1), \quad \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1 = (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \alpha_1 \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}_\infty^\sigma \alpha_1) \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1, \\ &\dots, \\ \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n &= (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n), \\ \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n &= (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n. \end{aligned}$$

**Lemma 13.** *Let  $\mathcal{L} = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}), \mathfrak{H} = (\mathfrak{X} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}$ , where  $\mathfrak{M}, \mathfrak{X},$  and  $\mathfrak{F}$  are totally  $\sigma$ -local formations. Then*

(1)  $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\mathfrak{H})$ ;

(2) if  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  is a suitable  $\sigma$ -sequence for  $\mathfrak{X}, \mathfrak{M},$  and  $\mathfrak{F}$ , then the formation  $\sigma$ -functions

$$\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma, \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma, \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1, \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1, \dots, \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_n, \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_n$$

are integrated  $l_\infty^\sigma$ -valued definitions of the formations

$$\mathcal{L}, \mathfrak{H}, \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\alpha_1), \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\alpha_1), \dots, \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}(\alpha_n), \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}(\alpha_n),$$

respectively.

*Proof.* Let  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{X} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}, \mathcal{L}_1 = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}, \mathcal{L}_2 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}, h_1 = \mathfrak{X}_\infty^\sigma \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}_\infty^\sigma, l_1 = \mathfrak{X}_\infty^\sigma \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma,$  and  $l_2 = \mathfrak{M}_\infty^\sigma \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma$ . By lemmas 8 and 12, it follows that  $\mathfrak{H}_1 = LF_\sigma(h_1), \mathcal{L}_1 = LF_\sigma(l_1), \mathcal{L}_2 = LF_\sigma(l_2),$  and  $h_1, l_1, l_2$  are integrated  $l_\infty^\sigma$ -valued  $\sigma$ -functions.

(1) Since the inclusion  $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{H}$  is obvious, we obtain  $\sigma(\mathcal{L}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ . Let  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}) \setminus \sigma(\mathcal{L})$ . Since  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}_1)$ , we have  $h_1(\sigma_i) \neq \emptyset$  by lemma 7. If  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X}) \cup \sigma(\mathfrak{M})$ , then it follows from lemma 7 that  $\mathfrak{X}_\infty^\sigma(\sigma_i) = \emptyset$  and  $\mathfrak{M}_\infty^\sigma(\sigma_i) = \emptyset$ . Consequently,  $h_1(\sigma_i) = \emptyset$ , a contradiction. Hence  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}) \cup \sigma(\mathfrak{M})$ . But in this case  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) = \sigma(\mathcal{L})$ . Thus,  $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\mathfrak{H})$ .

(2) Since  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \vee_\infty^\sigma \mathcal{L}_2$  and  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{F}$ , it follows from lemmas 9 and 12, that

$$\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma = l_1 \vee_\infty^\sigma l_2 = (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M}_\infty^\sigma \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma), \quad \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma = h_1 \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma = (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}_\infty^\sigma) \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma$$

are integrated  $l_\infty^\sigma$ -valued definitions of the formations  $\mathcal{L}$  and  $\mathfrak{H}$ , respectively.

Let  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  be a suitable sequence for  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{M}$ , and  $\mathfrak{F}$ . Since by the definition  $\mathfrak{X}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_j$ ,  $\mathfrak{M}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_j$ ,  $\mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_j$  are smallest  $l_\infty^\sigma$ -valued definitions of the formations

$$\mathfrak{X}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{j-1}(\alpha_j), \mathfrak{M}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{j-1}(\alpha_j), \text{ and } \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{j-1}(\alpha_j)$$

( $j = \overline{1, n}$ ), respectively, it follows from lemmas 9 and 12 that

$$\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j = (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j),$$

$$\tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j = (\mathfrak{X}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j) \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j$$

are integrated  $l_\infty^\sigma$ -valued definitions of the formations

$$\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{j-1}(\alpha_j) \text{ and } \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma \alpha_1 \dots \alpha_{j-1}(\alpha_j),$$

respectively. The lemma is proved.

**Lemma 14.** *Let  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{X}$ , and  $\mathfrak{F}$  be totally  $\sigma$ -local formations. Let  $G$  be a monolithic group and  $\text{Soc}(G)$  is not  $\sigma$ -primary. If  $G \in \mathfrak{F} \cap (\mathfrak{X} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M})$ , then  $G \in (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$ .*

*Proof.* Let  $G \in \mathfrak{F} \cap (\mathfrak{X} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M})$ . It follows from lemma 10 that  $\mathfrak{S}_\sigma \text{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M})$  is a totally  $\sigma$ -local formation. Therefore,  $l_\infty^\sigma \text{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{S}_\sigma \text{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M})$ . Since  $G$  is a monolithic group and  $\text{Soc}(G)$  is not a  $\sigma$ -primary group, we have  $G \in \text{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{M})$  and  $\text{Soc}(G)$  is a non-abelian group. But then by lemma 5, it follows that  $G \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{M}$ . Since  $G \in \mathfrak{F}$ , we obtain  $G \in (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}) \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$ . Hence,

$$G \in l_\infty^\sigma \text{form}((\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}) \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})) = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}).$$

The lemma is proved.

**Theorem 2.** *The lattice  $l_\infty^\sigma$  of all totally  $\sigma$ -local formations is distributive.*

*Proof.* Suppose that this theorem is false. Then there exist totally  $\sigma$ -local formations  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{X}$ , and  $\mathfrak{F}$  such that

$$(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \neq (\mathfrak{X} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}.$$

Let  $\mathfrak{L} = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$  and  $\mathfrak{H} = (\mathfrak{X} \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}$ . Since the inclusion  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$  is obvious, we obtain  $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{L}$ . Let  $G$  be a group of minimal order in  $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{L}$ . In view that  $\mathfrak{L}$  is a  $\sigma$ -local formation, we see that  $G$  is a monolithic group with a unique minimal normal subgroup  $P = G^\mathfrak{L}$ .

If  $P$  is not  $\sigma$ -primary, then  $G \in \mathfrak{L}$  by lemma 14. This contradiction shows that  $P$  is a  $\sigma_i$ -group for some  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ . It follows from lemma 13 that  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{L})$ ,  $\mathfrak{L} = LF_\sigma^\sigma(\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma)$ ,  $\mathfrak{H} = LF_\sigma^\sigma(\tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma)$ , and  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma$ ,  $\tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma$  are integrated  $l_\infty^\sigma$ -valued definitions such that

$$\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = (\mathfrak{X}_\infty^\sigma(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma(\sigma_i)) \vee_\infty^\sigma (\mathfrak{M}_\infty^\sigma(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma(\sigma_i)), \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = (\mathfrak{X}_\infty^\sigma(\sigma_i) \vee_\infty^\sigma \mathfrak{M}_\infty^\sigma(\sigma_i)) \cap \mathfrak{F}_\infty^\sigma(\sigma_i).$$

Since  $\mathfrak{L}$  is a  $\sigma$ -local formation and  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{L})$ , we see that  $G$  is not a  $\sigma_i$ -group and  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) \neq \emptyset$ . On the other hand, since  $P$  is a  $\sigma_i$ -group,  $O_{\sigma_i}(G) = 1$  and  $F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G)$ .

Since  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$  we have  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) \subseteq \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$  and since  $G \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{L}$ , we claim that  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) \subset \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$ . Indeed, by lemma 2, it follows that  $G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in \mathfrak{H}_\infty^\sigma(\sigma_i)$ . If  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$ , then

$$G/O_{\sigma_i}(G) = G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in \mathfrak{H}_\infty^\sigma(\sigma_i) \subseteq \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$$

and  $G \in \mathfrak{L}$  by lemma 11. It is a contradiction. Therefore,  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) \subset \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$ . Note also that the condition  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) \subset \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$  implies  $\mathfrak{X}_\infty^\sigma(\sigma_i) \neq \emptyset$  and  $\mathfrak{M}_\infty^\sigma(\sigma_i) \neq \emptyset$ , since otherwise  $\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$ . Hence  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}) \cap \sigma(\mathfrak{M})$ . Thus,

$$G_1 = G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i) \setminus \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i), \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) \neq \emptyset.$$

It follows from lemma 13 that

$$\sigma(\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i)) = \sigma(\tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i)), \tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = LF_\sigma^\sigma(\tilde{\mathfrak{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i)), \tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = LF_\sigma^\sigma(\tilde{\mathfrak{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i)),$$

and  $\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i, \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i$  are integrated  $I_\infty^\sigma$ -valued definitions such that

$$\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i = (\mathcal{X}_\infty^\sigma \sigma_i \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i) \vee_\infty^\sigma (\mathcal{M}_\infty^\sigma \sigma_i \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i), \quad \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i = (\mathcal{X}_\infty^\sigma \sigma_i \vee_\infty^\sigma \mathcal{M}_\infty^\sigma \sigma_i) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i.$$

Since  $G_1 \notin \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$ , there exist  $\alpha_1 \in \sigma(G_1)$  such that

$$G_1/F_{\{\alpha_1\}}(G_1) \notin \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1).$$

Note that since  $\alpha_1 \in \sigma(\tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i))$ , we have  $\alpha_1 \in \sigma(\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i))$  and  $\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \neq \emptyset$ . Obviously,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) &= (\mathcal{X}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1)) \vee_\infty^\sigma (\mathcal{M}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1)) \subseteq \\ &\subseteq \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) = (\mathcal{X}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \vee_\infty^\sigma \mathcal{M}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1)) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1). \end{aligned}$$

Besides, since  $G_1/F_{\{\alpha_1\}}(G_1) \in \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \setminus \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1)$ , we have  $\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \subset \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1)$ . Therefore,  $\mathcal{X}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \neq \emptyset$  and  $\mathcal{M}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \neq \emptyset$ . Hence  $\alpha_1 \in \sigma(\mathcal{X}_\infty^\sigma(\sigma_i)) \cap \sigma(\mathcal{M}_\infty^\sigma(\sigma_i))$ .

Suppose that  $F_{\{\alpha_1\}}(G_1) = 1$  and let  $N$  be a minimal normal subgroup of  $G_1$ . Then  $N$  is not  $\sigma$ -primary. If  $G_1$  is a monolithic group, then since

$$G_1 \in \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = (\mathcal{X}_\infty^\sigma(\sigma_i) \vee_\infty^\sigma \mathcal{M}_\infty^\sigma(\sigma_i)) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma(\sigma_i),$$

by lemma 14, it follows that

$$G_1 \in (\mathcal{X}_\infty^\sigma(\sigma_i) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma(\sigma_i)) \vee_\infty^\sigma (\mathcal{M}_\infty^\sigma(\sigma_i) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma(\sigma_i)) = \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i).$$

This contradiction shows that the group  $G_1$  is not monolithic.

Let  $\text{Soc}(G_1) = N_1 \times \dots \times N_k$ , where  $N_j$  is a minimal normal subgroup of  $G_1$  and let  $M_j$  denote a maximal normal subgroup of  $G_1$  such that  $M_j$  contains  $N_1 \times \dots \times N_{j-1} \times N_{j+1} \times \dots \times N_k$  and does not contain  $N_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . By lemma 6, it follows that  $G_1/M_j$  is a monolithic group with a non- $\sigma$ -primary minimal normal subgroup  $N_j M_j / N_j$  and  $N_j M_j / N_j$  is  $G_1$ -isomorphic to  $N_j$ . Set  $B_j = G_1/M_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Since

$$B_j \in \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma(\sigma_i) = (\mathcal{X}_\infty^\sigma(\sigma_i) \vee_\infty^\sigma \mathcal{M}_\infty^\sigma(\sigma_i)) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma(\sigma_i),$$

we have  $B_j \in \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$  by lemma 14. It follows from lemma 6 (d) that  $G_1$  is a subdirect product of  $B_1, \dots, B_k$ .

Hence  $G_1 \in \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma(\sigma_i)$ . This contradiction shows that  $F_{\{\alpha_1\}}(G_1) \neq 1$ .

On the other hand  $F_{\{\alpha_1\}}(G_1) \neq G_1$ , since otherwise  $G_1/F_{\{\alpha_1\}}(G_1) = 1 \in \mathcal{L}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \neq \emptyset$ .

Thus,

$$G_1/F_{\{\alpha_1\}}(G_1) \in \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \setminus \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1), \quad \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) \neq \emptyset, \quad 1 \neq F_{\{\alpha_1\}}(G_1) \subset G_1.$$

Let  $G_2 = G_1/F_{\{\alpha_1\}}(G_1)$ . It follows from lemma 13 that

$$\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1)) = \sigma(\tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma p(\alpha_1)),$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) = LF_\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1), \quad \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1) = LF_\sigma(\tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1),$$

and  $\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1, \tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1$  are integrated  $I_\infty^\sigma$ -valued definitions such that

$$\tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1 = (\mathcal{X}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1 \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1) \vee_\infty^\sigma (\mathcal{M}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1 \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1),$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1 = (\mathcal{X}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1 \vee_\infty^\sigma \mathcal{M}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1) \cap \mathcal{F}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1.$$

Since  $G_2 \notin \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i(\alpha_1)$ , there exists  $\alpha_2 \in \sigma(G_2)$  such that

$$G_2/F_{\{\alpha_2\}}(G_2) \notin \tilde{\mathcal{L}}_\infty^\sigma \sigma_i \alpha_1(\alpha_2).$$

Hence,

$$G_2/F_{\{\alpha_2\}}(G_2) \in \tilde{\mathfrak{H}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1(\alpha_2) \setminus \tilde{\mathfrak{L}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1(\alpha_2).$$

Considering  $G_2$  in the same way as the group  $G_1$ , we obtain

$$\alpha_2 \in \sigma(\mathfrak{X}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i(\alpha_1)) \cap \sigma(\mathfrak{M}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i(\alpha_1)), \quad G_2/F_{\{\alpha_2\}}(G_2) \in \tilde{\mathfrak{H}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1(\alpha_2) \setminus \tilde{\mathfrak{L}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1(\alpha_2),$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1(\alpha_2) \neq \emptyset, \text{ and } 1 \neq F_{\{\alpha_2\}}(G_2) \subset G_2.$$

Put  $G_3 = G_2/F_{\{\alpha_2\}}(G_2)$ . According to the same argument, we see that the group  $G_3$  satisfies the analogous conditions: there exists

$$\alpha_3 \in \sigma(\mathfrak{X}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1(\alpha_2)) \cap \sigma(\mathfrak{M}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1(\alpha_2))$$

such that

$$G_3/F_{\{\alpha_3\}}(G_3) \in \tilde{\mathfrak{H}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1 \alpha_2(\alpha_3) \setminus \tilde{\mathfrak{L}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1 \alpha_2(\alpha_3),$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1 \alpha_2(\alpha_3) \neq \emptyset, \text{ and } 1 \neq F_{\{\alpha_3\}}(G_3) \subset G_3.$$

Continuing this line of reasoning, we construct the groups

$$G_4 = G_3/F_{\{\alpha_3\}}(G_3), \dots, G_n = G_{n-1}/F_{\{\alpha_{n-1}\}}(G_{n-1}), \dots$$

such that for any  $j$  the following conditions are satisfied:

$$\alpha_{j-1} \in \sigma(\mathfrak{X}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1 \dots \alpha_{j-3}(\alpha_{j-2})) \cap \sigma(\mathfrak{M}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1 \dots \alpha_{j-3}(\alpha_{j-2})),$$

$$G_j = G_{j-1}/F_{\{\alpha_{j-1}\}}(G_{j-1}) \in \tilde{\mathfrak{H}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1 \dots \alpha_{j-2}(\alpha_{j-1}) \setminus \tilde{\mathfrak{L}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1 \dots \alpha_{j-2}(\alpha_{j-1}),$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}_{\infty}^{\sigma} \sigma_i \alpha_1 \dots \alpha_{j-2}(\alpha_{j-1}) \neq \emptyset, \text{ and } 1 \neq F_{\{\alpha_{j-1}\}}(G_{j-1}) \subset G_{j-1}.$$

Since  $F_{\{\alpha_{j-1}\}}(G_{j-1}) \neq 1$ , we see that for the constructed sequence of the groups

$$G, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, \dots$$

it follows that

$$|G| > |G_1| > |G_2| > |G_3| > \dots > |G_n| > \dots$$

Since the group  $G$  is finite, we obtain  $G_k = 1$  for some number  $k$ . But

$$G_k = G_{k-1}/F_{\{\alpha_{k-1}\}}(G_{k-1}).$$

This implies that  $F_{\{\alpha_{k-1}\}}(G_{k-1}) = G_{k-1}$ , a contradiction.

Thus, our assumption is not true and  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$ . Hence  $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}$ . The theorem is proved.

Note that theorem 2 gives an affirmative answer to question of A. Tzarev on distributivity of the lattice of all totally  $\sigma$ -local formations of finite groups [11, question 3.2].

Let  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{M}$  be totally  $\sigma$ -local formations such that  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ , then  $\mathfrak{F}/_{\infty}^{\sigma} \mathfrak{M}$  denotes the lattice of all totally  $\sigma$ -local formations between  $\mathfrak{M}$  and  $\mathfrak{F}$ .

**Corollary 3.** *Let  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{H}$  be totally  $\sigma$ -local formations. Then the lattice isomorphism holds*

$$\mathfrak{F} \vee_{\infty}^{\sigma} \mathfrak{H} /_{\infty}^{\sigma} \mathfrak{H} = \mathfrak{F} /_{\infty}^{\sigma} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}.$$

In the case when  $\sigma = \sigma_1$ , we get from theorem 2 the following known results.

**Corollary 4** [16]. *The lattice  $l_{\infty}$  of all totally local formations is distributive.*

**Corollary 5** [2, p. 169]. *The lattice of all soluble totally local formations is distributive.*

**Corollary 6** [17]. *The lattice  $l_{\infty}$  of all totally local formations is modular.*

Recall that if  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{M}$  are totally local formations,  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ , then by the symbol  $\mathfrak{F}/_{\infty} \mathfrak{M}$  denotes the lattice of all totally local formations between  $\mathfrak{M}$  and  $\mathfrak{F}$ .

**Corollary 7** [17]. *Let  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{M}$  be totally local formations. Then we have*

$$\mathfrak{F} \vee_{\infty} \mathfrak{M} /_{\infty} \mathfrak{M} = \mathfrak{F} /_{\infty} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}.$$

## Библиографические ссылки

1. Шеметков ЛА. *Формации конечных групп*. Москва: Наука; 1978. 272 с.
2. Скиба АН. *Алгебра формаций*. Минск: Беларуская навука; 1997. 240 с.
3. Doerk K, Hawkes TO. *Finite soluble groups*. Berlin: Walter de Gruyter; 1992. 910 p. (De Gruyter expositions in mathematics). DOI: 10.1515/9783110870138.
4. Skiba AN. On one generalization of the local formations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2018;34(1):79–82.
5. Zhang Chi, Skiba AN. On  $\Sigma_r^\sigma$ -closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2019;70(12):1966–1977. DOI: 10.1007/s11253-019-01619-6.
6. Chi Z, Skiba AN. A generalization of Kramer’s theory. *Acta Mathematica Hungarica*. 2019;158(1):87–99. DOI: 10.1007/s10474-018-00902-5.
7. Skiba AN. On some classes of sublattices of the subgroup lattice. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;3:35–47. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-35-47.
8. Zhang Chi, Safonov VG, Skiba AN. On one application of the theory of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2018;35(2):85–88.
9. Zhang Chi, Safonov VG, Skiba AN. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*. 2019;47(3):957–968. DOI: 10.1080/00927872.2018.1498875.
10. Skiba AN. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets. *Journal of Algebra*. 2020;550:69–85. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2019.12.013.
11. Tsarev A. Laws of the lattices of  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2020;17(3):75. DOI: 10.1007/s00009-020-01510-w.
12. Safonov VG, Safonova IN, Skiba AN. On one generalization of  $\sigma$ -local and Baer-local formations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2019;41(4):65–69.
13. Safonov VG, Safonova IN, Skiba AN. On Baer- $\sigma$ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*. 2020;48(9):4002–4012. DOI: 10.1080/00927872.2020.1753760.
14. Skiba AN. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*. 2015;436:1–16. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010.
15. Safonov VG. The property of being algebraic for the lattice of all  $\tau$ -closed totally saturated formations. *Algebra and Logic*. 2006;45(5):353–356. DOI: 10.1007/s10469-006-0032-5.
16. Safonov VG. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups. *Algebra Colloquium*. 2008;15(1):119–128. DOI: 10.1142/S1005386708000126.
17. Safonov VG. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Communications in Algebra*. 2007;35(11):3495–3502. DOI: 10.1080/00927870701509354.

## References

1. Shemetkov LA. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow: Nauka; 1978. 272 p. Russian.
2. Skiba AN. *Algebra formatsii* [Algebra of formations]. Minsk: Belaruskaya navuka; 1997. 240 p. Russian.
3. Doerk K, Hawkes TO. *Finite soluble groups*. Berlin: Walter de Gruyter; 1992. 910 p. (De Gruyter expositions in mathematics). DOI: 10.1515/9783110870138.
4. Skiba AN. On one generalization of the local formations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2018;34(1):79–82.
5. Zhang Chi, Skiba AN. On  $\Sigma_r^\sigma$ -closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2019;70(12):1966–1977. DOI: 10.1007/s11253-019-01619-6.
6. Chi Z, Skiba AN. A generalization of Kramer’s theory. *Acta Mathematica Hungarica*. 2019;158(1):87–99. DOI: 10.1007/s10474-018-00902-5.
7. Skiba AN. On some classes of sublattices of the subgroup lattice. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;3:35–47. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-35-47.
8. Zhang Chi, Safonov VG, Skiba AN. On one application of the theory of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2018;35(2):85–88.
9. Zhang Chi, Safonov VG, Skiba AN. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*. 2019;47(3):957–968. DOI: 10.1080/00927872.2018.1498875.
10. Skiba AN. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets. *Journal of Algebra*. 2020;550:69–85. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2019.12.013.
11. Tsarev A. Laws of the lattices of  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2020;17(3):75. DOI: 10.1007/s00009-020-01510-w.
12. Safonov VG, Safonova IN, Skiba AN. On one generalization of  $\sigma$ -local and Baer-local formations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2019;41(4):65–69.
13. Safonov VG, Safonova IN, Skiba AN. On Baer- $\sigma$ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*. 2020;48(9):4002–4012. DOI: 10.1080/00927872.2020.1753760.
14. Skiba AN. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*. 2015;436:1–16. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010.
15. Safonov VG. The property of being algebraic for the lattice of all  $\tau$ -closed totally saturated formations. *Algebra and Logic*. 2006;45(5):353–356. DOI: 10.1007/s10469-006-0032-5.
16. Safonov VG. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups. *Algebra Colloquium*. 2008;15(1):119–128. DOI: 10.1142/S1005386708000126.
17. Safonov VG. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Communications in Algebra*. 2007;35(11):3495–3502. DOI: 10.1080/00927870701509354.

---

---

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

---

## DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

---

---

УДК 519.853.2

### ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ: РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ДВОЙСТВЕННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ В СТРОГОЙ ФОРМЕ

О. И. КОСТЮКОВА<sup>1)</sup>, Т. В. ЧЕМИСОВА<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, г. Минск, 220072, Беларусь

<sup>2)</sup>Авейрусский университет, кампус Университета Сантьяго, 3810-193, г. Авейру, Португалия

Регуляризация задачи оптимизации состоит в ее сведении к эквивалентной задаче, удовлетворяющей условиям регулярности, которые гарантируют выполнение соотношений двойственности в строгой форме. В настоящей статье для линейных задач полуопределенного программирования предлагается процедура регуляризации, основанная на понятии неподвижных индексов и их свойствах. Эта процедура описана в виде алгоритма, который за конечное число шагов преобразует любую задачу линейного полубесконечного программирования в эквивалентную задачу, удовлетворяющую условию Слейтера. В результате использования свойств неподвижных индексов и предложенной процедуры регуляризации получены новые двойственные задачи полубесконечного программирования в явной и неявной формах. Доказано, что для этих двойственных задач и исходной задачи соотношения двойственности выполняются в строгой форме.

---

#### Образец цитирования:

Костюкова ОИ, Чемисова ТВ. Задачи линейного полуопределенного программирования: регуляризация и двойственные формулировки в строгой форме. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:17–27 (на англ.).  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-17-27>

#### For citation:

Kostyukova OI, Tchemisova TV. Linear semidefinite programming problems: regularisation and strong dual formulations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:17–27.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-17-27>

---

#### Авторы:

**Ольга Ивановна Костюкова** – доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник.  
**Татьяна Владимировна Чемисова** – кандидат физико-математических наук; доцент факультета математики.

#### Authors:

**Olga I. Kostyukova**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher.  
[kostyukova@im.bas-net.by](mailto:kostyukova@im.bas-net.by)  
<https://orcid.org/0000-0002-0959-0831>  
**Tatiana V. Tchemisova**, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of mathematics.  
[tatiana@ua.pt](mailto:tatiana@ua.pt)  
<https://orcid.org/0000-0002-2678-2552>

**Ключевые слова:** линейное полуопределенное программирование; сильная двойственность; нормализованный набор неподвижных индексов; регуляризация; квалификация ограничений.

**Благодарность.** Исследование выполнено в рамках государственной научной программы «Конвергенция» (задание 1.3.01, Республика Беларусь) и поддержано Центром исследований и разработок в области математики и приложений (CIDMA, Португалия) и Португальским фондом по развитию науки и технологий (FCT, проект UIDB/04106/2020).

## LINEAR SEMIDEFINITE PROGRAMMING PROBLEMS: REGULARISATION AND STRONG DUAL FORMULATIONS

O. I. KOSTYUKOVA<sup>a</sup>, T. V. TCHEMISOVA<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,  
11 Surhanava Street, Minsk 220072, Belarus*

<sup>b</sup>*University of Aveiro, Campus Universitário de Santiago, 3810-193, Aveiro, Portugal*

*Corresponding author: O. I. Kostyukova (kostyukova@im.bas-net.by)*

Regularisation consists in reducing a given optimisation problem to an equivalent form where certain regularity conditions, which guarantee the strong duality, are fulfilled. In this paper, for linear problems of semidefinite programming (SDP), we propose a regularisation procedure which is based on the concept of an immobile index set and its properties. This procedure is described in the form of a finite algorithm which converts any linear semidefinite problem to a form that satisfies the Slater condition. Using the properties of the immobile indices and the described regularisation procedure, we obtained new dual SDP problems in implicit and explicit forms. It is proven that for the constructed dual problems and the original problem the strong duality property holds true.

**Keywords:** linear semidefinite programming; strong duality; normalised immobile index set; regularisation; constraint qualifications.

**Acknowledgements.** This work was partially supported by the state research program «Convergence» (task 1.3.01, Republic of Belarus), by Portuguese funds through the Center for Research and Development in Mathematics and Applications (CIDMA), and the Foundation for Science and Technology (FCT, project UIDB/04106/2020).

### Introduction

In this paper, we consider semidefinite programming (SDP) problems which are particular case of semi-infinite programming (SIP) and conic optimisation. The interest to SDP problems stems from their numerous applications [1; 2].

In conic optimisation, optimality conditions and duality results are usually formulated under some regularity conditions, so-called constraint qualifications (CQ) (see e. g. [2–5]). Such conditions should guarantee the fulfillment of the Karush – Kuhn – Tucker (KKT) type optimality conditions and the *strong duality* property consisting in the fact that the optimal values of the objective function in the primal problem and its Lagrangian dual problem are equal and the objective function in the dual problem attains its maximum.

If a given SDP problem does not satisfy CQs then, in general, the optimality conditions in the KKT form degenerate (i. e. are satisfied for all feasible solutions and, hence, are not helpful for the search for optimal solutions) and the strong duality relations are violated. This makes it difficult to solve such problems numerically. To avoid these obstacles, regularisation procedures are applied to the original irregular problems. The purpose of such procedures is to obtain equivalent formulations satisfying some CQs.

One of the most commonly used CQ is the Slater condition that consists in non-emptiness of the interior of the feasible set. For SDP problems that do not satisfy this CQ, several regularisation procedures based on a so-called *facial reduction approach* (FRA) were proposed in [6–9]. Being very general (they are designed for a wider class of problems than SDP), these procedures are not detailed.

In [6; 10], the authors used the FRA to construct an explicit dual SDP problem which satisfies the strong duality property without any CQ.

For the study of SIP problems not satisfying CQ, we proposed (see [11; 12]) other approach which is based on the concept of *immobile indices*, i. e. indices of the constraints that are active for all feasible solutions. In this paper, we will apply this approach to SDP problems.

The main aim of this paper is to show that the concept of immobile indices is an efficient tool that can be used in SDP:

- 1) to design and justify a new regularisation procedure;
- 2) formulate explicitly dual SDP problems satisfying the strong duality relations.

### Linear semidefinite programming problem: problem statement and basic definitions

Given an integer  $p > 1$ , denote by  $\mathbb{R}_+^p$  the set of all  $p$  vectors with non-negative components, by  $\mathcal{S}^p$  and  $\mathcal{S}_+^p$  the space of real symmetric  $p \times p$  matrices and the cone of symmetric positive semidefinite  $p \times p$  matrices, respectively. The space  $\mathcal{S}^p$  is considered here as a vector space with the trace inner product  $A \bullet B := \text{trace}(AB)$ .

Consider a linear SDP problem in the form

$$\min_x c^\top x, \text{ s. t. } \mathcal{A}(x) \in \mathcal{S}_+^p, \quad (1)$$

where  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$  is the vector of decision variables and the constraints matrix function  $\mathcal{A}(x)$  is defined as

$$\mathcal{A}(x) := \sum_{j=1}^n A_j x_j + A_0, \quad (2)$$

matrices  $A_j \in \mathcal{S}^p$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , and vector  $c \in \mathbb{R}^n$  are given. Here and below, for a given vector or matrix  $v$ , we denote by  $v^\top$  its transpose.

It is well known that the SDP problem in the form (1) is equivalent to the following convex SIP problem:

$$\min_x c^\top x, \text{ s. t. } t^\top \mathcal{A}(x) t \geq 0 \quad \forall t \in T, \quad (3)$$

with a  $p$  – dimensional compact index set

$$T := \{t \in \mathbb{R}_+^p : \|t\| = 1\}. \quad (4)$$

Denote by  $X$  the feasible set of the equivalent problems (1) and (3):

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{A}(x) \in \mathcal{S}_+^p\} = \{x \in \mathbb{R}^n : t^\top \mathcal{A}(x) t \geq 0 \quad \forall t \in T\}.$$

Evidently, the set  $X$  is convex.

*Remark 1.* In what follows, we will suppose that  $X \neq \emptyset$ . Then there exists a feasible solution  $y \in X$  and, without loss of generality, we can consider that  $A_0 \in \mathcal{S}_+^p$ . In fact, having substituted  $x$  by a new variable  $z := x - y$ , we can replace the original problem (1) by the following one in terms of  $z$ :

$$\min_z c^\top z, \text{ s. t. } \bar{\mathcal{A}}(z) \in \mathcal{S}_+^p,$$

with  $\bar{\mathcal{A}}(z) := \sum_{i=1}^n A_i z_i + \bar{A}_0$ ,  $\bar{A}_0 = \mathcal{A}(y) \in \mathcal{S}_+^p$ .

According to the commonly used definition, the constraints of the SDP problem (1) satisfy the Slater condition if  $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n$  such that

$$\mathcal{A}(\bar{x}) \in \text{int } \mathcal{S}_+^p = \{D \in \mathcal{S}(p) : t^\top D t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^p, t \neq 0\}. \quad (5)$$

Here  $\text{int } \mathcal{B}$  stays for the interior of a set  $\mathcal{B}$ .

Following [11; 12], let's define the set of immobile indices  $R_{im}$  and the set of normalised immobile indices  $T_{im}$  in problem (1):

$$R_{im} := \{t \in \mathbb{R}^p : t^\top \mathcal{A}(x) t = 0 \quad \forall x \in X\},$$

$$T_{im} := \{t \in T : t^\top \mathcal{A}(x) t = 0 \quad \forall x \in X\} = \{t \in R_{im} : \|t\| = 1\}.$$

The following proposition is a consequence of the well know fact: if  $A \in \mathcal{S}_+(p)$ , then  $t^\top A t = 0$  if and only if  $A t = 0$ .

**Proposition 1.** If  $t \in R_{im}$  then  $\mathcal{A}(x) t = 0$  for all  $x \in X$ .

The lemma below can be proved following the scheme of the proof of lemma 1 and proposition 1 in [13].

**Lemma 1.** Given the linear SDP problem (1), the following statements are true:

- 1) the Slater condition (5) is satisfied if and only if  $R_{im} = \{0\}$ ;

2) the set of immobile indices  $R_{im}$  either contains a single zero vector or is a subspace in  $\mathbb{R}^p$ .

Here in what follows,  $\mathbf{0}$  denotes a null vector of a given finite dimensional vector space.

It follows from lemma 1 that if  $T_{im} = \emptyset$ , then the constraints of problem (1) satisfy the Slater condition. This case is well studied in literature. In this paper, we will consider a general case, where we do not suppose that  $T_{im} = \emptyset$  and concentrate our main attention on the case  $T_{im} \neq \emptyset$ .

Let us consider any finite non-empty set of indices

$$V = \{\tau(i) \in T_{im}, i \in I\}, 1 \leq |I| < \infty. \quad (6)$$

**Lemma 2.** Given any set  $V$  in the form (6), the feasible set  $X$  of problem (1) coincides with the set

$$X(V) := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{A}(x)\tau(i) = 0, i \in I, t^\top \mathcal{A}(x)t \geq 0 \forall t \in T(V)\},$$

where  $T(V) := \{t \in T : t^\top \tau(i) = 0, i \in I\}$ .

**Proof.** It follows from proposition 1 that  $X \subset X(V)$ . Let us show that  $X(V) \subset X$ . Suppose that  $\bar{x} \in X(V)$  whereform

$$\mathcal{A}(\bar{x})\tau(i) = 0, i \in I, \quad (7)$$

$$t^\top \mathcal{A}(\bar{x})t \geq 0 \quad \forall t \in T(V). \quad (8)$$

It is evident that any vector  $t \in \mathbb{R}^p$  can be presented in the form

$$t = l + \mu, \text{ where } l \in \text{span}\{\tau(i), i \in I\}, \mu \in (\text{span}\{\tau(i), i \in I\})^\perp.$$

Here for  $S \subset \mathbb{R}^p$ , we denote by  $S^\perp$  the orthogonal complement to  $S$  in  $\mathbb{R}^p$ . Then, it follows from (7) that  $\mathcal{A}(\bar{x})l = 0$  and hence

$$t^\top \mathcal{A}(\bar{x})t = \mu^\top \mathcal{A}(\bar{x})\mu. \quad (9)$$

If  $\mu = 0$ , then it follows from (9) that  $t^\top \mathcal{A}(\bar{x})t = 0$ .

Suppose that  $\mu \neq 0$ . Then, by construction, for  $\bar{\mu} = \mu/\|\mu\|$  it holds  $\bar{\mu} \in T(V)$ . Taking into account this inclusion and relations (8), (9) we conclude that  $t^\top \mathcal{A}(\bar{x})t \geq 0$ . Thus we have shown that, for any  $\bar{x} \in X(V)$  and any  $t \in \mathbb{R}^p$ , the inequality  $t^\top \mathcal{A}(\bar{x})t \geq 0$  holds true. This implies that  $\bar{x} \in X$ , and hence  $X(V) \subset X$ . The lemma is proved.

Notice that, by construction, we have  $\text{span}\{V\} \cap T(V) = \emptyset$ .

### A regularisation procedure based on immobile indices

In this section, we will describe a regularisation procedure which constructs an SDP problem that is equivalent to the original problem (1) and satisfies the Slater condition. At the beginning of the procedure we suppose that the matrix function  $\mathcal{A}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , defined in (2) is known. Remind that  $A_0 \in S_+^p$ .

Let us describe and justify the regularisation procedure in steps.

**Step #0.** Given the SDP problem in the form (1), consider the following SIP problem:

$$\text{SIP}_0: \min_{(x, \mu)} \mu, \text{ s. t. } t^\top \mathcal{A}(x)t + \mu \geq 0, t \in T,$$

with the index set  $T$  defined in (4).

If there exists a feasible solution  $(\bar{x}, \bar{\mu})$  of this problem with  $\bar{\mu} < 0$ , then set  $m_* := 0$  and go to the *final step*. Otherwise the vector  $(x = \mathbf{0}, \mu = 0)$  is an optimal solution of the problem  $\text{SIP}_0$ .

It should be noticed that the problem  $\text{SIP}_0$  is regular since the index set  $T$  is a compact set, and the constraints satisfy the Slater condition. Hence, (see e. g. [14]), it follows from the optimality conditions for the vector  $(x = \mathbf{0}, \mu = 0)$  in problem  $\text{SIP}_0$  that there exist indices and numbers  $\tau(i) \in T$ ,  $\gamma(i) > 0$ ,  $i \in I_1$ ,  $|I_1| \leq n + 1$ , such that

$$\sum_{i \in I_1} \gamma(i) (\tau(i))^\top A_j \tau(i) = 0, j = 0, 1, \dots, n; \sum_{i \in I_1} \gamma(i) = 1.$$

It follows from the relations above that  $I_1 \neq \emptyset$  and  $\tau(i) \in T_{im} \subset T$ ,  $i \in I_1$ .

Go to the next step with the data  $\gamma(i) > 0$ ,  $\tau(i) \in T_{im}$ ,  $i \in I_1$ , and  $I_0 = \emptyset$ .

**Step #m,  $m \geq 1$ .** By the beginning of the iteration, we have numbers, indices and vectors

$$\gamma(i) > 0, \tau(i) \in T_{im}, i \in I_m, \lambda^{m-1}(i) \in \mathbb{R}^p, i \in I_{m-1}, \quad (10)$$

which satisfy the relations

$$\sum_{i \in I_m} \gamma(i) (\tau(i))^\top A_j \tau(i) + \sum_{i \in I_{m-1}} (\lambda^{m-1}(i))^\top A_j \tau(i) = 0, j = 0, 1, \dots, n. \quad (11)$$

Notice that if  $m = 1$ , then  $I_{m-1} = I_0 = \emptyset$ . Hence  $\sum_{i \in I_{m-1}} \dots = 0$  and we do not need vectors  $\lambda^{m-1}(i), i \in I_{m-1}$ .

Consider a SIP problem:

$$\text{SIP}_m: \min_{(x, \mu)} \mu, \text{ s. t. } \mathcal{A}(x)\tau(i) = 0, i \in I_m, t^\top \mathcal{A}(x)t + \mu \geq 0, t \in T_m,$$

with the index set  $T_m := \{t \in T : t^\top \tau(i) = 0, i \in I_m\}$ .

By construction, in this problem the index set  $T_m$  is a compact set, there is a finite number of linear equality constraints, and there exists a feasible solution  $(x^* = \mathbf{0}, \mu^* = 1)$  such that  $t^\top \mathcal{A}(x^*)t + \mu^* > 0$  for all  $t \in T_m$ . Hence, problem  $\text{SIP}_m$  is regular.

Notice that it follows from lemma 2 that for  $\mu = 0$ , the set of feasible solutions in the problem  $\text{SIP}_m$  coincides with the set of feasible solutions  $X$  in the original problem (1).

If there exists a feasible solution  $(\bar{x}, \bar{\mu})$  of  $\text{SIP}_m$  with  $\bar{\mu} < 0$ , then set  $m_* := m$  and go to the *final step*.

Otherwise the vector  $(x = \mathbf{0}, \mu = 0)$  is an optimal solution of the problem  $\text{SIP}_m$ . Since this problem is regular, it follows from the optimality of  $(x = \mathbf{0}, \mu = 0)$  (see [14]) that there exist indices, numbers and vectors

$$\tau(i) \in T_m, \gamma(i) > 0, i \in \Delta I_m, |\Delta I_m| \leq n + 1, \lambda(i) \in \mathbb{R}^p, i \in I_m,$$

such that

$$\sum_{i \in \Delta I_m} \gamma(i) (\tau(i))^\top A_j \tau(i) + \sum_{i \in I_m} (\lambda(i))^\top A_j \tau(i) = 0, j = 0, 1, \dots, n; \sum_{i \in \Delta I_m} \gamma(i) = 1. \quad (12)$$

It follows from the relations above that  $\Delta I_m \neq \emptyset, \tau(i) \in T_{im} \cap T_m, i \in \Delta I_m$ , and

$$\text{rank}(\tau(i), i \in I_{m+1}) \geq \text{rank}(\tau(i), i \in I_m) + 1, I_{m+1} := I_m \cup \Delta I_m. \quad (13)$$

From (11) and (12), we have

$$\sum_{i \in I_{m+1}} \gamma(i) (\tau(i))^\top A_j \tau(i) + \sum_{i \in I_m} (\lambda^m(i))^\top A_j \tau(i) = 0, j = 0, 1, \dots, n, \quad (14)$$

where  $\lambda^m(i) = \lambda(i), i \in I_m \setminus I_{m-1}; \lambda^m(i) = \lambda(i) + \lambda^{m-1}(i), i \in I_{m-1}$ .

Go to the next iteration  $\#(m + 1)$  with the new data

$$\gamma(i) > 0, \tau(i) \in T_{im}, i \in I_{m+1}; \lambda^m(i) \in \mathbb{R}^p, i \in I_m, \quad (15)$$

which satisfies (13) and (14).

**Final step.** It follows from (13) that the algorithm consists of a finite number  $m_*$  of steps and  $m_* \leq p$ . Hence, for some  $0 \leq m_* \leq p$ , the problem  $\text{SIP}_{m_*}$  has a feasible solution  $(\bar{x}, \bar{\mu})$  with  $\bar{\mu} < 0$ .

If  $m_* = 0$ , then the constraints of the original SDP problem (1) satisfy the Slater condition. Hence, this problem is regular.

Suppose that  $m_* > 0$ . By the beginning of the final step, the immobile indices  $\tau(i), i \in I_{m_*}$ , have been constructed. Consider a problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x, \text{ s. t. } \mathcal{A}(x)\tau(i) = 0, i \in I_{m_*}, t^\top \mathcal{A}(x)t \geq 0, t \in T_{m_*}, \quad (16)$$

where  $T_{m_*} = \{t \in T : t^\top \tau(i) = 0, i \in I_{m_*}\}$ . Since  $\tau(i) \in T_{im}, i \in I_{m_*}$ , it follows from lemma 2 that the problem above is equivalent to problem (1) and can be considered as its regularisation since, by construction,

$$\mathcal{A}(\bar{x})\tau(i) = 0, i \in I_{m_*}, t^\top \mathcal{A}(\bar{x})t \geq -\bar{\mu} > 0, t \in T_{m_*},$$

and the index set  $T_{m_*}$  is a compact set. The regularisation procedure is described.

The described in this section regularisation procedure has the form of the algorithm whose iterations are described in all details and, therefore, it is more constructive than other regularisation procedures proposed for SDP problems in [6; 8]. It should be noted also that unlike the procedures from [6; 8] which are based on the FRA, the presented here procedure is based on the properties of the set of immobile indices that proves once again the important role that the immobile indices play in the study of optimisation problems.

### Dual SDP formulations based on the immobile indices

In this section, for the linear SDP problem (1), we formulate several types of dual problems and discuss their properties.

**The standard Lagrangian dual problem (SLD).** For the SDP problem (1), the SLD has the form (see [10])

$$\text{SLD: } \max -U \bullet A_0, \text{ s. t. } U \bullet A_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad U \in \mathcal{S}_+^p.$$

Given a pair of mutually dual optimisation problems, the deference between the optimal values of the primal and dual objective functions is called the *duality gap*.

For the pair of dual problems (1) and SLD, the following results are known:

- *weak duality* (the duality gap is not negative);
- *strong duality* (if the constraints of problem (1) satisfy the Slater condition, then the duality gap vanishes);
- if the Slater condition is not satisfied, then the duality gap may be positive.

Let us now formulate for problem (1), two new dual problems (one in an implicit and another in an explicit form), for which the duality gap vanishes without any additional assumptions.

**An implicit dual problem (IDP).** Suppose that for problem (1), the set of immobile indices  $R_{im}$  is known. By lemma 1, the set  $R_{im}$  either consists of a unique zero element:  $R_{im} = \{\mathbf{0}\}$ , or it is a subspace in  $\mathbb{R}^p$ . Denote by  $\{\xi(i), i \in I_b\}$ , where  $0 \leq |I_b| \leq p$ , any basis of the subspace  $R_{im}$ . In the case  $R_{im} = \{\mathbf{0}\}$ , we consider that  $I_b := \emptyset$ .

Define a matrix  $V_b := (\xi(i), i \in I_b) \in \mathbb{R}^{p \times p_*}$ ,  $p_* := |I_b|$ , and consider a problem

$$\text{IDP: } \max -U \bullet A_0, \text{ s. t. } (U + \Lambda V_b) \bullet A_j = c_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad U \in \mathcal{S}_+^p, \quad \Lambda \in \mathbb{R}^{p \times p_*}.$$

Note that in the case  $R_{im} = \{\mathbf{0}\}$ , the problem IDP coincides with the problem SLD.

Based on lemma 2, we can prove the following theorem.

**Theorem 1.** *The problem IDP is dual to problem (1) and the strong duality relations hold true.*

To formulate the dual problem IDP, we have to know a basis of the subspace  $R_{im}$ . Hence this dual formulation can be considered as an implicit one.

**A dual problem in the explicit form (EDP).** Evidently, we are interested to have a dual SDP problem in an explicit form, where only data of the original primal problem (1) is used.

For a given finite integer  $k_* \geq 0$ , let us consider the following problem:

$$\begin{aligned} & \max -(U + W_{k_*}) \bullet A_0, \\ & \text{s. t. } (U + W_{m_*}) \bullet A_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad U \in \mathcal{S}_+^p, \quad W_0 = \mathbb{O}_p; \\ & \text{EDP}(k_*): (U_m + W_{m-1}) \bullet A_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} U_m & W_m \\ W_m^\top & D_m \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_+^{2p}, \quad m = 1, \dots, k_*, \tag{18}$$

where  $U_m \in \mathcal{S}^p$ ,  $D_m \in \mathcal{S}^p$ ,  $W_m \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $m = 1, \dots, k_*$ , and  $\mathbb{O}_p$  stays for the  $p \times p$  null matrix.

Notice that in the case  $k_* = 0$ , the index set  $\{1, \dots, k_*\}$  is supposed to be empty and then constraints (17) and (18) are missing in the problem  $\text{EDP}(k_*)$ . Hence, the problem  $\text{EDP}(0)$  coincides with the problem SLD.

**Lemma 3** [weak duality]. *Let  $x \in X$  be a feasible solution of the primal linear SDP problem (1) and  $U_m, W_m, D_m, m = 1, \dots, k_*$ ;  $U$  be a feasible solution of the problem  $\text{EDP}(k_*)$ . Then the following inequality holds*

$$c^\top x \geq -(U + W_{k_*}) \bullet A_0. \tag{19}$$

Proof. Given  $m = 1, \dots, k_*$ , it follows from the condition (18) that there exists a matrix  $B_m$  in the form

$$B_m = \begin{pmatrix} V_m \\ L_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2p \times k(m)} \text{ such that } \begin{pmatrix} U_m & W_m \\ W_m^\top & D_m \end{pmatrix} = B_m B_m^\top = \begin{pmatrix} V_m \\ L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_m^\top & L_m^\top \end{pmatrix}.$$

The matrix  $B_m$  above is composed by the blocks containing matrices

$$V_m = (\tau^m(i), i \in I_m) \text{ and } L_m = (\lambda^m(i), i \in I_m), \quad (20)$$

where  $\tau^m(i) \in \mathbb{R}^p$ ,  $\lambda^m(i) \in \mathbb{R}^p$ ,  $i \in I_m$ ,  $k(m) := |I_m|$ .

Hence, for  $m = 1, \dots, k_*$ , the matrices  $U_m, W_m, D_m$  in  $\text{EDP}(k_*)$  admit representation

$$U_m = V_m V_m^\top, \quad W_m = V_m L_m^\top, \quad D_m = L_m L_m^\top. \quad (21)$$

Let us prove, first that for all  $m = 1, \dots, k_*$ , it holds

$$\mathcal{A}(x) \tau^m(i) = 0, \quad i \in I_m, \quad \forall x \in X. \quad (22)$$

Consider the following constraints of the problem  $\text{EDP}(k_*)$ :

$$U_1 \bullet A_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Due to (20) and (21), these constraints can be rewritten in the form

$$\sum_{i \in I_1} (\tau^1(i))^\top A_j \tau^1(i) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

It follows from these equalities that for any  $x \in \mathbb{R}^n$ , we have

$$\sum_{i \in I_1} (\tau^1(i))^\top \mathcal{A}(x) \tau^1(i) = 0. \quad (23)$$

Taking into account that the inequalities

$$t^\top \mathcal{A}(x) t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^p, \quad \forall x \in X, \quad (24)$$

should be fulfilled, equality (23) implies  $(\tau^1(i))^\top \mathcal{A}(x) \tau^1(i) = 0$ ,  $i \in I_1$ ,  $\forall x \in X$ .

Thus, one can conclude that  $\tau^1(i) \in T_{im}$ ,  $i \in I_1$ , and, consequently (see proposition 1), it holds  $\mathcal{A}(x) \tau^1(i) = 0$ ,  $i \in I_1$ ,  $\forall x \in X$ . Hence, equalities (22) are valid for  $m = 1$ .

Suppose that for some  $m \geq 1$ , equalities (22) are proved. Due to (20) and (21), the constraints  $(U_{m+1} + W_m) \bullet A_j = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , of the problem  $\text{EDP}(k_*)$  can be rewritten in the form

$$\sum_{i \in I_{m+1}} (\tau^{m+1}(i))^\top A_j \tau^{m+1}(i) + \sum_{i \in I_m} (\lambda^m(i))^\top A_j \tau^m(i) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

It follows from the latter equalities that for any  $x \in \mathbb{R}^n$ , we have

$$\sum_{i \in I_{m+1}} (\tau^{m+1}(i))^\top \mathcal{A}(x) \tau^{m+1}(i) + \sum_{i \in I_m} (\lambda^m(i))^\top \mathcal{A}(x) \tau^m(i) = 0. \quad (25)$$

By the hypothesis above, equalities (22) are satisfied. Then, taking into account inequalities (24), we conclude from (25) that

$$(\tau^{m+1}(i))^\top \mathcal{A}(x) \tau^{m+1}(i) = 0, \quad i \in I_{m+1}, \quad i \in I_m, \quad \forall x \in X.$$

Hence,  $\tau^{m+1}(i) \in T_{im}$ ,  $i \in I_{m+1}$ , and, according to proposition 1, it holds

$$\mathcal{A}(x) \tau^{m+1}(i) = 0, \quad i \in I_{m+1}, \quad \forall x \in X.$$

Replace  $m$  by  $m + 1$  and repeat the considerations for all  $1 < m < k_*$ .

Let  $m = k_*$ . In this case, relations (22) have the form

$$\mathcal{A}(x)\tau^{k_*}(i) = 0, i \in I_{k_*}, \forall x \in X, \quad (26)$$

and for  $U = \sum_{i \in I} \tau(i)(\tau(i))^\top$ ,  $\tau(i) \in \mathbb{R}^p$ ,  $i \in I$ , the constraints  $(U + W_{k_*}) \bullet A_j = c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , of the problem  $\text{EDP}(k_*)$  can be presented in the form

$$\sum_{i \in I} (\tau(i))^\top A_j \tau(i) + \sum_{i \in I_{k_*}} (\lambda^{k_*}(i))^\top A_j \tau^{k_*}(i) = c_j, j = 1, \dots, n.$$

Then, it follows from the equalities above and relations (24), (26) that

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i \in I} (\tau(i))^\top \mathcal{A}(x) \tau(i) - (U + W_{k_*}) \bullet A_0 \geq -(U + W_{k_*}) \bullet A_0.$$

The lemma is proved.

**Theorem 2** [strong duality]. *Suppose that the linear SDP problem (1) admits an optimal solution  $x^0$ . Then there exists a finite integer  $k_*$ ,  $0 \leq k_* \leq \min\{p, n\}$ , such that the problem  $\text{EDP}(k_*)$  is dual to problem (1) and the strong duality relations are satisfied, i. e. the dual problem has an optimal solution*

$$(U_m^0, W_m^0, D_m^0, m = 1, \dots, k_*; U^0) \quad (27)$$

and the following (the strong duality) equality holds

$$c^\top x^0 = -(U^0 + W_{k_*}^0) \bullet A_0. \quad (28)$$

**Proof.** To prove the theorem, we will construct the number  $k_*$  and matrices (27) using the regularisation procedure described in section 3. This procedure consists of the steps numbered from 0 to  $m_*$ , where  $m_* \leq p$ . At the beginning of each step  $\#m$ , we have indices  $\tau(i)$ ,  $i \in I_m$ . Denote

$$r(m) := \text{rank} \begin{pmatrix} A_j \tau(i), j = 1, \dots, n \\ i \in I_m \end{pmatrix} \leq n \text{ for } m \geq 1, r(0) = 0.$$

By construction,  $r(m+1) \geq r(m)$ ,  $m = 0, \dots, m_* - 1$ .

Let  $m(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, k_*$ , be the numbers of the steps on which the following relations are satisfied:

$$m(k) = m(k-1) + s(k), \text{ where } s(k) \geq 1, k = 0, 1, \dots, k_*;$$

$$m(-1) = -1, m(k_*) = m_* \leq p,$$

$$r(m(k-1)+1) = r(m(k-1)+2) = \dots = r(m(k-1)+s(k)), k = 0, 1, \dots, k_*; \quad (29)$$

$$r(m(k+1)) > r(m(k)), k = 0, 1, \dots, k_* - 1.$$

These relations and the conditions  $r(m) \leq n$ ,  $m(k_*) = m_* \leq p$ , imply  $k_* \leq \min\{p, n\}$ .

Let us group together the steps of the procedure described in section 3, into iterations that have the numbers  $k = 0, 1, \dots, k_*$ , as follows: the iteration  $\#k$  consists of the steps with the numbers  $m(k-1)+1, m(k-1)+2, \dots, m(k-1)+s(k) =: m(k)$ .

For  $0 \leq k \leq k_* - 1$ , let us consider iteration  $\#k$  and its endmost step, i. e. the step with the number  $m = m(k)$ . This step starts having the initial data (10) and ends having new data (15) that satisfies the relations (14). It can be shown, taking into account the equalities (29), that relations (14) with  $m = m(k)$  can be rewritten in the form

$$\sum_{i \in I_{m(k)+1}} \gamma(i)(\tau(i))^\top A_j \tau(i) + \sum_{i \in I_{m(k-1)+1}} (\hat{\lambda}^k(i))^\top A_j \tau(i) = 0, j = 0, 1, \dots, n, \quad (30)$$

where  $\hat{\lambda}^k(i) \in \mathbb{R}^p$ ,  $i \in I_{m(k-1)+1}$ , are some vectors which can differ from the vectors  $\lambda^m(i)$ ,  $i \in I_{m-1}$ , in (14) with  $m = m(k)$ . Denote  $\tilde{I}_{k+1} := I_{m(k)+1}$ ,  $\tilde{I}_k := I_{m(k-1)+1}$  and set

$$V_{k+1} := (\sqrt{\gamma(i)}\tau(i), i \in \tilde{I}_{k+1}), \Lambda_k := (\hat{\lambda}^k(i)/\sqrt{\gamma(i)}, i \in \tilde{I}_k),$$

$$W_k^0 := \Lambda_k V_k^\top, U_{k+1}^0 := V_{k+1} V_{k+1}^\top, D_k^0 := \Lambda_k \Lambda_k^\top. \quad (31)$$

By construction,

$$\begin{pmatrix} V_k \\ \Lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_k^\top \Lambda_k^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_k^0 & W_k^0 \\ W_k^{0\top} & D_k^0 \end{pmatrix} \in S_+^{2p},$$

where  $V_k$  was constructed at the previous iteration  $\#(k-1)$ . Relations (30) take the form

$$U_{k+1}^0 \bullet A_j + W_k^0 \bullet A_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (32)$$

Notice that for  $k=0$ , the set  $\tilde{I}_k = I_{m(k-1)+1} = I_0$  is empty, by construction. Hence at the step with the number  $\#m(0)$  of the iteration  $\#0$ , we construct only a matrix  $U_1^0$  by the rule

$$U_1^0 := V_1 V_1^\top, \quad \text{where } V_1 := \left( \sqrt{\gamma(i)} \tau(i), i \in \tilde{I}_1 \right). \quad (33)$$

Then relations (30) with  $k=0$  can be rewritten in the form

$$U_1^0 \bullet A_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad U_1^0 \in S_+^p.$$

Consider the (last) iteration  $\#k_*$ . According to the regularisation procedure, this iteration ends on the step  $\#m(k_*) = m_*$  after which we pass to the final step. Notice that, by construction,  $0 \leq k_* \leq m_*$ .

Let us consider the final step of the regularisation procedure.

If  $m_* = 0$  and, consequently  $k_* = 0$ , then the constraints of the original SDP problem (1) satisfy the Slater condition. In this case, according to the well-known optimality conditions (see e. g. [1; 2]), if  $x^0$  is an optimal solution of problem (1), then there exists a matrix  $U^0 \in S_+^p$  such that

$$U^0 \bullet A_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad U^0 \bullet \mathcal{A}(x^0) = 0.$$

It follows from the relations above that  $U^0$  is a feasible solution of the dual problem EDP(0) and equality (28) holds.

Suppose that  $m_* > 0$ . By the beginning of the final step, the immobile indices and numbers  $\tau(i), \gamma(i) > 0, i \in I_{m_*}$ , are found and it was shown at the final step that problem (16) is regular and equivalent to the original problem (1).

Let  $x^0$  be an optimal solution of the problem (1). Then vector  $x^0$  is optimal in problem (16) as well. Hence, taking into account the regularity of this problem, we conclude that there exist indices, numbers and vectors  $\tau(i) \in T_{m_*}, \gamma(i) > 0, i \in I; \lambda^{m_*}(i) \in \mathbb{R}^p, i \in I_{m_*}$ , such that

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \gamma(i) (\tau(i))^\top A_j \tau(i) + \sum_{i \in I_{m_*}} (\lambda^{m_*}(i))^\top A_j \tau(i) &= c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ (\tau(i))^\top \mathcal{A}(x^0) \tau(i) = 0, \quad i \in I; \quad (\lambda^{m_*}(i))^\top \mathcal{A}(x^0) \tau(i) &= 0, \quad i \in I_{m_*}. \end{aligned} \quad (34)$$

Suppose that  $k_* = 0$ . Then, from equalities (29) with  $k=0$ , it follows  $A_j \tau(i) = \mathbf{0}, j = 1, \dots, n, i \in I_{m_*}$ , and, consequently, relations (34) take the form

$$\sum_{i \in I} \gamma(i) (\tau(i))^\top A_j \tau(i) = c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\tau(i))^\top \mathcal{A}(x^0) \tau(i) = 0, \quad i \in I.$$

Let us set  $V^0 := \left( \tau(i) \sqrt{\gamma(i)}, i \in I \right), U^0 := V^0 (V^0)^\top \in S_+^p$ . Then it follows from the above relations that  $U^0 \bullet A_j = c_j, j = 1, \dots, n$ , and  $-U^0 \bullet A_0 = c^\top x^0$ . These equalities and inequality (19) imply that the matrix  $U^0$  is an optimal solution of the problem EDP(0) and the strong duality relation holds.

Now suppose that  $k_* > 0$ . Notice that in this case we have found the matrices

$$U_k^0, W_k^0, D_k^0, \quad k = 1, \dots, k_* - 1; \quad W_0 = \mathbb{O}_p, \quad U_{k_*}^0 = V_{k_*}^0 (V_{k_*}^0)^\top,$$

where the matrix  $V_{k_*}^0$  was constructed using the index set  $\tilde{I}_{k_*} := I_{m(k_*)-1+1}$ . Taking into account equalities (29) with  $k = k_*$ , it is easy to show that the optimality relations (34) can be rewritten in the form

$$\sum_{i \in I} \gamma(i) (\tau(i))^\top A_j \tau(i) + \sum_{i \in \tilde{I}_{k_*}} (\hat{\lambda}^{k_*}(i))^\top A_j \tau(i) = c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (35)$$

$$(\tau(i))^\top \mathcal{A}(x^0) \tau(i) = 0, \quad i \in I; \quad (\hat{\lambda}^{k_*}(i))^\top \mathcal{A}(x^0) \tau(i) = 0, \quad i \in \tilde{I}_{k_*} := I_{m(k_*-1)+1}. \quad (36)$$

Let us set

$$V^0 := \left( \tau(i) \sqrt{\gamma(i)}, \quad i \in I \right), \quad L_{k_*}^0 := \left( \frac{\hat{\lambda}^{k_*}(i)}{\sqrt{\gamma(i)}}, \quad i \in \tilde{I}_{k_*} \right), \quad (37)$$

$$U^0 := V^0 (V^0)^\top, \quad W_{k_*}^0 := L_{k_*}^0 (L_{k_*}^0)^\top, \quad D_{m_*}^0 := L_{m_*}^0 (L_{m_*}^0)^\top.$$

Then, equalities (35) take the form

$$(U^0 + W_{k_*}^0) \bullet A_j = c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (38)$$

and relations (36) imply

$$(U^0 + W_{k_*}^0) \bullet \mathcal{A}(x^0) = 0. \quad (39)$$

It follows from (32) and (38) that the constructed set of matrices (27) is a feasible solution of the problem  $\text{EDP}(k_*)$ , where  $0 < k_* \leq \min\{n, p\}$ . Taking into account (38) and (39), we obtain

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^0 = (U^0 + W_{k_*}^0) \bullet \mathcal{A}(x^0) - (U^0 + W_{k_*}^0) \bullet A_0 = -(U^0 + W_{k_*}^0) \bullet A_0.$$

It follows from these relations and inequality (19) that the constructed set of matrices (27) is an optimal solution of the problem  $\text{EDP}(k_*)$ , and the strong duality relation holds. The theorem is proved.

The dual problem  $\text{EDP}(k_*)$  is explicit and similar to the dual problem, which was obtained on the base of the FRA in [10]. There is only one difference in the formulations of these two problems, namely, in the dual problem in [10], all matrices  $D_m$  are equal to the identity matrix. Notice that the dual problem  $\text{EDP}(k_*)$  is more general than the dual one in [10] since it is evident that any feasible solution of the dual problem from [10] is feasible for  $\text{EDP}(k_*)$  as well.

In this paper, the dual problem  $\text{EDP}(k_*)$  was obtained, using the concept of immobile indices and, as result, we have relations (31), (33), and (37), which provide us with additional information about matrices  $U_m, W_m, D_m, m = 1, \dots, k_*$ ;  $U$  that form a feasible solution of this dual problem and illustrate how these matrices can be expressed via immobile indices. This information can be used for constructing new and possibly less complex forms of dual SDP problems.

## Conclusion

The main contribution of the paper consists of derivation of new theoretical results and algorithmic procedure for regularisation of the linear SDP problems, which permits to obtain new explicit dual formulations satisfying the strong duality property. This regularisation is based on the properties of immobile indices and is more constructive than the previously suggested in [6–8] procedures based on the FRA.

The results of the paper justify the fact that the concept of immobile indices plays an important role in the study of optimisation problems not satisfying regularity conditions and can be used for other classes of optimisation problems.

## References

1. Wolkowicz H, Saigal R, Vandenberghe L, editors. *Handbook of semidefinite programming. Theory, algorithms, and applications*. New York: Springer; 2000. 654 p. (International Series in Operations Research & Management Science; volume 27). DOI: 10.1007/978-1-4615-4381-7.
2. Anjos MF, Lasserre JB, editors. *Handbook of semidefinite, conic and polynomial optimization*. New York: Springer; 2012. 138 p. (International Series in Operational Research & Management Science; volume 166). DOI: 10.1007/978-1-4614-0769-0.

3. Kortanek KO, Zhang Q. Perfect duality in semi-infinite and semidefinite programming. *Mathematical Programming*. 2001; 91(1):127–144. DOI: 10.1007/s101070100232.
4. Li SJ, Yang XQ, Teo KL. Duality for semidefinite and semi-infinite programming. *Optimization*. 2003;52:507–528. DOI: 10.1080/02331930310001611484.
5. Solodov MV. Constraint qualifications. In: Cochran JJ, Cox LA, Keskinocak P, Kharoufeh JP, Smith JC, editors. *Wiley encyclopedia of operations research and management science*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2010. DOI: 10.1002/9780470400531.eorms0978.
6. Ramana MV, Tunçel L, Wolkowicz H. Strong duality for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*. 1997; 7(3):641–662. DOI: 10.1137/S1052623495288350.
7. Tunçel L, Wolkowicz H. Strong duality and minimal representations for cone optimization. *Computational Optimization and Applications*. 2012;53(2):619–648. DOI: 10.1007/s10589-012-9480-0.
8. Waki H, Muramatsu M. Facial reduction algorithms for conic optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2013;158(1):188–215. DOI: 10.1007/s10957-012-0219-y.
9. Drusvyatskiy D, Wolkowicz H. The many faces of degeneracy in conic optimization. *Foundations and Trends in Optimization*. 2017;3(2):77–170. DOI: 10.1561/2400000011.
10. Ramana MV. An exact duality theory for semidefinite programming and its complexity implications. *Mathematical Programming. Series A and B*. 1997;77(1):129–162. DOI: 10.1007/BF02614433.
11. Kostyukova OI, Tchemisova TV. Optimality conditions for convex semi-infinite programming problems with finitely representable compact index sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2017;175(1):76–103. DOI: 10.1007/s10957-017-1150-z.
12. Kostyukova OI, Tchemisova TV. Optimality criteria without constraint qualification for linear semidefinite problems. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012;182(2):126–143. DOI: 10.1007/s10958-012-0734-2.
13. Kostyukova OI, Tchemisova TV, Dudina OS. Immobile indices and CQ-free optimality criteria for linear copositive programming problems. *Set-Valued and Variational Analysis*. 2020;28:89–107. DOI: 10.1007/s11228-019-00527-y.
14. Levin VL. Application of E. Helly's theorem to convex programming, problems of best approximation and related questions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 1969;8(2):235–247. DOI: 10.1070/SM1969v008n02ABEH001118.

Received by editorial board 06.10.2020.

---

---

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

---

## PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

---

---

УДК 519.254

### ОБ ОБНАРУЖЕНИИ ВЫБРОСОВ С ПОМОЩЬЮ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

М. А. ЧЕПУЛИС<sup>1)</sup>, Г. Л. ШЕВЛЯКОВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
ул. Политехническая, 29, 195251, г. Санкт-Петербург, Россия

Рассматриваются алгоритмы, основанные на использовании неравенства Чебышева. Эти алгоритмы сравниваются с такими классическими методами, как боксплот Тьюки, правило  $N$ -сигм и его робастные модификации с  $MAD$ - и  $FQ$ -оценками масштаба. Для настройки алгоритмов используется процедура выбора параметров на основе полного знания модели распределения данных. Строятся области субоптимальных параметров при неполном знании модели засорения. Показывается, что непосредственное применение неравенства Чебышева приводит к классическому правилу  $N$ -сигм. При использовании неклассического неравенства Чебышева получается робастное правило отбраковки, которое зачастую не уступает, а иногда и превосходит прочие рассматриваемые алгоритмы.

**Ключевые слова:** аномалия; обнаружение выбросов; неравенство Чебышева; робастность.

**Благодарность.** Это исследование частично поддержано грантом РФФИ № 18-29-03250.

---

#### Образец цитирования:

Чепулис МА, Шевляков ГЛ. Об обнаружении выбросов с помощью неравенства Чебышева. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;3:28–35 (на англ.).  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-28-35>

#### For citation:

Chepulis MA, [Shevlyakov GL]. On outlier detection with the Chebyshev type inequalities. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:28–35.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-28-35>

---

#### Авторы:

**Михаил Артемович Чепулис** – магистрант высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Института прикладной математики и механики. Научный руководитель – Г. Л. Шевляков.

**Георгий Леонидович Шевляков** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Института прикладной математики и механики.

#### Authors:

**Michael A. Chepulis**, master's degree student at the department of applied mathematics and mechanics, high school of applied mathematics and computational physics.

[michael.chepulis@yandex.ru](mailto:michael.chepulis@yandex.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-7340-9323>

**Georgy L. Shevlyakov**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of applied mathematics and mechanics, high school of applied mathematics and computational physics.

[georgy.shevlyakov@phmf.spbstu.ru](mailto:georgy.shevlyakov@phmf.spbstu.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-7559-5633>

---

## ON OUTLIER DETECTION WITH THE CHEBYSHEV TYPE INEQUALITIES

M. A. CHEPULIS<sup>a</sup>, G. L. SHEVLYAKOV<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,  
29 Polytechnicheskaya Street, Saint Petersburg 195251, Russia  
Corresponding author: M. A. Chepulis (michael.chepulis@yandex.ru)

This work considers algorithms of outlier detection based on the Chebyshev inequality. It compares these algorithms with such classical methods as Tukey's boxplot, the  $N$ -sigma rule and its robust modifications based on  $MAD$  and  $FQ$  scale estimates. To adjust the parameters of the algorithms, a selection procedure is proposed based on the complete knowledge of the data distribution model. Areas of suboptimal parameters are also determined in case of incomplete knowledge of the distribution model. It is concluded that the direct use of the Chebyshev inequality implies the classical  $N$ -sigma rule. With the non-classical Chebyshev inequality, a robust outlier detection method is obtained, which slightly outperforms other considered algorithms.

**Keywords:** anomaly; outlier detection; Chebyshev inequality; robustness.

**Acknowledgements.** This research is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (number of grant 18-29-03250).

The problem of outlier detection is one of the oldest in statistics. However, despite the large number of publications on this topic, there is no general method for solving this problem in mathematical statistics. In this work, we suggest one more novel method of outlier detection, in this case based on the classical Chebyshev inequality [1].

This method performs quite well in the processing of data from laser ranging of the Moon [2]. Therefore, it seems possible to effectively apply it to the classical problem of one-dimensional outlier detection. In [2], this method is proposed for data of a specific structure when the data points are two-dimensional (the mean and its standard error), and it is impossible to apply it to a one-dimensional problem in its original form. Thus, it is required to adapt it for such data.

The aim of the work is to develop an algorithm based on the Chebyshev inequality for one-dimensional data and compare its performance with such classical methods as the  $N$ -sigma rule, its robust modifications based on the highly robust median absolute deviation ( $MAD$ ) and the fast  $Qn$ -scale ( $FQ$ ) estimates of scale [3], Tukey's boxplot at the standard normal distribution with its «shift» and «scale» contaminated versions and at the Cauchy distribution.

As a rule, according to the Neyman – Pearson approach to outlier detection, the performance evaluation of outlier detection is associated with the power of the detection rule and the probability of its false alarm. However, it is difficult to keep these both parameters stable simultaneously in Monte Carlo studies, especially the small value of the false alarm probability. Therefore, the  $H$ -measure proposed in [4] is chosen as a comparison criterion, which naturally combines the power of detection and the probability of a false alarm.

### The Chebyshev inequality

**The classical Chebyshev inequality.** The classical Chebyshev inequality [1] estimates the probability of deviation of a random variable from its mean by a certain value through the moment characteristics of a distribution.

For a random variable  $X$  from an arbitrary distribution with the known mean  $\mu$  and standard deviation  $\sigma$ , the Chebyshev inequality has the form

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$

where  $\varepsilon$  is an arbitrary positive number.

Based on this estimate with  $\varepsilon = \lambda\sigma$ , a confidence interval for a random variable  $X$  is constructed:

$$\Delta(\lambda) = (\mu - \lambda\sigma, \mu + \lambda\sigma).$$

The observations lying within this confidence interval are declared regular, and outside it as outliers. However, in cases where the distribution parameters are unknown, we estimate the mean and standard deviation by the sample mean and square mean deviation, and thus we arrive at the classical  $N$ -sigma rule.

### Robust version of the Chebyshev inequality

Now we use another probability metrics in the Chebyshev inequality derivation scheme:

$$D_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu|^p f(x) dx \geq \int_{|x - \mu| \geq \varepsilon} |x - \mu|^p f(x) dx \geq \varepsilon^p \int_{|x - \mu| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^p P\{|x - \mu| \geq \varepsilon\}.$$

The sought probability is of the form

$$P\{|x - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D_p}{\varepsilon^p}.$$

For  $p = 2$ , we get the classical Chebyshev inequality. For  $p = 1$ , the distance  $D_1$  in the inequality is the mean absolute deviation. Here, the median is a natural estimate of location as it is the solution minimising the mean absolute deviation. The obtained outlier detection rule is of the same structure as in the classical case. It is worth noting that the median and the mean absolute value are robust estimates of location and scale, respectively.

### H-measure of performance evaluation

In the case of research on model data in the form of a mixture of two distributions, we will call regular observations from  $F_0$  or the «main» distribution, and anomalous from  $F_1$

$$F = (1 - \alpha)F_0(x) + \alpha F_1(x),$$

where  $\alpha$  is the fraction of contamination. Here, we identify the concepts of anomalous value and outlier.

The problem of outlier detection can be reduced to the problem of binary classification, when it is necessary to determine which of the two distributions the observation belongs to: regular data (hypothesis  $H_0$ ) or anomalous (hypothesis  $H_1$ ).

In order to compare algorithms with each other, you need to select the comparison criteria. The power of the criterion ( $P_D$ ) and the probability of the false alarm ( $P_F$ ) are classical for statistics

$$P_D = \frac{\text{TN}}{\text{total number of outliers}},$$

$$P_F = \frac{\text{FN}}{\text{total number of regular points}},$$

where TN (true negative) is the number of outliers that have been classified as outliers; FN (false negative) is the number of regular points that have been classified as outliers.

To assess the quality of the classification results, we use the  $H$ -measure (the harmonic mean between  $P_D$  and  $1 - P_F$ ) introduced in [4] and calculated by the following formula:

$$H(t) = \frac{2P_D(t)(1 - P_F(t))}{P_D(t) + 1 - P_F(t)},$$

where  $t$  is a parameter of an outlier detection algorithm.

The higher is the value of the  $H$ -measure, the better the quality of the classification. One can also calculate the parameter at which the maximum of the  $H$ -measure is reached:

$$t^* = \arg \max_t H(t).$$

### Comparison study

The following methods are compared:

- $N$ -sigma rule [4];
- robust  $N$ -sigma rule ( $MAD$  estimate of scale) [4];
- robust  $N$ -sigma rule ( $FQ$  estimate of scale) [4];
- Tukey's boxplot [5].

The following distributions are considered:

- mixture of normal («shift»):  $(1 - \alpha)N(x, 0, 1) + \alpha N(x, k, 1)$ ;
- mixture of normal («scale»):  $(1 - \alpha)N(x, 0, 1) + \alpha N(x, 0, k)$ ;
- mixture of normal and Cauchy:  $(1 - \alpha)N(x, 0, 1) + \alpha C(x, 0, 1)$ .

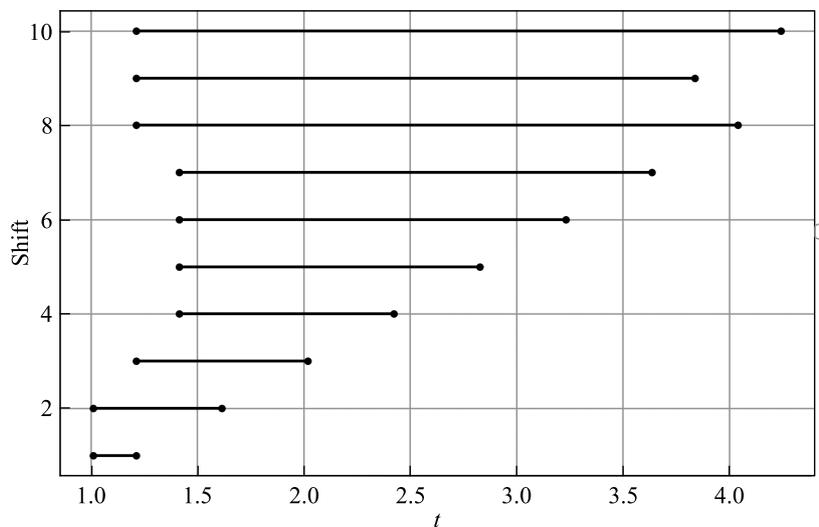


Fig. 1. Suboptimal areas with «shift» contamination

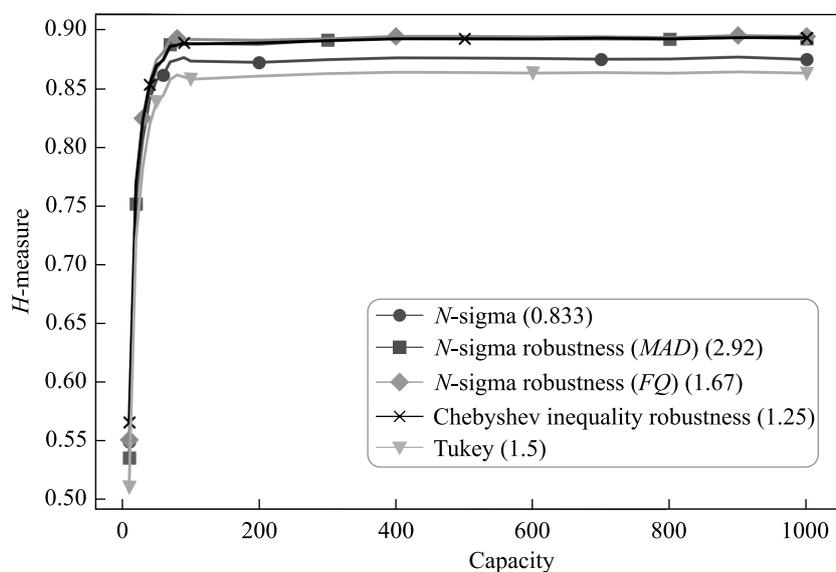


Fig. 2. Dependence  $H$ -measure on the sample size with «scale» ( $k = 10$ ) contamination

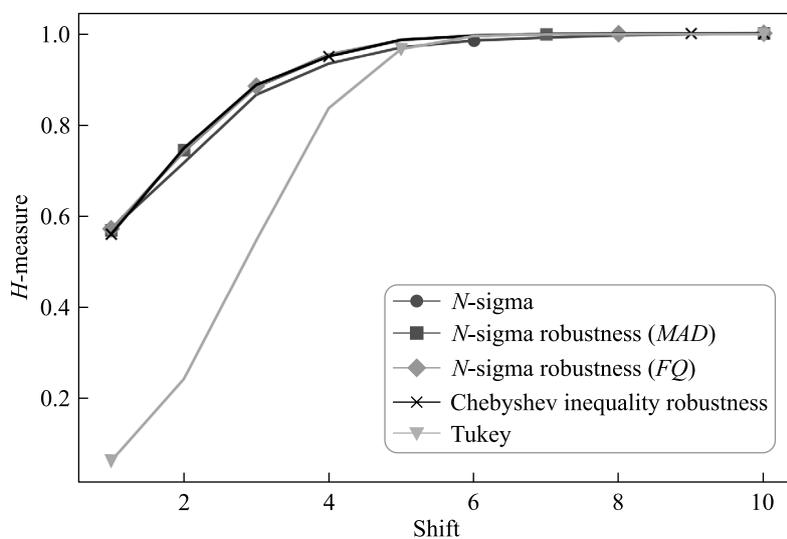


Fig. 3. Dependence  $H$ -measure on the values of «shift»

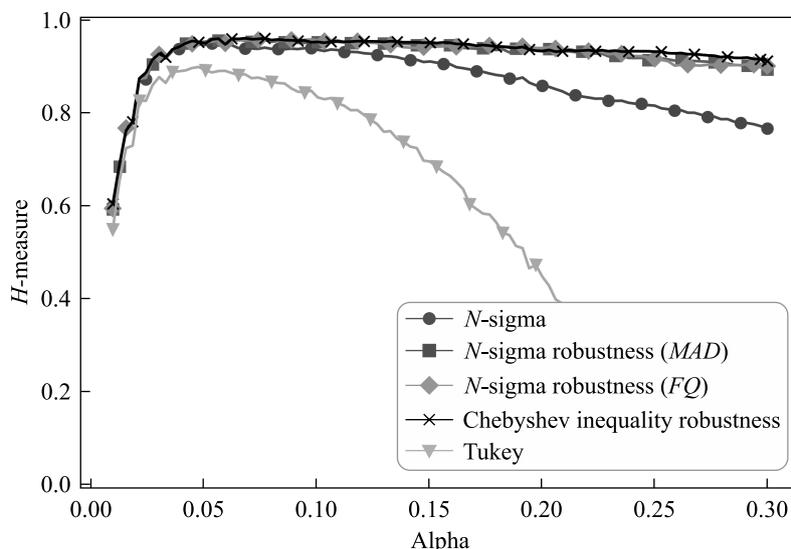


Fig. 4. Dependence  $H$ -measure on the contamination fraction with «shift» ( $k = 4$ ) contamination

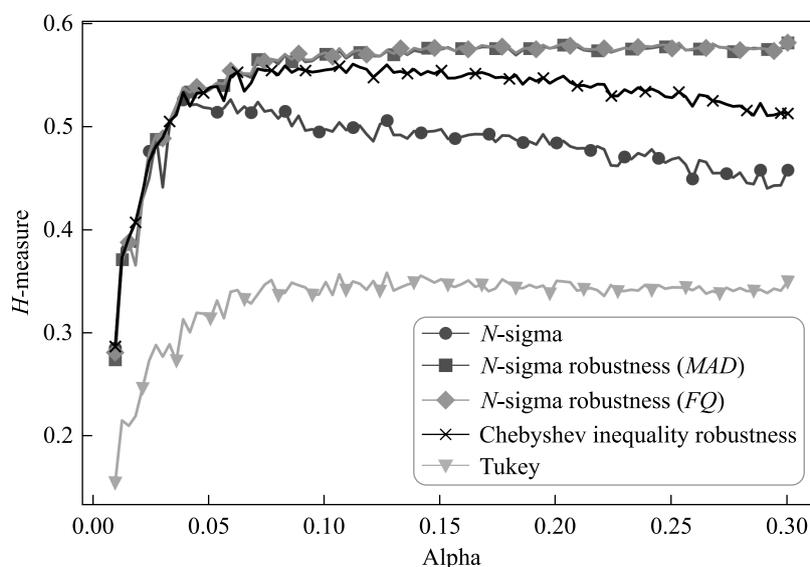


Fig. 5. Dependence  $H$ -measure on the contamination fraction with Cauchy contamination

The main interest is the dependence of the quality of detection on such parameters of contamination as the «shift», «scale» and percentage of contamination.

The quality of outlier detection strongly depends on the parameters of the algorithms, for example,  $N$  in the  $N$ -sigma rule. We adjust the parameters by iterating over the grid, choosing the parameter with the maximum  $H$ -measure.

In order to reduce the influence of randomness on the processes under consideration, the study will be carried out by the Monte Carlo method, averaging the values over all repetitions.

**Algorithm**

1. The distribution and parameters of the studied algorithms are selected.
2. For each cycle of repetition of the Monte Carlo method:
  - a) a sample is generated with automatically marked «regular» and «anomalous» points;
  - b) outlier detection methods are applied to the sample;
  - c) the information is collected about the results of this application.
3. Further, the data for all repetition cycles are averaged and analysed.

### Choice of algorithm parameters

Based on the full knowledge of the data model, we calculate the value of the  $H$ -measure for various parameters of algorithms on a certain distribution: the optimal one we take is the argument for which the  $H$ -measure is maximal.

Next, instead of choosing the parameter according to the maximum of the  $H$ -measure, we consider all parameters that differ from the optimal value by no more than 5 % (the larger the percentage, the wider the area, and the lower the detection quality). In this case, we get a certain area of suboptimal parameters. Such an area can be calculated for each distribution of interest, and the parameter of the algorithm can be chosen so that it falls into the maximum number of areas.

For example, fig. 1 exhibits the regions of suboptimal parameters for the robust modification of the method based on the Chebyshev inequality for contamination of the «shift» type:  $F(x) = 0,9N(x, 0, 1) + 0,1N(x, k, 1)$ .

Appendix shows the areas of suboptimal parameters of the considered methods for some contamination models.

### Performance evaluation: results

Dependence on the sample size. The statistics computed in each method can be highly dependent on the sample size. As a rule, with its growth, the value of statistics stabilises. Consequently, the detection quality is also stabilised. This is observed in fig. 2.

With an increase in the sample size, the performance of the method based on the Chebyshev inequality does not deteriorate and stabilises at a certain level. When dealing with the contamination types of «shift» and «scale», it shows results similar to the robust modifications of  $N$ -sigma. On contamination with the Cauchy distribution, it works much better than the classical  $N$ -sigma method and Tukey's boxplot, but is slightly inferior to the robust modifications of the  $N$ -sigma rule.

### Dependence on the values of shift and scale

All of the above methods behave in almost the same way. The quality of detection monotonically increases and with a shift of about 5 it practically reaches 1. The classical  $N$ -sigma method is slightly inferior in quality to the robust method based on the Chebyshev inequality in outlier detection (see fig. 3).

When dealing with the contamination of the «scale» type, the situation is similar to the contamination of the «shift» type: the algorithm based on the Chebyshev inequality gives similar results as the classical  $N$ -sigma rule and its robust modifications, which are much better than the results of Tukey's boxplot.

### Dependence on the contamination fraction

It can be seen in fig. 4 that in case of contamination of the «shift» type, the Tukey and  $N$ -sigma methods are less resistant to an increase in the contamination fraction than the robust modification of the Chebyshev inequality, the rejection quality of which fluctuates at the same level as the robust  $N$ -sigma modifications. A similar situation occurs with contamination of the «scale» type.

Slightly different behaviour can be seen in contamination of the Cauchy distribution type (see fig. 5). The method based on the Chebyshev inequality lags behind the robust modifications of the  $N$ -sigma rule in the quality of detection, but it still shows results significantly better than the boxplot method or the classical  $N$ -sigma rule.

### Conclusion

1. Based on the classical Chebyshev inequality, an outlier detection algorithm is obtained, which, according to its classification rule, coincided with the  $N$ -sigma rule. Using the non-classical robust version of the Chebyshev inequality with  $p = 1$ , an outlier detection method is proposed, which proved to be very effective.

2. Based on the results of the comparative analysis, one can draw conclusions about the effectiveness of the method based on the Chebyshev inequality. It manifests itself as a fairly robust algorithm. On contamination such as «shift» and «scale», it is not inferior, and sometimes even outperforms the robust modifications of the  $N$ -sigma method. For all considered samples, it works better than Tukey's boxplot and the classical  $N$ -sigma rule. However, when the contamination is with the Cauchy distribution, it can give slightly worse results than robust modifications of the  $N$ -sigma rule.

3. It should be noted that the computational complexity of the statistics of the mean absolute deviation used in the method based on the Chebyshev inequality is slightly lower than the computational complexity of  $MAD$  or  $FQ$  scale estimates.

4. Practical recommendations are given on the choice of algorithm parameters on certain data models.

Appendix

Table 1

Boundary of suboptimal parameters area with «shift» contamination

$k$	$N$ -sigma	$N$ -sigma robustness ( $MAD$ )	$N$ -sigma robustness ( $FQ$ )	Chebyshev inequality robustness
1	[0.606, 1.010]	[1.010, 1.414]	[0.606, 1.010]	[0.808, 1.212]
2	[0.808, 1.212]	[1.212, 2.020]	[0.808, 1.212]	[1.010, 1.616]
3	[1.010, 1.414]	[1.616, 2.828]	[1.010, 1.818]	[1.212, 2.020]
4	[1.010, 1.616]	[2.020, 3.434]	[1.212, 2.020]	[1.414, 2.424]
5	[1.010, 1.818]	[2.222, 4.444]	[1.414, 2.626]	[1.414, 2.828]
6	[1.010, 1.818]	[2.222, 5.455]	[1.414, 3.232]	[1.414, 3.232]
7	[1.010, 2.020]	[2.222, 6.667]	[1.414, 4.040]	[1.212, 3.636]
8	[1.010, 2.020]	[2.222, 8.080]	[1.414, 4.848]	[1.212, 4.040]
9	[0.808, 2.020]	[2.222, 8.889]	[1.414, 5.450]	[1.212, 4.040]
10	[0.808, 2.222]	[2.424, 10.303]	[1.414, 6.262]	[1.212, 4.444]

Note. Data distribution model:  $F(x) = 0,9N(x, 0, 1) + 0,1N(x, k, 1)$ .

Table 2

Boundary of suboptimal parameters area with «scale» contamination

$k$	$N$ -sigma	$N$ -sigma robustness ( $MAD$ )	$N$ -sigma robustness ( $FQ$ )	Chebyshev inequality robustness
1	[0.606, 0.808]	[0.808, 1.212]	[0.606, 0.808]	[0.606, 1.010]
2	[0.808, 1.010]	[1.212, 1.818]	[0.808, 1.212]	[1.010, 1.414]
3	[0.808, 1.212]	[1.212, 2.424]	[0.808, 1.414]	[1.010, 1.818]
4	[0.808, 1.212]	[1.414, 2.626]	[1.010, 1.616]	[1.010, 1.818]
5	[0.606, 1.212]	[1.616, 3.030]	[1.010, 1.818]	[1.010, 2.020]
6	[0.606, 1.212]	[1.616, 3.232]	[1.010, 2.020]	[1.010, 2.020]
7	[0.606, 1.212]	[1.818, 3.636]	[1.212, 2.222]	[1.010, 2.020]
8	[0.606, 1.212]	[1.616, 3.636]	[1.010, 2.222]	[1.010, 2.020]
9	[0.606, 1.010]	[1.818, 3.838]	[1.212, 2.222]	[1.010, 2.020]
10	[0.606, 1.010]	[1.818, 3.838]	[1.212, 2.424]	[1.010, 2.222]

Note. Data distribution model:  $F(x) = 0,9N(x, 0, 1) + 0,1N(x, 0, k)$ .

Table 3

Boundary of suboptimal parameters area with Cauchy contamination

$\alpha$	$N$ -sigma	$N$ -sigma robustness ( $MAD$ )	$N$ -sigma robustness ( $FQ$ )	Chebyshev inequality robustness
0.01	[0.606, 1.000]	[1.010, 1.616]	[0.808, 1.010]	[0.808, 1.414]
0.031	[0.606, 0.808]	[1.010, 1.616]	[0.606, 1.010]	[0.808, 1.212]
0.052	[0.606, 0.606]	[0.808, 1.616]	[0.606, 1.212]	[0.606, 0.808]
0.073	[0.404, 0.808]	[1.010, 1.616]	[0.606, 1.010]	[0.808, 1.212]
0.094	[0.404, 0.808]	[1.010, 1.818]	[0.808, 1.212]	[0.808, 1.212]
0.115	[0.404, 0.606]	[1.010, 1.616]	[0.606, 1.010]	[0.808, 1.010]
0.136	[0.404, 0.606]	[1.010, 1.818]	[0.808, 1.212]	[0.606, 1.212]
0.157	[0.404, 0.606]	[1.010, 1.818]	[0.606, 1.212]	[0.606, 1.010]
0.178	[0.404, 0.404]	[1.010, 1.818]	[0.606, 1.010]	[0.606, 1.010]
0.2	[0.404, 0.404]	[1.010, 1.616]	[0.606, 1.010]	[0.606, 1.010]

Note. Data distribution model:  $F(x) = (1 - \alpha)N(x, 0, 1) + \alpha C(x, 0, 1)$ .

### Библиографические ссылки

1. Tchebichef P. Des valeurs moyennes. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*. 1867;12:177–184.
2. Shevlyakov G, Kan M. Stream data preprocessing: outlier detection based on the Chebyshev inequality with applications. In: *Proceeding of 26<sup>th</sup> Conference of Open Innovations Association (FRUCT); 2020 April 20–24; Yaroslavl, Russia*. [S. l.]: IEEE; 2020. p. 402–407. DOI: 10.23919/FRUCT48808.2020.9087459.
3. Shevlyakov GL, Oja H. *Robust correlation: theory and applications*. [S. l.]: Wiley; 2016. 352 p. (Wiley series in probability and statistics). DOI: 10.1002/9781119264507.
4. Андрэа К. *Методы и алгоритмы разведочного анализа данных, основанные на робастных модификациях боксплотов* [диссертация]. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; 2013. 164 с.
5. Tukey JW. *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison Wesley; 1977. 711 p.

### References

1. Tchebichef P. Des valeurs moyennes. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*. 1867;12:177–184.
2. Shevlyakov G, Kan M. Stream data preprocessing: outlier detection based on the Chebyshev inequality with applications. In: *Proceeding of 26<sup>th</sup> Conference of Open Innovations Association (FRUCT); 2020 April 20–24; Yaroslavl, Russia*. [S. l.]: IEEE; 2020. p. 402–407. DOI: 10.23919/FRUCT48808.2020.9087459.
3. Shevlyakov GL, Oja H. *Robust correlation: theory and applications*. [S. l.]: Wiley; 2016. 352 p. (Wiley series in probability and statistics). DOI: 10.1002/9781119264507.
4. Andrea K. *Metody i algoritmy razvedochnogo analiza dannykh, osnovannyye na robastnykh modifikatsiyah boksplotov* [Methods and algorithms for exploratory data analysis based on robust boxplot modification] [dissertation]. Saint Petersburg: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; 2013. 164 p. Russian.
5. Tukey JW. *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison Wesley; 1977. 711 p.

Received by editorial board 28.09.2020.

УДК 519.2

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ COVID-19 В РЕСПУБЛИКЕ БЕЛАРУСЬ

Ю. С. ХАРИН<sup>1), 2)</sup>, В. А. ВОЛОШКО<sup>1), 2)</sup>,  
О. В. ДЕРНАКОВА<sup>1)</sup>, В. И. МАЛЮГИН<sup>2)</sup>, А. Ю. ХАРИН<sup>1), 2)</sup>

<sup>1)</sup>Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики БГУ,  
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается актуальная задача статистического прогнозирования динамики основных эпидемиологических показателей пандемии COVID-19 в Республике Беларусь на базе наблюдаемых временных рядов. Для решения этой задачи предлагаются пять методов: метод прогнозирования на основе «скользящих трендов»; локально-медианный метод прогнозирования; метод прогнозирования на основе дискретных временных рядов; метод прогнозирования на основе векторной эконометрической модели коррекции ошибок; метод последовательного статистического анализа. Разработаны алгоритмы вычисления точечных и интервальных прогнозов для ключевых эпидемиологических показателей. Представлены численные результаты компьютерного прогнозирования на примере Республики Беларусь.

**Ключевые слова:** прогнозирование; вероятностная модель; временной ряд; точечный прогноз; интервальный прогноз; COVID-19.

**Благодарность.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь. Авторы выражают благодарность кандидату физико-математических наук С. Н. Сталевской за разработку программы к разделу «Метод прогнозирования на основе «скользящих трендов»» данной статьи.

### Образец цитирования:

Харин ЮС, Волошко ВА, Дернакова ОВ, Малюгин ВИ, Харин АЮ. Статистическое прогнозирование динамики эпидемиологических показателей заболеваемости COVID-19 в Республике Беларусь. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020; 3:36–50.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-36-50>

### For citation:

Khariu YuS, Valoshka VA, Dernakova OV, Malugin VI, Kharin AYU. Statistical forecasting of the dynamics of epidemiological indicators for COVID-19 incidence in the Republic of Belarus. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:36–50. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-36-50>

### Авторы:

**Юрий Семенович Харин** – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; директор<sup>1)</sup>, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики<sup>2)</sup>.

**Валерий Анатольевич Волошко** – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник лаборатории математических методов защиты информации<sup>1)</sup>, доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики<sup>2)</sup>.

**Оксана Владимировна Дернакова** – младший научный сотрудник сектора компьютерного анализа данных лаборатории прикладной информатики.

**Владимир Ильич Малюгин** – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

**Алексей Юрьевич Харин** – доктор физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики<sup>2)</sup>, главный научный сотрудник лаборатории статистического анализа и моделирования<sup>1)</sup>.

### Authors:

**Yuriy S. Kharin**, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics), full professor; director<sup>a</sup> and professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science<sup>b</sup>.  
[kharin@bsu.by](mailto:kharin@bsu.by)

**Valery A. Valoshka**, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the laboratory of mathematical methods of information security<sup>a</sup> and associate professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science<sup>b</sup>.  
[valoshka@bsu.by](mailto:valoshka@bsu.by)

**Oksana V. Dernakova**, junior researcher at the sector of computer data analysis, laboratory of applied informatics.  
[dernakova@bsu.by](mailto:dernakova@bsu.by)

**Vladimir I. Malugin**, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.  
[malugin@bsu.by](mailto:malugin@bsu.by)

**Alexey Yu. Kharin**, doctor of science (physics and mathematics), docent; head of the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science<sup>b</sup>, and chief researcher at the laboratory of statistical analysis and modeling<sup>a</sup>.  
[kharinay@bsu.by](mailto:kharinay@bsu.by)

## STATISTICAL FORECASTING OF THE DYNAMICS OF EPIDEMIOLOGICAL INDICATORS FOR COVID-19 INCIDENCE IN THE REPUBLIC OF BELARUS

Yu. S. KHARIN<sup>a, b</sup>, V. A. VALOSHKA<sup>a, b</sup>,  
O. V. DERNAKOVA<sup>a</sup>, V. I. MALUGIN<sup>b</sup>, A. Yu. KHARIN<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics,  
Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

<sup>b</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: Yu. S. Kharin (kharin@bsu.by)

The paper is devoted to the urgent problem of statistical forecasting for the dynamics of the main epidemiological indicators for the COVID-19 pandemic in the Republic of Belarus based on the observed time series. To solve this problem, five methods are proposed: forecasting method based on «moving trends»; local-median forecasting method; forecasting method based on discrete time series; forecasting method based on the vector econometric error correction model; method of sequential statistical analysis. Algorithms for computation of point and interval forecasts for the main epidemiological indicators have been developed. The numerical results of computer forecasting are presented on the example of the Republic of Belarus.

**Keywords:** forecasting; probability model; time series; point forecast; interval forecast; COVID-19.

**Acknowledgements.** This research is supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus. The authors are grateful to S. N. Staleuskaya, PhD (physics and mathematics), for development of the computer program for numeric results in section «Forecasting method based on “moving trends”» of this paper.

### Введение

На данный момент имеется обширный класс математических моделей, разработанных для прогнозирования распространения заболеваний, смертности и выздоровления. Их можно классифицировать следующим образом: искусственные нейронные сети и машинное обучение; пространственно-временные авторегрессионные эпидемиологические модели; аналитические и смешанные пространственно-временные модели (SIR-модели и их аналоги); дискретные условно авторегрессионные временные ряды с длинной памятью; марковские процессы; прогнозирование на основе имитационного моделирования. Обзор существующих подходов представлен в работе [1]. Актуальной проблемой человечества является преодоление пандемий, включая COVID-19 в настоящее время [2; 3].

Прогнозирование эпидемиологических показателей в условиях пандемии характеризуется следующими особенностями: 1) стохастичностью процессов; 2) нестационарностью процессов; 3) существенной зависимостью от состояния системы здравоохранения и применяемых стратегий лечения; 4) оперативностью получения и представления прогнозов. С учетом этих особенностей в данной статье используются вероятностно-статистические модели динамики эпидемиологических процессов и методы робастного статистического прогнозирования [4–9].

### Регистрируемые статистические данные и постановка задач прогнозирования динамики эпидемиологических показателей

Введем следующие обозначения:  $t$  – дискретное время (номер дня (точнее – суток), считая от некоторого начального дня);  $T$  – длительность наблюдения до начала прогнозирования;  $\tau$  – длина интервала (горизонта) прогнозирования;  $\mathfrak{T}_T = \{T + 1, T + 2, \dots, T + \tau\}$  – временной промежуток (горизонт прогнозирования на основе  $T$  единиц наблюдения);  $\xi_t$  – зарегистрированное к моменту  $t$  число человек (с начала вспышки) с положительным анализом тестов на COVID-19 (количество выявленных зараженных COVID-19),  $\xi_t \in N$ ;  $\eta_t$  – зарегистрированное к моменту  $t$  число пациентов (с начала вспышки), выписанных с отрицательным анализом тестов, у которых ранее был подтвержден диагноз «COVID-19»,  $\eta_t \in N$ ;  $\zeta_t$  – зарегистрированное с начала вспышки количество умерших пациентов с выявленной инфекцией COVID-19,  $\zeta_t \in N$ ;  $\mu_t = \xi_t - (\eta_t + \zeta_t)$  – зарегистрированное число зараженных на момент  $t$ ;  $\nu_t = \xi_t - \xi_{t-1}$  – зарегистрированное число новых зараженных в день  $t$  ( $\xi_0 ::= 0$ ),  $\nu_t \in N_0 = N \cup \{0\}$ ;  $\alpha_t = \frac{\nu_t}{\eta_t - \eta_{t-1}}$  – отношение числа вновь инфицированных к числу выписанных в день  $t$  (показатель

нагрузки лечебных учреждений);  $\beta_t = \frac{\mu_t}{\eta_t}$  – отношение числа зараженных на момент  $t$  к числу всех выздоровевших.

Зарегистрированные к моменту прогнозирования  $T$  статистические данные представляют собой временные ряды:

$$\Xi_1^T = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_T\}, Z_1^T = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_T\}, H_1^T = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_T\}, N_1^T = \{v_1, v_2, \dots, v_T\}. \quad (1)$$

По построению среди всех указанных временных рядов функционально независимы только три ряда:  $\Xi_1^T, H_1^T, Z_1^T$ , а временные ряды  $N_1^T, \{\mu_t\}, \{\alpha_t\}, \{\beta_t\}$  функционально выражаются через них. Отметим, что  $\xi_t, \eta_t, \zeta_t$  представляют собой накопленные с начального момента времени величины, поэтому временные ряды  $\Xi_1^T, H_1^T, Z_1^T$  являются неубывающими относительно времени<sup>1</sup>.

Задача заключается в построении точечных и интервальных прогнозов для временных рядов (1) и связанных с ними на  $1, 2, \dots, \tau$  шагов вперед следующего вида.

1. Точечные прогнозы:

$$\begin{aligned} \Xi_{T+1}^{T+\tau} &= \{\hat{\xi}_{T+1}, \dots, \hat{\xi}_{T+\tau}\}, Z_{T+1}^{T+\tau} = \{\hat{\zeta}_{T+1}, \dots, \hat{\zeta}_{T+\tau}\}, \\ H_{T+1}^{T+\tau} &= \{\hat{\eta}_{T+1}, \dots, \hat{\eta}_{T+\tau}\}, N_{T+1}^{T+\tau} = \{\hat{v}_{T+1}, \dots, \hat{v}_{T+\tau}\}. \end{aligned}$$

2. Интервальные прогнозы:

$$\begin{aligned} \xi_{T+1} &\in (\xi_{T+1}^-, \xi_{T+1}^+), \dots, \xi_{T+\tau} \in (\xi_{T+\tau}^-, \xi_{T+\tau}^+), \eta_{T+1} \in (\eta_{T+1}^-, \eta_{T+1}^+), \dots, \eta_{T+\tau} \in (\eta_{T+\tau}^-, \eta_{T+\tau}^+), \\ \zeta_{T+1} &\in (\zeta_{T+1}^-, \zeta_{T+1}^+), \dots, \zeta_{T+\tau} \in (\zeta_{T+\tau}^-, \zeta_{T+\tau}^+), v_{T+1} \in (v_{T+1}^-, v_{T+1}^+), \dots, v_{T+\tau} \in (v_{T+\tau}^-, v_{T+\tau}^+), \end{aligned}$$

где знаками  $-/+$  в верхнем индексе помечены нижняя и верхняя границы прогнозного интервала соответственно.

### Метод прогнозирования на основе «скользящих трендов»

Известно [1], что распространение инфекций описывается экспоненциальным ростом числа зараженных  $O(\rho^t)$ , где  $\rho \geq 0$  – среднее число человек, заражаемых больным в течение суток (при  $\rho > 1$  инфекция экспоненциально растет). В связи с этим процессы  $\xi_t, \eta_t, \zeta_t$  на начальном этапе эпидемии целесообразно рассматривать в логарифмической шкале.

Опишем предлагаемый метод прогнозирования на примере задачи прогнозирования временного ряда  $\{\xi_t\}$  на начальном этапе эпидемии. Введем в рассмотрение этот ряд в логарифмической шкале:

$$x_t = \ln \xi_t \in R, t \in N.$$

В связи с тем что инфекция происходит в управляемом обществе, где правительство предпринимает шаги по подавлению эпидемии, параметр  $\rho$  оказывается зависящим от времени:  $\rho = \rho(t)$  (данная функция, к сожалению, неизвестна и, по-видимому, сложно поддается статистической оценке). По этой причине модель стохастической зависимости  $x_t$  от  $t$  меняется с течением времени. Учитывая отмеченные особенности, будем строить математическую модель  $x_t$  для «скользящего фрагмента» временного ряда  $X_1^T = (x_1, \dots, x_T) \in R^T$ .

Введем обозначения:  $2 < s < T$  – длина «скользящего фрагмента»;  $X_{t-s+1}^t = (x_{t-s+1}, x_{t-s+2}, \dots, x_t) \in R^s$  – «скользящий фрагмент» к моменту времени  $t, t = s + 1, \dots, T$ . Будем предполагать, что длина  $s$  «скользящего фрагмента» достаточно мала и на этом фрагменте справедлива трендовая модель

$$x_i = \theta_0 + \theta_1 i + u_i, \quad t - s + 1 \leq i \leq t, \quad (2)$$

являющаяся простой линейной регрессией, где  $\theta_0, \theta_1 \in R$  – параметры регрессии,  $\theta_1$  – угол наклона тренда к оси времени, характеризующий скорость экспоненциального (если  $x_t = \ln \xi_t$ ) или линейного

<sup>1</sup>В настоящем исследовании статистические данные по указанным переменным получены с сайтов Министерства здравоохранения Республики Беларусь (<http://minzdrav.gov.by>), Университета Джона Хопкинса (<https://www.jhu.edu>), Worldometer (<https://www.worldometers.info/coronavirus/#countries>). В виде таблиц эти данные можно скачать по ссылке: <https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19>.

(если  $x_t = \xi_t$ ) роста;  $u_t \in R$  – случайная погрешность с нулевым математическим ожиданием  $E\{u_t\} = 0$  и конечной дисперсией  $\sigma^2 = D\{u_t\}$ .

По выборке  $X_{t-s+1}^t$ , используя стандартное статистическое программное обеспечение (например, язык R и его библиотеки), вычислим следующие статистики:  $\bar{x}(t) = \sum_{i=s+1}^t \frac{x_i}{s}$  – выборочное среднее;

$\hat{\theta}_0^{(t)}, \hat{\theta}_1^{(t)}$  – МНК-оценки параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  соответственно;  $r_{\min}^2(t) = \sum_{i=t-s+1}^t (x_i - \hat{\theta}_0^{(t)} - \hat{\theta}_1^{(t)}i)^2$  – остаточная сумма квадратов;

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{r_{\min}^2(t)}{s-2} \quad (3)$$

– несмещенная оценка дисперсии;  $R^2(t) = \frac{\sum_{i=s+1}^t (\hat{\theta}_0^{(t)} - \hat{\theta}_1^{(t)}i - \bar{x}(t))^2}{\sum_{i=s+1}^t (x_i - \bar{x}(t))^2}$  – коэффициент детерминации модели.

Чем ближе  $R^2(t)$  к единице, тем адекватнее модель (2). Это позволяет выбрать длину фрагмента  $s$  из условия заданной адекватности модели:

$$R^2(t) \geq 0,9.$$

Точечные оценки для будущих значений  $x_{T+1}, \dots, x_{T+\tau}$  с учетом (2) имеют вид

$$\hat{x}_{T+j} = \hat{\theta}_0^{(T)} + \hat{\theta}_1^{(T)}(T+j), \quad j=1, 2, \dots, \tau, \quad (4)$$

и основываются на оценках параметров  $(\theta_0, \theta_1)$  по «скользящему фрагменту»  $X_{T-s+1}^T$ .

Построим теперь интервальные прогнозы для будущих неизвестных значений  $x_{T+1}, \dots, x_{T+\tau}$ . Примем следующие обозначения:  $1 - \varepsilon$  – доверительная вероятность интервальных прогнозов, где  $\varepsilon \in (0; 1)$  – задаваемый доверительный уровень (обычно  $\varepsilon \in \{0,05; 0,10\}$ );  $t_{s-2}(1 - \varepsilon) > 0$  – квантиль

уровня  $1 - \varepsilon$  стандартного  $t$ -распределения Стьюдента с  $s - 2$  степенями свободы [10];  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ::=$

$::= \begin{pmatrix} \sum_{i=T-s+1}^T 1 & \sum_{i=T-s+1}^T i \\ \sum_{i=T-s+1}^T i & \sum_{i=T-s+1}^T i^2 \end{pmatrix}$  – заданная квадратная  $(2 \times 2)$ -матрица, которая имеет следующий явный вид:

$$A = \begin{pmatrix} s & \frac{s(2T-s+1)}{2} \\ \frac{s(2T-s+1)}{2} & \frac{T(T+1)(2T+1) - (T-s)(T-s+1)(2T-2s+1)}{6} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

С помощью (5) можно получить явный вид обратной матрицы  $A^{-1} = (\bar{a}_{ij})$ , который здесь не приводится из-за громоздкости.

**Теорема 1.** Если имеет место локальная трендовая модель (2) для фрагмента  $X_{T-s+1}^T \in R$  с независимыми случайными погрешностями  $u_{T-s+1}, \dots, u_{T+\tau}$ , одинаково распределенными по нормальному закону

$$\mathcal{L}\{u_t\} = \mathcal{N}_1(0, \sigma^2) \quad (6)$$

с неизвестной дисперсией  $\sigma^2$ , то  $(1 - \varepsilon) \cdot 100$  %-интервальные прогнозы для  $x_{T+1}, \dots, x_{T+\tau}$  имеют следующий вид: с вероятностью  $1 - \varepsilon$

$$x_{T+j} \in (x_{T+j}^-, x_{T+j}^+), \quad j=1, \dots, \tau, \quad (7)$$

где доверительные границы вычисляются по формулам

$$x_{T+j}^{\pm} = \hat{x}_{T+j} \pm t_{s-2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \hat{\sigma}(T) \sqrt{1 + \bar{a}_{11} + 2\bar{a}_{12}(T+j) + \bar{a}_{22}(T+j)^2}, \quad (8)$$

$\hat{x}_{T+j}$  определяется выражением (4), а  $\hat{\sigma}(T)$  – формулой (3).

Доказательство. Для построения  $(1 - \varepsilon) \cdot 100$  %-доверительного интервала для  $x_{T+j}$  при неизвестной дисперсии  $\sigma^2$  применим метод стьюдентизации [11]. Для этого введем вспомогательные случайные величины

$$\begin{aligned} \lambda_1(j) &= \frac{\hat{x}_{T+j} - x_{T+j}}{\sqrt{1 + \bar{a}_{11} + 2\bar{a}_{12}(T+j) + \bar{a}_{22}(T+j)^2}}, \\ \lambda_2(j) &= \frac{r_{\min}^2(T)}{\sigma^2} = \frac{(s-2)\hat{\sigma}^2(T)}{\sigma^2}, \\ \lambda(j) &= \frac{\lambda_1(j)}{\sqrt{\lambda_2(j)/(s-2)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно [11]  $\lambda_1(j)$ ,  $\lambda_2(j)$  независимы, причем  $\lambda_2(j)$  имеет стандартное  $\chi^2$ -распределение с  $s - 2$  степенями свободы:

$$\mathcal{L}\{\lambda_2(j)\} = \chi_{s-2}^2. \quad (10)$$

В силу (2), (4), (6) и теоремы о линейности МНК-оценок  $\hat{\theta}_0^{(T)}$ ,  $\hat{\theta}_1^{(T)}$  [11] получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\hat{x}_{T+j} - x_{T+j}\} &= \mathcal{N}(0, b^2(j)), \\ b^2(j) &= D\{\hat{x}_{T+j} - x_{T+j}\} = D\{\hat{\theta}_0^{(T)} + \hat{\theta}_1^{(T)}(T+j)\} + D\{x_{T+j}\} = \\ &= D\{\hat{\theta}_0^{(T)}\} + 2(T+j)Cov\{\hat{\theta}_0^{(T)}, \hat{\theta}_1^{(T)}\} + (T+j)^2 D\{\hat{\theta}_1^{(T)}\} + \sigma^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно работе [11] и матрице (5) ковариационная матрица оценок  $\hat{\theta}_0^{(T)}$ ,  $\hat{\theta}_1^{(T)}$  равна

$$Cov\left\{\begin{pmatrix} \hat{\theta}_0^{(T)} \\ \hat{\theta}_1^{(T)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\theta}_0^{(T)} \\ \hat{\theta}_1^{(T)} \end{pmatrix}\right\} = \sigma^2 \cdot A^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (11), получаем

$$b^2(j) = \sigma^2 \left(1 + \bar{a}_{11} + 2\bar{a}_{12}(T+j) + \bar{a}_{22}(T+j)^2\right). \quad (12)$$

Из (11), (12) заключаем, что

$$\mathcal{L}\{\lambda_1(j)\} = \mathcal{N}_1(0, 1).$$

Тогда из (9), (10) и (12) следует, что случайная величина  $\lambda(j)$  имеет стандартное  $t$ -распределение Стьюдента с  $s - 2$  степенями свободы. Поэтому

$$P\left\{-t_{s-2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \lambda(j) < +t_{s-2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = 1 - \varepsilon. \quad (13)$$

Подставляя в (13) вместо члена  $\lambda(j)$  его выражение из (9) и разрешая двустороннее неравенство относительно прогнозируемой случайной величины  $x_{T+j}$ , приходим к (7), (8).

Для иллюстрации на рис. 1 представлены результаты прогнозирования показателя  $v_t$  для  $s = 12$ .

### Локально-медианный метод прогнозирования

Локально-медианный метод прогнозирования разработан в монографии [12] как робастный метод прогнозирования временных рядов [13–15].

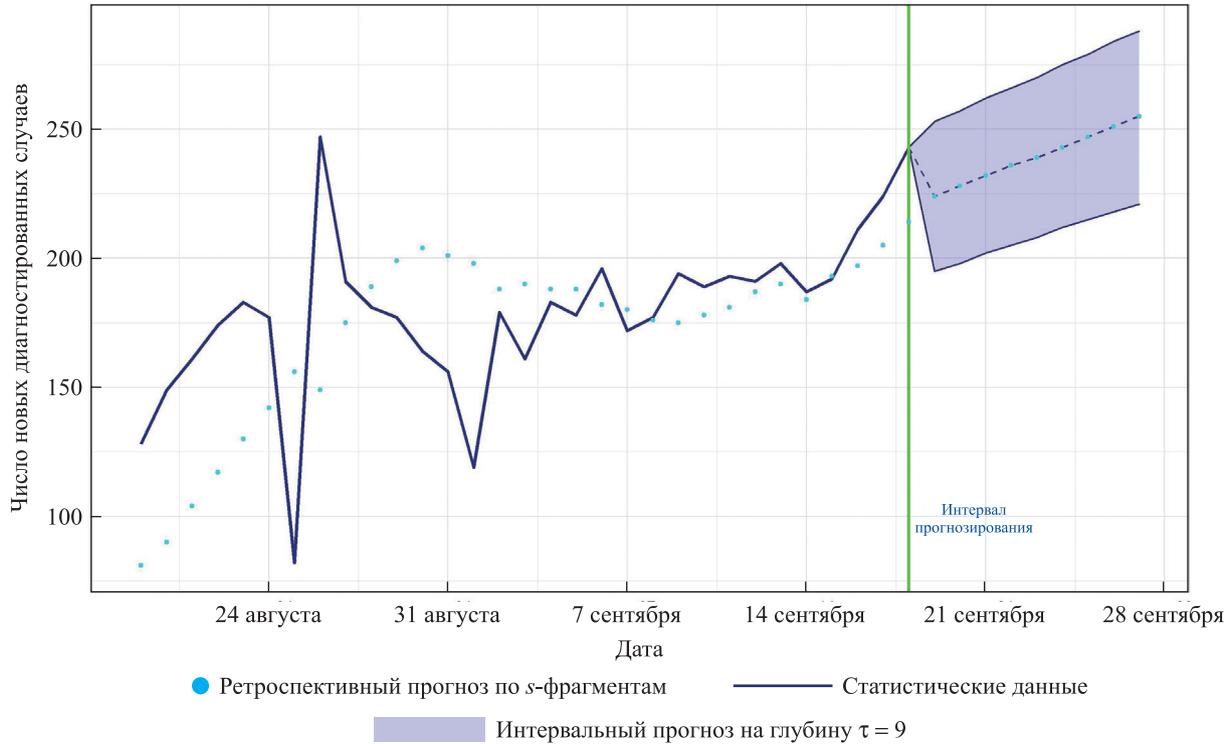


Рис. 1. Результаты прогнозирования для зарегистрированного числа  $v_t$  новых зараженных в день  $t$  с помощью метода «скользящих трендов»  
Fig. 1. Forecasting results for the registered number  $v_t$  of new infections on day  $t$  using the «moving trends» method

Выберем ближайший к моменту прогнозирования  $T$  фрагмент  $X_{T-s+1}^T = (x_{T-s+1}, x_{T-s+2}, \dots, x_T) \in R^s$  длины  $s$ , где  $2 < s \leq T$  (если  $s = T$ , то рассматривается весь наблюдаемый временной ряд  $X_1^T$ ), и будем считать, что для него адекватна линейная трендовая модель (2). Предположение (6) о гауссовском распределении случайных погрешностей  $\{u_t\}$  здесь использовать не будем. Примем следующие обозначения:  $N_s = \{T-s+1, \dots, T\}$  – множество  $s$  используемых моментов времени;  $\Gamma^{(l)} = \{t_1^{(l)}, t_2^{(l)}, \dots, t_m^{(l)}\} \subset N_s$  – подмножество  $m$  ( $2 \leq m < s$ ) упорядоченных по возрастанию моментов времени  $T-s+1 \leq t_1^{(l)} < t_2^{(l)} < \dots < t_m^{(l)} \leq T$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ ;  $L = C_s^m$  – число всех различных подмножеств  $\Gamma^{(l)}$ ;  $X^{(l)} = \{x_{t_1^{(l)}}, x_{t_2^{(l)}}, \dots, x_{t_m^{(l)}}\}'$  –  $l$ -й  $m$ -вектор-столбец наблюдений для моментов времени  $\Gamma^{(l)}$ ;  $\Psi^{(l)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1^{(l)} & t_2^{(l)} & \dots & t_m^{(l)} \end{pmatrix}'$  – транспонированная  $(m \times 2)$ -матрица.

Для построения точечных и интервальных прогнозов для  $x_{T+1}, \dots, x_{T+\tau}$  применим локально-медианный метод [12]. Используя принятые выше обозначения, введем вначале семейство  $L$  локальных оценок параметров  $\theta = (\theta_0, \theta_1)'$  модели (2):

$$\hat{\theta}^{(l)} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_0^{(l)} \\ \hat{\theta}_1^{(l)} \end{pmatrix} = \left( \Psi^{(l)'} \Psi^{(l)} \right)^{-1} \Psi^{(l)'} X^{(l)}, \quad l = 1, \dots, L. \quad (14)$$

По локальным оценкам (14) с учетом модели (2) построим далее семейство  $L$  локальных прогнозов будущего состояния:

$$\hat{x}_{T+j}^{(l)} = \hat{\theta}_0^{(l)} + \hat{\theta}_1^{(l)}(T+j), \quad l = 1, \dots, L. \quad (15)$$

Локально-медианный прогноз определяется как выборочная медиана локальных прогнозов (15):

$$\hat{x}_{T+j} = S(X_{T-s+1}^T) ::= \text{med} \left\{ \hat{x}_{T+j}^{(1)}, \dots, \hat{x}_{T+j}^{(L)} \right\}. \quad (16)$$

Заметим, что обращение матриц в (14) корректно, так как по построению матрица  $\Psi^{(l)}$  имеет ранг 2. Параметр алгоритма  $m$  определяет мощность подмножеств  $\Gamma^{(l)}$ . От него зависят точность и вычислительная сложность алгоритма (14)–(16).

Для построения  $(1 - \varepsilon) \cdot 100\%$ -интервальных прогнозов для  $x_{T+1}, \dots, x_{T+\tau}$  упорядочим полученную согласно (16) выборку  $L$  локальных прогнозов в порядке возрастания их величин и сформируем вариационный ряд

$$\hat{x}_{T+j(1)} \leq \hat{x}_{T+j(2)} \leq \dots \leq \hat{x}_{T+j(L)}.$$

Медиана (16) является «средним» членом в этом вариационном ряду:

$$\hat{x}_{T+j} = \begin{cases} \hat{x}_{T+j(k+1)}, & L = 2k + 1 \text{ (нечетное)}, \\ \frac{\hat{x}_{T+j(k)} + \hat{x}_{T+j(k+1)}}{2}, & L = 2k \text{ (четное)}. \end{cases}$$

Для нахождения границ  $(1 - \varepsilon) \cdot 100\%$ -доверительного интервала для  $x_{T+j}$  отбросим

$$K = \left\lfloor \frac{\varepsilon L}{2} + 1 \right\rfloor$$

наименьших и  $K$  наибольших членов вариационного ряда. Оставшиеся в вариационном ряду крайние члены и определяют границы  $(1 - \varepsilon) \cdot 100\%$ -доверительного интервала для  $x_{T+j}$  ( $j = 1, \dots, \tau$ ): с вероятностью  $1 - \varepsilon$

$$x_{T+j} \in (x_{T+j}^-, x_{T+j}^+), \quad x_{T+j}^- = \hat{x}_{T+j(K+1)}, \quad x_{T+j}^+ = \hat{x}_{T+j(L-K)}.$$

Отметим, что по выборке локальных прогнозов  $\hat{x}_{T+j}^{(1)}, \dots, \hat{x}_{T+j}^{(L)}$  можно построить гистограмму распределения прогнозов и с ее помощью определять «шансы» каждого прогноза  $x$ , т. е. построить вероятностный прогноз.

Для иллюстрации локально-медианного метода на рис. 2 представлены результаты прогнозирования показателя  $v_t$  для  $s = 7, m = 5$ .

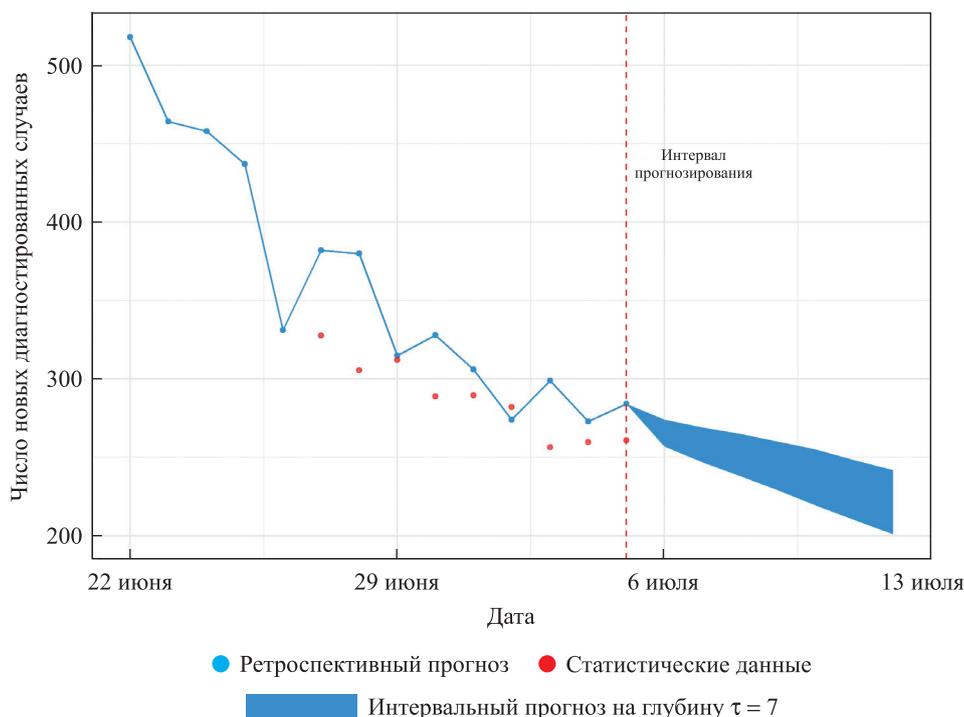


Рис. 2. Результаты прогнозирования для зарегистрированного числа  $v_t$  новых зараженных в день  $t$  с помощью локально-медианного метода

Fig. 2. Forecasting results for the registered number  $v_t$  of new infections on day  $t$  using the local median method

### Прогнозирование на основе моделей дискретных временных рядов

Введем в рассмотрение вероятностную версию известной SIR-модели [16]. Будем использовать обозначения:  $t \in Z$  – дискретное время (номер суток);  $N \in \mathbb{N}$  – численность населения страны (считаем ее постоянной, витальная динамика (смертность, рождаемость) не учитывается, что согласуется с низкой смертностью от COVID-19 в Республике Беларусь);  $x_t \in \mathbb{N}$  – общее число инфицированных к моменту  $t$  ( $x_t \leq N$ );  $y_t$  – общее число выздоровевших к моменту  $t$  ( $y_t \leq x_t$ ). Соответственно, разность  $x_t - y_t$  равна числу активных инфицированных в момент  $t$ . В обозначениях SIR-модели  $S_t = N - x_t$ ,  $I_t = x_t - y_t$ ,  $R_t = y_t$ . Будем также использовать оператор левого дискретного дифференцирования (соседних разностей)  $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ . Тогда  $\Delta x_t$  – число инфицированных за сутки,  $\Delta y_t$  – число выздоровевших за сутки. Определим следующую вероятностную версию SIR-модели:

$$\Delta x_{t+1} | F_t \sim Bi\left(N - x_t, \beta \frac{x_t - y_t}{N}\right) \approx \Pi\left(\beta \frac{(N - x_t)(x_t - y_t)}{N}\right), \quad (17)$$

$$\Delta y_{t+1} | F_t \sim Bi(x_t - y_t, \gamma) \approx \Pi(\gamma(x_t - y_t)), \quad (18)$$

$$\Delta x_{t+1} \perp \Delta y_{t+1} | F_t, \quad (19)$$

где  $A \sim B$  означает «случайная величина  $A$  распределена по закону  $B$ »;  $F_t$  – сигма-алгебра, порожденная случайными величинами  $(x_\tau, y_\tau)_{\tau \leq t}$  (предыстория в момент  $t$ );  $A | F_t$  – условное распределение вероятностей случайной величины  $A$  при фиксированной предыстории в момент  $t$ ;  $A \perp B | F_t$  означает «случайные величины  $A$  и  $B$  условно независимы при фиксированной предыстории в момент  $t$ »;  $Bi(n, p)$  – биномиальное распределение с параметрами  $p \in [0, 1]$  и  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\Pi(\lambda)$  – пуассоновское распределение с параметром  $\lambda > 0$ . Приближенные равенства вида  $Bi(n, p) \approx \Pi(np)$  между биномиальным и пуассоновским распределениями в уравнениях (17), (18) применимы в случае выполнения соответствующей асимптотики:  $n$  достаточно велико,  $p$  достаточно мало. Модель (17)–(19), в которой используются только биномиальные распределения, будем для краткости называть моделью BBSIR, где первая буква B относится к уравнению (17), вторая – к уравнению (18). Если в одном из уравнений вместо биномиального распределения используется его пуассоновская аппроксимация, соответствующую букву в названии модели будем заменять на P. Если в обоих уравнениях (17), (18) применяется пуассоновское приближение, получаем, соответственно, модель PPSIR. Параметр  $\beta$  характеризует интенсивность заражений, параметр  $\gamma$  – интенсивность выздоровлений. Величину  $\frac{1}{\gamma}$  принято интерпретировать как среднюю продолжительность заболевания человека – от заражения до выздоровления.

Пусть теперь наблюдается эпидемиологический процесс  $(x_t, y_t)_{t=t_1}^{t_2}$  длительностью  $T = t_2 - t_1 + 1$  дней. Построим логарифмическую функцию правдоподобия модели BBSIR на основе марковских свойств (17), (18):

$$\begin{aligned} L_{\text{BBSIR}}(\beta, \gamma) = & \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left( \ln \binom{N - x_t}{\Delta x_{t+1}} + \ln \binom{x_t - y_t}{\Delta y_{t+1}} + \Delta y_{t+1} \ln \gamma + (x_t - y_{t+1}) \ln(1 - \gamma) + \right. \\ & \left. + \Delta x_{t+1} \ln \left( \beta \frac{x_t - y_t}{N} \right) + (N - x_{t+1}) \ln \left( 1 - \beta \frac{x_t - y_t}{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) следует, что функция двух переменных  $L_{\text{BBSIR}}(\beta, \gamma)$  распадается на сумму функций, зависящих от каждой переменной в отдельности, и задача максимизации  $L_{\text{BBSIR}}(\beta, \gamma)$  разбивается на две подзадачи максимизации однопараметрических функций. Максимизация по  $\gamma$  дает оценку максимального правдоподобия (ОМП):

$$\hat{\gamma} = y_{t_2} - \frac{y_{t_1}}{\sum_{t=t_1}^{t_2-1} x_t - \sum_{t=t_1+1}^{t_2} y_t}. \quad (21)$$

Зависящее от  $\beta$  слагаемое в (20) может быть приближенно максимизировано, например, полным перебором по дискретной сетке на отрезке допустимых значений:

$$\beta \in \left[ 0, \frac{N}{\max \{x_t - y_t : t_1 \leq t < t_2\}} \right].$$

В случае модели PBSIR логарифмическая функция правдоподобия примет вид

$$L_{\text{PBSIR}}(\beta, \gamma) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left( \ln \left( \frac{x_t - y_t}{\Delta y_{t+1}} \right) - \ln(\Delta x_{t+1}!) + \Delta y_{t+1} \ln \gamma + (x_t - y_{t+1}) \ln(1 - \gamma) + \Delta x_{t+1} \ln \left( \beta \frac{(N - x_t)(x_t - y_t)}{N} \right) - \beta \frac{(N - x_t)(x_t - y_t)}{N} \right). \quad (22)$$

ОМП параметра  $\gamma$  для модели PBSIR вычисляется так же, как и для модели BBSIR, по формуле (21). ОМП параметра  $\beta$  для модели PBSIR получается приравниванием к нулю производной по  $\beta$  функции (22):

$$\hat{\beta}_{\text{PBSIR}} = N \frac{x_{t_1} - x_{t_2}}{\sum_{t=t_1}^{t_2-1} (N - x_t)(x_t - y_t)}.$$

По аналогии с рассмотренными моделями BBSIR и PBSIR могут быть построены ОМП параметров моделей BPSIR и PPSIR.

Рассмотрим теперь модификацию модели PBSIR, в которой параметры  $\beta$  и  $\gamma$  (интенсивности заражений и выздоровлений соответственно) зависят от времени детерминированным образом:

$$\begin{aligned} \Delta x_{t+1} | F_t &\sim \Pi \left( \beta_{t+1} \frac{(N - x_t)(x_t - y_t)}{N} \right), \\ \Delta y_{t+1} | F_t &\sim \text{Bi}(x_t - y_t, \gamma_{t+1}), \\ \beta_t &= \exp(b_t), \quad b_t = \sum_{i=1}^{m_\beta} \psi_i^\beta(t) a_i^\beta = \langle \Psi^\beta(t), a^\beta \rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\gamma_t = \Lambda(c_t), \quad c_t = \sum_{i=1}^{m_\gamma} \psi_i^\gamma(t) a_i^\gamma = \langle \Psi^\gamma(t), a^\gamma \rangle, \quad \Lambda(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}},$$

где  $b_t$  и  $c_t$  – канонические параметры условных пуассоновского и биномиального распределений (17), (18), двойственные параметрам  $\beta_t$  и  $\gamma_t$  соответственно;  $\Lambda(\cdot)$  – логистическая функция распределения;  $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$  – скалярное произведение действительных векторов  $u = (u_i)$  и  $v = (v_i)$ ;  $\{\psi_i^\beta\}_{i=1}^{m_\beta}$  – базис из  $m_\beta \in \mathbb{N}$  линейно независимых на исследуемом отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2$  функций  $\psi_i^\beta : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  для задания интенсивности заражений  $\beta_t$  (интенсивность заражений  $\gamma_t$  задается аналогично базисом  $\{\psi_i^\gamma\}_{i=1}^{m_\gamma}$ );  $\Psi^\beta(t) = (\psi_i^\beta(t))_{i=1}^{m_\beta}$  –  $m_\beta$ -вектор одновременных значений базисных функций  $\{\psi_i^\beta\}_{i=1}^{m_\beta}$  в момент  $t$  (аналогично  $\Psi^\gamma(t) = (\psi_i^\gamma(t))_{i=1}^{m_\gamma}$ ); векторы коэффициентов  $a^\beta = (a_i^\beta)_{i=1}^{m_\beta}$ ,  $a^\gamma = (a_i^\gamma)_{i=1}^{m_\gamma}$  – параметры модифицированной модели PBSIR (19), (23), которую далее будем называть моделью TPBSIR (приставка Т означает зависимость параметров  $\beta$  и  $\gamma$  от времени).

Логарифмическая функция правдоподобия для модели TPBSIR аналогично (22) распадается на сумму трех слагаемых:

$$L_{\text{TPBSIR}}(a^\beta, a^\gamma) = L_{\text{TPBSIR}}^0 + L_{\text{TPBSIR}}^\beta(a^\beta) + L_{\text{TPBSIR}}^\gamma(a^\gamma), \quad (24)$$

$$L_{\text{TPBSIR}}^0 = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left( \ln \left( \frac{x_t - y_t}{\Delta y_{t+1}} \right) - \ln(\Delta x_{t+1}!) + \Delta x_{t+1} \ln \left( \frac{(N - x_t)(x_t - y_t)}{N} \right) \right),$$

$$L_{\text{TPBSIR}}^{\beta}(a^{\beta}) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left( \Delta x_{t+1} b_{t+1} - \frac{(N-x_t)(x_t-y_t)}{N} \exp(b_{t+1}) \right),$$

$$L_{\text{TPBSIR}}^{\gamma}(a^{\gamma}) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left( \Delta y_{t+1} c_{t+1} - (x_t - y_t) \ln(1 + \exp(c_{t+1})) \right).$$

Согласно свойствам канонических параметров экспоненциальных распределений каждое слагаемое в (24) есть выпуклая функция от соответствующего канонического параметра  $b_{t+1}$ , а следовательно, и от  $a^{\beta}$ , поскольку  $b_{t+1}$  линейно зависит от  $a^{\beta}$ . Поэтому функция  $L_{\text{TPBSIR}}^{\beta}(a^{\beta})$  выпукла, более того, она строго выпукла в силу линейной независимости базисных функций  $\{\psi_i^{\beta}\}_{i=1}^{m_{\beta}}$ , и, значит,  $L_{\text{TPBSIR}}^{\beta}(a^{\beta})$  имеет единственный локальный и глобальный максимум, который может быть найден методом градиентного подъема. Аналогично выводится строгая выпуклость и единственность локального и глобального максимума функции  $L_{\text{TPBSIR}}^{\gamma}(a^{\gamma})$ .

Модель TPBSIR применима для разбиения наблюдаемого эпидемиологического процесса на фазы, такие как рост, плато, спад. Для этого могут использоваться кусочно-заданные базисные функции  $\{\psi_i^{\beta}\}$ ,  $\{\psi_i^{\gamma}\}$ , равные нулю за пределами своей фазы. Границы фаз при этом становятся дискретными параметрами модели, для которых методом перебора строятся оценки максимального правдоподобия. Для сокращения перебора налагаются дополнительные ограничения, например запрет слишком коротких фаз.

Прогнозирование на основе описанной модели TPBSIR производится с использованием имитационного моделирования. Для построения прогноза на  $\tau$  дней вперед необходимо, чтобы базисные функции  $\{\psi_i^{\beta}\}$ ,  $\{\psi_i^{\gamma}\}$  были определены при  $t = t_2 + 1, \dots, t_2 + \tau$ . Тогда согласно модели (23) строятся  $K$  траекторий  $\{x_t^i, y_t^i\}_{t=t_2+1}^{t_2+\tau}$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Прогноз значения  $x_{t_2+\tau'}$ ,  $1 \leq \tau' \leq \tau$ , может быть построен как потраекторное среднее или медиана (для  $y_{t_2+\tau'}$  аналогично):

$$\hat{x}_{t_2+\tau'} = K^{-1} \sum_{i=1}^K x_{t_2+\tau'}^i, \quad \tilde{x}_{t_2+\tau'} = x_{t_2+\tau'}^{(\lfloor K/2 \rfloor)},$$

где  $[z]$  означает целую часть  $z$ ;  $x_{t_2+\tau'}^{(1)} \leq x_{t_2+\tau'}^{(2)} \leq \dots \leq x_{t_2+\tau'}^{(K)}$  – вариационный ряд, составленный из значений  $\{x_{t_2+\tau'}^i\}_{i=1}^K$ . Доверительный интервал  $[x_{t_2+\tau'}^-, x_{t_2+\tau'}^+]$  для  $x_{t_2+\tau'}$  с уровнем значимости  $0 < \alpha < 1$  имеет границы  $x_{t_2+\tau'}^{\pm} = x_{t_2+\tau'}^{(\lfloor K(1 \pm \alpha)/2 \rfloor)}$ .

**Теорема 2.** При фиксированной предыстории условный среднеквадратический риск прогнозирования на 1 день вперед на основе модели TPBSIR имеет вид

$$E \left\{ \left( \hat{x}_{t_2+1} - x_{t_2+1} \right)^2 \middle| F_{t_2} \right\} = \beta_{t_2+1} \frac{(N-x_{t_2})(x_{t_2}-y_{t_2})}{N},$$

$$E \left\{ \left( \hat{y}_{t_2+1} - y_{t_2+1} \right)^2 \middle| F_{t_2} \right\} = (x_{t_2} - y_{t_2}) \gamma_{t_2+1} (1 - \gamma_{t_2+1}).$$

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться (17)–(19) и свойствами биномиального и пуассоновского распределений.

Опыт применения модели TPBSIR для прогнозирования параметров распространения COVID-19 в Республике Беларусь на разных этапах эпидемии, начиная с апреля 2020 г., показал, что при прогнозировании на неделю ( $\tau = 7$  дней) среднеквадратическая ошибка, как правило, не превышала 50 человек. На рис. 3 представлены прогнозы параметров распространения COVID-19 в Республике Беларусь на основе модели TPBSIR с базисом аффинных функций  $\{\psi_i^{\beta}\} = \{1, t\}$ ,  $m_{\beta} = 2$ , для интенсивности заражений и базисом аффинных функций с недельной периодической компонентой  $\{\psi_i^{\gamma}\} = \left\{ 1, t, \sin\left(\frac{2\pi t}{7}\right), \cos\left(\frac{2\pi t}{7}\right) \right\}$ ,  $m_{\gamma} = 4$ , для интенсивности выздоровлений. Добавление периодической компоненты обусловлено обнаруженной недельной периодичностью в наблюдаемой интенсивности выздоровлений от COVID-19 в Республике Беларусь. Долгосрочный прогноз, изображенный на рис. 3, был построен 29 августа 2020 г. на даты до конца сентября 2020 г.

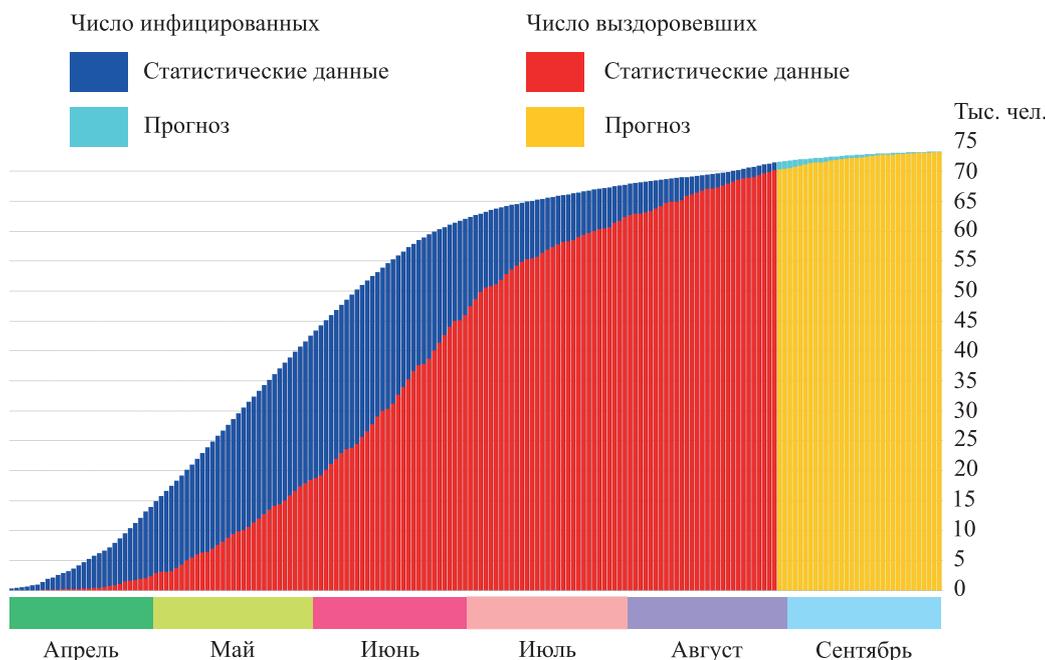


Рис. 3. Долгосрочный прогноз параметров распространения COVID-19 в Республике Беларусь на основе модели TPBSIR до 30 сентября 2020 г. включительно (дата прогнозирования – 29 августа 2020 г.)

Fig. 3. Long-term forecast of the dynamics for COVID-19 dissemination in Republic of Belarus based on the TPBSIR model for the dates up to 30 September 2020 (forecast is made on 29 August 2020)

### Прогнозирование на основе эконометрической модели коррекции ошибок

Для моделирования эпидемиологического процесса COVID-19 в Беларуси разработана эконометрическая векторная модель коррекции ошибок (*vector error correction model*) VECM COVID-19 RB. Она базируется на теории коинтеграции нестационарных интегрированных временных рядов, предполагающей существование между ними при определенных условиях долгосрочной равновесной зависимости, которая учитывается при построении краткосрочных прогнозов [17].

Модель VECM COVID-19 RB основана на близких с известной моделью эпидемиологического процесса SIR (*susceptible – infectious – recovered*) [18] предположениях, главным из которых является предположение о существовании долгосрочной равновесной зависимости для устойчивого состояния эпидемиологического процесса вида

$$I(t) + R(t) + S(t) = N, \quad (25)$$

где (для момента времени  $t$ )  $I(t)$  – численность инфицированных индивидов;  $R(t)$  – численность переболевших индивидов;  $S(t)$  – численность восприимчивых к инфекции индивидов;  $N$  – численность всей популяции.

Модель VECM COVID-19 RB отличается от SIR-модели следующими основными особенностями:

1) она является не детерминированной, а стохастической и не предполагает наличие управляемых параметров;

2) в силу незначительной доли умерших (менее 1 % от общего числа заражений за весь период наблюдения) переменная  $R(t)$  соответствует числу всех закрытых случаев заражения, т. е. включает выздоровевших и умерших. С учетом этого тождество (25) допускает интерпретацию

$$I(t) + R(t) = N - S(t) = T(t),$$

где  $T(t)$  – общее число случаев заражения (*total infected*) в момент  $t$ ;

3) условие долгосрочной коинтеграционной зависимости, связывающее переменные  $I(t)$ ,  $R(t)$ , оценивается и тестируется в процессе построения модели;

4) моделированию и прогнозированию подлежат ежедневные изменения переменных  $I(t), R(t)$ , т. е. их первые разности  $\Delta I(t), \Delta R(t)$ , а соответствующие им уравнения используются для построения краткосрочных прогнозов;

5) все параметры модели неизвестны и оцениваются в процессе построения модели по ежедневным значениям переменных  $I(t), R(t)$ .

Помимо краткосрочных прогнозов, с помощью модели VECM COVID-19 RB проводился долгосрочный анализ динамики эпидемиологического процесса в целях оценивания «поворотной точки» (когда текущее число зараженных равно числу закрытых случаев заражения), а также возможных сроков завершения острой стадии процесса (когда число закрытых случаев близко к общему числу заражений). Оба эти события были предсказаны на основе разработанной модели примерно за месяц до их наступления. В данной статье для иллюстрации представлена модель для первой волны COVID-19 в Беларуси.

Модель коррекции ошибок при сделанных предположениях включает три уравнения: коинтеграционное уравнение (*cointegration equation*), описывающее долгосрочную зависимость (*long run relation*) между временными рядами  $I(t), R(t)$ , и два уравнения краткосрочных зависимостей (*short run relations*) для их первых разностей, которые соответствуют ежедневным изменениям и используются для построения краткосрочных прогнозов временных рядов  $I(t), R(t)$ . Прогнозы для общего числа случаев заражения  $T$  вычисляются суммированием прогнозных значений для  $I(t), R(t)$ .

Для построения векторной модели коррекции ошибок применяется подход Йохансена [19]. Для временных рядов  $x_{1,t} \equiv R(t), x_{2,t} \equiv I(t)$  с помощью расширенного теста Дики – Фуллера (*augmented Dickey – Fuller (ADF) unit root test*) установлена интегрированность второго порядка, т. е. наличие как стохастических трендов, так и детерминированного квадратичного тренда. По этой причине для тестирования коинтегрированности  $R(t)$  и  $I(t)$  используется спецификация модели VECM, предполагающая наличие квадратичных трендов во временных рядах  $R(t), I(t)$  [20]. При тестировании коинтеграции временных рядов и оценивании модели это учитывается добавлением линейного тренда  $t$  и константы  $c$  в уравнения для долгосрочной и краткосрочных зависимостей. Поскольку временные ряды ежедневных изменений (первые разности)  $\Delta x_{1,t} \equiv \Delta R(t), \Delta x_{2,t} \equiv \Delta I(t)$  имеют семидневные циклические колебания, то в уравнения для  $\Delta x_{1,t}, \Delta x_{2,t}$  включены лаговые переменные с лагом 7. При построении и применении модели используются следующие временные интервалы: максимальный период оценивания – с 18 мая по 20 августа; прогнозный период (краткосрочные прогнозы) – с 21 по 31 августа; анализ долгосрочной динамики – с 21 августа по 21 сентября. Оцененные уравнения модели для моментов времени  $t (t = 1, 2, \dots)$  имеют следующий вид.

1. Отклонения от долгосрочной зависимости (*disequilibrium errors*) для лага  $t - 1$

$$\hat{\xi}_{t-1} = x_{1,t-1} - 0,3113x_{2,t-1} - 679,10t + 21\,857,73.$$

2. Краткосрочные зависимости

$$\begin{aligned} \Delta x_{1,t} = & -0,0942\hat{\xi}_{t-1} - 1,6270\Delta x_{1,t-1} - 0,7905\Delta x_{1,t-2} - \\ & - 1,9187\Delta x_{2,t-1} - 0,5855\Delta x_{2,t-2} + 0,3607\Delta x_{1,t-7} - \mathbf{0,1528}\Delta x_{2,t-7} - 30,93t + 4244,80, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{2,t} = & 0,0734\hat{\xi}_{t-1} + 1,8304\Delta x_{1,t-1} + 0,8510\Delta x_{1,t-2} - \\ & - 2,1121\Delta x_{2,t-1} + 0,6374\Delta x_{2,t-2} - 0,4513\Delta x_{1,t-7} + \mathbf{0,0681}\Delta x_{2,t-7} + \mathbf{23,96}t + 3284,57. \end{aligned}$$

Значения скорректированного коэффициента детерминации  $R_{adj}^2$  для уравнений  $\Delta x_{1,t}, \Delta x_{2,t}$  равны 0,701471 и 0,695933 соответственно. На основании модифицированного теста Льюнга – Бокса (*residual portmanteau test for autocorrelations*) остатки не коррелированы вплоть до лага 6 (для обоих уравнений) и имеют нормальный закон (для первого уравнения). Жирным шрифтом в уравнениях выделены оценки параметров, статистически не значимые на уровне 0,05.

Долгосрочная динамика эпидемиологического процесса COVID-19 исследуется с помощью модели, оцененной на расширенном временном интервале с 18 мая по 20 августа, учитывающей взаимосвязь переменных за более долгий период, чем в случае краткосрочного прогнозирования. Представленная на рис. 4 прогнозная динамика моделируемого процесса с 21 августа по 21 сентября свидетельствует о том, что в момент построения прогноза (20 августа) ожидалось затухание эпидемии с относительно невысоким уровнем новых заражений до начала сентября. Со второй декады сентября прогнозировался незначительный рост числа новых заражений. При этом предполагалось, что в рассматриваемый период времени будут отсутствовать новые факторы роста эпидемиологического процесса.

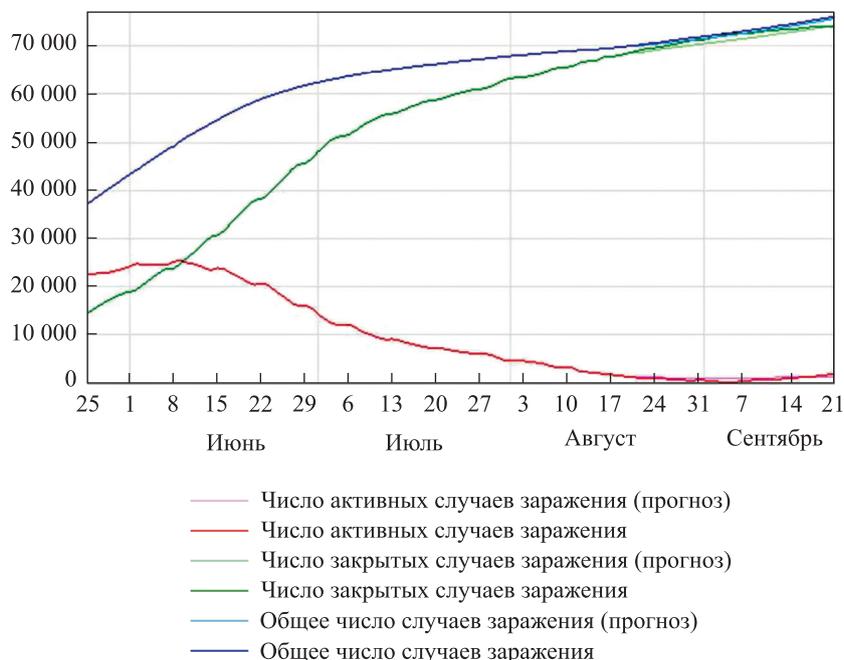


Рис. 4. Долгосрочная динамика эпидемиологического процесса COVID-19 с 21 августа по 21 сентября 2020 г.

Fig. 4. Long-term dynamics of the epidemiologic process for COVID-19 from 21 August to 21 September 2020

### Применение последовательного статистического анализа для исследования текущих тенденций заболеваемости

Последовательный статистический анализ, предложенный американским математиком А. Вальдом, позволяет строить статистические выводы, основываясь лишь на минимально необходимом количестве наблюдений, которое не фиксируется заранее, а определяется в зависимости от поступающих случайных наблюдений так, чтобы обеспечивать требуемую точность метода (например, малые значения вероятностей ошибочных решений), и, как следствие, само является случайной величиной [21]. Это обстоятельство затрудняет теоретический анализ эффективности последовательных статистических процедур, однако позволяет «экономно» использовать наблюдения и останавливать процесс принятия решений сразу, как только обеспечивается заданная точность по тем данным, которые наблюдаются в конкретной исследуемой ситуации.

Рассмотрим применение последовательного статистического анализа для решения задач исследования динамики заболеваемости COVID-19.

Для мониторинга текущих тенденций заболеваемости будем полагать, что случайные наблюдения  $v_1, v_2, \dots$  зарегистрированных чисел новых зараженных в дни  $1, 2, \dots$  описываются следующей простейшей вероятностной моделью:

$$v_t = v + \theta t + \lambda_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где  $v$  – заданный уровень для «стационарной» ситуации;  $\theta \geq 0$  – параметр (его значение неизвестно), отвечающий за тренд – тенденцию развития эпидемиологической ситуации на рассматриваемом коротком промежутке времени;  $t = 1$  – момент начала мониторинга;  $\lambda_t, t \in N$ , представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины, описывающие случайные колебания заболеваемости с нулевым математическим ожиданием  $E\{\lambda_t\} = 0$ . Относительно значения параметра  $\theta$  имеются две гипотезы:  $H_0 : \theta = 0$  (эпидемиологическая ситуация находится в «стационарной» стадии плато),  $H_1 : \theta = \theta_1 > 0$  (уровень заболеваемости начал расти, где  $\theta_1$  определяется, например, из условия достижения трендом ко дню  $\tau$  некоторого критического уровня заболеваемости). Пусть заданы максимально допустимые значения вероятностей ошибок 1-го рода (принята  $H_1$  при справедливой гипотезе  $H_0$ ) и 2-го рода (принимается  $H_0$ , когда верна  $H_1$ ). Соответствующий последовательный статистический тест проверки гипотез  $H_0, H_1$  в этом случае построен и исследован в работе [22]. Кроме того, теория, представленная в статье [22], позволяет рассмотреть в (26) зависимости, отличные от линейных. Анализ эффективности указанного теста дает возможность использовать описанный подход для отслеживания наметившихся отклонений от «стационарной» ситуации и быстрого реагирования на них.

В общем случае, когда необходим более детальный анализ, может потребоваться формулировка гипотез в следующем виде:

$$H_0 : \theta \in [0, \theta_0], H_1 : \theta \geq \theta_1 \ (\theta_0 < \theta_1).$$

В такой постановке методология построения соответствующего последовательного теста и анализа его эффективности представлена в работе [23]. Вместо трендовой модели (26), предполагающей лишь абстрагированный от причин анализ числа случаев заболеваемости, можно применить построенные в монографии [21] последовательные тесты для модели марковской зависимости  $\{v_i\}$  порядка  $p$ .

### Библиографические ссылки

1. Кондратьев МА. Методы прогнозирования и модели распространения заболеваний. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2013;5(5):863–882. DOI: 10.20537/2076-7633-2013-5-5-863-882.
2. Hirk R, Kastner G, Vana L. Investigating the dark figure of COVID-19 cases in Austria: borrowing from the decode genetics study in Iceland. *Austrian Journal of Statistics*. 2020;49(5):1–17. DOI: 10.17713/ajs.v49i4.1142.
3. Fanelli D, Piazza F. Analysis and forecast of COVID-19 spreading in China, Italy and France. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020;134:109841. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109761.
4. Kharin Yu. *Robustness in statistical forecasting*. New York: Springer; 2013. 356 p.
5. Kharin YuS, Voloshko VA, Medved EA. Statistical estimation of parameters for binary conditionally nonlinear autoregressive time series. *Mathematical Methods of Statistics*. 2018;27:103–118. DOI: 10.3103/S1066530718020023.
6. Волошко ВА, Харин ЮС. Семининомальные условно нелинейные авторегрессионные модели дискретных случайных последовательностей: вероятностные свойства и статистическое оценивание параметров. *Дискретная математика*. 2019;31(1):72–98. DOI: 10.4213/dm1561.
7. Kharin Yu, Zhurak M. Analysis of spatio-temporal data based on Poisson conditional autoregressive model. *Informatica*. 2015;26(1):67–87. DOI: 10.15388/Informatica.2015.39.
8. Maevskii VV, Kharin YuS. Robust regressive forecasting under functional distortions in a model. *Automation and Remote Control*. 2002;63(11):1803–1820. DOI: 10.1023/A:1020959432568.
9. Pashkevich MA, Kharin YuS. Robust estimation and forecasting for beta-mixed hierarchical models of grouped binary data. *Statistics and Operations Research Transactions*. 2004;28(2):125–160.
10. Большев ЛН, Смирнов НВ. *Таблицы математической статистики*. Москва: Наука; 1983. 512 с.
11. Харин ЮС, Зуев НМ, Жук ЕЕ. *Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика*. Минск: БГУ; 2011. 465 с.
12. Харин ЮС. *Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании*. Минск: БГУ; 2008. 265 с.
13. Kharin Yu. Statistical analysis of discrete-valued time series by parsimonious high-order Markov chains. *Austrian Journal of Statistics*. 2020;49(4):76–88. DOI: 10.17713/ajs.v49i4.1132.
14. Kedem B, Fokianos K. *Regression models for time series analysis*. Wiley: Hoboken; 2002. 326 p.
15. Малюгин ВИ. *Методы анализа многомерных эконометрических моделей с неоднородной структурой*. Минск: БГУ; 2014. 351 с.
16. Colizza V, Barrat A, Barthelemy M, Vespignani A. Predictability and epidemic pathways in global outbreaks of infectious diseases: the SARS case study. *BMC Medicine*. 2007;5:34. DOI: 10.1186/1741-7015-5-34.
17. Engle RF, Granger CWJ. Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*. 1987;55(2):251–276. DOI: 10.2307/1913236. JSTOR 1913236.
18. Kermack WO, McKendrick AG. Contributions to the mathematical theory of epidemics – I. *Bulletin of Mathematical Biology*. 1991;53(1–2):33–55. DOI: 10.1007/BF02464423.
19. Харин ЮС, Малюгин ВИ, Харин АЮ. *Эконометрическое моделирование*. Минск: БГУ; 2003. 313 с.
20. Johansen S. *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. 2<sup>nd</sup> edition. Oxford: Oxford University Press; 1995. 267 p.
21. Харин АЮ. *Робастность байесовских и последовательных статистических решающих правил*. Минск: БГУ; 2013. 207 с.
22. Kharin A, Tu TT. Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend. *Austrian Journal of Statistics*. 2017;46(3–4):23–36. DOI: 10.17713/ajs.v46i3-4.668.
23. Kharin AYU. An approach to asymptotic robustness analysis of sequential tests for composite parametric hypotheses. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017;227(2):196–203. DOI: 10.1007/s10958-017-3585-z.

### References

1. Kondratyev MA. [Forecasting methods and models of disease spread]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*. 2013;5(5):863–882. Russian. DOI: 10.20537/2076-7633-2013-5-5-863-882.
2. Hirk R, Kastner G, Vana L. Investigating the dark figure of COVID-19 cases in Austria: borrowing from the decode genetics study in Iceland. *Austrian Journal of Statistics*. 2020;49(5):1–17. DOI: 10.17713/ajs.v49i4.1142.
3. Fanelli D, Piazza F. Analysis and forecast of COVID-19 spreading in China, Italy and France. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020;134:109841. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109761.
4. Kharin Yu. *Robustness in statistical forecasting*. New York: Springer; 2013. 356 p.
5. Kharin YuS, Voloshko VA, Medved EA. Statistical estimation of parameters for binary conditionally nonlinear autoregressive time series. *Mathematical Methods of Statistics*. 2018;27:103–118. DOI: 10.3103/S1066530718020023.
6. Valoshka VA, Kharin YuS. [Semibinomial conditionally nonlinear autoregression models of discrete random sequences: probabilistic properties and statistical estimation of parameters]. *Diskretnaya matematika*. 2019;31(1):72–98. Russian. DOI: 10.4213/dm1561.

7. Kharin Yu, Zhurak M. Analysis of spatio-temporal data based on Poisson conditional autoregressive model. *Informatica*. 2015; 26(1):67–87. DOI: 10.15388/Informatica.2015.39.
8. Maevskii VV, Kharin YuS. Robust regressive forecasting under functional distortions in a model. *Automation and Remote Control*. 2002;63(11):1803–1820. DOI: 10.1023/A:1020959432568.
9. Pashkevich MA, Kharin YuS. Robust estimation and forecasting for beta-mixed hierarchical models of grouped binary data. *Statistics and Operations Research Transactions*. 2004;28(2):125–160.
10. Bol'shev LN, Smirnov NV. *Tablitsy matematicheskoi statistiki* [Mathematical statistics tables]. Moscow: Nauka; 1983. 512 p. Russian.
11. Kharin YuS, Zuev NM, Zhuk EE. *Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya i prikladnaya statistika* [Probability theory, mathematical and applied statistics]. Minsk: Belarusian State University; 2011. 465 p. Russian.
12. Kharin YuS. *Optimal'nost' i robustnost' v statisticheskoy prognozirovanii* [Optimality and robustness in statistical forecasting]. Minsk: Belarusian State University; 2008. 265 p. Russian.
13. Kharin Yu. Statistical analysis of discrete-valued time series by parsimonious high-order Markov chains. *Austrian Journal of Statistics*. 2020;49(4):76–88. DOI: 10.17713/ajs.v49i4.1132.
14. Kedem B, Fokianos K. *Regression models for time series analysis*. Wiley: Hoboken; 2002. 326 p.
15. Malugin VI. *Metody analiza mnogomernykh ekonometricheskikh modelei s neodnorodnoi strukturoi* [Methods for analyzing multivariate econometric models with a heterogeneous structure]. Minsk: Belarusian State University; 2014. 351 p. Russian.
16. Colizza V, Barrat A, Barthelemy M, Vespignani A. Predictability and epidemic pathways in global outbreaks of infectious diseases: the SARS case study. *BMC Medicine*. 2007;5:34. DOI: 10.1186/1741-7015-5-34.
17. Engle RF, Granger CWJ. Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*. 1987;55(2): 251–276. DOI: 10.2307/1913236. JSTOR 1913236.
18. Kermack WO, McKendrick AG. Contributions to the mathematical theory of epidemics – I. *Bulletin of Mathematical Biology*. 1991;53(1–2):33–55. DOI: 10.1007/BF02464423.
19. Kharin YuS, Malugin VI, Kharin AYu. *Ekonometricheskoe modelirovanie* [Econometric modeling]. Minsk: Belarusian State University; 2003. 313 p. Russian.
20. Johansen S. *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. 2<sup>nd</sup> edition. Oxford: Oxford University Press; 1995. 267 p.
21. Kharin AYu. *Robustnost' baiesovskikh i posledovatel'nykh statisticheskikh reshayushchikh pravil* [Robustness of Bayesian and sequential statistical decision rules]. Minsk: Belarusian State University; 2013. 207 p. Russian.
22. Kharin A, Tu TT. Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend. *Austrian Journal of Statistics*. 2017;46(3–4):23–36. DOI: 10.17713/ajs.v46i3-4.668.
23. Kharin AYu. An approach to asymptotic robustness analysis of sequential tests for composite parametric hypotheses. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017;227(2):196–203. DOI: 10.1007/s10958-017-3585-z.

Статья поступила в редакцию 08.10.2020.  
Received by editorial board 08.10.2020.

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

---

## THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

---

---

УДК 539.3

### АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛИ С ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКИМ СЛОЕМ НА ОСНОВЕ ДВУХ МОДЕЛЕЙ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Г. И. МИХАСЕВ<sup>1)</sup>, М. Г. БОТОГОВА<sup>1)</sup>, А. П. МИХИЕВИЧ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

На основе двух моделей слоистых оболочек исследуются свободные низкочастотные колебания трехслойной цилиндрической панели с внутренним слоем, изготовленным из электрореологического композита. Рассматриваемые модели приводят к одинаковым разрешающим уравнениям, учитывающим сдвиги в слоях, но различаются соотношениями для вычисления эффективного параметра сдвига, который зависит от напряженности электрического поля и температуры композита. В случае шарнирного опирания всех краев в явном виде получена формула для комплексной собственной частоты колебаний. Исследовано влияние напряженности электрического

---

#### Образец цитирования:

Михасев ГИ, Ботогова МГ, Михиевич АП. Анализ свободных колебаний сэндвич-панели с электрореологическим слоем на основе двух моделей слоистых оболочек. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:51–59.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-51-59>

#### For citation:

Mikhasev GI, Botogova MG, Mikhievich AP. Analysis of free vibrations of sandwich panel with electrorheological layer based on two models of laminated shells. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:51–59. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-51-59>

---

#### Авторы:

**Геннадий Иванович Михасев** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.  
**Марина Георгиевна Ботогова** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.  
**Арнольд Павлович Михиевич** – аспирант кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета. Научный руководитель – Г. И. Михасев.

#### Authors:

**Gennadi I. Mikhasev**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.  
[mikhasev@bsu.by](mailto:mikhasev@bsu.by)  
**Marina G. Botogova**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.  
[botogova@tut.by](mailto:botogova@tut.by)  
**Arnold P. Mikhievich**, postgraduate student at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.  
[fakel.arnold@gmail.com](mailto:fakel.arnold@gmail.com)



поля и температуры электрореологического композита на наименьшие собственные частоты и соответствующие декременты колебаний. Установлено, что используемые модели дают очень близкие результаты для нагретого композита при напряженности электрического поля более 1,5 кВ/мм. Также показано, что частота собственных колебаний электрореологической панели является монотонно возрастающей функцией напряженности электрического поля, в то время как кривая *декремент – напряженность* показывает наличие локального максимума, соответствующего наилучшему затуханию вязкоупругих колебаний.

**Ключевые слова:** сэндвич-панель; электрореологический композит; собственные частоты; декремент колебания.

## ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF SANDWICH PANEL WITH ELECTORRHEOLOGICAL LAYER BASED ON TWO MODELS OF LAMINATED SHELLS

G. I. MIKHASEV<sup>a</sup>, M. G. BOTOGOVA<sup>a</sup>, A. P. MIKHIEVICH<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: G. I. Mikhasev (mikhasev@bsu.by)

Based on two models of laminated shells, free low frequency vibrations of a three-layered cylindrical panel with the internal layer fabricated of an electrorheological composite are studied. Both models lead to the same governing equations accounting for shears in layers, but differ in equations for calculating the reduced shear parameter which depends on the electric field strength and the temperature of a composite. In the case of a simple support of all edges, the formula for the complex natural frequency is obtained explicitly. The influence of the electric field strength and the temperature of the electrorheological composite on the lowest natural frequencies and associated vibration decrements is investigated. It was detected that both models give very close results for the heated composite at an electric field strength of more than 1.5 kV/mm. It is also shown that the frequency of natural vibrations of the electrorheological panel is a monotonically increasing function of the electric field strength, while the *decrement – strength* curve shows the presence of a local maximum corresponding to the best damping of viscoelastic vibrations.

**Keywords:** sandwich panel; electrorheological composite; natural frequencies; decrement of vibrations.

### Введение

Электрореологические композиты (ЭРК), в частности электрореологические композитные жидкости, наряду с магнитореологическими эластомерами (МРЭ) относятся к классу интеллектуальных материалов [1]. Под действием приложенного электрического поля они практически мгновенно меняют свои упругие и реологические характеристики, переходя из вязкоупругого состояния (высококонцентрированной суспензии) с низким модулем накопления в состояние псевдотвердого тела с высокими значениями модулей накопления и потерь [2]. Благодаря этим уникальным свойствам МРЭ и ЭРК находят широкое применение при проектировании тонкостенных слоистых конструкций с адаптивными (настраиваемыми) жесткостными и демпфирующими характеристиками [3–6]. Примером такой умной конструкции является трехслойная оболочка или цилиндрическая панель (сэндвич), внутренний слой которой изготовлен из ЭРК [6] либо МРЭ [7]. В частности, в работе [7] показано, что сигнал магнитного поля позволяет значительно смещать вправо амплитудно-частотную характеристику тонкостенной сэндвич-панели, содержащей МРЭ, с одновременным уменьшением амплитуды резонансных пиков.

Одной из проблем, возникающих при динамических расчетах слоистых тонкостенных элементов, содержащих чередующиеся жесткие и «мягкие» (например, МРЭ или ЭРК) слои, является выбор соответствующей математической модели, которая, с одной стороны, была бы проста в инженерных расчетах, а с другой стороны, правильно отражала кинематику составляющих слоев. Следует отметить, что к настоящему времени накопилось огромное количество работ, посвященных высокоточным теориям слоистых оболочек, которые учитывают различные уточняющие эффекты, в том числе эффекты сдвигов, вызванных градиентным распределением упругих свойств по толщине оболочки (см. обзор литературы, например, в [4]). Среди обилия подобных теорий подходы, базирующиеся на замене исходной слоистой оболочки на «эквивалентную» однослойную трансверсально-изотропную оболочку, представляются наиболее простыми и эффективными. Так, в монографии [8] Э. И. Григолоком и Г. М. Куликовым предложена

модель многослойных упругих цилиндрических оболочек, основанная на введении обобщенных кинематических гипотез Тимошенко, которые учитывают сдвиги интегрально для всего слоистого пакета оболочки. Впоследствии данная модель была обобщена на случай слоистой оболочки, содержащей вязкоупругие магнитоупругие материалы [9], а в недавно вышедшей работе [7] использована для детального анализа низкочастотных колебаний цилиндрической сэндвич-панели с МРЭ-ядром. В качестве второй, альтернативной, модели «эквивалентной» однослойной оболочки укажем модель типа Тимошенко – Рейсснера, развитую П. Е. Товстиком [10; 11] для случая градиентного распределения механических свойств по толщине пластины (оболочки). Назовем также математическую модель неоднородных пластин, предложенную Ю. А. Устиновым [12] и основанную на предельном переходе от 3D-задач теории упругости к двумерным задачам.

Очевидно, что все модели, включая упомянутые, имеют свой диапазон применимости, о чем подробнее будет сказано ниже. Здесь отметим, что модель Устинова [12] предназначена в основном для решения статических задач – определения НДС пластин, упругие свойства которых описываются кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты. Модель Григолюка – Куликова [8] хорошо зарекомендовала себя для решения задач устойчивости и колебаний упругих и вязкоупругих слоистых цилиндрических оболочек средней длины, когда поверхность оболочки покрывается большим количеством волн хотя бы в одном направлении [13], а также в случае, когда жесткостные характеристики слоев различаются незначительно (что имеет место, например, если слоистую МРЭ-оболочку поместить в сильное магнитное поле [4]). Если же демпфирующим элементом в сэндвич-оболочке является электрореологическая композитная жидкость, то погрешность модели Григолюка – Куликова [8] сильно возрастает. В данном случае для исследования динамики слоистой оболочки представляется целесообразным использовать модель типа Тимошенко – Рейсснера, которая верифицирована путем сравнения с точным решением 3D-задачи теории упругости [10; 11].

Целью настоящей работы является сравнительный анализ двух моделей на примере свободных низкочастотных колебаний цилиндрической сэндвич-панели, содержащей ЭРК в качестве среднего слоя. Актуальность исследования обусловлена тем, что модель Григолюка – Куликова, в отличие от модели типа Тимошенко – Рейсснера, может быть использована для любого варианта граничных условий на кромках панели.

### Разрешающие уравнения

Рассмотрим трехслойную круговую цилиндрическую оболочку длиной  $L_1$ , которая не замкнута в окружном направлении (цилиндрическая сэндвич-панель) и имеет ширину  $L_2$  (рис. 1). Верхний и нижний слои с толщинами  $h_1$  и  $h_3$  соответственно изготовлены из упругого изотропного материала, механические свойства которого (модули Юнга  $E_{1,3}$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_{1,3}$ ) не зависят от электрического поля, а внутренний слой (ядро) толщиной  $h_2$  – из ЭРК, вязкоупругие свойства которого (модуль Юнга  $E_2$ , модуль сдвига  $G_2$  и коэффициент Пуассона  $\nu_2$ ) есть функции напряженности приложенного электрического поля  $\mathcal{E}$  и температуры  $T$ . Выбор исходной поверхности и системы координат зависит от принятой модели слоистой оболочки. Здесь мы рассмотрим две модели: модель Григолюка – Куликова (далее – модель 1) слоистых трансверсально-изотропных оболочек, основанную на принятии обобщенных кинематических гипотез Тимошенко для тангенциальных перемещений и учитывающую поперечные сдвиги в слоях [8], и модель типа Тимошенко – Рейсснера (далее – модель 2), предложенную П. Е. Товстиком [10] для оболочек с произвольным распределением упругих свойств по толщине. В рамках модели 1 в качестве исходной поверхности принимается срединная поверхность внутреннего слоя, для модели 2 – внешняя поверхность, а оси криволинейной системы координат  $O\alpha_1\alpha_2\alpha_3$  с ортами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  ориентированы для обеих моделей так, как показано на рис. 1. Здесь  $\alpha_1, \alpha_2, z = \alpha_3$  – координаты, отсчитываемые в осевом, окружном и нормальном направлениях соответственно, при этом  $0 \leq \alpha_1 \leq L_1, 0 \leq \alpha_2 \leq L_2$  и  $-\frac{h_2}{2} - h_1 \leq z \leq \frac{h_2}{2} + h_3$  (для модели 1),  $0 \leq z \leq h = \sum_{k=1}^3 h_k$  (для модели 2).

Согласно принимаемым моделям исходная слоистая оболочка заменяется «эквивалентной» однослойной трансверсально-изотропной оболочкой толщиной  $h$  с приведенными модулями Юнга  $E$  и сдвига  $G$ , а также коэффициентом Пуассона  $\nu$ , которые, однако, вводятся по-разному в зависимости от конкретной модели.

**Модель 1.** В соответствии с данной моделью [8] приведенные модули

$$E = \frac{1 - \nu^2}{h} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right), \quad \nu = \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k \nu_k}{1 - \nu_k^2} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}.$$

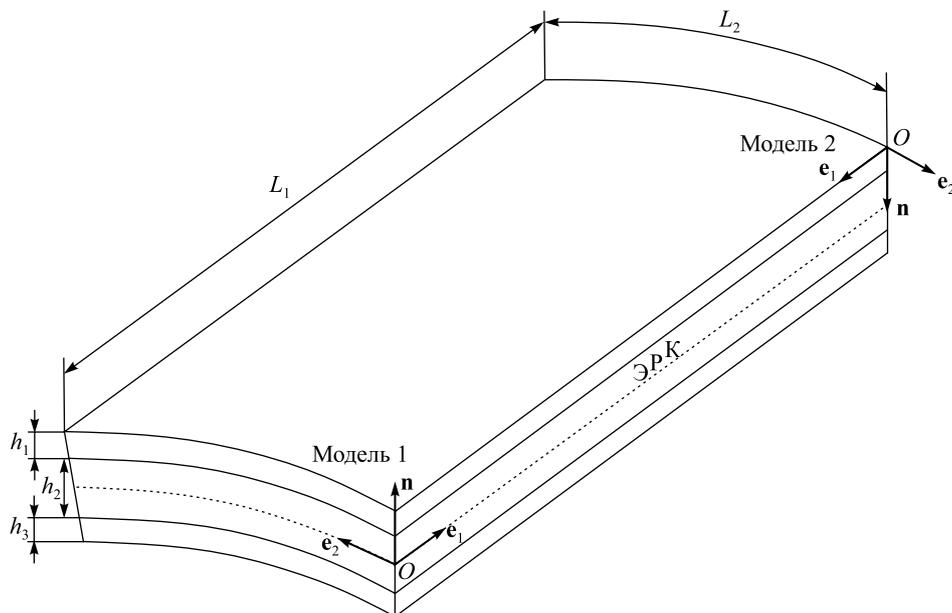


Рис. 1. Цилиндрическая сэндвич-панель с внутренним слоем, изготовленным из электрореологического композита (ЭРК).

Криволинейная система координат с ортами  $e_1, e_2, n$  для моделей 1 и 2

Fig. 1. Cylindrical sandwich panel with the internal layer made of electrorheological composite (ERC).  
 Curvilinear coordinate system with the unit vectors  $e_1, e_2, n$  for models 1 and 2

Также введем в рассмотрение приведенные цилиндрическую жесткость  $D$ , жесткость каждого слоя  $\gamma_k$  и параметры сдвига  $\beta$  и  $\theta$ :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \eta_3, \quad \gamma_k = \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, \quad \beta = \frac{12(1-\nu^2)q_{44}}{Eh\eta_1}, \quad \theta = 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1\eta_3}, \quad (1)$$

где

$$q_{44} = \frac{\left[ \sum_{k=1}^3 \left( \lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{kk} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^3 \left( \lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{kk} \right) G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} G_k, \quad \lambda_k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0^2(z) dz, \quad (2)$$

$$\lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z) f_n(z) dz \quad (n=0, k), \quad \eta_1 = \sum_{k=1}^3 \frac{\pi_{1k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^3 \frac{\pi_{2k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12}c_{13},$$

$$\eta_3 = 4 \sum_{k=1}^3 \left( \xi_k^2 + 3\zeta_{k-1} \zeta_k \right) \gamma_k - 3c_{13}^2, \quad h\xi_k = h_k, \quad h\zeta_n = \delta_n \quad (n=0, k),$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^3 \xi_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \quad c_{13} = \sum_{k=1}^3 \left( \zeta_{k-1} + \zeta_k \right) \gamma_k,$$

$$\pi_{1k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(z) dz, \quad \pi_{2k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} zg(z) dz, \quad \pi_{3k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(z) dz.$$

Здесь  $G = \frac{q_{44}}{h}$  – приведенный модуль сдвига [4];  $f_n(z)$  – непрерывные на каждом слое функции, которые в принимаемых гипотезах задают закон распределения касательных напряжений, непрерывных по толщине оболочки [4, формула (2.2)]. В нашем случае

$$f_0(z) = \frac{1}{h^2} (z - \delta_0)(\delta_3 - z), \quad \text{если } z \in [\delta_0, \delta_3],$$

$$f_k(z) = \frac{1}{h_k^2} (z - \delta_{k-1})(\delta_k - z), \text{ если } z \in [\delta_{k-1}, \delta_k],$$

$$f_k(z) = 0, \text{ если } z \notin [\delta_{k-1}, \delta_k],$$

а  $\delta_n$  – координаты внешних и интерфейсных поверхностей, отсчитываемые от исходной поверхности (срединной поверхности внутреннего слоя):  $\delta_0 = -h_1 - \frac{1}{2}h_2$ ,  $\delta_1 = -\frac{1}{2}h_2$ ,  $\delta_2 = \frac{1}{2}h_2$ ,  $\delta_3 = h_3 + \frac{1}{2}h_2$ . Заметим, что функции  $f_n(z)$  могут быть введены иначе, например через полиномы Лежандра. Однако данное представление, внося дополнительные сложности в расчеты, не приводит к заметному уточнению результатов для тонких оболочек [8]. Попутно лишь укажем, что введение полиномов более высокого порядка представляется целесообразным для оболочек средней толщины при наличии дополнительных усложняющих факторов, таких как сильное различие механических свойств слоев, действие торцевых сил, градиентно распределенных по толщине оболочки, и др.

Пусть  $w$  – нормальный прогиб оболочки (в направлении оси  $Oz$ );  $F$  – функция напряжений Эйри;  $\rho_0 = \sum_{k=1}^3 \rho_k \xi_k$  – приведенная плотность всего пакета сэндвича;  $t$  – время, а  $R$  – радиус срединной поверхности внутреннего слоя. Будем далее исследовать колебания панели средней длины ( $R \sim L$ ), сопровождающиеся образованием большого количества волн хотя бы в одном направлении. Тогда уравнения движения сэндвич-панели в принятых обозначениях имеют вид [8]

$$D \left( 1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta^2 \chi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$\Delta^2 F - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} = 0, \quad w = \left( 1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi,$$

$$\frac{1 - \nu^2}{2} \frac{h^2}{\beta} \Delta \varphi = \varphi, \quad (4)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа в криволинейной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2$ , а  $\chi, \varphi$  – функции перемещения и сдвига соответственно. Если слои оболочки изготовлены из упругого материала, все коэффициенты в уравнениях (3), (4) являются вещественными и фиксированными параметрами. В нашем случае, т. е. для электрореологического сэндвича,  $E_2 = E'_2 + iE''_2$ ,  $G_2 = G'_2 + iG''_2$  – комплексные модули ( $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица), зависящие от напряженности электрического поля  $\mathcal{E}$ . Таким образом, как следует из соотношений (1), (2), приведенные цилиндрическая жесткость  $D$ , модуль Юнга  $E$  и параметры  $\beta, \theta$ , содержащиеся в разрешающих уравнениях (3), (4), есть комплекснозначные функции аргумента  $\mathcal{E}$ . Обоснование использования данных уравнений с комплексными коэффициентами для слоистых оболочек, содержащих магнито- или электрореологический композит, было дано в работе [9].

Заметим, что уравнение (4) определяет интегралы краевого эффекта – функции, описывающие сдвиги у краев панели и быстро затухающие при удалении от них [4]. Как видно, данное уравнение не связано с основными уравнениями (3). Вопрос учета его интегралов при построении общего решения зависит от варианта граничных условий. В частности, если все кромки защемлены и есть диафрагмы, препятствующие относительно сдвигу слоев, или если имеются шарнирно опертые края без диафрагм, уравнения (3), (4) решаются совместно [14].

Здесь рассматриваем случай, когда все кромки шарнирно оперты и имеют диафрагму. Соответствующие граничные условия задаются выражениями [8]

$$\chi = \Delta \chi = \Delta^2 \chi = 0, \quad F = \Delta F = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_j} = 0 \text{ при } \alpha_j = 0, L_j \quad (j = 1, 2). \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) можно опустить. Заметим, что учет краевых эффектов для данного варианта граничных условий в рамках модели 1 может быть осуществлен с использованием полной системы пяти уравнений относительно трех компонентов вектора перемещений и двух параметров, описывающих сдвиги в «эквивалентной» однослойной оболочке [4; 7].

**Модель 2.** В этой модели приведенные параметры «эквивалентной» однослойной оболочки определяются следующим образом [10; 11]:

$$K_0 = \int_0^h E(z) dz, \quad D = \int_0^h E_*(z)(z-a)^2 dz, \quad K = \int_0^h E_*(z) dz,$$

$$E_*(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, \quad g = \frac{1}{R^2 D} \int_0^h \frac{\Theta^2(z)}{G(z)} dz, \quad \Theta(z) = \int_0^z E_*(\zeta)(\zeta-a) d\zeta,$$

$$a = \frac{1}{K} \int_0^h E_*(z) z dz, \quad \rho_0 = \frac{1}{h} \int_0^h \rho(z) dz.$$

Здесь  $E(z)$ ,  $G(z)$ ,  $\nu(z)$ ,  $\rho_0(z)$  – заданные кусочно-непрерывные функции, определяемые на каждом слое сэндвича своим значением. Например,

$$E(z) = \begin{cases} E_1, & 0 \leq z \leq h_1, \\ E_2, & h_1 < z < h_1 + h_2, \\ E_3, & h_1 + h_2 \leq z \leq h. \end{cases}$$

Движение оболочки описывается уравнениями [11]

$$D\Delta^2 \chi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{6}$$

$$\Delta^2 F + \frac{K_0}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} = 0, \quad w = (1 - gR^2 \Delta) \chi.$$

Как видно, первое из уравнений (3) в модели 1 имеет более высокий порядок, чем первое уравнение системы (6), и содержит член с коэффициентом  $\theta$ , который мал. Так, для однослойной изотропной оболочки [8]  $\theta = \frac{1}{85}$ . С точностью до данного слагаемого и вплоть до способа вычисления безразмерных параметров сдвига  $\frac{h^2}{\beta R^2}$  и  $g$  в моделях 1 и 2 соответственно указанные системы уравнений совпадают.

Следует отметить, что рамки применимости обеих моделей ограничены. Модель 1 может использоваться для оболочек с любыми граничными условиями и позволяет учитывать краевые эффекты, порождаемые дополнительными граничными условиями, которые обусловлены повышением порядка уравнений по сравнению с уравнениями (6). Недостатком модели 1 является то, что она применима для случая, когда механические свойства слоев, составляющих оболочку, различаются незначительно. Напротив, модель 2 справедлива для цилиндрических оболочек, сильно неоднородных в направлении толщины, с произвольным (градиентным) распределением модулей упругости. Однако разрешающие уравнения (6) были выведены для пластин и оболочек, у которых кромки подчиняются условиям шарнирного опирания (условия типа (5)), и, таким образом, их применимость для других вариантов граничных условий, различающихся, например, наличием или отсутствием диафрагм, необоснованна.

### Собственные частоты и декременты колебаний

Рассмотрим задачу о собственных низкочастотных колебаниях электрореологической сэндвич-панели в рамках вышеописанных моделей. В случае принятия модели 1 уравнением (4) можно пренебречь, и решение разрешающих уравнений (для обеих моделей), удовлетворяющее граничным условиям (5), ищется в виде

$$(\chi, F) = (\chi^\circ, F^\circ) \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2} e^{-i\Omega t}. \tag{7}$$

Здесь  $\chi^\circ$ ,  $F^\circ$  – амплитуды функций перемещения и напряжений;  $n$ ,  $m$  – число волн в осевом и окружном направлениях соответственно;  $\Omega = \omega + i\alpha$ , где  $\omega$  – собственная частота, а  $\alpha$  – соответствующий декремент вязкоупругих колебаний.

Подстановка (7) в уравнения (3) и (6) приводит к следующим соотношениям для комплексного собственного значения краевой задачи:

$$\Omega = \Omega(n, m) = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 R^2}} \sqrt{\frac{\pi^4 \eta_3 h^2}{12 R^2 (1 - \nu^2)} \frac{(1 + \theta \kappa \delta_{nm}) \delta_{nm}^2}{1 + \kappa \delta_{nm}} + \frac{n^4}{l^4 \delta_{nm}^2}} \quad (\text{модель 1}),$$

$$\Omega = \Omega(n, m) = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0 h R^2}} \sqrt{\frac{\pi^4 D}{R^2 K_0} \frac{\delta_{nm}^2}{1 + g \delta_{nm}} + \frac{n^4}{l^4 \delta_{nm}^2}} \quad (\text{модель 2}),$$

где  $\kappa = \frac{\pi^4 h^2}{\beta R^2}$ ;  $l = \frac{L_1}{R}$ ;  $\delta_{nm} = \frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{\varphi_2^2}$ ;  $\varphi_2 = \frac{L_2}{R}$  – угол раствора панели.

Заметим, что параметры  $E$ ,  $\eta_3$ ,  $\kappa$ ,  $D$ ,  $K_0$ , а также приведенный коэффициент Пуассона  $\nu$  (для модели 1) являются комплекснозначными функциями комплексного модуля сдвига  $G_3$  ЭРК, свойства которого, в свою очередь, зависят от напряженности электрического поля  $\mathcal{E}$  и температуры  $T$  композита [4; 9]. Таким образом, меняя параметры  $\mathcal{E}$  и  $T$ , мы можем «настраивать» вязкоупругие свойства «интеллектуальной» панели и, как следствие, смещать спектр частот вправо и увеличивать ее демпфирующие свойства.

Далее найдем наименьшую частоту и соответствующий декремент как функции  $\mathcal{E}$  и  $T$ :

$$\omega_* = \min_{n, m} \operatorname{Re} \Omega(n, m) = \omega(n_*, m_*), \quad \alpha_* = \operatorname{Im} \Omega(n_*, m_*).$$

### Численный анализ

Расчеты выполнены для панели, внешние слои которой изготовлены из АБС-пластика SD-0170. Здесь последний трактуется как упругий материал с характеристиками  $E_1 = E_3 = 1,5 \cdot 10^3$  МПа;  $\nu_1 = \nu_3 = 0,4$ ;  $\rho_1 = \rho_3 = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Геометрические размеры сэндвич-панели:  $L = R = 1$  м;  $h_1 = h_3 = 0,5$  мм;  $h_2 = 10$  мм;  $\varphi_2 = \pi$ . Ядро сэндвича изготовлено из высококонцентрированной электрореологической жидкости, состоящей из частиц гётита (45 %), трансформаторного масла (51 %) и глицерина моноолеата (4 %). Вещественная и мнимая части модуля сдвига,  $G'_2$  и  $G''_2$  соответственно, как функции напряженности электрического поля и температуры, приведены в работе [4, рис. 2.13]. На рис. 2 показаны зависимости наименьшей собственной частоты  $\omega_*$  от напряженности  $\mathcal{E}$  при температуре ЭРК 0; 60 и 100 °С, а на рис. 3 – аналогичные зависимости для декремента  $\alpha_*$ . Сплошные линии соответствуют данным, полученным с использованием модели 1, а пунктирные – результатам в рамках модели 2. При расчетах влияние температуры на упругие свойства пластика, равно как и дополнительные напряжения в оболочке, обусловленные нагревом, во внимание не принималось.

Видно, что для ненагретого ЭРК (при  $T = 0$  °С) кривые *частота – напряженность* и *декремент – напряженность* имеют явно выраженные максимумы. В частности, при напряженности электрического поля  $\mathcal{E} \approx 1,1$  кВ/мм ЭРК обладает наибольшей способностью демпфировать низкочастотные колебания рассматриваемой сэндвич-панели. В случае нагретого композита рост напряженности приводит к ожидаемому эффекту – увеличению частоты собственных колебаний и уменьшению демпфирования.

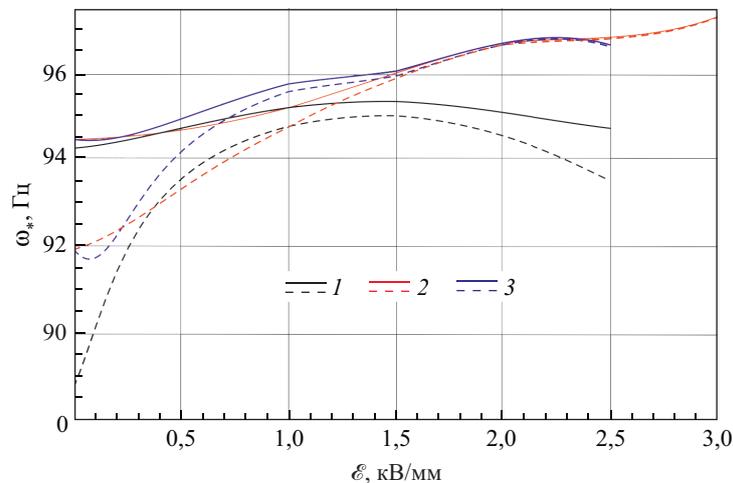


Рис. 2. Зависимость наименьшей собственной частоты от напряженности электрического поля при различных температурах композита: 1 – 0 °С; 2 – 60 °С; 3 – 100 °С.

Сплошные линии соответствуют модели 1, пунктирные – модели 2

Fig. 2. The lowest natural frequency versus electric field strength for different temperatures of the composite: 1 – 0 °С; 2 – 60 °С; 3 – 100 °С. Solid lines – model 1, dash lines – model 2

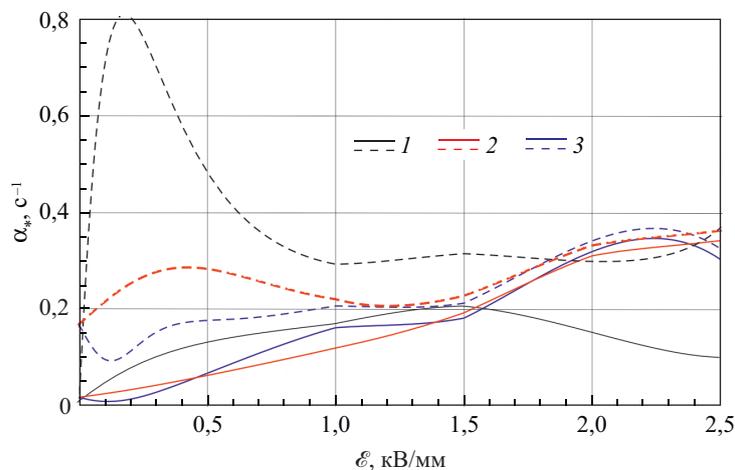


Рис. 3. Зависимость декремента от напряженности электрического поля при различных температурах композита: 1 – 0 °С; 2 – 60 °С; 3 – 100 °С. Сплошные линии соответствуют модели 1, пунктирные – модели 2

Fig. 3. The logarithmic decrement versus electric field strength for different temperatures of the composite: 1 – 0 °С; 2 – 60 °С; 3 – 100 °С. Solid lines – model 1, dash lines – model 2

Анализ кривых также свидетельствует, что модель 1 дает завышенную оценку наименьшей частоты при любой температуре по сравнению с моделью 2, которая ранее показала хорошее совпадение результатов с точными решениями для слоистых пластин [10]. И наоборот, логарифмический декремент, определяемый по модели 1, оказывается ниже декремента, найденного в рамках модели 2. Данные расхождения в результатах, полученных на основе этих двух моделей, оказываются значительными при малых величинах напряженности электрического поля, но для нагретого композита при напряженности  $E > 1,5$  кВ/мм модели 1 и 2 дают практически одинаковые результаты. Указанный эффект объясняется тем, что с ростом температуры и напряженности электрического поля жесткостные характеристики упругого материала внешних слоев сэндвича и электрореологического ядра сближаются, что приводит к увеличению точности модели 1.

### Заключение

В работе рассмотрены две модели слоистых оболочек, учитывающие сдвиги: модель Григolloка – Куликова [8], основанная на введении обобщенных кинематических гипотез Тимошенко, и модель типа Тимошенко – Рейсснера, развитая П. Е. Товстиком [10] для оболочек, неоднородных в направлении толщины. На основе этих моделей, замещающих слоистую оболочку «эквивалентной» однослойной трансверсально-изотропной оболочкой, исследованы низкочастотные вязкоупругие колебания трехслойной цилиндрической панели средней длины, внутренний слой которой изготовлен из ЭРК. Показано, что температура и приложенное электрическое поле сильно влияют на вязкоупругие свойства электрореологической панели и, как следствие, на ее динамические характеристики. В частности, установлено, что частота собственных колебаний нагретой электрореологической панели является монотонно возрастающей функцией напряженности электрического поля, в то время как кривая *декремент – напряженность* показывает наличие локального максимума, соответствующего наилучшему затуханию вязкоупругих колебаний.

Выполненный сравнительный анализ собственных частот и декрементов колебаний, найденных на основе двух моделей, позволяет сделать вывод о том, что модель 1, предполагающая рассмотрение любого варианта граничных условий, может быть использована для расчета низкочастотного спектра вязкоупругих колебаний сэндвич-оболочки только в случае близости жесткостных характеристик слоев. При расчете сэндвич-панели, содержащей ЭРК, данное требование выполняется, если композит хорошо нагрет и приложено электрическое поле большой напряженности (более 1,5 кВ/мм).

### Библиографические ссылки

1. Yalcintas M, Dai H. Magnetorheological and electrorheological materials in adaptive structures and their performance comparison. *Smart Materials and Structures*. 1999;8(5):560–573. DOI: 10.1088/0964-1726/8/5/306.
2. Hao T, Kawai A, Ikazaki F. Mechanism of electrorheological effect: evidence from the conductive, dielectric, and surface characteristics of water-free electrorheological fluid. *Langmuir*. 1998;14(5):1256–1262. DOI: 10.1021/la971062e.

3. Eshaghi M, Sedaghati R, Rakheja S. Dynamic characteristics and control of magnetorheological/electrorheological sandwich structures: a state-of-the-art review. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016;27(15):2003–2037. DOI: 10.1177/1045389X15620041.
4. Mikhasev GI, Altenbach H. Equivalent single layer model for thin laminated cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 29–84. (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9\_2.
5. Yeh J-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer. *Aerospace Science and Technology*. 2011;15(4):293–303. DOI: 10.1016/j.ast.2010.08.002.
6. Mohammadi F, Sedaghati R. Nonlinear free vibration analysis of sandwich shell structures with a constrained electrorheological fluid layer. *Smart Materials and Structures*. 2012;21(7):075035. DOI: 10.1088/0964-1726/21/7/075035.
7. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
8. Григोलюк ЭИ, Куликов ГМ. *Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин*. Москва: Машиностроение; 1988. 288 с.
9. Mikhasev G, Botogova M, Korobko E. Theory of thin adaptive laminated shells based on magnetorheological materials and its application in problems on vibration suppression. In: Altenbach H, Eremeyev V, editors. *Shell-like structures*. Heidenberg: Springer; 2011. p. 727–750. (Advanced structured materials; volume 15). DOI: 10.1007/978-3-642-21855-2\_48.
10. Tovstik PE, Tovstik TP. Generalized Timoshenko – Reissner model for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2017;97(3):296–308. DOI: 10.1002/zamm.201600052.
11. Mikhasev GI, Tovstik PE. *Localized dynamics of thin-walled shells*. Boc Raton: CRC Press; 2020. 349 p. (Chapman & Hall/CRC monographs and research notes in mathematics).
12. Устинов ЮА. *Математическая теория поперечно-неоднородных плит*. Ростов-на-Дону: ЦВВР; 2006. 257 с.
13. Mikhasev GI, Seeger F, Gabbert U. Comparison of analytical and numerical methods for the analysis of buckling and vibrations of composite shell structures. In: *Proceedings of the 5<sup>th</sup> Magdeburg days of mechanical engineering; 2001 September 19–20; Magdeburg, Germany*. Berlin: Logos; 2001. p. 175–183.
14. Mikhasev GI, Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 157–198. (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9\_4.

## References

1. Yalcintas M, Dai H. Magnetorheological and electrorheological materials in adaptive structures and their performance comparison. *Smart Materials and Structures*. 1999;8(5):560–573. DOI: 10.1088/0964-1726/8/5/306.
2. Hao T, Kawai A, Ikazaki F. Mechanism of electrorheological effect: evidence from the conductive, dielectric, and surface characteristics of water-free electrorheological fluid. *Langmuir*. 1998;14(5):1256–1262. DOI: 10.1021/la971062e.
3. Eshaghi M, Sedaghati R, Rakheja S. Dynamic characteristics and control of magnetorheological/electrorheological sandwich structures: a state-of-the-art review. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016;27(15):2003–2037. DOI: 10.1177/1045389X15620041.
4. Mikhasev GI, Altenbach H. Equivalent single layer model for thin laminated cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 29–84. (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9\_2.
5. Yeh J-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer. *Aerospace Science and Technology*. 2011;15(4):293–303. DOI: 10.1016/j.ast.2010.08.002.
6. Mohammadi F, Sedaghati R. Nonlinear free vibration analysis of sandwich shell structures with a constrained electrorheological fluid layer. *Smart Materials and Structures*. 2012;21(7):075035. DOI: 10.1088/0964-1726/21/7/075035.
7. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
8. Grigolyuk EI, Kulikov GM. *Mnogosloynye armirovannye obolochki. Raschet pnevmaticheskikh shin* [Multilayer reinforced shells. Calculation of pneumatic tires]. Moscow: Mashinostroenie; 1988. 288 p. Russian.
9. Mikhasev G, Botogova M, Korobko E. Theory of thin adaptive laminated shells based on magnetorheological materials and its application in problems on vibration suppression. In: Altenbach H, Eremeyev V, editors. *Shell-like structures*. Heidenberg: Springer; 2011. p. 727–750. (Advanced structured materials; volume 15). DOI: 10.1007/978-3-642-21855-2\_48.
10. Tovstik PE, Tovstik TP. Generalized Timoshenko – Reissner model for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2017;97(3):296–308. DOI: 10.1002/zamm.201600052.
11. Mikhasev GI, Tovstik PE. *Localized dynamics of thin-walled shells*. Boc Raton: CRC Press; 2020. 349 p. (Chapman & Hall/CRC monographs and research notes in mathematics).
12. Ustinov YuA. *Matematicheskaya teoriya poperechno-neodnorodnykh plit* [Mathematical theory of transversely heterogeneous plates]. Rostov-on-Don: CVVR; 2006. 257 p. Russian.
13. Mikhasev GI, Seeger F, Gabbert U. Comparison of analytical and numerical methods for the analysis of buckling and vibrations of composite shell structures. In: *Proceedings of the 5<sup>th</sup> Magdeburg days of mechanical engineering; 2001 September 19–20; Magdeburg, Germany*. Berlin: Logos; 2001. p. 175–183.
14. Mikhasev GI, Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 157–198. (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9\_4.

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

---

## THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

---

---

УДК 004.9

### УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ К СОСТЯЗАТЕЛЬНЫМ АТАКАМ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ БИОМЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

*Д. М. ВОЙНОВ<sup>1)</sup>, В. А. КОВАЛЕВ<sup>2)</sup>*

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,  
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

В настоящий момент большинство исследований и разработок в области глубокого обучения концентрируются на повышении точности распознавания, в то время как проблема состязательных атак на глубокие нейронные сети и их последствий пока не получила должного внимания. Данная статья посвящена экспериментальной оценке влияния различных факторов на устойчивость нейронных сетей к состязательным атакам при решении задач распознавания биомедицинских изображений. На обширном материале, включающем более чем 1,45 млн радиологических и гистологических изображений, исследуется эффективность атак, подготовленных с помощью алгоритма спроецированного градиентного спуска (PGD), алгоритма «глубокого обмана» (DeepFool) и алгоритма Карлини – Вагнера (CW). Анализируются результаты атак обоих типов (по методам белого и черного ящика) на

---

#### Образец цитирования:

Войнов ДМ, Ковалев ВА. Устойчивость нейронных сетей к состязательным атакам при распознавании биомедицинских изображений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;3:60–72. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-60-72>

#### For citation:

Voynov DM, Kovalev VA. The stability of neural networks under condition of adversarial attacks to biomedical image classification. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:60–72. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-60-72>

---

#### Авторы:

*Дмитрий Михайлович Войнов* – магистрант кафедры дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – В. А. Ковалев.

*Василий Алексеевич Ковалев* – кандидат технических наук; заведующий лабораторией анализа биомедицинских изображений.

#### Authors:

*Dmitry M. Voynov*, master's degree student at the department of discrete mathematics and algorithmics, faculty of applied mathematics and computer science.

[voynovdd@gmail.com](mailto:voynovdd@gmail.com)

*Vassili A. Kovalev*, PhD (engineering); head of the laboratory of biomedical image analysis.

[vassili.kovalev@gmail.com](mailto:vassili.kovalev@gmail.com)

нейронные сети с архитектурами InceptionV3, Densenet121, ResNet50, MobileNet и Xception. Основным выводом работы заключается в том, что проблема состязательных атак актуальна для задач распознавания биомедицинских изображений, поскольку протестированные алгоритмы успешно атакуют обученные нейронные сети так, что их точность падает ниже 15 %. Установлено, что при тех же величинах злонамеренных возмущений изображения алгоритм PGD менее эффективен, чем алгоритмы DeepFool и CW. При использовании в качестве метрики сравнения изображений  $L_2$ -нормы алгоритмы DeepFool и CW генерируют атакующие изображения близкого качества. В трех из четырех задач распознавания радиологических и гистологических изображений атаки по методу черного ящика с использованием алгоритма PGD показали низкую эффективность.

**Ключевые слова:** глубокое обучение; состязательные атаки; биомедицинские изображения.

## THE STABILITY OF NEURAL NETWORKS UNDER CONDITION OF ADVERSARIAL ATTACKS TO BIOMEDICAL IMAGE CLASSIFICATION

D. M. VOYNOV<sup>a</sup>, V. A. KOVALEV<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

<sup>b</sup>United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,  
6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus

Corresponding author: V. A. Kovalev (vassili.kovalev@gmail.com)

Recently, the majority of research and development teams working in the field deep learning are concentrated on the improvement of the classification accuracy and related measures of the quality of image classification whereas the problem of adversarial attacks to deep neural networks attracts much less attention. This article is dedicated to an experimental study of the influence of various factors on the stability of convolutional neural networks under the condition of adversarial attacks to biomedical image classification. On a very extensive dataset consisted of more than 1.45 million of radiological as well as histological images we assess the efficiency of attacks performed using the projected gradient descent (PGD), DeepFool and Carlini – Wagner (CW) methods. We analyze the results of both white and black box attacks to the commonly used neural architectures such as InceptionV3, Densenet121, ResNet50, MobileNet and Xception. The basic conclusion of this study is that in the field of biomedical image classification the problem of adversarial attack stays sharp because the methods of attacks being tested are successfully attacking the above-mentioned networks so that depending on the specific task their original classification accuracy falls down from 83–97 % down to the accuracy score of 15 %. Also, it was found that under similar conditions the PGD method is less successful in adversarial attacks comparing to the DeepFool and CW methods. When the original images and adversarial examples are compared using the  $L_2$ -norm, the DeepFool and CW methods generate the adversarial examples of similar maliciousness. In addition, in three out of four of black-box attacks, the PGD method has demonstrated lower attacking efficiency.

**Keywords:** deep learning; adversarial attacks; biomedical images.

### Введение

Одним из активно развивающихся и повсеместно применяемых инструментов современного машинного обучения является глубокое обучение – использование глубоких нейронных сетей в качестве обучаемого алгоритма. Глубокие нейронные сети показывают высокие результаты в широком спектре задач машинного обучения, таких как анализ изображений (классификация, сегментация, обнаружение (или детектирование) объектов), анализ текста (определение содержания, выделение смысла), обработка звука (распознавание речи) и др. Причинами этого можно назвать, во-первых, их способность выявлять сложнейшие зависимости в данных, а во-вторых, колоссальную «вместимость», что позволяет как ученым, так и инженерам не задумываясь выбирать нейронные сети, если размер данных очень велик.

На сегодняшний день большинство разрабатываемых методов и алгоритмов направлены на достижение максимальной точности работы обучаемых моделей [1]. Однако такой подход привел научное сообщество к серьезной проблеме. Обнаружилось, что глубокие нейронные сети чрезвычайно неустойчивы. Были найдены специальные алгоритмы, которые минимально изменяют входное изображение, после чего оно по каким-то причинам неправильно распознается сетью [2]. При этом изменения изображения настолько малы, что зачастую неразличимы человеческим глазом. Процесс, при котором такое

изображение генерируется и подается на вход сети, называется состязательной атакой. Разумеется, указанная проблема создает серьезную брешь в безопасности нейронных сетей и ставит под сомнение целесообразность их использования в задачах с высокой ответственностью. Поэтому крайне важным является изучение и устранение данного эффекта.

В настоящей работе исследуется такая область применения глубоких нейронных сетей, как анализ биомедицинских изображений. Использование машинного обучения в этой области необходимо для решения множества задач [3; 4], на основе которых разрабатываются так называемые системы автоматического диагностирования. На последних лежит колоссальная ответственность, поскольку от их работы может зависеть человеческая жизнь. Кроме того, как и любая другая предметная область, анализ биомедицинских изображений, помимо общих задач и характеристик, имеет свою специфику. Поэтому проведение исследований на примере задач из указанной области не только помогает изучать общую проблему атак на нейронные сети как таковую, но и позволяет получить новые экспериментальные данные непосредственно по этому классу приложений.

### Состязательные атаки

**Понятие состязательных атак.** Под состязательной атакой понимается процесс, в результате которого атакуемый классификатор предсказывает класс изображения неверно как с точки зрения человека, так и с точки зрения обученной и протестированной нейросетевой модели. Под ошибкой предсказания понимается тот факт, что изображения, которые классификатор идентифицирует неправильно, являются, на первый взгляд, вполне допустимыми для соответствующей предметной области, но относятся к другому классу. При этом разница между такими ошибками и простыми ошибками распознавания заключается в том, что для данных изображений обычно есть практически не отличающиеся от них парные, которые тем не менее распознаются сетью правильно.

В настоящей работе исследование состязательных атак будет проводиться на примере задач классификации (распознавания) биомедицинских изображений. Однако стоит отметить, что атаки такого рода можно проводить и в рамках других задач машинного обучения (например, в области анализа и распознавания звука).

**Генерация атакующих изображений.** Первым и до сих пор основным способом проведения состязательных атак является генерация атакующих изображений (*adversarial examples*), т. е. искусственных изображений, слабо отличающихся от «нормальных» изображений определенной предметной области. Атакующие изображения генерируются с помощью специальных алгоритмов. Благодаря построению данных алгоритмов и некоторым другим факторам (о них будет сказано позже) подача таких изображений на вход нейронной сети зачастую заканчивается ошибкой предсказания.

Генерация атакующих изображений заключается в последовательном выполнении трех шагов:

- выбора изображения из предметной области атакуемой нейронной сети;
- генерации особого шумоподобного возмущения при помощи специального алгоритма;
- применения полученного возмущения к выбранному изображению путем обычного попиксельного сложения.

В результате получается искомое атакующее изображение, которое, вероятно, будет ошибочно предсказано классификационной сетью. Дадим формальное определение атакующим изображениям.

### Атакующие изображения

**Определение атакующего изображения.** Пусть  $x \in \mathbb{R}^d$  – нормализованное входное изображение;  $y : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, 1)^p$  – выход классификационной нейронной сети как функции от входного изображения с количеством классов  $p$ ;  $F : (0, 1)^p \rightarrow \{1, \dots, p\}$  – решающая функция классификации (в данной работе рассматривается функция  $\text{argmax}$ ). Положим  $\varepsilon > 0$  – некоторое небольшое положительное число. Тогда  $\varepsilon$ -атакующим изображением называется такое изображение, для которого справедливо неравенство

$$F(y(x)) \neq F(y(x^*)) \quad (1)$$

при выполнении ограничения

$$\|x - x^*\| < \varepsilon. \quad (2)$$

В последнем уравнении в качестве нормы рассматривают, как правило,  $L_2$  или  $L_\infty$ , но, разумеется, допустима любая норма.

Уравнение (1) показывает, что результат классификации атакующего изображения отличен от такового у исходного изображения. Но это обычная ситуация, например, для изображений, принадлежащих

другому классу. Для того чтобы продемонстрировать неестественность эффекта, вводится ограничение (2) на малую величину  $\epsilon$ . Приемлемое значение параметра (такое, чтобы атакующее изображение было достаточно близко к исходному) выбирается атакующим субъектом. Обычно, чтобы заставить классификатор ошибиться, достаточно выбрать небольшое  $\epsilon$ . Этот параметр называется магнитудой модификации, поскольку условие (2) можно переписать в виде

$$\|\Delta x\| < \epsilon, x^* = x + \Delta x.$$

В таком случае  $\epsilon$  является магнитудой модификации изображения  $x$ . Разумеется, при разных значениях  $\epsilon$  модификация изображения выражена в различной степени. Многие работы показывают, что часто изображение можно изменить незаметным для глаза человека образом и все равно заставить классификатор ошибиться.

### Алгоритмы генерации атакующих изображений

На сегодняшний день разработано достаточно много алгоритмов генерации атакующих изображений. Среди них выделяются как универсальные концепции, так и множество разнообразных эвристик. Для начала рассмотрим общую идею существующих алгоритмов, а затем приведем несколько конкретных методов.

**Классификация алгоритмов генерации атакующих изображений.** По информации, необходимой для работы, алгоритмы генерации делят на атаки по методу белого ящика и атаки по методу черного ящика.

Для проведения атаки по методу белого ящика необходимо знать конфигурацию сети, включая ее архитектуру и все параметры, полученные в результате обучения. Кроме того, требуется наличие оригинального изображения соответствующей предметной области для генерации самого атакующего изображения.

Для проведения атаки по методу черного ящика достаточно иметь доступ ко входу сети, куда подаются изображения, и к результатам предсказания, в то время как конфигурация сети может оставаться неизвестной. Разумеется, также нужна информация о предметной области распознаваемых изображений.

По наличию или отсутствию предопределенного класса, который необходимо фальсифицировать атакующему изображению, алгоритмы генерации атак делятся на направленные и ненаправленные. При проведении направленной атаки класс, к которому должно быть ошибочно отнесено атакующее изображение, заранее определен. Ненаправленные атаки, в свою очередь, призваны лишь обмануть сеть вне зависимости от того, к какому ошибочному классу будет отнесено изображение в результате распознавания. Большинство алгоритмов генерации атакующих изображений позволяют сконфигурировать их для проведения атаки любого из двух указанных типов. В данной работе рассматриваются исключительно ненаправленные атаки. Очевидно также, что в случае бинарной классификации типа «норма/патология» направленные и ненаправленные атаки совпадают.

**Алгоритм спроецированного градиентного спуска (projected gradient descent, PGD).** Данный метод есть не что иное, как применение классической техники градиентного спуска с учетом ограниченности возмущения [5–7]. В качестве целевой функции можно рассмотреть  $k$ -ю компоненту вектора вероятностей  $y'$ . Тогда минимизация такой функции будет приводить к снижению вероятности принадлежности атакующего изображения этому классу, а максимизация – к повышению.

В результате генерация направленного на класс  $t$  атакующего изображения по этому методу зависит от коэффициента обучения  $\alpha > 0$ , количества итераций  $n \in \mathbb{N}$ , магнитуды возмущений  $\epsilon$  и определяется следующим образом:

$$x_{k+1} = \text{clip}_{x, \epsilon}(x_k + \alpha \nabla_{y_t}(x_k)),$$

где  $x_0 = x$ ,  $k \in [0, n - 1]$ ,  $x^* = x_n$ , а функция  $\text{clip}_{x, \epsilon}$  «обрезает» те элементы ее аргумента, которые отличаются от тех же элементов  $x$  более чем на  $\epsilon$ . Генерация ненаправленного атакующего изображения по этому методу зависит от исходного класса  $m$  и определяется следующим образом:

$$x_{k+1} = \text{clip}_{x, \epsilon}(x_k - \alpha \nabla_{y_m}(x_k)).$$

Поскольку на каждой итерации применяется функция  $\text{clip}_{x, \epsilon}$ , то в результате работы алгоритма получится изображение  $x^*$ , автоматически удовлетворяющее ограничению (2) для  $L_\infty$ -нормы.

**Алгоритм «глубокого обмана» (DeepFool).** Данный алгоритм основан на идее линеаризации функции выхода нейронной сети и итеративном вычислении атакующего изображения как точки проекции на некоторую псевдополуплоскость [8; 9]. Одна итерация этого алгоритма задается формулой

$$x_{k+1} = x_k - \frac{y_l(x_k) - y_m(x_k)}{\|w_l - w_m\|^2} (w_l - w_m),$$

где  $w = \nabla y(x_k)$ ,  $x_0 = x$ ;  $m$  – исходный класс объекта  $x$ , а  $l$  – класс, выбираемый на каждой итерации так, чтобы возмущения объекта были минимальны. В качестве атакующего изображения используется значение  $x^* = (1 + \eta)x_p$  той итерации, на которой атака оказалась успешной.

**Алгоритм Карлини – Вагнера (CW).** Данный алгоритм генерации атакующих изображений основан на модификации применения алгоритма L-BFGS к специально поставленной задаче оптимизации [10]. Для генерации направленных на класс  $t$  атакующих изображений авторами работы [11] формулируется следующая задача минимизации:

$$\left\| \frac{1}{2}(\tanh(w) + 1) - x \right\| + c f_t \left( \frac{1}{2}(\tanh(w) + 1) \right) \rightarrow \min, w \in \mathbb{R},$$

где  $c$  – конфигурируемый параметр, а функция  $f_t(x)$  задается формулой

$$f_t(x) = \max \left( \max_{k \neq t} (y_k(x)) - y_t(x), -\kappa \right).$$

Функция  $f_t$  также зависит от параметра  $\kappa$ , показывающего желаемую степень уверенности в классификации атакующего изображения. При  $\kappa = 0$  достаточно найти успешное атакующее изображение, вероятность принадлежности целевому классу которого просто больше вероятностей принадлежности другим классам, но при увеличении  $\kappa$  повышается. Далее эта функция минимизируется известным оптимизатором Adam, и в результате после ограниченного количества итераций получается атакующее изображение.

### Используемые наборы данных

**Исходные наборы изображений.** В проведенном исследовании использовались пять различных наборов биомедицинских изображений, представленных в таблице. Ниже дается их краткое описание.

Задачи классификации и точность их решения  
 Image classification tasks and their classification accuracy

Набор данных	Акроним	Задача классификации	Количество изображений		Точность
			Общее	По классам	
Гистология с метастазами	H-MT	Норма/участки с метастазами	100 000	50 000/50 000	0,97
Гистология с опухолями в яичниках или щитовидной железе	H-OV	В яичниках: норма/опухоль	96 000	48 000/48 000	0,92
	H-TH	В щитовидной железе: норма/опухоль	96 000	48 000/48 000	0,94
	H-OV-TH	Яичники – норма/яичники – опухоль/щитовидная железа – норма/щитовидная железа – опухоль	192 000	48 000/48 000/48 000/48 000	0,91
Рентген легких (норма)	X-NR2	Две возрастные группы: 20–35/50–70 лет	200 000	100 000/100 000	0,98
	X-NR3	Три возрастные группы: 17–24/25–41/42–80 лет	550 080	183 360/183 360/183 360	0,83
Компьютерная томография легких	CT	Норма/туберкулез	149 248	111 990/37 258	0,96
Гистологические изображения, окрашенные шестью химическими агентами	H-ST	Препараты: CD31/CD105/D240/FRES/H & E/Ki67	267 984	59 568/37 488/55 296/35 280/24 192/56 160	0,95

*Гистологические изображения тканей лимфоузлов, пораженных метастазами.* Первоначально имелся набор полнослайдовых цветных гистологических изображений, окрашенных с использованием широко распространенной методики гематоксилин – эозин. Размеры изображений достигали  $100\,000 \times 100\,000$  пк. Поскольку изображения такого размера обычно не подвергаются анализу целиком, они были разрезаны на непересекающиеся плитки размером  $256 \times 256$  пк. Полученные плитки были очищены от участков чистого стекла и артефактов, которые не несут никакой информации. В итоге был сформирован набор из 100 000 цветных изображений размером  $256 \times 256$  пк, представляющих два класса – норму и участки с метастазами. Набор был полностью сбалансирован по классам: каждый из них включал 50 000 изображений.

*Гистологические изображения тканей яичников и щитовидной железы, пораженных опухолями.* Оригинальный набор данных состоял из 4000 изображений биопсии 26 пациентов. Изображения размером  $2048 \times 1536$  пк представляли либо норму, либо участки злокачественных опухолей в каждом из упомянутых органов. Применяв технику, аналогичную описанной выше, мы получили набор из 192 000 цветных изображений размером  $256 \times 256$  пк, разделенных на четыре класса: яичники – норма, яичники – опухоль, щитовидная железа – норма, щитовидная железа – опухоль. Данный набор также был сбалансирован: каждый класс включал 48 000 изображений.

*Рентгеновские изображения легких.* Оригинальный набор содержал около 2 млн (точно – 1 908 926) рентгеновских изображений грудной клетки разного размера, снятых с помощью различных цифровых рентгеновских аппаратов в процессе скрининга населения в целях выявления заболеваний легких, сердечно-сосудистой системы и скелета. Каждое изображение сопровождалось текстовым отчетом врача-радиолога, который включал первичный диагноз, а также информацию о поле и возрасте пациента. Изображения были нормализованы по яркости и приведены к одинаковому размеру ( $512 \times 512$  пк) путем применения передовых алгоритмов интерполяции. Из полученного массива данных было выбрано подмножество, состоящее из более 0,5 млн (точно – 550 080) изображений грудной клетки мужчин и женщин в возрасте от 17 до 80 лет включительно. Отбор осуществлялся с условием обеспечения равномерного представительства пациентов по полу и возрастным группам.

*Компьютерная томография легких.* Первоначально набор данных состоял из множества трехмерных компьютерно-томографических изображений пациентов, больных туберкулезом легких. Ввиду большой размерности 3D-изображения были разбиты на аксиальные 2D-слои размером  $512 \times 512$  пк. Затем в целях сохранения пространственной информации каждое полученное полутоновое двумерное изображение было преобразовано в цветное путем размещения изображения текущего слоя в зеленый канал, последующего нижнего слоя – в красный канал, а предыдущего верхнего слоя – в синий. Иными словами, пачка из трех слоев, отображающая вариабельность структуры 3D-изображения по оси  $z$ , представлялась в виде псевдоцветного изображения с тремя каналами – R, G и B. Поскольку размерность этих изображений все еще оставалась большой, они были нарезаны на плитки размером  $256 \times 256$  пк. В результате получилось 149 248 цветных изображений размером  $256 \times 256$  пк. Описанный набор данных был несбалансирован, так как включал 111 990 изображений со здоровыми участками легких и 37 258 изображений, представляющих легкие с новообразованиями различных видов, вызванных туберкулезом (каверны, фокусы, плеврит и др.).

*Гистологические изображения тканей, окрашенные шестью гистохимическими препаратами.* Оригинальный набор данных состоял из полнослайдовых гистологических изображений тканей, окрашенных шестью различными иммуногистохимическими препаратами (антителами), широко используемыми при диагностике онкологических заболеваний. Аналогично вышеописанным гистологическим наборам данных эти изображения также были нарезаны на плитки размером  $256 \times 256$  пк. В результате был сформирован набор из 267 984 цветных изображений, разделенных на шесть классов. Данные о балансе классов приведены в таблице.

Таким образом, исследовалось большое количество биомедицинских изображений различных модальностей, которые являются весьма распространенными и часто используемыми в медицине. В частности, гистологические изображения служат золотым стандартом в диагностике рака мягких тканей, а рентгеновские и компьютерно-томографические – одним из основных инструментов при диагностике заболеваний легких и выявлении дефектов скелета.

## Вычислительные эксперименты

**Построенные задачи классификации.** На основе пяти вышеприведенных наборов биомедицинских изображений были построены восемь задач классификации (см. таблицу). Для некоторых наборов данных существовала возможность конфигурирования нескольких задач классификации, что позволило изучить эффект состязательных атак более детально. Как видно из таблицы, в настоящей работе

рассматриваются в основном задачи бинарной классификации, которые наиболее часто встречаются на практике, либо те, к которым обычно сводятся более сложные задачи дифференциальной диагностики заболеваний.

**Обучение нейронных сетей.** Для каждой задачи классификации была обучена сверточная нейронная сеть. В качестве архитектуры сети выбрана InceptionV3. Предобученные веса сверток не использовались. Для обучения сетей изображения нормировались до отрезка  $[0, 1]$ . Тренировочным оптимизатором выступал Adam с одинаковым для всех задач обучающим коэффициентом. Во всех случаях для достижения приемлемых для исследования точностей классификации потребовалось менее 50 эпох обучения. Вычисления проводились на компьютере с процессором Intel® Core™ i7-6700K и двумя видеокартами Nvidia GeForce GTX 1080 Ti. В качестве библиотек для обучения нейронных сетей использовались Keras и Tensorflow.

### Исследование атак по методу белого ящика

Теперь опишем проводимые эксперименты. Для каждой пары *задача классификации – алгоритм генерации* выполняются следующие действия.

1. На нейронную сеть, обученную для решения задачи классификации, для каждого изображения из тестовой выборки при помощи выбранного алгоритма проводится атака. В результате генерируется атакующее изображение (рис. 1). Для дальнейшей оценки качества алгоритмов DeepFool и CW  $L_2$ - и  $L_\infty$ -нормы разности сгенерированного и исходного изображений сохраняются, а алгоритм PGD запускается для нескольких значений  $\epsilon$ .

2. Атакующее изображение подается на вход этой же сети (атака по методу белого ящика), а полученные вероятности принадлежности классам сохраняются для дальнейшего анализа.

В целях оценки эффективности работы алгоритма и качества генерируемых атакующих изображений вычисляется доля успешных атак, в результате которых норма разности атакующего и исходного изображений ограничена некоторым числом. В настоящей работе рассматривались  $L_2$ - и  $L_\infty$ -нормы.

**Зависимость успешности атак от  $L_\infty$ -нормы возмущения.** Построим график зависимости доли успешных атак от  $L_\infty$ -нормы применяемого возмущения. Как было сказано выше, для возможности построить такую зависимость алгоритм PGD запускается отдельно для  $\epsilon$ , равного 0,02–0,20 с шагом 0,02 (соответственно, напрямую ограничивая  $L_\infty$ -норму), а для алгоритмов DeepFool и CW  $L_\infty$ -нормы возмущения вычисляются по завершении их работы. Результаты представлены на рис. 2.

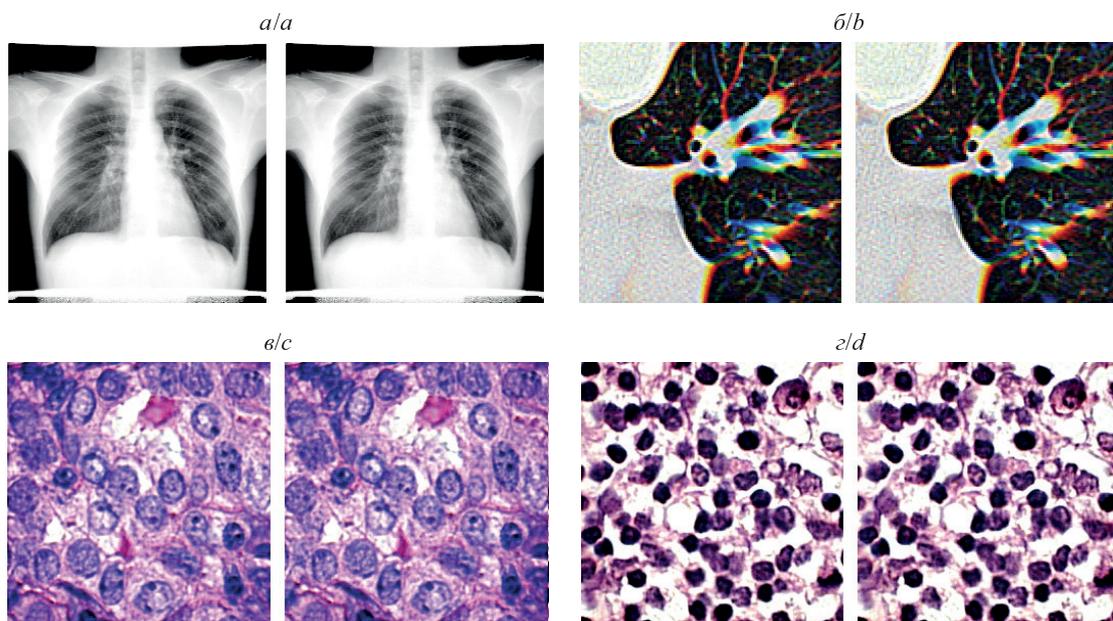


Рис. 1. Примеры радиологических (верхний ряд) и гистологических (нижний ряд) изображений.

В каждой паре слева показано исходное изображение,  
а справа – его атакующая версия, полученная с помощью алгоритма CW  
Fig. 1. Examples of radiological (top row) and histological (bottom row) images.  
In each image pair the original image is given on the left whereas  
its adversarial version is presented on the right side

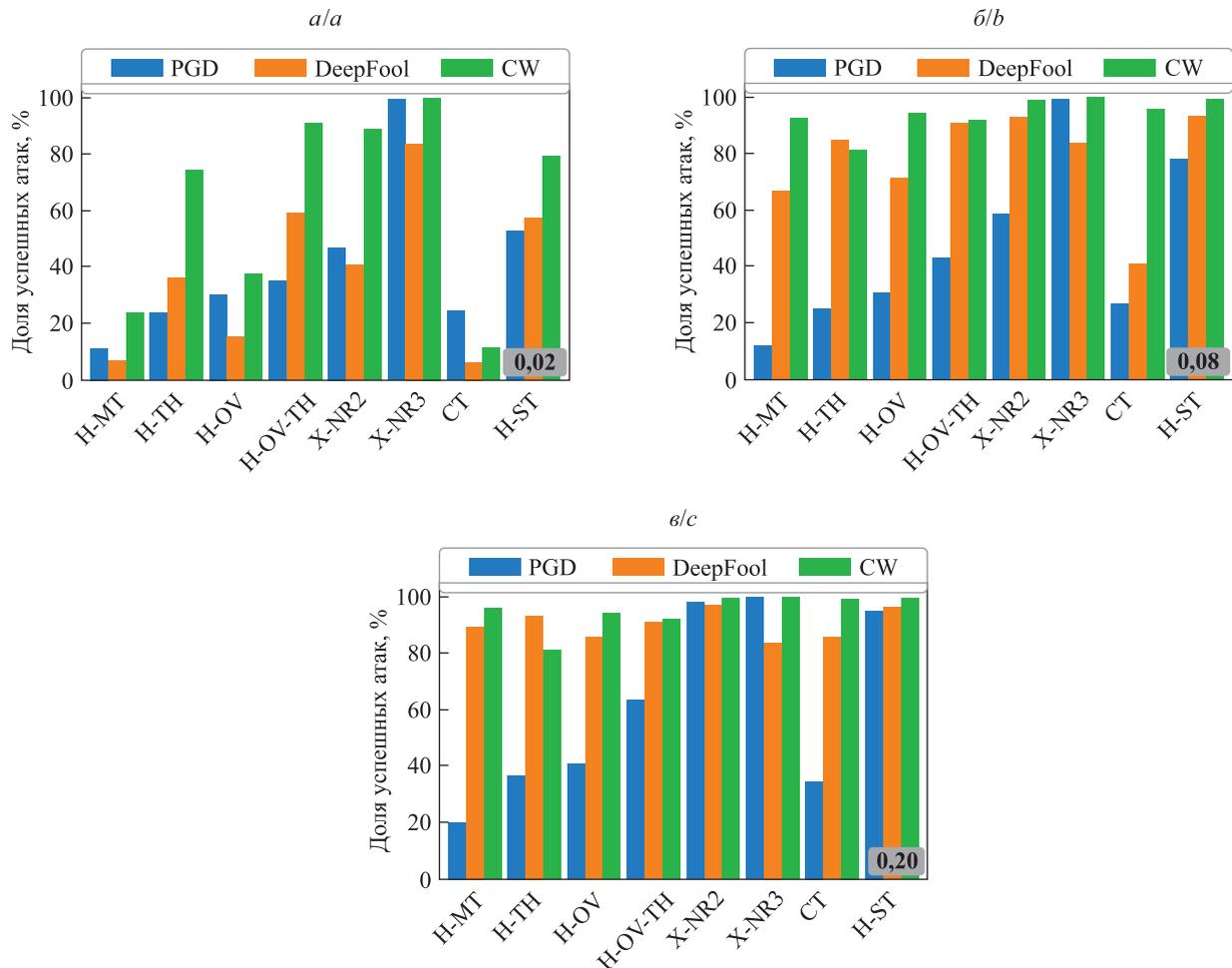


Рис. 2. Доля успешных атак для использованных наборов данных при ограничении  $L_\infty$ -нормы возмущения в 0,02; 0,08 и 0,20

Fig. 2. The fraction of successful attacks for each classification task under condition of limit of  $L_\infty$  perturbations equal to 0.02; 0.08 and 0.20

При использовании  $L_\infty$ -нормы алгоритм CW показал себя лучше почти во всех случаях (кроме  $\epsilon$ , равного 0,08 и 0,20 на наборе данных H-TH, где эффективнее себя проявил алгоритм DeepFool). Также можно отметить, что при минимальном рассмотренном значении  $\epsilon$  алгоритм PGD часто немного более эффективен, чем DeepFool. Однако уже при  $\epsilon$  не ниже 0,08 качество работы последнего заметно превышает результат PGD. В целом, как и ожидалось, алгоритм PGD показывал себя хуже, чем DeepFool и CW, несмотря на то что последние оптимизируют  $L_2$ -норму. При этом значительной эффективности (хотя бы 80 %) PGD не достигает в шести из восьми случаев даже при максимальном анализируемом возмущении.

**Зависимость успешности атак от  $L_2$ -нормы возмущения.** Построим аналогичную описанной выше зависимость, ограничивая возмущение  $L_2$ -нормой. Данную зависимость будем строить для алгоритмов DeepFool и CW, поскольку, как было показано ранее, алгоритм PGD работает заметно хуже при средних и больших возмущениях, а запуская его только для маленького  $\epsilon$ , мы не получим высокой итоговой эффективности. Результаты приведены на рис. 3.

Из представленных данных видно, что в целом алгоритмы DeepFool и CW близки по эффективности: для  $\epsilon$ , равного 1,0 и 2,0, в четырех из восьми случаев доли успешных атак этих алгоритмов почти равны, в оставшихся случаях однозначного фаворита не наблюдается. Однако стоит отметить, что для изображений размером  $256 \times 256$  пк  $\epsilon$ , равный 2,0, для  $L_2$ -нормы возмущения является весьма небольшой величиной. При указанном значении каждый пиксел в среднем меняется на 0,0078 (в условиях нормировки  $[0, 1]$ ), что составляет менее 1 % от максимально допустимого значения.

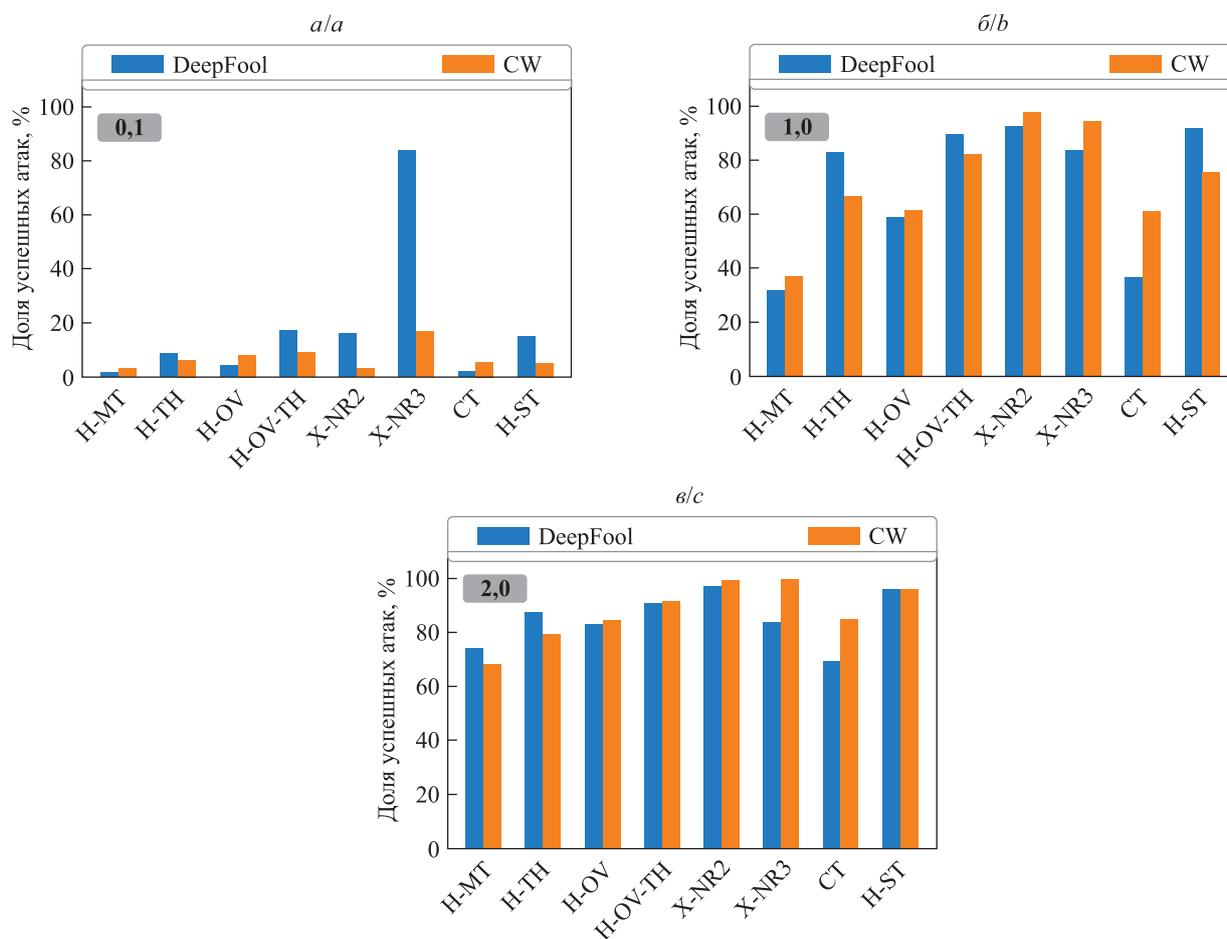


Рис. 3. Доля успешных атак для восьми наборов данных при ограничении  $L_2$ -нормы возмущения в 0,1; 1,0 и 2,0  
 Fig. 3. The fraction of successful attacks for each classification task under condition of limit of  $L_2$  perturbations equal to 0.1; 1.0 and 2.0

### Исследование атак по методу черного ящика

**Методика проведения атак.** Атаки по методу черного ящика осуществляются без использования информации об архитектуре или обученных весах нейронной сети. Нетрудно заметить, что в таких условиях генерация атакующих изображений по представленной выше методике становится невозможной, поскольку все рассмотренные алгоритмы используют градиент функции выхода нейронной сети, который напрямую зависит от обученных параметров. В данном случае требуется принципиально новая методика проведения атак.

На сегодняшний день предложено несколько способов осуществления атак по методу черного ящика. Большинство из них основаны на свойстве переносимости, заключающемся в том, что атакующее изображение, сгенерированное для атаки одной сети, часто успешно атакует и другую сеть, обученную классифицировать изображения того же типа [12]. Несмотря на то что в настоящий момент теоретические обоснования такого явления отсутствуют, оно неоднократно наблюдалось на практике. Полагаясь на это свойство, можно сформулировать методику действий, состоящую из трех основных шагов:

- на некоторой выборке изображений из предметной области классификации целевой сети обучаем свою инструментальную (имитирующую) сеть (в данной работе рассматривается режим, при котором доступна тренировочная выборка изображений атакующей целевой сети);
- проводим атаку по методу белого ящика на обученную инструментальную сеть и в итоге получаем атакующее изображение;
- подаем сгенерированное атакующее изображение на вход целевой атакующей сети и оцениваем получаемые результаты.

Таким образом, целевая сеть атакуется по методу черного ящика, поскольку информация об архитектуре и весах целевой сети никак не использовалась, потребовалась только информация о соответствующих параметрах обученной инструментальной сети, играющей роль вспомогательного инструмента.

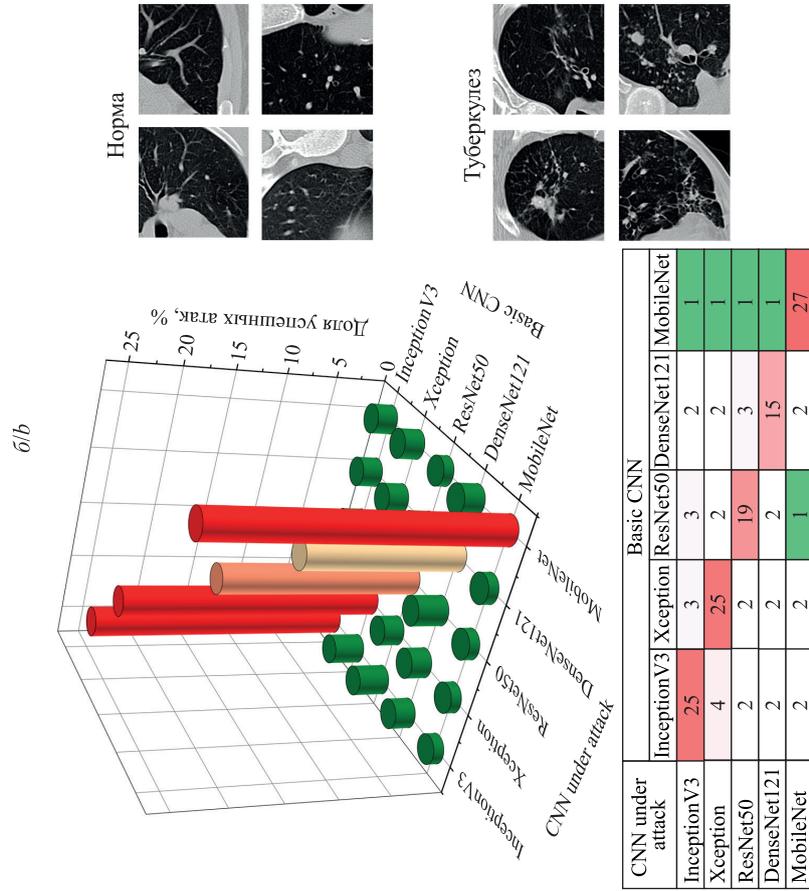
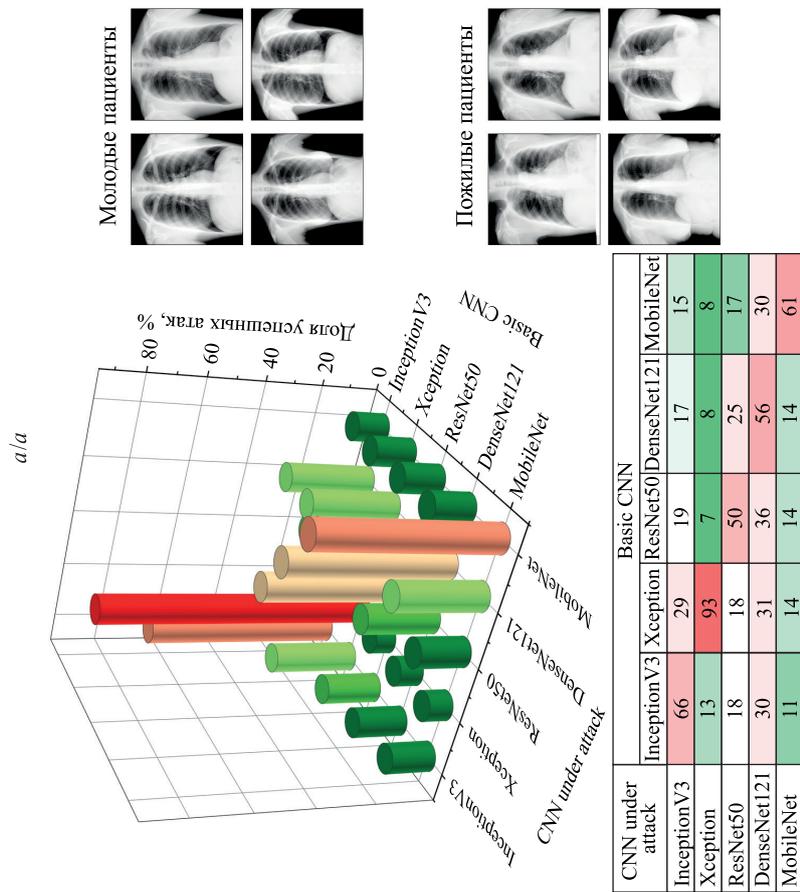
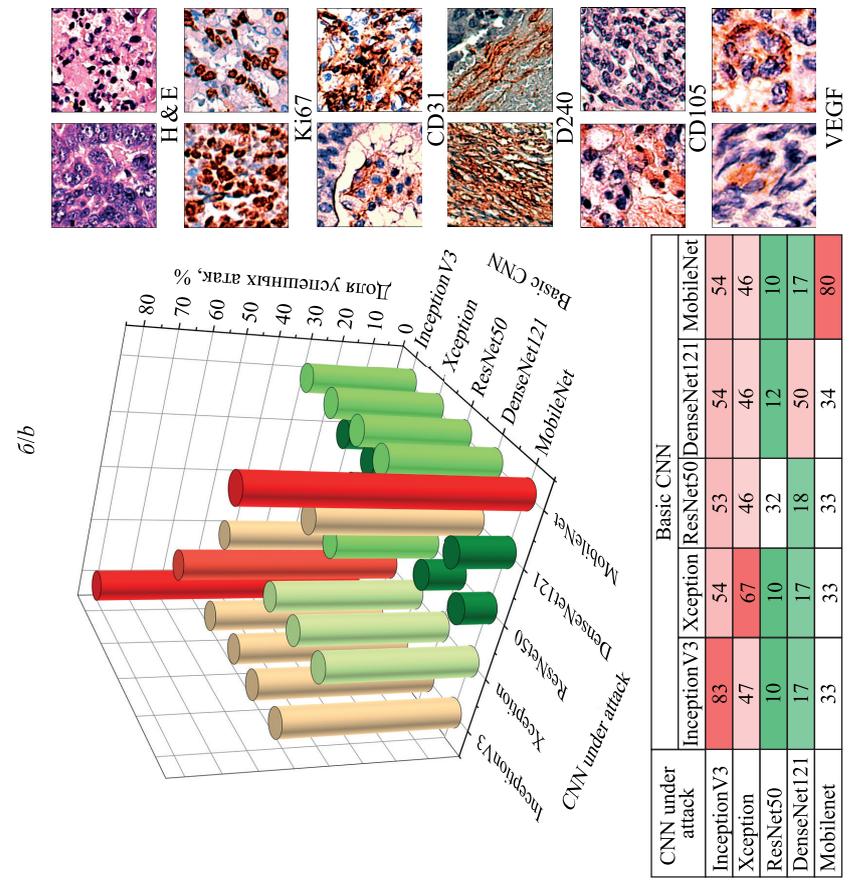
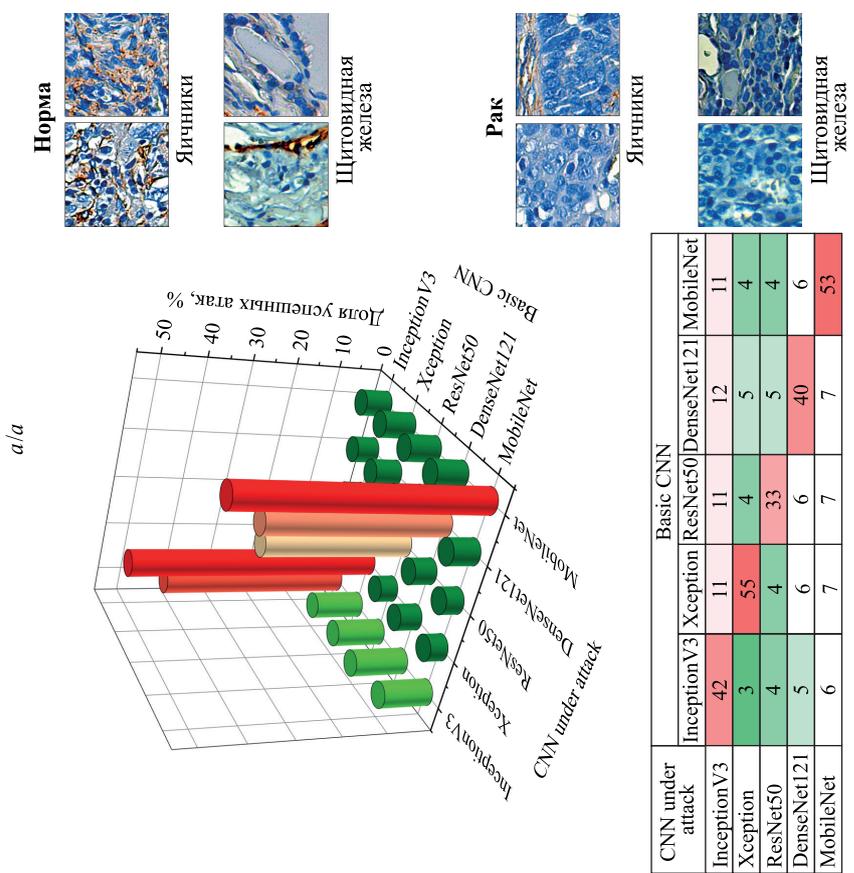


Рис. 4. Доли успешных атак по методу черного ящика при распознавании трехклассового набора рентгеновских изображений грудной клетки X-NR3 (a) и двухклассового набора компьютерно-томографических изображений легких CT (b)

Fig. 4. The percentage of successful black box attacks for X-NR3 image dataset of X-ray chest images consisting of three classes (a) and binary classification of computed tomography image dataset CT of tuberculosis and norm (b)



*Рис. 5.* Доли успешных атак по методу черного ящика при распознавании набора H-OV-TN гистологических изображений норма/рак по результатам биопсии яичников и щитовидной железы (*а*) и шести классов гистологических изображений, окрашенных различными иммуногистохимическими препаратами (*б*) of the norm and malignant tumors in thyroid glands and the ovary (*a*) and classification images of the H-ST dataset containing histology images stained with the help of six different immuno-histochemical antibodies (*b*)

Для проведения атак по данной методике в настоящей работе рассматриваются пять архитектур глубоких нейронных сетей – InceptionV3, DenseNet121, ResNet50, MobileNet и Xception. Из построенных ранее задач классификации были выбраны две задачи распознавания (классификации) радиологических изображений и две – гистологических. С учетом представленной методики атак по методу черного ящика для каждой выбранной задачи выполнялась следующая последовательность действий.

1. Обучаем каждую из приведенных пяти архитектур сетей.

2. Каждую из обученных сетей атакуем по методу белого ящика, генерируя соответствующее атакующее изображение для каждого исходного изображения из тестовой выборки. Сгенерированные изображения сохраняем.

3. В каждой паре обученных сетей одну сеть назначаем целевой, другую – инструментальной. Проводим атаку на целевую сеть путем подачи атакующих изображений, сгенерированных для инструментальной. Результаты предсказаний классов, выполненных целевой сетью, сохраняем. Затем меняем целевую и инструментальную сети местами и проводим аналогичную атаку.

В качестве алгоритма генерации атакующих изображений был выбран алгоритм PGD с  $\epsilon$ , равным 0,1.

**Результаты проведения атак.** После выполнения описанной последовательности действий для каждой выбранной задачи классификации получаем 25 наборов вероятностей классов изображений (результатов предсказаний), включая 20 наборов для каждой пары *целевая (атакуемая) сеть – инструментальная сеть* и 5 наборов для пар, сети в которых совпадают. Следует отметить, что в последнем случае мы имеем атаки по методу белого ящика, поскольку атаквалась та же самая сеть, для которой генерировались атакующие изображения. По полученным таким образом данным вычислялась доля успешных атак.

На рис. 4 и 5 графически проиллюстрированы результаты проведения экспериментов с атаками на радиологические и гистологические изображения соответственно. Можно видеть, что для двух задач классификации – СТ и Н-OV-ТН – доля успешных атак по методу черного ящика незначительна. Для задачи X-NR3 заметно влияние таких атак, а для задачи Н-СТ их сила сравнима с силой атак по методу белого ящика (хотя, разумеется, все же меньше). Также стоит отметить, что доля успешных атак по методу черного ящика определяется тем, на вход сети с какой конкретно архитектурой подавались сгенерированные изображения. При этом зависимости от того, для какой сети изображения генерировались, не наблюдается.

## Выводы

В данной работе было проведено экспериментальное исследование состоятельных атак на глубокие нейронные сети при решении задач классификации биомедицинских изображений различных типов в обоих режимах доступности информации: в режиме белого ящика и в режиме черного ящика. По результатам исследования можно сделать следующие выводы.

1. Проблема состоятельных атак актуальна для задач распознавания биомедицинских изображений, поскольку протестированные алгоритмы успешно атакуют обученные нейронные сети так, что их точность падает ниже 15 %.

2. Алгоритм спроецированного градиентного спуска (PGD) при тех же величинах злонамеренных возмущений изображения менее эффективен, чем алгоритм «глубокого обмана» (DeepFool) и алгоритм Карлини – Вагнера (CW).

3. При использовании в качестве метрики сравнения изображений  $L_2$ -нормы алгоритмы DeepFool и CW генерируют атакующие изображения близкого качества.

4. В трех из четырех задач распознавания радиологических и гистологических изображений атаки по методу черного ящика с использованием алгоритма PGD показали низкую эффективность.

## Библиографические ссылки /References

1. Recht B, Roelofs R, Schmidt L, Shankar V. Do CIFAR-10 classifiers generalize to CIFAR-10? arXiv:1806.00451 [Preprint]. 2018 [cited 2020 August 27]: [25 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1806.00451>.
2. Akhtar N, Mian AS. Threat of adversarial attacks on deep learning in computer vision: a survey. *IEEE Access*. 2018;6:14410–14430. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2807385.
3. Litjens G, Kooi T, Bejnordi BE, Setio AAA, Ciompi F, Ghafoorian M, et al. A survey on deep learning in medical image analysis. *Medical Image Analysis*. 2017;42:60–88. DOI: 10.1016/j.media.2017.07.005.
4. Ker J, Wang L, Rao J, Lim T. Deep learning applications in medical image analysis. *IEEE Access*. 2018;6:9375–9389. DOI: 10.1109/ACCESS.2017.2788044.
5. Madry A, Makelov A, Schmidt L, Tsipras D, Vladu A. Towards deep learning models resistant to adversarial attacks. arXiv: 1706.06083v4 [Preprint]. 2017 [cited 2020 August 27]: [28 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1706.06083>.

6. Ozdag M. Adversarial attacks and defenses against deep neural networks: a survey. *Procedia Computer Science*. 2018;140: 152–161. DOI: 10.1016/j.procs.2018.10.315.
7. Wang H, Yu C-N. A direct approach to robust deep learning using adversarial networks. arXiv:1905.09591v1 [Preprint]. 2019 [cited 2020 August 27]: [15 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1905.09591>.
8. Xu W, Evans D, Qi Y. Feature squeezing: detecting adversarial examples in deep neural networks. arXiv:1704.01155v2 [Preprint]. 2017 [cited 2020 August 27]: [15 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1704.01155>.
9. Moosavi-Dezfooli S-M, Fawzi A, Frossard P. DeepFool: a simple and accurate method to fool deep neural networks. arXiv: 1511.04599v3 [Preprint]. 2015 [cited 2020 August 27]: [9 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1511.04599>.
10. Szegedy C, Zaremba W, Sutskever I, Bruna J, Erhan D, Goodfellow I, et al. Intriguing properties of neural networks. In: *2<sup>nd</sup> International conference on learning representations; 2014 April 14–16; Banff, Canada*. Banff: Springer; 2014. p. 1–10.
11. Carlini N, Wagner D. Towards evaluating the robustness of neural networks. In: *2017 IEEE symposium on security and privacy; 2017 June 26; San Jose, CA, USA*. [S. l.]: IEEE; 2017. p. 39–57. DOI: 10.1109/SP.2017.49.
12. Goodfellow IJ, Shlens J, Szegedy C. Explaining and harnessing adversarial examples. arXiv:1412.6572v3 [Preprint]. 2015 [cited 2020 August 27]: [11 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1412.6572v3>.

Статья поступила в редколлегию 02.09.2020.  
Received by editorial board 02.09.2020.

---

---

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

---

## SHORT COMMUNICATIONS

---

---

УДК 004.492.3

### СКРЫТАЯ МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕДОНОСНЫХ УЗЛОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ

Я. В. БУБНОВ<sup>1)</sup>, Н. Н. ИВАНОВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,  
ул. Петруся Бровки, 6, 220013, г. Минск, Беларусь

Рассматривается проблема определения вредоносных узлов в компьютерной сети. Активность узлов сети фиксируется с помощью зашумленного детектора с привязкой ко времени. В работе предлагается метод идентификации подобных узлов путем классификации временных рядов активности узлов сети. Метод основан на построении скрытой марковской модели для анализируемого временного ряда и последующем поиске наиболее вероятного конечного состояния модели. Эффективность подхода базируется на предположении, что целевые кибератаки локализованы во времени, а значит, активность вредоносных узлов сети отличается от безопасных.

**Ключевые слова:** скрытая марковская модель; компьютерная сеть; целевая кибератака; классификация временных рядов.

---

#### Образец цитирования:

Бубнов ЯВ, Иванов НН. Скрытая марковская модель для определения вредоносных узлов компьютерной сети. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:73–79 (на англ.).  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-73-79>

#### For citation:

Bubnov YV, Ivanov NN. Hidden Markov model for malicious hosts detection in a computer network. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3: 73–79.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-73-79>

---

#### Авторы:

**Яков Васильевич Бубнов** – аспирант кафедры электронных вычислительных машин факультета компьютерных систем и сетей.

**Николай Николаевич Иванов** – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры электронных вычислительных машин факультета компьютерных систем и сетей.

#### Authors:

**Yakov V. Bubnov**, postgraduate student at the department of electronic computing machines, faculty of computer systems and networks.

[girokompas@gmail.com](mailto:girokompas@gmail.com)

**Nick N. Ivanov**, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of electronic computing machines, faculty of computer systems and networks.

[ivanovnn@gmail.com](mailto:ivanovnn@gmail.com)

## HIDDEN MARKOV MODEL FOR MALICIOUS HOSTS DETECTION IN A COMPUTER NETWORK

*Y. V. BUBNOV<sup>a</sup>, N. N. IVANOV<sup>a</sup>*

*<sup>a</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,  
6 Pietrusia Broŭki Street, Minsk 220013, Belarus*

*Corresponding author: Y. V. Bubnov (girokompass@gmail.com)*

The problem of malicious host detection in a computer network is reviewed. Activity of computer network hosts is tracking by a noisy detector. The paper suggests method for detection malicious hosts using activity timeseries classification. The approach is based on hidden Markov chain model that analyses timeseries and consecutive search of the most probable final state of the model. Efficiency of the approach is based on assumption that advanced persisted threats are localised in time, therefore malicious hosts in a computer network can be detected by virtue of activity comparison with reliable safe hosts.

**Keywords:** hidden Markov model; computer network; advanced persisted threat; timeseries classification.

### Introduction

Malicious activity detection methods in corporate computer networks still remain an important problem in computer science. To enforce the network security special instrument are embedded in operating systems and ingenuity software are elaborated. Such applications intend to prevent cyberattacks against the local networks and personal computers, theft of data, undesired spam-advertised products, dangerous drive-by hidden objects infected a visitor's machine with malware. As a result, the growing interest is observed in developing systems to protect the end user from the potential attack.

Except of the information theft, infected hosts are exploit for distributed denial of service attacks through a botnet. In such scheme DNS (domain name system) tunneling is commonly used to control the attack through central server. Hosts usually access the central server through hardcoded IP address or domain name. Therefore, networks protected with domain blocklists can easily prevent communication with remote adversary.

At this moment the most advanced method of botnet control is decentralised interconnection between infected nodes. In this scheme, infected host acts as client and takes role of a central server. Considering that decentralised approach does not exploit a single central server battling with these botnets becomes decently complex problem. There are two most common approaches in the organisation of decentralised botnets exist: (i) fast-flux networks and (ii) domain name generation algorithms.

The fast-flux approach assumes a peer-to-peer communication between the infected nodes of a botnet, where an access to the central server is performed through domain name resolution into multiple IP addresses. That means, multiple nodes in fast-flux networks act as proxies to the original central server. In this scheme even after blocking of the infected hosts, botnet still operates as list of IP addresses constantly rotated.

The domain name generations algorithms target corporate policies where malicious domains are blocklisted. In this scenario, malicious hosts exploit a generator of pseudo-random numbers to guess the current domain name of the central server. The frequent rotation of domain names makes blocklist protection powerless against this approach, since the amount of possible domain name combinations virtually infinite.

Mentioned prerequisites lead to the conclusion that exploit prevention of the corporate network nodes for distributed denial of service attacks require blocking of the infected nodes instead of requesting domain names.

Industry-standard method for dealing with this problem is detector analysing packets passing through the network. Such detector may collect system data from the packets [1] or reads system attributes from the nodes [2]. In monitoring system such as Prometheus, Zabbix, Nagios [3], these findings are stored as time series.

Activity of such systems needs tentative tuning of parameters ranges, that provide successful performance of hard and soft components. An operator may use manual adjustment of the system.

Generally, feasible intervals are set by experiment [4], above all in some systems procedures are prescribed and might be automated. The extreme option against harmful node is cutting out network fragment. The only problem is to find point of time for connection breakage due to time and data loss.

That is, common challenge in information security is to determine the point of time when the manual intervention in network activity is necessary.

This basic approach can separate malicious and infected hosts from the safe nodes. Malware is a standout most thoughtful intimidations for the Internet.

### Hidden Markov model for malicious hosts detection

Let the detector estimates probabilities referring transmitted network packet as a malicious one. It is a binary classifier. As a result of a detecting action a probability is assigned to each packet  $P_t$ , where  $t$  is a point of time. The observable events are a flow of packets  $P_t$ , the probability of the packet to be malicious is estimated by the detector as  $y_t \in [0, 1]$ . Markov chain is defined as the event sequence depicted in fig. 1, each observed event may be at one of the two possible states that correspond to two classes  $\tilde{y}_i \in \{0, 1\}$ .

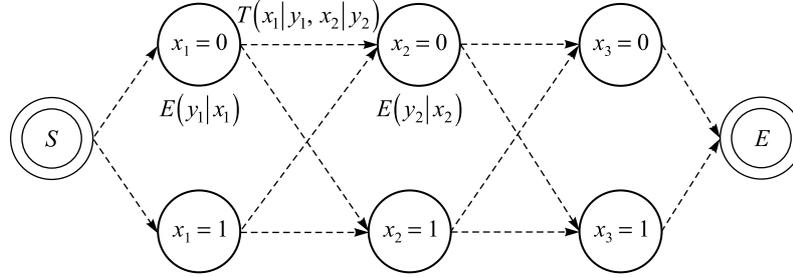


Fig. 1. Markov chain fragment with 3 observed events

It is assumed the  $i$  state probability is normally distributed, therefore emission probability of the state can be calculated with the standard formula

$$E(y_i|x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\left(\frac{x_i - y_i}{\sigma}\right)^2\right\},$$

where standard deviation is chosen as  $\sigma = 2.0$  and function is parametrised with a class probability  $x_i$ . In other words, the most reliably hidden state is observed in situation when standard deviation of the detector output signal lays inside the boundaries of the standard model.

In most cases observed events form ordinary flow of homogeneous events and mathematically are authentic to Poisson stream. Based on this assumption the transition probability from state  $i$  to state  $j$  might comply with density of exponential distribution:

$$T(y_i|x_i, y_j|x_j) = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{t_i - t_j}{\exp(1 - y_i \oplus y_j)}\right\},$$

where  $y_i \oplus y_j$  represents the Zhegalkin polynomial, which sets higher probabilities when Markov chain transitions to the states with the same class, whereas class changing is penalised by a factor value  $e$ .

For any given ordered time  $t \in \mathbf{T}$  interval with  $N$  elements the solution of the problem is on the base of reliable events forming the most probable path from initial state  $t_0$  to one of the final state  $t_N$ . All intermediate states have to belong to interval  $\mathbf{T}$ .

Viterbi algorithm can be applied for the most probable way on Markov chain construction (see fig. 1). The algorithm is specified by the following recurrent formulas:

$$V_{1,n} = E(y_1|x_1),$$

$$V_{t,n} = \max_i^N \left( E(y_t|x_t) \cdot T(y_t|x_t, y_n|x_n) \cdot V_{t-1,i} \right).$$

Final hidden state is produced by the final solution:

$$x_N = \arg \max_i^N (V_{t_N,i}).$$

Initial problem statement is not getting hidden states of the Markov chain. The challenge is in associating the event series to one of the classes. Direct solving of a classification problem through estimation of observing event sequence in the restored chain produces the result that ignores time locality. In fact, recent events produce more significant effect in comparison with events from the past.

At last, two virtual finite states of Markov chain are defined, they denote that both states are equiprobable. These states are intended for time series classification. Figure 2 represents updated Markov chain (compare with fig. 1).

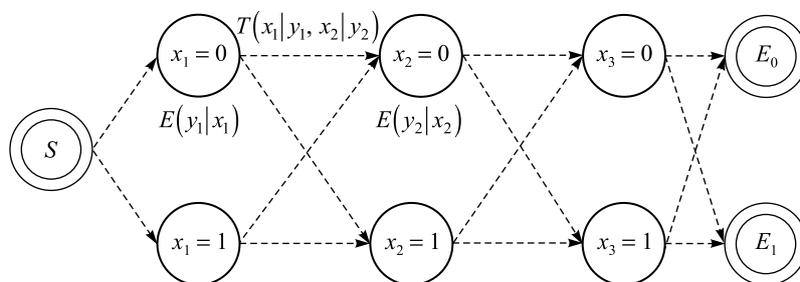


Fig. 2. Extended Markov chain with two extra equiprobable states

Viterbi algorithm estimates two final states probabilities:

$$P(N; \tilde{y} = 0) = V_{t_N, N_0},$$

$$P(N; \tilde{y} = 1) = V_{t_N, N_1}.$$

Then the result specifying the time series class is calculated by the formula

$$Y = \arg \max [P(N; \tilde{y} = 0), P(N; \tilde{y} = 1)]. \quad (1)$$

That is, more probable final state defines the chain class.

### Dijkstra path probability calculation algorithm

Formula (1) produces the solution of the time series classification problem. Mathematically it is the path in a directed acyclic graph or the most probable path on Markov chain.

Direct solution assumes enumeration of full set of all possible paths from an initial Markov chain's state  $S$  to all final states and estimation of the final state probability for each path. It is time consuming approach since due to binary branching at each current chain node an algorithm complexity is exponential, it is exactly equal to power of 2:

$$P(N; \tilde{y}) = O(2^N).$$

Even with progress in processor industry such algorithms are useless. Nevertheless, the optimal path in a given acyclic graph may be found by modified Dijkstra algorithm [5] that has polynomial time complexity.

Modified Dijkstra algorithm applied to Markov chain is described in following paragraphs. Let an oriented graph  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  presents a Markov chain model. Possible states and edges specify next node transitions. The directed graph under consideration has single initial node and two terminal nodes, that indicate final states with the probabilities pointing to a decision of time series classification. An edge weight here means transition probability  $T(v_1|v_2)$  from an edge  $v_1$  to edge  $v_2$ . The weight of initial node of Markov chain path is set to  $\frac{1}{2}$ , an internal node  $v_2$  weight is defined as sum of products of entering node  $v_1$  weight  $E(v_1)$  multiplied by transitional edge weight  $T(v_1|v_2)$  (see *PathProb*(\*) algorithm). The following algorithm specifies weight procedure that calculates final nodes probabilities.

*PathProb*( $G, v_s, v_e$ )

1)  $\mathbf{J} \leftarrow \{v_s \rightarrow P_e(v_s)\}$

2)  $\mathbf{Q} \leftarrow \{v_s\}$

3) **foreach**  $v$  **in**  $G \setminus v_s$

4)     **do**  $\mathbf{J}[v] = 0$

5) **do while**  $\mathbf{Q} \neq \emptyset$

6)      $u \leftarrow \text{Pop}(q)$

7)     **foreach**  $v$  **in**  $G[u]$

8)          $p \leftarrow \mathbf{J}[u] \cdot T(u|v) \cdot E(u)$

9)          $\mathbf{J}[v] = \text{Max}(p, \mathbf{J}[v])$

10)        **if**  $v \notin \mathbf{Q}$

11)            **do**  $\mathbf{Q} \leftarrow \text{Push}(\mathbf{Q})$

12) **return**  $\mathbf{J}[v_e]$

**Description of the main algorithm.** The operator 1) initialises a hash table  $\mathbf{J}$  that stores the graph nodes with corresponding probabilities. Line 2) initialises a nodes queue  $\mathbf{Q}$  of the nodes to be tested, it is an ordinary FIFO line. Operators 5)–11) set weights to the graph nodes and edges. At each iteration current node is under examination and the following operation proceeds from the current node along the edge with more probable transition. As the result algorithm yields the most probable terminal node.

Actually, because of only forward transitions along nodes of acyclic directed graph the algorithm has polynomial time complexity on nodes number:

$$P(N; \tilde{y}) = O(2N) = O(N).$$

### Greedy path probability calculation algorithm

Dijkstra algorithm allows to reach polynomial time complexity of path probability calculation, while the usage of a hash table results in the need to keep all nodes in memory till the final operator. This needs polynomial amount of memory, or  $O(N)$ .

Considering that state transitions are possible only between two neighbour states, the original graph  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  can be represented as the following matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (t_1, y_1, x'_1) & (t_2, y_2, x'_2) & \dots & (t_n, y_n, x'_n) \\ (t_1, y_1, x''_1) & (t_2, y_2, x''_2) & \dots & (t_n, y_n, x''_n) \end{bmatrix},$$

where the number of columns is equal to the amount of DNS tunneling detector observations, and each element is a tuple of three elements:  $t_i$  – observation timestamp,  $y_i$  – observation probability, and  $x'_i, x''_i \in \{0, 1\}$  is a probable class of an event.

Matrix construction assumes union of observation timestamps  $\mathbf{T}$  altogether with observation probability  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{W} = \bigcup_{i \in N} \{t_i, y_i\}.$$

Having a weight matrix  $\mathbf{W}$ , matrix  $\mathbf{A}$  is calculated using a cartesian product of the possible classes set:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{W}^T \times \{x', x''\}.$$

The greedy version of the path probability calculation algorithm is shown below. The algorithm is called greedy as the decision of the next node in a path is taken considering only two current nodes.

*MaxProb*( $\mathbf{A}, s, i$ )

- 1)  $p_1 = \mathbf{J} \cdot T(\mathbf{A}_{1,i-1} | \mathbf{A}_{1,j}) \cdot E(\mathbf{A}_{1,i})$
- 2)  $p_2 = \mathbf{J} \cdot T(\mathbf{A}_{2,i-1} | \mathbf{A}_{2,j}) \cdot E(\mathbf{A}_{2,i})$
- 3) **if**  $p_1 \geq p_2$
- 4)     **do return**  $(p_1, \mathbf{A}_{1,i})$
- 5) **return**  $(p_2, \mathbf{A}_{2,i})$

*GreedyPathProb*( $\mathbf{A}, s, e$ )

- 1)  $\mathbf{J} \leftarrow E(s)$
- 2)  $N \leftarrow |\mathbf{A}_1|$
- 3) **for**  $i = 2$  **to**  $N$
- 4)      $(p, s) \leftarrow \text{MaxProb}(\mathbf{A}, s, i)$
- 5)      $\mathbf{J} \leftarrow \mathbf{J} \cdot p$
- 6) **return**  $\mathbf{J} \cdot \underline{T}(s|e) \cdot E(e)$

Greedy algorithm is divided into two functions: *MaxProb* and *GreedyPathProb*. The first function calculates the probability of the transition from the current state  $s$  to one of the states from column  $\mathbf{A}_i$ . Function returns a tuple of the next state and its probability. The operator 1) in *GreedyPathProb* function calculates emission probability of the start state. Operators 3)–5) perform calculation of the cumulative state probability of transition from the start to final state. The operator 4) updates the state  $s$  on each iteration based on the joint probability. Finally, operator 6) returns a joint probability of the path  $s \rightarrow e$ .

This described algorithm allows to reduce space complexity of the path probability calculation algorithm from polynomial to constant:

$$P(N; \tilde{y}) = O(1).$$

### Timeseries classification results

The algorithm was tested by a problem of detecting DNS tunnel in a computing network. Numerous malicious applications exploit such approach, e. g. programs that steal credit card data from payment terminals [6; 7].

Initial information is a sequence of observed events  $Y$  ordered by discrete time  $T$ . The events occur as a result of DNS tunnels registration with binary classifier. Tunnel detector fixes client inquires to domain server. A set of these events are interpreted as Markov chain, the final events are classified and nodes suspected as malicious ones are found out. The principal problem is in detecting infected nodes.

The validation methodology uses a set of safe requests, consisting of the most popular Internet web-sites, and a set of unsafe requests created by the popular tunneling programs, like iodine, tuns, DNScapy, etc. These two sets are constructed based on etalon dataset for DNS tunneling binary classification [8].

Having these two sets, they are organised in series, where each of the series includes a certain percent of unsafe requests. Additionally, it is assumed that attacks are localised in time, therefore unsafe requests are always represented in a sequence. Figure 3 depicts a set of such timeseries, where 20 % of samples relate to unsafe DNS requests. Each request from the timeseries is passed through the detector, described in [9], which calculates the probability of the request being unsafe.

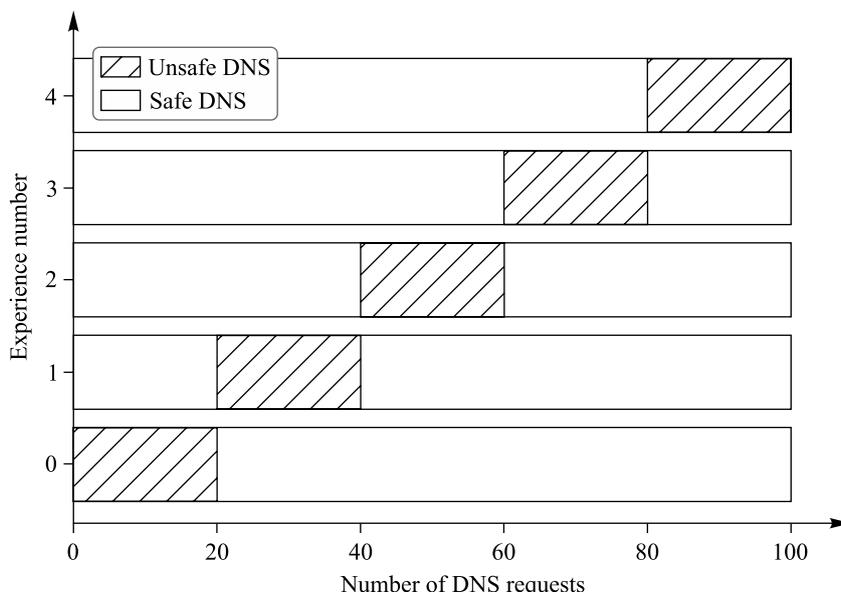


Fig. 3. Ensemble of timeseries used in algorithm evaluation

For each of these ensembles precision and recall are calculated in order to evaluate the proposed algorithm for timeseries classification. Table represents results of classification, where column «ratio» highlights the percentage of unsafe DNS requests in each of the timeseries.

#### Results of classification estimation

Ratio	Unsafe count	Predicted count	Precision	Recall
0.00	0	0.000	1.000	1.000
0.01	1	0.950	0.860	0.890
0.10	10	9.989	0.987	0.985
0.30	30	30.000	0.995	0.994
0.50	50	50.000	0.994	0.994
0.70	70	69.903	0.999	0.997
0.90	90	90.091	0.999	1.000

The results show high quality of the proposed classifier, which proves the original hypothesis that a sequence of DNS requests represent a Poisson point process, therefore the classification problem can be modeled as hidden Markov model.

### Conclusion

The article presents hidden Markov chain as an algorithm for timeseries classification. The algorithm does not need extra infrastructure to store data for computer network analysis, existing system such as widespread Prometheus system may be applied. Besides, algorithm has linear computational complexity and constant space complexity.

### References

1. Qi C, Chen X, Xu C, Shi J, Liu P. A bigram based real time DNS tunnel detection approach. *Procedia Computer Science*. 2013; 17:852–860. DOI: 10.1016/j.procs.2013.05.109.
2. Souri A, Hosseini R. A state-of-the-art survey of malware detection approaches using data mining techniques. *Human-Centric Computing and Information Sciences*. 2018;8(1):2–22. DOI: 10.1186/s13673-018-0125-x.
3. Skvortsov P, Hoppe D, Tenschert A, Geinger M. Monitoring in the clouds: comparison of ECO2Clouds and EXCESS monitoring approaches. arXiv:1601.07355 [Preprint]. 2016 [cited 2020 June 2]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1601.07355>.
4. Rong K, Bailis P. ASAP: prioritizing attention via time series smoothing. *Proceedings of the Very Large Data Bases Endowment*. 2017;10(11):1358–1369. DOI: 10.14778/3137628.3137645.
5. Knuth DE. A generalization of Dijkstra's algorithm. *Information Processing Letters*. 1977;6(1):1–5. DOI: 10.1016/0020-0190(77)90002-3.
6. Deitrich CJ, Rossow C, Freiling FC, Bos H, van Steen M, Pohlmann N. On botnets that use DNS for command and control. In: *7<sup>th</sup> European Conference on Computer Network Defense; 2011 September 6–7; Gotheburg, Sweden*. Piscataway: IEEE; 2011. p. 9–16. DOI: 10.1109/EC2ND.2011.16.
7. Tatang D, Quinket F, Dolecki N, Holz T. A study of newly observed hostnames and DNS tunneling in the wild. arXiv:1902.08454 [Preprint]. 2019 [cited 2020 June 2]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1902.08454>.
8. Bubnov Y. DNS tunneling queries for binary classification. *Mendeley Data* [Internet]. 2019 [cited 2020 August 17]. Available from: <https://data.mendeley.com/datasets/mzn9hvdcxg/1>. DOI: 10.17632/mzn9hvdcxg.1.
9. Bubnov Y. DNS tunneling detection using feedforward neural network. *European Journal of Engineering Research and Science*. 2018;3(11):16–19. DOI: 10.24018/ejers.2018.3.11.963.

Received by editorial board 29.06.2020.

УДК 519.4

## **D-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ НА ОТРЕЗКЕ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ**

**В. П. КИРЛИЦА<sup>1)</sup>**

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуется проблема построения непрерывных (число наблюдений не фиксируется)  $D$ -оптимальных планов экспериментов для тригонометрической регрессии в случае, когда дисперсия ошибок зависит от точки, в которой проводится наблюдение. Определен класс функций, описывающих изменение дисперсии неравноточных наблюдений, для которых можно построить непрерывные  $D$ -оптимальные планы экспериментов. Для тригонометрической регрессии с тремя факторами построены непрерывные  $D$ -оптимальные планы экспериментов с различными типами неравноточных наблюдений. Для каждого из этих типов выделен свой собственный класс функций, описывающих изменение дисперсии наблюдений.

**Ключевые слова:** непрерывные  $D$ -оптимальные планы экспериментов; тригонометрическая регрессия; равноточные наблюдения; неравноточные наблюдения.

## **D-OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR TRIGONOMETRIC REGRESSION ON INTERVAL WITH HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS**

**V. P. KIRLITSA<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In article the problem of construction continuous (number of observations is not fixed)  $D$ -optimal designs of experiments for trigonometric regression in a case when variance of errors of observations depend on a point in which is made is investigated. Class of functions which describe change variance of heteroscedastic observations is defined for which it is possible construct continuous  $D$ -optimal designs of experiments. For trigonometric regression with three factors it is constructed continuous  $D$ -optimal designs of experiments with different types heteroscedastic observations. For each of these types the own class of functions describing change variance of observations is defined.

**Keywords:** continuous  $D$ -optimal designs of experiments; trigonometric regression; homoscedastic observations; heteroscedastic observations.

---

### **Образец цитирования:**

Кирлица В.П.  $D$ -оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии на отрезке с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;3:80–85. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-80-85>

### **For citation:**

Kirlitsa VP.  $D$ -optimal designs of experiments for trigonometric regression on interval with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:80–85. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-80-85>

---

### **Автор:**

**Валерий Петрович Кирлица** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

### **Author:**

**Valery P. Kirlitsa**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science. [kirlitsa@bsu.by](mailto:kirlitsa@bsu.by)

Рассмотрим модель наблюдений

$$y_j = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos(sx_j) + \theta_{2s+1} \sin(sx_j)) + \varepsilon(x_j), \quad j \geq 2k + 1, \quad (1)$$

где  $y_j$  – наблюдаемые переменные;  $x_j$  – контролируемые переменные, принадлежащие интервалу  $[0, 2\pi)$ ;  $\theta_1, \theta_{2s}, \theta_{2s+1}$  – неизвестные параметры, подлежащие оцениванию;  $\varepsilon(x_j)$  – некоррелированные ошибки наблюдений со средним значением, равным нулю, и дисперсией, зависящей от точки наблюдения:

$$D\{\varepsilon(x_j)\} = d(x_j) > 0, \quad j \geq 2k + 1. \quad (2)$$

Функция  $d(x)$  – некоторая положительная функция.

В монографиях [1; 2] для модели равнооточных наблюдений ( $d(x) = \sigma^2$ ,  $\sigma^2 > 0$ ) доказано, что план экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \begin{array}{c} x_1^0, \dots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{array} \right\} \quad (3)$$

является непрерывным  $D$ -оптимальным. В (3) точки спектра плана

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k + 1. \quad (4)$$

Для частного случая  $n = 2k + 2$  оптимальный план (3) впервые был построен в публикации [3]. В статье [4] для модели тригонометрической регрессии (1) с равнооточными наблюдениями, в которой объясняющая переменная изменяется в интервале  $[-a, a]$ ,  $0 < a \leq \pi$ , рассматривается построение оптимальных планов экспериментов для оценки неизвестных параметров модели. В этой статье отмечено, что структура оптимального плана экспериментов существенно зависит от размера интервала планирования. Также в ней приведена обширная библиография работ, посвященных исследованию тригонометрических моделей наблюдений.

В данной статье покажем, что план (3) остается  $D$ -оптимальным для определенного класса неравнооточных наблюдений.

**Теорема 1.** Для модели наблюдений (1), (2) план (3) остается непрерывным  $D$ -оптимальным для неравнооточных наблюдений, дисперсии которых  $d(x)$  удовлетворяют неравенству

$$d(x) \geq \sigma^2, \quad \sigma \neq 0, \quad (5)$$

где равенство выполняется в точках (4) спектра плана (3).

**Доказательство.** Теорема будет доказана, если будет установлено, что для плана (3) справедливы условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] для  $D$ -оптимальных планов:

$$\frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}(\varepsilon_n^0) f(x) \leq 2k + 1, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (6)$$

где  $f(x) = (1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx)$  – вектор базисных функций;  $M(\varepsilon_n^0)$  – информационная матрица плана (3). В неравенстве (6) равенство должно выполняться в точках (4) спектра плана (3).

Вначале докажем, что информационная матрица плана (3) при ограничении (5) имеет диагональный вид:

$$M(\varepsilon_n^0) = \sigma^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В работах [1; 2] приводится доказательство утверждения (7) для равнооточных наблюдений. Однако оно фрагментарно и в монографии [1, с. 123] дано для четных значений  $n$ . Представим полное доказательство (7) для любых  $n$ .

Будем использовать формулы Эйлера и формулу для суммы геометрической прогрессии. Пусть  $m$  и  $l$  – натуральные числа, принимающие значения от 1 до  $k$ , причем  $m \neq l$ . Диагональные элементы информационной матрицы, начиная со второго, вычислим, используя формулы Эйлера.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos^2 \frac{2m(j-1)\pi}{n} &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left( 1 + \cos \frac{4m(j-1)\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{j=1}^n \left( e^{i \frac{4m(j-1)\pi}{n}} + e^{-i \frac{4m(j-1)\pi}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left( \frac{1 - e^{i4m\pi}}{1 - e^{i \frac{4m\pi}{n}}} + \frac{1 - e^{-i4m\pi}}{1 - e^{-i \frac{4m\pi}{n}}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left( \frac{(1 - e^{i4m\pi}) \left( 1 - e^{-i \frac{4m\pi}{n}} \right) + (1 - e^{-i4m\pi}) \left( 1 - e^{i \frac{4m\pi}{n}} \right)}{2 - 2 \cos \frac{4m\pi}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \frac{2 - 2 \cos 4m\pi - 2 \cos \frac{4m\pi}{n} + 2 \cos 4m\pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{2 - 2 \cos \frac{4m\pi}{n}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin^2 \frac{2m(j-1)\pi}{n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left( 1 - \cos \frac{4m(j-1)\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \cos \frac{4m(j-1)\pi}{n} = \frac{1}{2}.$$

Недиагональные элементы равны нулю. Используя формулы Эйлера, получаем

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{2m(j-1)\pi}{n} = \frac{1}{2n} \left( \frac{1 - e^{i2m\pi}}{1 - e^{i \frac{2m\pi}{n}}} + \frac{1 - e^{-i2m\pi}}{1 - e^{-i \frac{2m\pi}{n}}} \right) = \frac{1}{2n} \frac{-2 \cos \frac{2m\pi}{n} + 2 \cos \frac{2m\pi}{n}}{2 - 2 \cos \frac{2m\pi}{n}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2m(j-1)\pi}{n} = \frac{1}{2ni} \left( \frac{1 - e^{i2m\pi}}{1 - e^{i \frac{2m\pi}{n}}} - \frac{1 - e^{-i2m\pi}}{1 - e^{-i \frac{2m\pi}{n}}} \right) = \frac{1}{2n} \frac{2 \sin \frac{2m\pi}{n} + 2 \sin 2m\pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{2 - 2 \cos \frac{2m\pi}{n}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2m(j-1)\pi}{n} \cos \frac{2l(j-1)\pi}{n} = \frac{1}{2n} \left( \sum_{j=1}^n \sin \frac{2(m+l)(j-1)\pi}{n} + \sum_{j=1}^n \sin \frac{2(m-l)(j-1)\pi}{n} \right) = 0.$$

В силу (5), (7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}(\epsilon_n^0) f(x) &= \frac{\sigma^2}{d(x)} \left( 1 + 2(\sin^2 x + \cos^2 x + \dots + \sin^2 kx + \cos^2 kx) \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{d(x)} (1 + 2k) \leq 2k + 1, \end{aligned} \tag{8}$$

причем в неравенстве (8) равенство достигается в точках (4) спектра плана (3). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. Теорема 1 доказана.

Множество функций, удовлетворяющих неравенству (5), обширно. Ему соответствуют равнооточные наблюдения с дисперсиями  $d(x) = \sigma^2$  и, например, функции

$$d(x) = \sigma^2 + \beta \cdot |\sin(2nx)|, \beta > 0; \quad d(x) = \sigma^2 + \beta \cdot ((x) \bmod \Delta), \beta > 0, \quad \Delta = \frac{2\pi}{n};$$

$$d(x) = \sigma^2 \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \left( x - s\Delta + \frac{\Delta}{2} \right)^2}, \quad x \in [(s-1)\Delta, s\Delta], \quad s = \overline{1, n}, \quad \Delta = \frac{2\pi}{n}.$$

Можно предложить и ряд других функций.

*Замечание.* Доказанная теорема верна и для планов экспериментов (3), в которых точки спектра (4) сдвинуты на угол  $\varphi$ , т. е.

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k + 1.$$

Доказательство проводится по той же схеме с незначительными изменениями.

Особенность построенных планов экспериментов (3) с неравноточными наблюдениями состоит в том, что в точках (4) спектров этих планов дисперсии наблюдений принимают одни и те же значения, равные  $\sigma^2$ . Возникает вопрос, можно ли построить планы экспериментов для неравноточных наблюдений, для которых дисперсии наблюдений в точках спектра планов экспериментов принимали бы различные значения. Ответ утвердительный. Для частного случая модели наблюдений (1)

$$y_j = \theta_1 + \theta_2 \cos x_j + \theta_3 \sin x_j + \varepsilon(x_j), \quad j \geq 3, \quad (9)$$

можно сконструировать так называемые насыщенные планы экспериментов с тремя наблюдениями, для которых в точках спектра  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  дисперсии наблюдений будут принимать положительные значения  $d_1, d_2, d_3$  соответственно.

**Теорема 2.** Для модели наблюдений (9) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими среднее значение, равное нулю, и дисперсии  $d(x)$ , удовлетворяющие неравенству

$$d(x) \geq \frac{1}{9} \left( (4d_1 + d_2 + d_3) \cos^2 x + 3(d_2 + d_3) \sin^2 x + \sqrt{3}(d_3 - d_2) \sin 2x + \right. \\ \left. + 2(2d_1 - d_2 - d_3) \cos x + 2\sqrt{3}(d_2 - d_3) \sin x + d_1 + d_2 + d_3 \right), \quad (10)$$

в котором равенство достигается в точках  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ , насыщенный  $D$ -оптимальный план экспериментов имеет вид

$$\varepsilon_3^0 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0, & \frac{2\pi}{3}, & \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{array} \right\}. \quad (11)$$

*Доказательство.* Для  $D$ -оптимального плана  $\varepsilon_3^0$  по теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{d(x)} (1, \cos x, \sin x) M^{-1}(\varepsilon_3^0) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \leq 3, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (12)$$

причем (12) должно обращаться в равенство в точках спектра плана (11). Проверим справедливость этого утверждения.

Информационная матрица плана  $\varepsilon_3^0$  равна

$$M(\varepsilon_3^0) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 1, 0) + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left( 1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{d_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left( 1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & k & e \\ c & e & m \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}, \quad b = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{2d_2} - \frac{1}{2d_3}, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2d_2} - \frac{\sqrt{3}}{2d_3}, \quad e = -\frac{\sqrt{3}}{4d_2} + \frac{\sqrt{3}}{4d_3}, \quad (13)$$

$$k = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{4d_2} + \frac{1}{4d_3}, \quad m = \frac{3}{4d_2} + \frac{3}{4d_3}.$$

Матрица, обратная к матрице  $M(\epsilon_3^0)$ , имеет вид

$$M^{-1}(\epsilon_3^0) = \frac{3}{akm + 2bce - c^2k - e^2a - b^2m} \begin{pmatrix} km - e^2, & ce - bm, & be - kc \\ ce - bm, & am - c^2, & bc - ae \\ be - kc, & bc - ae, & ak - b^2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Используя (13), преобразуем элементы матрицы (14).

$$\begin{aligned} km - e^2 &= \frac{3(d_1 + d_2 + d_3)}{4d_1d_2d_3}, \quad ce - bm = \frac{3(2d_1 - d_2 - d_3)}{4d_1d_2d_3}, \quad be - kc = \frac{3\sqrt{3}(d_2 - d_3)}{4d_1d_2d_3}, \\ am - c^2 &= \frac{3(d_2 + 4d_1 + d_3)}{4d_1d_2d_3}, \quad bc - ae = \frac{3\sqrt{3}(d_3 - d_2)}{4d_1d_2d_3}, \quad ak - b^2 = \frac{9(d_3 + d_2)}{4d_1d_2d_3}, \\ akm + 2bce - c^2k - e^2a - b^2m &= \frac{27}{4d_1d_2d_3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Разрешая неравенство (12) относительно функции  $d(x)$  и учитывая соотношения (14), (15), получаем требуемое неравенство (10). Легко проверить, что неравенство (10) обращается в равенство в точках спектра плана (11). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. Теорема 2 доказана.

Есть предположение, что точки спектра плана (11) можно сдвинуть на угол  $\varphi$ , т. е.

$$x_1^0 = \varphi, \quad x_2^0 = \frac{2\pi}{3} + \varphi, \quad x_3^0 = \frac{4\pi}{3} + \varphi, \quad (16)$$

при этом изменится вид функций  $d(x)$  в неравенстве (10). Расчеты, проведенные для угла  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , подтверждают это. Пусть в соответствии с (16)  $D_1 = d(x_1^0)$ ,  $D_2 = d(x_2^0)$ ,  $D_3 = d(x_3^0)$ . Получим выражение для дисперсии  $d(x)$  наблюдений, соответствующих оптимальному плану экспериментов с точками спектра (16), равными весами  $\frac{1}{3}$  и углом  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ :

$$\begin{aligned} d(x) &\geq \frac{1}{9}(3(D_1 + D_2)\cos^2 x + (D_1 + D_2 + 4D_3)\sin^2 x + \\ &+ \sqrt{3}(D_1 - D_2)\sin 2x + 2\sqrt{3}(D_1 - D_2)\cos x + 2(D_1 + D_2 - 2D_3)\sin x + D_1 + D_2 + D_3). \end{aligned} \quad (17)$$

В точках (16) спектра плана с углом  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  неравенство (17) обращается в равенство. Было бы интересно установить закон преобразования значений  $d_1, d_2, d_3$  в значения  $D_1, D_2, D_3$  для произвольных углов  $\varphi$ .

Теперь исследуем вопрос, можно ли для модели (9) с четырьмя наблюдениями построить оптимальный план

$$\epsilon_4^0 = \left\{ \begin{array}{cccc} 0, & \frac{\pi}{2}, & \pi, & \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{array} \right\} \quad (18)$$

с неравноточными наблюдениями, для которого дисперсии наблюдений в точках спектра плана (18) будут различными.

Введем для плана (18) обозначения для дисперсий наблюдений:  $d_1 = d(0^\circ)$ ,  $d_2 = d(90^\circ)$ ,  $d_3 = d(180^\circ)$ ,  $d_4 = d(270^\circ)$ . Проводя для плана (18) рассуждения, аналогичные тем, что были изложены при доказательстве теоремы 2, получим неравенство, которому должна удовлетворять дисперсия  $d(x)$  наблюдений:

$$\begin{aligned}
 d(x) \geq & \frac{1}{3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)} \left( (d_2 d_3 + 4d_1 d_3 + d_1 d_2 + d_3 d_4 + d_1 d_4) \cos^2 x + \right. \\
 & + (4d_2 d_4 + d_1 d_4 + d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_4) \sin^2 x + (d_3 d_4 - d_1 d_4 - d_2 d_3 + d_1 d_2) \sin 2x + \\
 & + 2(d_1 d_2 - d_2 d_3 + d_1 d_4 - d_3 d_4) \cos x + 2(d_1 d_2 - d_1 d_4 + d_2 d_3 - d_3 d_4) \sin x + \\
 & \left. + d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_1 d_4 + d_3 d_4 \right). \tag{19}
 \end{aligned}$$

Условия выполнения в (19) равенства в точках  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
 4(d_2 + d_3 + d_4) &= 3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4), \quad 4(d_1 + d_3 + d_4) = 3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4), \\
 4(d_1 + d_2 + d_4) &= 3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4), \quad 4(d_1 + d_2 + d_3) = 3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4). \tag{20}
 \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (20), получаем  $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = \sigma^2$ ,  $\sigma \neq 0$ . Таким образом, неравенство (19) сводится к ранее полученному неравенству (5). Следовательно, для модели (9) с четырьмя наблюдениями можно строить оптимальные планы экспериментов, дисперсии наблюдений которых удовлетворяют неравенству (5).

### Библиографические ссылки

1. Ермаков СМ, Жиглявский АА. *Математическая теория оптимального эксперимента*. Москва: Наука; 1987. 320 с.
2. Федоров ВВ. *Теория оптимального эксперимента*. Москва: Наука; 1971. 312 с.
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimensional regression. *Annals of Mathematical Statistics*. 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Dette H, Melas VB. Optimal designs for estimating individual coefficients in Fourier regression models. *Annals of Statistics*. 2003;31(5):1669–1692. DOI: 10.1214/aos/1065705122.

### References

1. Ermakov SM, Zhiglyavskii AA. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [The mathematical theory of optimal design]. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. Russian.
2. Fedorov VV. *Teoriya optimal'nogo eksperimenta* [Optimal experiment theory]. Moscow: Nauka; 1971. 312 p. Russian.
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimensional regression. *Annals of Mathematical Statistics*. 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Dette H, Melas VB. Optimal designs for estimating individual coefficients in Fourier regression models. *Annals of Statistics*. 2003;31(5):1669–1692. DOI: 10.1214/aos/1065705122.

Статья поступила в редколлегию 29.06.2020.  
Received by editorial board 29.06.2020.

УДК 539.32:536.2

## ВЛИЯНИЕ ПРОТЯЖЕННОСТИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА НА ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРОФИЛИРОВАННЫХ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНАХ С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

В. В. КОРОЛЕВИЧ<sup>1)</sup>, Д. Г. МЕДВЕДЕВ<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Международный центр современного образования, ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага 1, Чехия

<sup>2)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуется влияние  $N$  протяженных источников тепла на внешних границах на неосесимметричное распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с окружающей средой. Решение стационарной задачи теплопроводности для анизотропных кольцевых пластин произвольного профиля записывается через решение соответствующего интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода. Приводится формула расчета температур в анизотропных кольцевых пластинах произвольного профиля. Записывается точное решение стационарной задачи теплопроводности для обратноконической полярно-ортотропной кольцевой пластины. Показано, что в такой анизотропной пластине распределение температуры от  $N$  протяженных источников тепла на ее внешней границе имеет более сложный характер, чем распределение температуры от  $N$  точечных источников тепла на внешнем контуре.

**Ключевые слова:** полярно-ортотропная кольцевая пластина; температура; стационарное уравнение теплопроводности; интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода; обратноконическая кольцевая пластина.

## THE INFLUENCE OF THE LENGTH OF HEAT SOURCES ON THE EXTERNAL BORDER ON THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN PROFILED POLAR-ORTHOTROPIC RING PLATES TAKING INTO ACCOUNT THERE HEAT EXCHANGE WITH THE EXTERNAL ENVIRONMENT

U. V. KARALEVICH<sup>a</sup>, D. G. MEDVEDEV<sup>b</sup>

<sup>a</sup>International Center of Modern Education, 61 Štěpánská Street, Prague 1, PSC 110 00, Czech

<sup>b</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: U. V. Karalevich (v.korolevich@mail.ru)

We study the influence of  $N$  extended heat sources at external boundaries on the nonaxisymmetric temperature distribution on profiled polar-orthotropic ring plates and take into account heat exchange with the external environment. The solution of the stationary heat conduction problem for anisotropic annular plates of a random profile is resolved through the solution of the corresponding Volterra integral equation of the second kind. The formula of a temperature

### Образец цитирования:

Королевич ВВ, Медведев ДГ. Влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с окружающей средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;3:86–91. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-86-91>

### For citation:

Karalevich UV, Medvedev DG. The influence of the length of heat sources on the external border on the temperature distribution in profiled polar-orthotropic ring plates taking into account there heat exchange with the external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:86–91. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-86-91>

### Авторы:

**Владимир Васильевич Королевич** – преподаватель.  
**Дмитрий Георгиевич Медведев** – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент; первый проректор.

### Authors:

**Uladzimir V. Karalevich**, lecturer.  
[v.korolevich@mail.ru](mailto:v.korolevich@mail.ru)  
**Dmitrij G. Medvedev**, doctor of science (pedagogics), PhD (physics and mathematics), docent; first vice-rector.  
[medvedev@bsu.by](mailto:medvedev@bsu.by)

calculations in anisotropic annular plates of a random profile is given. The exact solution of stationary heat conductivity problem for a reverse conical polar-orthotropic ring plate is recorded. The temperature distribution in such anisotropic plate from  $N$  extended heat sources at its outer border is more complex than in the case of temperature distribution from  $N$  point heat sources at their external border.

**Keywords:** polar-orthotropic annular plate; temperature; stationary equation of heat conductivity; Volterra integral equation of the second kind; reverse conical ring plate.

## Введение

Данная статья посвящена исследованию неосесимметричного распределения температуры  $T(r, \theta)$  в полярно-ортотропных кольцевых пластинах переменной толщины  $h(r)$  с учетом теплообмена с окружающей средой, когда на внутреннем контуре (при  $r = r_0$ ) пластины поддерживается постоянная температура  $T_1^*$ , а на внешнем контуре (при  $r = R$ ) приложено  $N$  источников тепла с температурой  $T_2^*$  каждый.

В отличие от работы [1] в настоящей статье при изучении распределения температуры в профилированной анизотропной кольцевой пластине учитывается *дискретность* расположения *протяженных источников тепла* на внешнем контуре. Полученные результаты имеют практическую значимость при проектировании и расчете на прочность дисков высокоскоростных газотурбинных авиационных двигателей, изготавливаемых из современных композитных материалов, так как возникающие в них термоупругие напряжения могут существенно влиять на напряженно-деформированное состояние диска турбины. Расчетная схема, учитывающая протяженность конечного числа источников тепла на внешней границе профилированных анизотропных дисков, позволяет реально оценить вклад термоупругих напряжений в общую картину распределения напряжений во вращающемся диске турбины.

## Постановка задачи и основные уравнения

В работе исследуется влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в анизотропной кольцевой пластине переменной толщины с учетом теплообмена с окружающей средой через оба основания. Теплообмен через боковую цилиндрическую поверхность пренебрежимо мал, и его можно не учитывать в расчетах. Температура пластины больше температуры окружающей среды  $T_0$  ( $T_0 < T_1^* < T_2^*$ ). Предполагается, что температура в тонкой кольцевой пластине не меняется по толщине. Внутренних источников тепла в ней не имеется. Тепловое поле в такой полярно-ортотропной кольцевой пластине будет неосесимметричным.

Теплофизические характеристики материала пластины полагаются постоянными и не зависящими от температуры.

Конечно, идеальных точечных источников тепла в природе нет. Все они имеют какую-то протяженность. Частично эта задача рассматривалась нами в работе [1]. Так, в ней было получено распределение температуры  $T^{\text{внеш}}$  на внешнем контуре кольцевой пластины, если  $N$  источников тепла приложены на равноотстоящих одинаковых дугах длиной  $l$  и с центральным углом  $\varphi$  ( $l = \varphi R$ ) каждая:

$$T^{\text{внеш}}(R, \theta, \varphi) = NT_2^* \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \cos Nn\theta \right).$$

Здесь углом  $\varphi$  будет определяться протяженность источника тепла.

Количество  $N$  источников тепла не может быть произвольным, а ограничивается температурой плавления  $T_{\text{плавл}}$  материала пластины:  $N_{\text{max}} = \left[ \frac{T_{\text{плавл}}}{T_2^*} \right]$ , где квадратные скобки означают целую часть дробного выражения.

В цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины  $h(r)$  с учетом теплообмена с внешней средой через оба основания запишется в виде [2]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rh(r) \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h(r) \lambda_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - 2H(T(r, \theta) - T_0) \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (1)$$

где  $T(r, \theta)$  – функция температуры в анизотропной кольцевой пластине;  $\lambda_r$  и  $\lambda_\theta$  – радиальный и тангенциальный коэффициенты теплопроводности соответственно;  $H$  – коэффициент теплоотдачи. Эти коэффициенты полагаются постоянными и не зависящими от температуры.

Введем в рассмотрение новую функцию  $\Theta(r, \theta)$ , которая тоже имеет смысл функции температуры:

$$\Theta(r, \theta) = T(r, \theta) - T_0. \quad (2)$$

С учетом выражения (2) уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \left( \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} - \frac{2H}{\lambda_r h(r)} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Theta(r, \theta) = 0. \quad (3)$$

Разложим функцию  $\Theta(r, \theta)$  в тригонометрический ряд Фурье:

$$\Theta(r, \theta) = \Theta_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(1)}(r) \cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(2)}(r) \sin Nn\theta. \quad (4)$$

Первый член  $\Theta_0(r)$  разложения (4) учитывает осесимметричную составляющую  $\Theta(r, \theta)$ . Слагаемые, содержащие  $\cos Nn\theta$ , соответствуют симметричным составляющим функции  $\Theta(r, \theta)$  относительно плоскости  $\theta = 0$ , а слагаемые, содержащие  $\sin Nn\theta$ , – обратносимметричным.

Подстановка разложения (4) в уравнение (3) приводит к бесконечной системе однородных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\left\{ \begin{array}{l} (n=0) \quad \frac{d^2 \Theta_0}{dr^2} + \left( \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{2H}{\lambda_r h(r)} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Theta_0(r) = 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (n \geq 1, j = \overline{1, 2}) \quad \frac{d^2 \Theta_n^{(j)}}{dr^2} + \left( \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{d\Theta_n^{(j)}}{dr} - \left( \frac{\lambda_\theta (Nn)^2}{\lambda_r r^2} + \frac{2H}{\lambda_r h(r)} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \Theta_n^{(j)}(r) = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение (5), описывающее осесимметричное распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с внешней средой при несколько иных граничных условиях, исследовалось нами в работе [3].

Получим теперь граничные условия для функции температуры  $\Theta(r, \theta)$ . Из формулы (2) следует

$$T(r, \theta) = \Theta(r, \theta) + T_0.$$

Подставив в последнее равенство разложение функции  $\Theta(r, \theta)$  в тригонометрический ряд Фурье (см. формулу (4)), получим

$$T(r, \theta) = T_0 + \Theta_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(1)}(r) \cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(2)}(r) \sin Nn\theta. \quad (7)$$

Удовлетворим функцию температуры  $T(r, \theta)$  граничным условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} T(r_0, \theta) = T_0 + \Theta_0(r_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(1)}(r_0) \cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(2)}(r_0) \sin Nn\theta = \\ = T^{\text{внутр}}(r_0, \theta) = T_1^* + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin Nn\theta, \\ T(R, \theta) = T_0 + \Theta_0(R) + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(1)}(R) \cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(2)}(R) \sin Nn\theta = \\ = T^{\text{внеш}}(R, \theta) = NT_2^* + \sum_{n=1}^{\infty} 2NT_2^* \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin Nn\theta. \end{array} \right.$$

Из сравнения коэффициентов тригонометрических рядов при одинаковых гармониках левых и правых частей приведенных выражений следуют граничные условия

$$(n = 0) \begin{cases} \Theta_0(r_0) = T_1^* - T_0, \\ \Theta_0(R) = NT_2^* - T_0, \end{cases} \quad (8)$$

$$(n \geq 1) \begin{cases} \Theta_n^{(1)}(r_0) = 0, \\ \Theta_n^{(1)}(R, \varphi) = 2NT_2^* \frac{\sin n\varphi}{n\varphi}, \end{cases} \quad (9)$$

$$(n \geq 1) \begin{cases} \Theta_n^{(2)}(r_0) = 0, \\ \Theta_n^{(2)}(R) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

При нулевых граничных условиях (10) однородное дифференциальное уравнение (6) имеет тривиальное решение, следовательно, функция  $\Theta_n^{(2)}(r)$  равна нулю, т. е. обратносимметричная составляющая в разложении (4) для функции  $\Theta(r, \theta)$  отсутствует.

### Решение неосесимметричной задачи стационарной теплопроводности методом линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода

Для профилированной анизотропной кольцевой пластины общие решения уравнений (5), (6) системы выразим через решения соответствующих им интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода:

$$\Theta_0(r) = \int_{r_0}^r (r-s)\eta_0(s)ds + \dot{\Theta}_0(r_0)(r-r_0) + \Theta_0(r_0), \quad (11)$$

$$\Theta_n^{(1)}(r) = \int_{r_0}^r (r-s)\eta_n^{(1)}(s)ds + \dot{\Theta}_n^{(1)}(r_0)(r-r_0) + \Theta_n^{(1)}(r_0). \quad (12)$$

Разрешающие функции  $\eta_0(r)$  и  $\eta_n^{(1)}(r, \varphi)$  удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\eta_0(r) = \lambda \int_{r_0}^r K_0(r, s)\eta_0(s)ds + f_0(r), \quad \eta_n^{(1)}(r, \varphi) = \lambda \int_{r_0}^r K_n(r, s)\eta_n^{(1)}(s, \varphi)ds + f_n^{(1)}(r), \quad (13)$$

где  $\lambda = -1$  есть числовой параметр;  $K_0(r, s) = \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} - \left( \frac{H}{\lambda_r} \sqrt{\frac{4}{h^2(r)} + \left( \frac{h'(r)}{h(r)} \right)^2} \right) (r-s)$ ,  $K_n(r, s) = \frac{h'(r)}{h(r)} +$

$+\frac{1}{r} - \left( \frac{\lambda_\theta (Nn)^2}{\lambda_r r^2} + \frac{H}{\lambda_r} \sqrt{\frac{4}{h^2(r)} + \left( \frac{h'(r)}{h(r)} \right)^2} \right) (r-s)$  – ядра интегральных уравнений;  $f_0(r) = \frac{\partial K_0(r, s)}{\partial s} \times$

$\times \Theta_0(r_0) - K_0(r, r_0)\dot{\Theta}_0(r_0)$ ,  $f_n^{(1)}(r) = \frac{\partial K_n(r, s)}{\partial s} \Theta_n^{(1)}(r_0) - K_n(r, r_0)\dot{\Theta}_n^{(1)}(r_0)$  – свободные члены интегральных уравнений.

Решения интегральных уравнений (13) с помощью резольвент описаны в статье [1]. Удовлетворим решения (11), (12) граничным условиям (8), (9). В результате имеем

$$\Theta_0(r) = \int_{r_0}^r (r-s)\eta_0(s)ds - \frac{r-r_0}{R-r_0} \int_{r_0}^R (R-s)\eta_0(s)ds + T_1^* \frac{R-r}{R-r_0} + NT_2^* \frac{r-r_0}{R-r_0} - T_0, \quad (14)$$

$$\Theta_n^{(1)}(r, \varphi) = \int_{r_0}^r (r-s)\eta_n^{(1)}(s)ds - \frac{r-r_0}{R-r_0} \int_{r_0}^R (R-s)\eta_n^{(1)}(s)ds + 2NT_2^* \frac{r-r_0}{R-r_0} \frac{\sin n\varphi}{n\varphi}. \quad (15)$$

Исходя из решений (14), (15), по формуле (7) получим следующее распределение температуры  $T(r, \theta)$  в профилированной полярно-ортотропной кольцевой пластине с учетом теплообмена с внешней средой:

$$T(r, \theta) = \int_{r_0}^r (r-s)\eta_0(s)ds - \frac{r-r_0}{R-r_0} \int_{r_0}^R (R-s)\eta_0(s)ds + T_1^* \frac{R-r}{R-r_0} + NT_2^* \frac{r-r_0}{R-r_0} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{r_0}^r (r-s)\eta_n^{(1)}(s)ds - \frac{r-r_0}{R-r_0} \int_{r_0}^R (R-s)\eta_n^{(1)}(s)ds + 2NT_2^* \frac{r-r_0}{R-r_0} \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \right) \cos Nn\theta. \quad (16)$$

Для обратноконической кольцевой пластины, толщина которой меняется по закону  $h(r) = h_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)$ , где  $h_0$  – толщина пластины на внутреннем контуре (при  $r = r_0$ ), система уравнений (5), (6) стационарной задачи теплопроводности имеет точное решение [1]:

$$\Theta_0(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left( \tilde{C}_1^{(0)} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) + \tilde{C}_2^{(0)} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) \right), \quad (17)$$

$$\Theta_n^{(1)}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left( \tilde{C}_1^{(1)} I_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{r}) + \tilde{C}_2^{(1)} K_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{r}) \right). \quad (18)$$

Здесь  $b = \frac{H\sqrt{h_0^2 + 4r_0^2}}{\lambda_r h_0}$ ;  $\mu = \sqrt{1 + 4N^2 \left( \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r} \right) n^2}$ ;  $I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r})$  – модифицированная функция Бесселя

1-го рода 1-го порядка;  $K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r})$  – модифицированная функция Бесселя 2-го рода 1-го порядка (функция Макдональда);  $I_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{r})$  – модифицированная функция Бесселя 1-го рода  $\mu$ -го порядка;  $K_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{r})$  – модифицированная функция Бесселя 2-го рода  $\mu$ -го порядка (функция Макдональда).

Удовлетворяя решения (17), (18) граничным условиям (8), (9), получим следующие выражения для неизвестных постоянных  $\tilde{C}_1^{(0)}$ ,  $\tilde{C}_2^{(0)}$ ,  $\tilde{C}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{C}_2^{(1)}$ :

$$\tilde{C}_1^{(0)} = T_1^* \frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - NT_2^* \frac{\sqrt{R}}{\Delta_2} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) - T_0 \left( \frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - \frac{\sqrt{R}}{\Delta_2} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \right),$$

$$\tilde{C}_2^{(0)} = -T_1^* \frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) + NT_2^* \frac{\sqrt{R}}{\Delta_2} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) + T_0 \left( \frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - \frac{\sqrt{R}}{\Delta_2} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \right),$$

$$\tilde{C}_1^{(1)} = -2NT_2^* \frac{\sqrt{R}}{\Delta_\mu} K_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \frac{\sin n\varphi}{n\varphi}, \quad \tilde{C}_2^{(1)} = 2NT_2^* \frac{\sqrt{R}}{\Delta_\mu} I_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \frac{\sin n\varphi}{n\varphi},$$

где  $\Delta_2, \Delta_\mu$  – определители 2-го порядка:

$$\Delta_2 = I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}),$$

$$\Delta_\mu = I_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) K_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - I_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{R}) K_\mu(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}).$$

Подставляя выражения для постоянных  $\tilde{C}_1^{(0)}$ ,  $\tilde{C}_2^{(0)}$ ,  $\tilde{C}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{C}_2^{(1)}$  в решения (17), (18) и затем их в формулу (7), получим распределение температуры  $T(r, \theta)$  в обратноконической полярно-ортотропной кольцевой пластине с учетом теплообмена с внешней средой:

$$\begin{aligned}
 T(r, \theta) = & T_1^* \left( \frac{1}{\Delta_2} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left( I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) \right) \right) + \\
 & + NT_2^* \left( \frac{1}{\Delta_2} \sqrt{\frac{R}{r}} \left( I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) - I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \right) \right) + \\
 & + T_0 \left( 1 + \frac{1}{\Delta_2} \left( \sqrt{\frac{R}{r}} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) - \sqrt{\frac{r_0}{r}} K_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) \right) I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\Delta_2} \left( \sqrt{\frac{r_0}{r}} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{R}) - \sqrt{\frac{R}{r}} I_1(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) \right) K_1(2\sqrt{b}\sqrt{r}) \right) - \\
 & - 2NT_2^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{\mu}} \sqrt{\frac{R}{r}} \left( I_{\mu}(2\sqrt{b}\sqrt{r}) K_{\mu}(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) - I_{\mu}(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}) K_{\mu}(2\sqrt{b}\sqrt{r}) \right) \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \cos Nn\theta. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Совершая предельный переход  $\varphi \rightarrow 0$   $\left( \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} = 1 \right)$  в формулах (16), (19), получим неосесимметричное распределение температуры в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины от  $N$  точечных источников тепла на ее внешней границе [1].

### Заключение

Заметим, что в профилированных анизотропных кольцевых пластинах распределение температуры от  $N$  протяженных источников тепла на внешней границе имеет более сложный характер, чем распределение температуры от  $N$  точечных источников тепла на внешнем контуре. Поскольку формулы (16) и (19) содержат ряды, в которые входит тригонометрическая функция  $\sin n\varphi$ , то эти ряды будут знакопеременными. Более того, ввиду быстрого стремления к нулю осциллирующей функции  $\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}$  с увеличением  $n$ , в формулах (16), (19) при практических расчетах можно ограничиться только несколькими первыми членами рядов.

### Библиографические ссылки

1. Королевич ВВ. Решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;1:47–58. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-47-58.
2. Уздалев АИ, Брюханова ЕН. Уравнение теплопроводности для пластин переменной толщины с неоднородными теплофизическими свойствами. В: Уздалев АИ, редактор. *Задачи прикладной теории упругости.* Саратов: Саратовский политехнический институт; 1985. с. 3–7.
3. Королевич ВВ. Стационарные температурные поля в анизотропных пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:58–66.

### References

1. Karalevich UV. Solution of nonaxisymmetric stationary problem of heat conductivity for polar-orthotropic ring plate of variable thickness with account of heat transfer with external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;1:47–58. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-47-58.
2. Uzdalev AI, Bryukhanova EN. [Equations of thermal conductivity for plates of variable thickness with inhomogeneous thermo-physical properties]. In: Uzdalev AI, editor. *Zadachi prikladnoi teorii uprugosti* [Problems of applied theory of elasticity]. Saratov: Saratovskii politekhnicheskii institut; 1985. p. 3–7. Russian.
3. Karalevich UV. Stationary temperature fields in the anisotropic ring plates of variable thickness considering the heat exchange with external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:58–66. Russian.

Статья поступила в редакцию 05.11.2020.  
Received by editorial board 05.11.2020.

---

---

# ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

---

## REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

---

---

### ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ LETTER TO THE EDITORS

In my article [1] lemma 2 and theorem 2 should be reformulated as follows.

**Lemma 2.** *There is a left invariant metric  $\rho'$  which is compatible with the topology of  $G$  such that every automorphism  $A \in \text{Aut}(G)$  is Lipschitz with respect to every left invariant metric  $\rho$  that is strongly equivalent to  $\rho'$ . Moreover, one can choose the Lipschitz constant to be*

$$L_A = \kappa_\rho \bmod A,$$

where the constant  $\kappa_\rho$  depends on the metric  $\rho$  only.

**Theorem 2.** *Let a left invariant metric  $\rho$  be as in lemma 2 and the doubling condition holds for the corresponding metric measure space  $(G, \rho, \nu)$ . Under the assumptions of definition 1 let  $(\Omega, q, \mu)$  be  $\sigma$ -compact quasi-metric space with positive Radon measure  $\mu$  and  $\Phi \in L^1(k^s \mu)$ , where  $k(u) := \kappa_\rho / \bmod A(u)$ . Then the operator  $\mathcal{H}_{\Phi, A}$  is bounded on the space  $H^1(G/K)$  and*

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, A}\|_{\mathcal{L}(H^1(G/K))} \leq C_\nu \|\Phi\|_{L^1(k^s \mu)}.$$

The proof of lemma 2 above is exactly the same as in [2] and the proof of theorem 2 above is exactly the same as in [1].

After these corrections, the statements of corollaries 3 and 4 of theorem 2 in [1] are correct.

*A. R. Mirotin*<sup>1</sup>

### References

1. Mirotin AR. Hausdorff operators on homogeneous spaces of locally compact groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;2:28–35. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-2-28-35.
2. Mirotin AR. Addendum to «Boundedness of Hausdorff operators on Hardy spaces  $H^1$  over locally compact groups» [J. Math. Anal. Appl. 473(2019)519–533]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2019;479(1):872–874. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.06.055.

---

<sup>1</sup>Адо́льф Ру́вими́вич Ми́ротин – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины.

*Adolf R. Mirotin*, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming, Francisk Skorina Gomel State University.

E-mail: [amirotin@yandex.ru](mailto:amirotin@yandex.ru)

---

---

# ПАМЯТИ УЧЕНОГО

---

## TO THE MEMORY OF SCIENTIST

---

---

**Владимир Васильевич  
БОБКОВ**

**Vladimir Vasil'evich  
BOBKOV**



5 мая 2020 г. на 84-м году ушел из жизни лауреат Государственной премии БССР, доктор физико-математических наук, профессор Владимир Васильевич Бобков.

Владимир Васильевич родился 31 октября 1936 г. в д. Папоротное Жлобинского района Гомельской области в семье сельских учителей. Отец погиб на фронте. Окончив с серебряной медалью Стрешинскую среднюю школу Жлобинского района, Владимир Васильевич в 1954 г. поступил на отделение математики физико-математического факультета БГУ, который окончил с отличием в 1959 г. Свою трудовую деятельность начал еще студентом в качестве лаборанта Вычислительного центра БГУ, а с сентября 1959 г. постоянно работал на кафедре вычислительной математики университета, созданной в 1957 г. его научным руководителем, известным математиком, академиком В. И. Крыловым.

Под руководством В. И. Крылова и в тесном сотрудничестве с ним сложились научные интересы и организаторские способности молодого ученого В. В. Бобкова. В 1961 г. он поступил на очное от-

деление аспирантуры БГУ по специальности «вычислительная математика», в апреле 1964 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Метод интегральных соотношений для уравнений и систем гиперболического типа». С 1965 г. работал на кафедре в должности доцента. С 1973 г. являлся заведующим кафедрой вычислительной математики, а с 2003 г. занимал должность профессора. Ученое звание профессора получил в 1989 г., в 1995 г. защитил докторскую диссертацию на тему «Одношаговые методы численного решения жестких систем».

С момента основания в 1970 г. в БГУ факультета прикладной математики, в том числе на базе кафедры вычислительной математики, В. В. Бобков принимал активнейшее участие в формировании образовательных программ и специализаций в республике и в СССР в целом. Он неизменно входил в число авторов программ основных учебных дисциплин «Методы вычислений» и «Численные методы», разрабатываемых и утверждаемых в качестве типовых программ по специальности «прикладная

математика» для всех учреждений высшего образования Советского Союза. С 1991 г. являлся председателем научно-методической секции «Прикладная математика» Учебно-методического объединения вузов Республики Беларусь по естественно-научному образованию. За изданные в соавторстве с В. И. Крыловым и П. И. Монастырным двухтомные учебные пособия «Вычислительные методы высшей математики» и «Вычислительные методы» в 1978 г. В. В. Бобкову была присуждена Государственная премия БССР в области науки и техники. Эти ставшие уже классическими университетские пособия, как и другие книги Владимира Васильевича, и в настоящее время являются одними из основных учебных изданий по соответствующим дисциплинам. Следует отметить, например, что за пятитомную монографию «Начала теории вычислительных методов», опубликованную в соавторстве с В. И. Крыловым и П. И. Монастырным в издательстве «Наука и техника», профессор В. В. Бобков в 1991 г. удостоен первой премии в конкурсе совместных научных работ ученых БГУ и Академии наук Беларуси.

Основное направление научной работы профессора В. В. Бобкова относится к теории численных методов решения дифференциальных уравнений, в том числе жестких. Он являлся организатором и руководителем научной школы по данному направлению. Среди основных научных результатов Владимира Васильевича особо следует отметить новые подходы и требования к построению методов численного решения жестких систем дифференциальных уравнений (в частности, требования локальной взаимосогласованности операторов перехода на шаге дискретизации) и новые понятия теории численных методов (например, понятия локальной производной приближенного решения и его невязки на исходной дифференциальной системе). Непосредственно связанные с ними научные результаты профессора В. В. Бобкова по раз-

работке новых эффективных способов построения многоэтапных вычислительных алгоритмов и модульного типа методов позволяют существенно расширить возможности численного моделирования сложных многокомпонентных процессов.

Список научных публикаций Владимира Васильевича включает более 200 наименований, в том числе 11 книг (учебных пособий и монографий).

Неоценим личный вклад В. В. Бобкова в становление и развитие нашего журнала. В течение многих лет Владимир Васильевич являлся заместителем ответственного редактора журнала (тогда еще издавался под названием «Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика»), проводя большую инициативную и организаторскую работу.

За выдающиеся достижения В. В. Бобков награжден медалью «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина» (1970), грамотой Верховного Совета БССР (1971), нагрудным знаком «За отличные успехи в работе в области народного образования СССР» (1982), медалью «Ветеран труда» (1990), Почетной грамотой Кабинета министров Республики Беларусь (1996), Почетной грамотой Национального собрания Республики Беларусь (2001), нагрудным знаком «Отличник образования Республики Беларусь» (2000), а также рядом грамот и почетных грамот министерства образования и иных ведомств. Неоднократно удостоивался почетных грамот БГУ, благодарности ректора БГУ, в 2011 г. ему присвоено звание «Заслуженный работник БГУ».

В. В. Бобков пользовался большим авторитетом у студентов и сотрудников, его отличали трудолюбие, добросовестность, принципиальность, уважительное отношение к коллегам. Светлая память о Владимире Васильевиче навсегда сохранится в наших сердцах.

*Коллеги и ученики*

**Геннадий Алексеевич  
МЕДВЕДЕВ**

**Gennadiy Alekseevich  
MEDVEDEV**



10 октября 2020 г. ушел из жизни Геннадий Алексеевич Медведев – известный ученый-математик, педагог, доктор физико-математических наук, профессор, организатор кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики БГУ (1974), основоположник научной школы по теории вероятностей и математической статистике и научной школы в области теории массового обслуживания и ее приложений в Республике Беларусь.

Геннадий Алексеевич родился 22 февраля 1935 г. в г. Уссурийске Приморского края в семье военнослужащего. В 1957 г. окончил радиофизический факультет Томского государственного университета (ТГУ). В 1961 г. защитил кандидатскую, а в 1967 г. докторскую диссертацию. Через год ему присвоено ученое звание профессора.

После появления новой учебной специальности «прикладная математика» в 1969 г. стал инициатором ее открытия в ТГУ. В 1970 г., будучи деканом радиофизического факультета, одновременно являлся заведующим кафедрой вычислительной и прикладной математики, а также заведующим отделением прикладной математики на механико-математическом факультете. В том же году стал деканом организованного в ТГУ при его участии факультета прикладной математики и заведующим кафедрой прикладной математики на факультете. За время работы в ТГУ подготовил 12 кандидатов наук, 8 из которых в настоящий момент являются профессорами или докторами наук.

С 1974 г. Геннадий Алексеевич работал в БГУ на кафедре теории вероятностей и математической статистики (заведовал кафедрой в 1974–2000 гг.). Под руководством Г. А. Медведева в БГУ через аспирантуру и соискательство подготовлено 37 кандидатов наук, 8 из которых стали профессорами или докторами, а остальные работают не только в Беларуси, но и за ее пределами (Алжир, Вьетнам, Казахстан, Корея, Литва, Россия, Сирия, Франция).

Основным направлением научных исследований Г. А. Медведева была разработка вероятностных и статистических методов анализа и синтеза систем, используемых в таких прикладных областях, как анализ и разработка математических моделей финансовых временных рядов; развитие методов теории марковских процессов и массового обслуживания в интересах исследования систем, в том числе локальных информационно-вычислительных сетей; разработка методов анализа и оптимизации сетей связи и, в частности, связанных информационных систем с использованием искусственных спутников Земли и цифровых сетей интегрального обслуживания; создание методов оценивания параметров случайных процессов и полей, описываемых регрессионными и авторегрессионными моделями, включая разработку рекуррентных оценок по зависимым наблюдениям, поступающим в темпе текущего времени; синтез оптимальных систем автоматического управления; разработка адаптивных алгоритмов управления в самонастраивающихся системах и анализ их эффективности; местоопределение радиотехнических средств методами пассивной пеленгации с движущегося носителя.

Г. А. Медведев принимал участие во многих международных научных конгрессах и симпозиумах по проблемам стохастического финансового анализа (Бирмингем, Бостон, Брюссель, Вена, Краков, Маастрихт, Москва, Нюрнберг, Оксфорд, Томск, Торонто, Тромсё и др.). Проходил научные стажировки в Атланте (факультет управления бизнесом в Университете штата Джорджия) и Оксфорде (Центр актуарного образования).

Профессор Г. А. Медведев – организатор большого числа научных конференций с международным участием в области статистического анализа, случайных процессов, автоматического управления и финансовой математики, в том числе 16 школ по теории массового обслуживания (1985–2001). Он

был председателем совета БГУ по присуждению ученых степеней по специальности «теория вероятностей и математическая статистика» (1994–2000).

Геннадий Алексеевич являлся президентом Белорусского актуарного общества (1995–1999), членом совета Международной ассоциации финансовых инженеров (Нью-Йорк, США) и председателем ее минского комитета (с 1996 г.), представителем Института актуариев Великобритании в Беларуси (1998–2000), членом еврогруппы по финансовому моделированию (с 1994 г.).

Г. А. Медведев – автор 18 учебников и учебных пособий по различным дисциплинам учебных специальностей, 14 из которых имеют гриф Министерства образования Республики Беларусь. Результаты его исследований представлены в 12 книгах (2 из них изданы за рубежом) и более чем в 200 статьях по различным направлениям математики и кибернетики.

Деятельность Геннадия Алексеевича отмечена многими наградами, среди них – медаль «За доблестный труд» (1970), почетные грамоты Президиума Верховного Совета БССР (1982) и Верхов-

ного Совета Республики Беларусь (1996). За работу по развитию Томского государственного университета он награжден медалью «В ознаменование 100-летия со дня основания ТГУ» (1980), серебряной медалью «В благодарность за вклад в развитие ТГУ» (2005), золотой медалью «В благодарность за вклад в развитие ТГУ» (2010), медалью Д. И. Менделеева ТГУ (2015). Г. А. Медведев имеет награжденные знаки Министерства высшего и среднего специального образования СССР «За отличные успехи в работе» (1972) и Министерства образования Республики Беларусь «Отличник образования Республики Беларусь» (2000), почетное звание «Заслуженный работник БГУ» (2010).

Геннадий Алексеевич обладал титаническим трудолюбием, беспредельной преданностью науке, требовательностью к себе и ученикам. Он отличался способностью преодолевать трудности и умением поддержать коллег и учеников. Светлая память о Геннадии Алексеевиче навсегда сохранится в наших сердцах.

*Коллеги и ученики*

## АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

*УДК 519.2(075.8)*

**Теория вероятностей и математическая статистика** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-25 01 01 «Экономическая теория», 1-25 01 02 «Экономика», 1-25 01 04 «Финансы и кредит», 1-25 02 12 «Экономическая информатика», 1-26 02 02 «Менеджмент» / Е. И. Васенкова [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 217 с. : табл. Библиогр.: с. 207–209. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/246460>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 22.07.2020, № 009522072020.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов 1-й степени высшего образования специальностей 1-25 01 01 «Экономическая теория», 1-25 01 02 «Экономика», 1-25 01 04 «Финансы и кредит», 1-25 02 12 «Экономическая информатика», 1-26 02 02 «Менеджмент». Содержание ЭУМК предполагает изучение следующих вопросов: элементы комбинаторики, случайные события и действия над ними, случайные величины (одномерные и многомерные), функции случайных величин, закон больших чисел, центральная предельная теорема, выборочный метод в математической статистике, точечное и интервальное оценивание параметров, проверка статистических гипотез, регрессионный и дисперсионный анализ.

*УДК 575.112(075.8)*

**Алгоритмы в биоинформатике** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 04 «Информатика» / А. Ю. Хадарович ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 44 с. : табл. Библиогр.: с. 40–41. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/246951>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 30.07.2020, № 010730072020.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальности 1-31 03 04 «Информатика». Содержание ЭУМК предполагает изучение математического аппарата и методов, необходимых для решения биоинформатических задач, возникающих в практической деятельности в области обработки генетических данных, методах компьютерного моделирования биологических процессов.

*УДК 517.9(075.8)*

**Замена переменных в дифференциальных уравнениях и выражениях** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. разработка / О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. К. Филиппова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 23 с. Библиогр.: с. 22. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/250635>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.11.2020, № 014010112020.

В учебно-методической разработке обсуждаются проблемы, возникающие при замене переменных в дифференциальных уравнениях и выражениях. Работа содержит необходимые теоретические сведения и методические указания, иллюстрируемые примерами. Рассмотрены решения основных типов задач.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

<i>Сафонова И. Н., Сафонов В. Г.</i> О некоторых свойствах решетки totally $\sigma$ -локальных формаций конечных групп .....	6
--	---

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Костюкова О. И., Чемисова Т. В.</i> Задачи линейного полуопределенного программирования: регуляризация и двойственные формулировки в строгой форме.....	17
--	----

### ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Чепулис М. А., Шевляков Г. Л.</i> Об обнаружении выбросов с помощью неравенства Чебышева .....	28
<i>Харин Ю. С., Волошко В. А., Дернакова О. В., Малюгин В. И., Харин А. Ю.</i> Статистическое прогнозирование динамики эпидемиологических показателей заболеваемости COVID-19 в Республике Беларусь.....	36

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Михасев Г. И., Ботогова М. Г., Михиевич А. П.</i> Анализ свободных колебаний сэндвич-панели с электрореологическим слоем на основе двух моделей слоистых оболочек .....	51
--	----

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Войнов Д. М., Ковалев В. А.</i> Устойчивость нейронных сетей к состязательным атакам при распознавании биомедицинских изображений .....	60
--	----

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Бубнов Я. В., Иванов Н. Н.</i> Скрытая марковская модель для определения вредоносных узлов компьютерной сети.....	73
<i>Кирлица В. П.</i> $D$ -оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии на отрезке с неравноточными наблюдениями .....	80
<i>Королевич В. В., Медведев Д. Г.</i> Влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с окружающей средой .....	86

### ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

<i>Миротин А. Р.</i> Письмо в редакцию .....	92
--	----

### ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<u>Владимир Васильевич Бобков</u> .....	93
<u>Геннадий Алексеевич Медведев</u> .....	95

Аннотации депонированных в БГУ работ.....	97
---	----

## CONTENTS

### MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

<i>Safonova I. N., Safonov V. G.</i> On some properties of the lattice of totally $\sigma$ -local formations of finite groups.....	6
--	---

### DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Kostyukova O. I., Tchemisova T. V.</i> Linear semidefinite programming problems: regularisation and strong dual formulations .....	17
---	----

### PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Chepulis M. A., Shevlyakov G. L.</i> On outlier detection with the Chebyshev type inequalities .....	28
<i>Kharin Yu. S., Valoshka V. A., Dernakova O. V., Malugin V. I., Kharin A. Yu.</i> Statistical forecasting of the dynamics of epidemiological indicators for COVID-19 incidence in the Republic of Belarus .....	36

### THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

<i>Mikhasev G. I., Botogova M. G., Mikhievich A. P.</i> Analysis of free vibrations of sandwich panel with electrorheological layer based on two models of laminated shells.....	51
--	----

### THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Voynov D. M., Kovalev V. A.</i> The stability of neural networks under condition of adversarial attacks to biomedical image classification.....	60
--	----

### SHORT COMMUNICATIONS

<i>Bubnov Y. V., Ivanov N. N.</i> Hidden Markov model for malicious hosts detection in a computer network .....	73
<i>Kirlitsa V. P.</i> D-optimal designs of experiments for trigonometric regression on interval with heteroscedastic observations.....	80
<i>Karalevich U. V., Medvedev D. G.</i> The influence of the length of heat sources on the external border on the temperature distribution in profiled polar-orthotropic ring plates taking into account there heat exchange with the external environment.....	86

### REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

<i>Mirotin A. R.</i> Letter to the editors .....	92
--	----

### TO THE MEMORY OF SCIENTIST

<u>Vladimir Vasil'evich Bobkov</u> .....	93
<u>Gennadiy Alekseevich Medvedev</u> .....	95

Indicative abstracts of the papers deposited in BSU.....	97
--	----

*Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).*

*Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, РИНЦ.*

**Журнал Белорусского  
государственного университета.  
Математика. Информатика.  
№ 3. 2020**

Учредитель:  
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,  
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного  
университета. Математика. Информатика»  
издается с января 1969 г.  
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.  
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»  
(ISSN 1561-834X).

Редактор *О. А. Семенец*  
Технический редактор *В. В. Пижкова*  
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 30.11.2020.  
Тираж 100 экз. Заказ 471.

Республиканское унитарное предприятие  
«Информационно-вычислительный центр  
Министерства финансов Республики Беларусь».  
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.  
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

© БГУ, 2020

**Journal  
of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics.  
No. 3. 2020**

Founder:  
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,  
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: [jmathinf@bsu.by](mailto:jmathinf@bsu.by)

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.  
Mathematics and Informatics»  
published since January, 1969.  
Until 2017 named «Vestnik BGU.  
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»  
(ISSN 1561-834X).

Editor *O. A. Semenets*  
Technical editor *V. V. Pishkova*  
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 30.11.2020.  
Edition 100 copies. Order number 471.

Republican Unitary Enterprise  
«Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr  
Ministerstva finansov Respubliki Belarus'».  
License for publishing No. 02330/89, 3 March 2014.  
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.

© BSU, 2020