



ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

3

2023

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Бухштабер В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демид Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никоноров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузигов А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижики С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief	KHARIN Y. S. , doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: kharin@bsu.by
Deputy editors-in-chief	KROTOV V. G. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: krotov@bsu.by
	DUDIN A. N. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: dudin@bsu.by
Executive secretary	MATEIKO O. M. , PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: matseika@bsu.by
Ablameyko S. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H.	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M.	Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I.	University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A.	National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dzemyda G.	Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A.	Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P.	Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U.	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A.	Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W.	University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D.	Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H.	University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I.	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P.	Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K.	Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
Makarov E. K.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I.	Harbin Institute of Technology, Harbin, China.
Nesterenko Y. V.	Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Nikonorov Y. G.	Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.

- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.956.3

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. КОРЗЮК^{1), 2)}, Я. В. РУДЬКО¹⁾, В. В. КОЛЯЧКО²⁾

¹⁾Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрены различные подходы к решению смешанных задач с разрывными условиями для волнового уравнения, основанные на функциональных и классических методах. Показаны отличия в решениях, которые соответствуют разным методам (преобразование Лапласа и метод характеристик) и определениям. Результаты продемонстрированы на одной смешанной задаче из теории механического удара о продольных колебаниях

Образец цитирования:

Корзюк ВИ, Рудько ЯВ, Колячко ВВ. Решения задач с разрывными условиями для волнового уравнения. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;3:6–18.
EDN: IJYFBV

For citation:

Korzyuk VI, Rudzko JV, Kolyachko VV. Solutions of problems with discontinuous conditions for the wave equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:6–18. Russian.
EDN: IJYFBV

Авторы:

Виктор Иванович Корзюк – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений¹⁾, профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета²⁾.

Ян Вячеславович Рудько – младший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений.

Владислав Владимирович Колячко – ассистент кафедры системного анализа и компьютерного моделирования факультета радиоп физики и компьютерных технологий.

Authors:

Viktor I. Korzyuk, doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; chief researcher at the department of differential equations^a and professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics^b.

korzyuk@bsu.by

Jan V. Rudzko, junior researcher at the department of differential equations.

janycz@yahoo.com

<https://orcid.org/0000-0002-1482-9106>

Vladislav V. Kolyachko, assistant at the department of system analysis and computer simulation, faculty of radiophysics and computer technologies.

vladislav.kolyachko@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-3773-1187>

полубесконечного упругого стержня с разрывными начальными и граничными условиями. Модельным примером служит задача о колебаниях стержня после продольного удара в торец (в частности, после выстрела пластилиновой пулей, прилипающей к концу стержня).

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение; неоднородное уравнение; смешанная задача; разрывные начальные условия; разрывные граничные условия; продольный удар; метод характеристик; преобразование Лапласа.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284) и Национальной академии наук Беларуси (договор № 2023-25-019).

SOLUTIONS OF PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS CONDITIONS FOR THE WAVE EQUATION

V. I. KORZYUK^{a, b}, J. V. RUDZKO^a, V. V. KOLYACHKO^b

^a*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surganova Street, Minsk 220072, Belarus*

^b*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: J. V. Rudzko (janycz@yahoo.com)

In this paper, we consider various approaches to solving of mixed problems with discontinuous conditions based on functional and classical methods. We show differences in solutions, which correspond to different techniques (the Laplace transform and the method of characteristics) and definitions. We demonstrate the results on the case of one boundary-value problem from the theory of mechanical impact about longitudinal oscillations of a semi-infinite elastic rod with discontinuous initial and boundary conditions. A model example is the problem of vibrations of the rod after a longitudinal impact on the end (e. g., shooting a plasticine bullet sticking to the end of a rod).

Keywords: one-dimensional wave equation; inhomogeneous equation; mixed problem; discontinuous initial conditions; discontinuous boundary conditions; longitudinal impact; method of characteristics; Laplace transform.

Acknowledgements. This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of implementing the programme of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement No. 075-15-2022-284) and the National Academy of Sciences of Belarus (agreement No. 2023-25-019).

Введение

Уравнения с частными производными при наличии разрывных начальных и граничных условий довольно широко встречаются в различных приложениях, например при изучении ударных волн в среде [1]. Обычно подобные явления моделируются с помощью задачи Коши или смешанной задачи с разрывными условиями. Это приводит к трудностям в определениях и интерпретациях решений [2].

Такие задачи часто решаются с помощью преобразования Фурье [3–5], преобразования Лапласа [6–9] и иных интегральных и функциональных преобразований [10–19]. Однако эти методы не охватывают все возможные случаи задания условий Коши [20], поскольку обратные интегральные преобразования, как правило, сходятся к полусумме левостороннего и правостороннего пределов [21].

В настоящей статье рассмотрим одну задачу из теории механического удара по упругому однородному стержню. Решим ее двумя способами – с помощью преобразования Лапласа и методом характеристик. Эти подходы дадут отличающиеся решения, но найдем способ их согласовать. Также покажем, что имеется бесконечное множество различных вариантов определения классического решения задачи в силу неоднозначности выбора условий сопряжения на характеристике, однако в каждом из них решение существует, и оно единственно.

Простейшая задача

Постановка задачи. Рассмотрим простейшую задачу из теории механического удара. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ покоящийся стержень подвергнется продольному удару грузом массой M по концу $x = 0$, который имеет упругое закрепление, причем в дальнейшем груз остается в соприкосновении со стержнем (т. е. удар является абсолютно неупругим). Кроме того, полагаем, что на стержень не действуют

внешние объемные силы. Тогда, пренебрегая весом стержня как силой и его возможными вертикальными отклонениями, для определения смещений u найдем решение смешанной задачи в замыкании $\bar{Q}$ области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = 0, 0 < t < \infty, 0 < x < \infty, \\ u(0, x) = 0, 0 \leq x < \infty, \partial_t u(0, x) = \begin{cases} v, x = 0, \\ 0, x > 0, \end{cases} \\ (\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2 + c^2)u(t, 0) = 0, 0 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (1)$$

В задаче (1) $a^2 = \frac{E}{\rho}$, $b^2 = \frac{SE}{M}$, $c^2 = \frac{k}{M}$, где $E > 0$ – модуль упругости стержня; $\rho > 0$ – плотность материала стержня; $S > 0$ – площадь поперечного сечения стержня; $k > 0$ – коэффициент жесткости линейного упругого элемента, к которому прикреплен конец $x = 0$ стержня; v – скорость ударяющего груза. Кроме того, полагаем, что материал и поперечные размеры груза и стержня примерно одинаковые и удар центральный (груз не может ударить значительно выше или ниже центра поперечного сечения, так как иначе необходимо учитывать изгиб).

Следует отметить, что математически не имеет значения, какого знака величины b^2 и c^2 . Несмотря на тот факт, что, исходя из физических предположений, $b^2 > 0$ и $c^2 > 0$, в дальнейшем задачи рассматриваются в общем виде независимо от знака величин b^2 и c^2 .

Решение задачи с помощью преобразования Лапласа. Следуя работе [22], применим формально к задаче (1) преобразование Лапласа по переменной t

$$y(p, x) = \mathcal{L}[u](p, x) = \int_0^\infty u(t, x) \exp(-pt) dt.$$

Имеем

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](p, x) = pu(p, x) - u(0, x), \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](p, x) = \frac{\partial y}{\partial x}(p, x),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](p, x) = p^2 u(p, x) - pu(0, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(0, x), \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](p, x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(p, x).$$

Из вышеприведенных выражений видно, что внеинтегральные члены в формулах преобразования Лапласа для производных отбрасываются и данный метод является, по сути, эвристическим.

В таком случае получим спектральную задачу

$$\begin{cases} (p^2 - a^2 \partial_x^2)y(p, x) = 0, 0 < x < \infty, \\ (p^2 - b^2 \partial_x^2 + c^2)y(p, 0) = v, y(p, \infty) = 0, \end{cases}$$

решение которой легко записывается в виде

$$y(p, x) = \frac{av}{ac^2 + b^2 p + ap^2} \exp\left(-\frac{px}{a}\right), 0 \leq x < \infty.$$

Применив обратное преобразование Лапласа

$$u(t, x) = \mathcal{L}^{-1}[y](t, x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} y(p, x) \exp(pt) dp,$$

получим решение исходной задачи (1) в виде

$$u(t, x) = \frac{2av}{\sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}} \theta\left(t - \frac{x}{a}\right) \exp\left(\frac{b^2(x - at)}{2a^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(at - x)\sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}}{2a^2}\right), \quad (2)$$

где θ – функция Хевисайда.

Отметим, что согласно формуле (2) при ударе в каждой точке в некоторый момент времени возникает скачок силы, движущийся вдоль стержня и проходящий через каждую точку мгновенно. Физически это, конечно, невозможно, так как удар имеет свою продолжительность, но в рамках данной задачи этим временем пренебрегаем.

Если $b^4 - 4a^2c^2 < 0$, то при любом выборе значения комплексного корня $\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}$ в формуле (2) получается одно и то же вещественное решение.

Решение задачи методом характеристик. Решая задачу (1) методом характеристик [23], получаем

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x - at \geq 0, \\ \frac{av}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \exp\left(\frac{b^2(x - at)}{2a^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(at - x)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right), & x - at < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Видно, что данное решение вдвое меньше, чем то решение, которое получается с помощью преобразования Лапласа. Возникает вопрос: «Почему это произошло и какое решение следует считать верным?» Однозначного ответа на указанный вопрос не существует. Так, например, в книге Б. Л. Рожественского и Н. Н. Яненко относительно задачи Коши в классе разрывных функций сказано, что «различные процессы могут описываться одними и теми же дифференциальными уравнениями, но разными интегральными законами сохранения. Поэтому различие этих процессов проявляется лишь на разрывных решениях» [24, с. 507]. Вводя некоторое определение решения, «мы однозначно фиксируем интегральные законы сохранения» [24, с. 507]. Примерно такой же подход изложен в монографии Дж. Б. Уизема [25, р. 139], где также подчеркнута неединственность определения решения, но правильным предложено считать то решение, которое соответствует исходным физическим предположениям. Хотя там же отмечено, что чисто математически любое из полученных решений является корректно определенным. Некоторые причины возникновения неединственности проанализированы в публикации [26]. В статье [27] показано, что обобщение классических решений даже в простом случае второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения без потери общности может быть сделано бесконечным числом различных способов, но в каждом из таких случаев решение обобщенной задачи единственно. В работе [28] сформулированы идея свободы выбора пространств, в которых ищутся решения начально-краевых задач, и правила переформулировки всех требований задачи в соответствии с этим выбором.

Следует отметить, что в решении (3) нарушается закон сохранения импульса: ударяющий груз массой M в момент соприкосновения с концом упругого стержня мгновенно теряет половину скорости. По сути, это и есть иллюстрация вышеизложенного, несмотря на математически корректное построение решения.

Обобщение решения задачи методом характеристик

Рассмотрим детально построение решения задачи (1) методом характеристик. В работе [23] изучен более общий случай задачи (1), который имеет вид

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x), & 0 < t < \infty, 0 < x < \infty, \\ u(0, x) = \varphi(x), & 0 \leq x < \infty, \partial_t u(0, x) = \begin{cases} \psi_1, & x = 0, \\ \psi_2(x), & x > 0, \end{cases} \\ (\partial_t^2 - b^2 \partial_x + c^2)u(t, 0) = \begin{cases} \mu_1, & t = 0, \\ \mu_2(t), & t > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

Решение задачи (4) методом характеристик строится из решения вспомогательной аппроксимационной задачи

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x), & 0 < t < \infty, 0 < x < \infty, \\ u(0, x) = \varphi(x), & 0 \leq x < \infty, \partial_t u(0, x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x > x^*, \end{cases} \\ (\partial_t^2 - b^2 \partial_x + c^2)u(t, 0) = \begin{cases} \tilde{\mu}_1(t), & t < \frac{x^*}{a}, \\ \tilde{\mu}_2(t), & t > \frac{x^*}{a}, \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

причем $x^* > 0$, $\tilde{\mu}_1(0) = \mu_1$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$, $\psi_2|_{[x^*, \infty)} = \tilde{\psi}_2$, $\mu_2|_{[x^*, \infty)} = \tilde{\mu}_2$. В свою очередь, классическое решение

задачи (5) определяется как классическое решение задачи с условиями сопряжения [23]: требуется найти классическое решение уравнения, удовлетворяющее условиям Коши, граничному условию, а также условиям сопряжения

$$\left[(u)^+ - (u)^- \right] (t, x^* + at) = \left[(u)^+ - (u)^- \right] (t, x^* - at) = 0, \quad (6)$$

$$\left[(u)^+ - (u)^- \right] (t, at) = \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^- \right] (t, at) = 0, \quad (7)$$

$$\left[(u)^+ - (u)^- \right] (t, at - x^*) = \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^- \right] (t, at - x^*) = 0. \quad (8)$$

Здесь использованы обозначения $()^\pm$, которые соответствуют предельным значениям функции u и ее производных $\partial_t^k \partial_x^p u$ с разных сторон на характеристиках вида $x = r(t)$, т. е.

$$(\partial_t^k \partial_x^p u)^\pm(t, r(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \partial_t^k \partial_x^p u(t, r(t) \pm \Delta t),$$

где $k \geq 0$, $p \geq 0$ и r есть функция действительного переменного.

Возникает вопрос: «Почему взяты именно эти условия согласования?» Их выбор обусловливается следующими факторами.

1. Условие (6) задается так, чтобы решение было непрерывным. Другой выбор условий сопряжения на характеристиках $x = x^* \pm at$ не позволяет удовлетворить условия Коши.

2. Условие (7) берется по тем же причинам.

3. Первое из условий (8) выбирается, исходя из требования непрерывности решения, тогда как обоснование второго из условий (8) отсутствует. Оно просто взято, чтобы функция была непрерывно-дифференцируемой при переходе через характеристику $x - at = -x^*$. Но существуют и другие варианты задания этого условия. Например, можно потребовать, чтобы изменения скорости $\partial_t u$ на характеристиках $x = at \pm x^*$ были одинаковыми, как это сделано в работе [29, с. 70–73], т. е.

$$\left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^- \right] (t, at - x^*) = \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^- \right] (t, at + x^*). \quad (9)$$

Но математически, не теряя общности, лучше было бы выбрать

$$\left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^- \right] (t, at - x^*) = C^{(1)}, \quad (10)$$

где $C^{(1)}$ – некоторая константа, вычисляемая из физических соображений, которые представлены в различных работах по теории удара и механике сплошных сред [1; 30–32].

Решение такой задачи будет единственным. Из него можно получить решение задачи (4) предельным переходом. Оно существует только при выполнении равенства $f(0, 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2 \varphi(0) + a^2 D^2 \varphi(0) - b^2 D \varphi(0) = 0$ и удовлетворяет условиям согласования

$$\left[(u)^+ - (u)^- \right] (t, at) = 0, \quad \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^- \right] (t, at) = C^{(1)} + \frac{\psi_2(0+) - \psi_1}{2}.$$

Если выбрать $C^{(1)} = \frac{\psi_2(0+) - \psi_1}{2}$, то это решение будет согласовано с тем решением, которое было получено с помощью преобразования Лапласа в простейшем случае.

Основной результат

Теперь строго обоснуем рассуждения предыдущего абзаца.

Определение 1. Непрерывную функцию u назовем классическим решением задачи (5), если функция u является дважды непрерывно-дифференцируемой и удовлетворяет уравнению $(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x)$ всюду, за исключением характеристик $x - at = 0$, $x - at = \pm x^*$ и $x + at = x^*$, первому начальному условию $u(0, x) = \varphi(x)$, $x \geq 0$, второму условию Коши

$$\partial_t u(0, x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x > x^*, \end{cases} \quad (11)$$

на множестве $[0, x^*) \cup (x^*, \infty)$ и граничному условию

$$(\partial_t^2 - b^2 \partial_x + c^2)u(t, 0) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \tilde{\mu}_1(t), & t < \frac{x^*}{a}, \\ \tilde{\mu}_2(t), & t > \frac{x^*}{a}, \end{cases} \quad (12)$$

на множестве $[0, \frac{x^*}{a}) \cup (\frac{x^*}{a}, \infty)$. Кроме того, функция u на характеристиках $x - at = 0$, $x - at = \pm x^*$ и $x + at = x^*$ удовлетворяет условиям сопряжения (6), (7), (10).

Определение 2. Непрерывную функцию u назовем классическим решением задачи (4), если она и ее частные производные первого и второго порядка (там, где существуют) являются поточечным пределом классических решений задачи (4) и их частных производных соответственно при $x^* \rightarrow 0$.

Замечание 1. Определение 1 данной работы отличается от определения 1, приведенного в статье [23], поскольку условия сопряжения (6), (7), (10) отличаются от условий сопряжения в публикации [23].

Теорема 1. Если выполняются условия гладкости $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0, x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*, \infty))$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1([0, \frac{x^*}{a}])$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1([\frac{x^*}{a}, \infty))$ для заданных функций, то существует единственное классическое решение задачи (5) в смысле определения 1.

Доказательство. 1. Сначала докажем существование данного решения. Как известно, общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [33]. Пусть $w: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным условиям Коши $w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0$ и $\partial_t^2 w(0, x) = f(0, x)$. Такое решение w существует [28; 33; 34], и оно имеет вид [34]

$$w(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, |\xi|) d\xi.$$

Если $f \in C^1(\bar{Q})$, то $w \in C^2(\bar{Q})$.

Тогда общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(t, x) = w(t, x) + g^{(1)}(x - at) + g^{(2)}(x + at), \quad (13)$$

где $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ – некоторые почти всюду дважды непрерывно-дифференцируемые функции.

Удовлетворяя условия Коши, получаем формулы

$$\begin{aligned} g^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x^*}^x \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi + C_1, \quad x \in (0, x^*), \\ g^{(2)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x^*}^x \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi - C_1, \quad x \in (0, x^*), \\ g^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x^*}^x \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi + C_2, \quad x \in (x^*, \infty), \\ g^{(2)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x^*}^x \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi - C_2, \quad x \in (x^*, \infty), \end{aligned} \quad (14)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные из множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Из условия сопряжения (6) следует, что $C_1 = C_2$.

Согласно представлению (13) и граничному условию (12)

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - b^2 \partial_x + c^2)u(t, 0) &= -b^2 (\partial_x w(t, 0) + Dg^{(1)}(-at) + Dg^{(2)}(at)) + \partial_t^2 w(t, 0) + \\ &+ c^2 (w(t, 0) + g^{(1)}(-at) + g^{(2)}(at)) + a^2 (D^2 g^{(1)}(-at) + D^2 g^{(2)}(at)) = \tilde{\mu}_1(t), \quad t \in \left(0, \frac{x^*}{a}\right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $g^{(1)}$ на отрезке $[-x^*, 0]$

$$c^2 \left(w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right) + g^{(1)}(z) + g^{(2)}(-z) \right) + a^2 \left(D^2 g^{(1)}(z) + D^2 g^{(2)}(-z) \right) - \\ - b^2 \left(\partial_x w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right) + Dg^{(1)}(z) + Dg^{(2)}(-z) \right) = \tilde{\mu}_1 \left(-\frac{z}{a} \right) - \partial_t^2 w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right), \quad z \in (-x^*, 0). \quad (15)$$

Учитывая условие сопряжения (7), должны выполняться условия

$$g^{(1)}(0-) = \varphi^{(0)} = g^{(1)}(0+) = C_1 + \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x^*} \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi, \\ Dg^{(1)}(0-) = \psi^{(0)} = Dg^{(1)}(0+) = \frac{1}{2} D\varphi(0) - \frac{1}{2a} \tilde{\psi}_1(0). \quad (16)$$

Уравнение (15) относительно функции $g^{(1)}$ вместе с условиями (16) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Решая эту задачу, получаем

$$g^{(1)}(z) = \exp \left(\frac{b^2 z}{2a^2} \right) \left(\varphi^{(0)} \operatorname{ch} \left(\frac{z \sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}}{2a^2} \right) + \frac{2a^2 \psi^{(0)} - b^2 \varphi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}} \operatorname{sh} \left(\frac{z \sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}}{2a^2} \right) \right) + \\ + \int_0^z \frac{2\mathcal{M}(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}} \exp \left(\frac{b^2(z - \xi)}{2a^2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{(z - \xi) \sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}}{2a^2} \right) d\xi, \quad z \in (-x^*, 0), \quad (17)$$

где

$$\mathcal{M}(z) = \tilde{\mu} \left(-\frac{z}{a} \right) - \partial_t^2 w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right) + b^2 \left(\partial_x w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right) + Dg^{(2)}(-z) \right) - \\ - c^2 \left(w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right) + g^{(2)}(-z) \right) - a^2 D^2 g^{(2)}(-z), \quad z \in (-\infty, 0).$$

В целях получения обыкновенного дифференциального уравнения для определения функции $g^{(1)}$ на луче $(-\infty, -x^*]$ воспользуемся граничным условием (12). В результате имеем

$$c^2 \left(w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right) + g^{(1)}(z) + g^{(2)}(-z) \right) + a^2 \left(D^2 g^{(1)}(z) + D^2 g^{(2)}(-z) \right) - \\ - b^2 \left(\partial_x w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right) + Dg^{(1)}(z) + Dg^{(2)}(-z) \right) = \tilde{\mu}_2 \left(-\frac{z}{a} \right) - \partial_t^2 w \left(-\frac{z}{a}, 0 \right), \quad z \in (-\infty, -x^*). \quad (18)$$

Условия Коши в этом случае найдем, исходя из условия согласования (10). Они примут вид

$$g^{(1)}(-x^* - 0) = \varphi_2^{(0)} = g^{(1)}(-x^* + 0), \\ Dg^{(1)}(-x^* - 0) = \psi_2^{(0)} = \frac{C^{(1)}}{a} + Dg^{(1)}(-x^* + 0). \quad (19)$$

Величины $g^{(1)}(-x^* + 0)$ и $Dg^{(1)}(-x^* + 0)$ вычисляются по формуле (17). Решая задачу Коши (18), (19) относительно функции $g^{(1)}$, получаем

$$g^{(1)}(z) = \exp \left(\frac{b^2(z + x^*)}{2a^2} \right) \times \\ \times \left(\varphi_2^{(0)} \operatorname{ch} \left(\frac{(z + x^*) \sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}}{2a^2} \right) + \frac{2a^2 \psi_2^{(0)} - b^2 \varphi_2^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}} \operatorname{sh} \left(\frac{(z + x^*) \sqrt{b^4 - 4a^2 c^2}}{2a^2} \right) \right) +$$

$$+ \int_{-x^*}^z \frac{2\mathcal{M}(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \exp\left(\frac{b^2(z - \xi)}{2a^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(z - \xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) d\xi, z \in (-\infty, -x^*). \quad (20)$$

Таким образом, согласно формулам (14), (17) и (20), поскольку функция $g^{(1)}$ была определена для всех действительных чисел, а функция $g^{(2)}$ – для положительных чисел, то построена функция u , определенная соотношением (13) на всем первом квадранте плоскости. Но при построении были введены константы C_1 и C_2 . Покажем, что функция u , заданная формулами (13), (14), (17) и (20), не зависит от выбора констант интегрирования C_1 и $C_1 = C_2$. Из представлений (13), (14), (17) и (20) следует, что функция u является непрерывно-дифференцируемой, если рассматривать ее как функцию от констант C_1 и C_2 . Теперь, подставляя выражения (14), (17) и (20) и равенство $C_1 = C_2$ в соотношение (13), получаем

$$\frac{\partial(u|_{C_1=C_2})}{\partial C_2} = 0.$$

Таким образом, функция u , заданная формулами (13), (14), (17) и (20), не зависит от выбора константы $C^{(1)}$. Здесь было использовано обозначение $\tilde{v} = v|_{X=\beta}$ – применение функции к части аргументов, которое преобразует функцию $v : X \times Y \ni (x, y) \mapsto z \in Z$ в функцию $\tilde{v} : Y \ni y \mapsto z \in Z$ по формуле $\tilde{v}(y) = v(\beta, y)$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция u удовлетворяет уравнению (1) и условиям (6), (7), (10)–(12), т. е. является решением исходной задачи в смысле определения 1.

2. Теперь докажем единственность решения. Предположим, что существуют два решения – u_1 и u_2 . Тогда можно показать, что их разность $U = u_1 - u_2$ является функцией класса $C^2(\bar{Q})$ и удовлетворяет смешанной задаче

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)U(t, x) = 0, 0 < t < \infty, 0 < x < \infty, \\ U(0, x) = \partial_t U(0, x) = 0, 0 \leq x < \infty, \\ (\partial_t^2 - b^2 \partial_x + c^2)U(t, 0) = 0, 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

В свою очередь, решение $U \equiv 0$ такой задачи единственно [35; 36] в классе $C^2(\bar{Q})$. Отсюда следует, что $u_1 - u_2 = 0$.

Для построения решения можно было воспользоваться тем фактом, что оно представляет собой совокупность решений задач Коши, Гурса и Пикара. При таком подходе единственность вытекает из построения, поскольку решение полученных задач определяется единственным образом (для задачи Коши см. [28; 33], для задачи Гурса см. [33; 37–39], а для задачи Пикара см. [23; 35; 36; 40]).

Теорема 2. Пусть выполняются условия гладкости $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\mu_2 \in C^1([0, \infty))$ для заданных функций. Тогда решение задачи (4) в смысле определения 2 существует и является единственным тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования $\mu_1 = f(0, 0) + c^2\varphi(0) + a^2 D^2\varphi(0) - b^2 D\varphi(0)$.

Доказательство. Необходимо повторить рассуждения статей [23; 41–43].

Замечание 2. Если в задачах (4) и (5) $c = 0$, то в теоремах 1 и 2 можно понизить требования гладкости $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0, \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$ и $\mu_2 \in C^1([0, \infty))$ до $\tilde{\mu}_1 \in C\left(\left[0, \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C\left(\left[\frac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$ и $\mu_2 \in C([0, \infty))$ соответственно. Обоснование данного факта фактически представлено в работе [41].

О выборе константы в условии сопряжения

В начале ударного процесса на отрезке $[0, x^*]$ сформирована ударная волна (рис. 1).

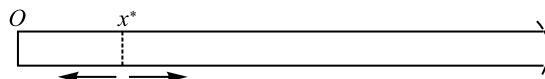


Рис. 1. Формирование ударной волны
Fig. 1. Formation of the shock wave

Из точки x^* ударная волна начинает распространяться в сторону ∞ (прямая волна) и в сторону точки O (обратная волна) (рис. 2).

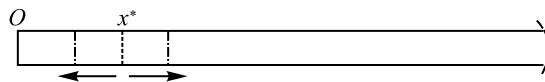


Рис. 2. Распространение ударной волны

Fig. 2. Propagation of the shock wave

При $t = \frac{x^*}{a}$ обратная волна достигает точки O и создает волну в противоположном направлении, т. е. еще одну прямую волну (рис. 3).

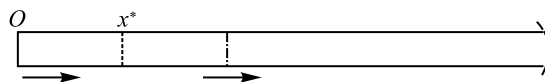


Рис. 3. Формирование отраженной ударной волны

Fig. 3. Formation of the reflected shock wave

Отраженная волна в силу физических свойств должна распространяться (рис. 4) с такой же скоростью (с таким же разрывом скоростей), что и исходная волна, порожденная ударным процессом, так как в упругих однородных стержнях ударные волны распространяются с одинаковыми скоростями [1; 32]. Это влечет условие сопряжения (9).



Рис. 4. Распространение исходной и отраженной ударных волн

Fig. 4. Propagation of the original and reflected shock waves

В работе [32] приведена явная формула для расчета разрыва напряжения при ударе

$$\left[(\sigma)^+ - (\sigma)^- \right] = \nu \rho c, \quad (21)$$

где σ – напряжение в сечении стержня; ν – скорость ударившего груза; ρ – плотность материала;

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – стандартная скорость распространения напряженного состояния вдоль стержня (постоянная величина в данном случае). Применяя закон Гука в виде $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль Юнга, а $\varepsilon = \partial_x u$ – деформация стержня, записываем выражение (21) в виде

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^- \right] = \frac{\nu \rho c}{E} = \frac{\nu}{a} = \text{const}. \quad (22)$$

Таким образом, с одной стороны, чисто физически вместо условия сопряжения (9) лучше взять условие

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^- \right] (t, at - x^*) = \left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^- \right] (t, at + x^*). \quad (23)$$

Оно является корректно заданным, поскольку из волнового уравнения, условия сопряжения (6) и формул (13) и (14) следует равенство

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^- \right] (t, at + x^*) = \frac{\tilde{\psi}_1(x^*) - \tilde{\psi}_2(x^*)}{2a}.$$

С другой стороны, исходя из общего решения волнового уравнения (13), при хотя бы непрерывно-дифференцируемом частном решении w можем вычислить

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \partial_t w(t, x) - aDg^{(1)}(x - at) + aDg^{(2)}(x + at), \\ \partial_x u(t, x) &= \partial_x w(t, x) + Dg^{(1)}(x - at) + Dg^{(2)}(x + at). \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда следуют равенства

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^- \right] (t, at \pm x^*) = -a \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^- \right] (t, at \pm x^*).$$

Это позволяет говорить о некоторой физической эквивалентности условий сопряжения (23) и (9). Хотя для вывода условия (9) воспользовались условием (23), непрерывностью функции f и общим решением волнового уравнения.

В предельном случае задачи (5), исходя из формул (24) и (10), можем вычислить

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^- \right] (t, at) = \left(\frac{\psi_1}{2} - C^{(1)} - \frac{\psi_2(0+)}{2} \right) a^{-1}. \quad (25)$$

Сравнивая формулы (25) и (23), приходим к выводу, что величина $\frac{\psi_1}{2} - C^{(1)} - \frac{\psi_2(0+)}{2}$ равна скорости ударившего груза. Это говорит о том, что если мы хотим, чтобы величина $\psi_2(0+) - \psi_1$ численно равнялась скорости ударившего груза, то следует выбрать $C^{(1)} = \frac{\psi_2(0+) - \psi_1}{2}$.

Заключение

Рассмотрены два различных подхода (на основе метода характеристик и преобразования Лапласа) к определению решения смешанной задачи с разрывными условиями. Показано, что метод характеристик позволяет получить больше решений за счет варьирования условий согласования. Но в каждом конкретном случае будет существовать единственное классическое решение. Также отметим, что при решении задач с разрывными условиями интегральные преобразования не всегда применимы, тогда как метод характеристик избавлен от этих проблем.

Библиографические ссылки

1. Журавков МА, Старовойтов ЭИ. *Математические модели механики твердых тел*. Минск: БГУ; 2021. 535 с. (Классическое университетское издание).
2. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*. Шугаев ФВ, переводчик; Белоцерковский ОМ, редактор. Москва: Наука; 1978. 352 с.
3. Babeshko VA, Ratner SV, Syromyatnikov PV. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions. *Doklady Physics*. 2007;52(2):90–95. DOI: 10.1134/s102833580702005x.
4. Глушко АВ, Басва СА. Об одной начально-краевой задаче гидродинамики с разрывными граничными условиями. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. 2005;2:128–132.
5. Trogon T, Biondini G. Evolution partial differential equations with discontinuous data. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2019;77(4):689–726. DOI: 10.1090/qam/1526.
6. Kozlov VP, Mandrik PA, Yurchuk NI. Method for solving nonstationary heat problems with mixed discontinuous boundary conditions on the boundary of a half-space. *Differential Equations*. 2001;37(8):1171–1175. DOI: 10.1023/A:1012431821479.
7. Kozlov VP, Mandrik PA. Solution of nonlinear two-dimensional differential equations of transfer with discontinuity boundary conditions on the surface of an isotropic semiinfinite body in its heating through a circle of known radius. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2001;74(2):471–476. DOI: 10.1023/A:1016685329003.
8. Гайдук СИ, Добрушкін ВА. Решение одной задачи из теории термоупругости, связанной с механическим и тепловым ударами. *Дифференциальные уравнения*. 1979;15(9):1632–1645.
9. Cerv J, Adamek V, Vales F, Gabriel D, Plesek J. Wave motion in a thick cylindrical rod undergoing longitudinal impact. *Wave Motion*. 2016;66:88–105. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2016.05.007.
10. Yurchuk NI, Kozlov VP, Mandrik PA. A method of paired integral equations in the region of laplace transforms for solving nonstationary heat conduction problems with mixed discontinuous boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1999;72(3):534–549. DOI: 10.1007/BF02699221.
11. Kozlov VP, Yurchuk NI, Mandrik PA. Method of paired integral equations in the region of L-transforms for solving two-dimensional problems of nonstationary heat conduction with mixed boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1998;71(4):731–739. DOI: 10.1007/BF03449555.
12. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Задача о продольном ударе по упругому стержню с упругим закреплением одного из концов. В: Гусев ОК, Воробей РИ, Гуревич ВЛ, Князев МА, Кулешов НВ, Маляревич АМ и др., редакторы. *Приборостроение-2022. Материалы 15-й Международной научно-технической конференции; 16–18 ноября 2022 г.; Минск, Беларусь = Instrumentation Engineering – 2022. Proceedings of the 15th International scientific and technical conference; 2022 November 16–18; Minsk, Belarus*. Минск: Белорусский национальный технический университет; 2022. с. 305–307.
13. Бахшиян РМ, Вейнерт ЯВ, Денисова ИВ. Об одном методе решения задачи нестационарной теплопроводности шара с разрывными граничными условиями. В: Шульга ОА, Ахметова МН, Иванова ЮВ, Лактионов КС, Комогорцев МГ, Ахметова ВВ и др., редакторы. *Технические науки: теория и практика. Материалы Международной заочной научной конференции; апрель 2012 г.; Чита, Россия*. Чита: Молодой ученый; 2012. с. 120–123.
14. Gaiduk SI. Application of the contour integral method to the solution of a problem on transverse vibrations of a viscoelastic membrane caused by an impact. *Differential Equations*. 1991;27(8):977–985.
15. Akhondizadeh M. Analytical solution of the longitudinal wave propagation due to the single impact. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2018;37(4):849–858. DOI: 10.1177/1461348418793122.
16. Belyaev AK, Morozov NF, Tovstik PE, Tovstik TP. Beating in the problem of longitudinal impact on a thin rod. *Mechanics of Solids*. 2015;50(4):451–462. DOI: 10.3103/s0025654415040111.

17. Belyaev AK, Morozov NF, Tovstik PE, Tovstik TP. Parametric resonances in the problem of longitudinal impact on a thin rod. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*. 2016;49(1):53–67. DOI: 10.3103/s1063454116010040.
18. Valeš F, Morávka Š, Brepta R, Červ J. Wave propagation in a thick cylindrical bar due to longitudinal impact. *JSME International Journal. Series A, Solid Mechanics and Material Engineering*. 1996;39(1):60–70. DOI: 10.1299/jsmea1993.39.1_60.
19. Yurko V. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. *Integral Transforms and Special Functions*. 2000;10(2):141–164. DOI: 10.1080/10652460008819282.
20. Bateman H. Physical problems with discontinuous initial conditions. *PNAS*. 1930;16(3):205–211. DOI: 10.1073/pnas.16.3.205.
21. Polyanin AD. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. New York: Chapman & Hall/CRC; 2001. 800 p. DOI: 10.1201/9781420035322.
22. Пикулин ВП, Похожаев СИ. *Практический курс по уравнениям математической физики*. 2-е издание. Москва: МЦНМО; 2004. 208 с.
23. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню с линейным упругим элементом на конце. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;2:34–46. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-34-46.
24. Рождественский БЛ, Яненко НН. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*. 2-е издание. Москва: Наука; 1978. 688 с.
25. Whitham GB. *Linear and nonlinear waves*. New York: John Wiley & Sons; 1999. XVI, 636 p. (Pure and applied mathematics; volume 1237). DOI: 10.1002/9781118032954.
26. Куликовский АГ, Свешникова ЕИ, Чугайнова АП. *Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений*. Москва: МИАН; 2010. 120 с. (Лекционные курсы НОЦ; выпуск 16). DOI: 10.4213/lkn16.
27. Ладженская ОА. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье – Стокса, существование и гладкость. *Успехи математических наук*. 2003;58(2):45–78. DOI: 10.4213/rm610.
28. Корзюк ВИ, Козловская ИС. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Часть 2*. Минск: БГУ; 2017. 48 с.
29. Кошляков НС, Глинер ЭБ, Смирнов ММ. *Уравнения в частных производных математической физики*. Москва: Высшая школа; 1970. 712 с.
30. Новацкий ВК. *Волновые задачи теории пластичности*. Шачнев ВА, переводчик; Шапиро ГС, редактор. Москва: Мир; 1978. 307 с.
31. Горбач НИ. *Теоретическая механика. Динамика*. 2-е издание. Минск: Вышэйшая школа; 2012. 320 с.
32. Работнов ЮН. *Механика деформируемого твердого тела*. Москва: Наука; 1979. 744 с.
33. Корзюк ВИ. *Уравнения математической физики*. 2-е издание. Москва: URSS; 2021. 480 с.
34. Юрчук НИ, Новиков ЕН. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуграниченной струны. *Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2016;4:116–120.
35. Ломовцев ФЕ, Лысенко ВВ. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. *Вестні Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта*. 2019;3:5–17.
36. Лысенко ВВ, Ломовцев ФЕ. Решение и критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуграниченной струны при нехарактеристических и нестационарных вторых производных на границе. В: Деменчук АК, Красовский СГ, Макаров ЕК, редакторы. *Еругинские чтения – 2019. Материалы XIX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям; 14–17 мая 2019 г.; Могилёв, Беларусь. Часть 2*. Минск: Институт математики НАН Беларуси; 2019. с. 30–32.
37. Корзюк ВИ, Ковнацкая ОА. Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках. *Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2021;57(2):148–155. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155.
38. Корзюк ВИ, Ковнацкая ОА. Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения. В: Амелин ВВ, Антонец АБ, Астровский АИ, Башун СЮ, Васильковский ММ, Гладков АЛ и др., редакторы. *Еругинские чтения – 2022. Материалы XX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям; 31 мая – 3 июня 2022 г.; Новополоцк, Беларусь. Часть 2*. Новополоцк: Полоцкий государственный университет; 2022. с. 16–17.
39. Korzyuk VI, Stolyarchuk II. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients. *Differential Equations*. 2017;53(1):74–85. DOI: 10.1134/s0012266117010074.
40. Корзюк ВИ, Наумов СН, Сериков ВП. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях. *Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2020;56(3):287–297. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-3-287-297.
41. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню. *Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2021;57(4):417–427. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427.
42. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши. *Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2021;57(1):23–32. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32.
43. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2020;64(6):657–662. DOI: 10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662.

References

1. Zhuravkov MA, Starovoitov EI. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdykh tel* [Mathematical models of solid mechanics]. Minsk: Belarusian State University; 2021. 535 p. (Klassicheskoe universitetskoe izdanie). Russian.
2. Hadamard J. *Zadacha Koshi dlya lineinykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [Cauchy's problem for linear partial differential equations of hyperbolic type]. Shugaev FV, translator; Belotserkovskii OM, editor. Moscow: Nauka; 1978. 352 p. Russian.

3. Babeshko VA, Ratner SV, Syromyatnikov PV. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions. *Doklady Physics*. 2007;52(2):90–95. DOI: 10.1134/s102833580702005x.
4. Glushko AV, Baeva SA. Upon an initial-boundary value hydrodynamic problem with discontinuous boundary conditions. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2005;2:128–132. Russian.
5. Trogon T, Biondini G. Evolution partial differential equations with discontinuous data. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2019;77(4):689–726. DOI: 10.1090/qam/1526.
6. Kozlov VP, Mandrik PA, Yurchuk NI. Method for solving nonstationary heat problems with mixed discontinuous boundary conditions on the boundary of a half-space. *Differential Equations*. 2001;37(8):1171–1175. DOI: 10.1023/A:1012431821479.
7. Kozlov VP, Mandrik PA. Solution of nonlinear two-dimensional differential equations of transfer with discontinuity boundary conditions on the surface of an isotropic semiinfinite body in its heating through a circle of known radius. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2001;74(2):471–476. DOI: 10.1023/A:1016685329003.
8. Gaiduk SI, Dobrushkin VA. [Solution of a problem in the theory of thermoelasticity related to mechanical and thermal impacts]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1979;15(9):1632–1645. Russian.
9. Cerv J, Adamek V, Vales F, Gabriel D, Plesek J. Wave motion in a thick cylindrical rod undergoing longitudinal impact. *Wave Motion*. 2016;66:88–105. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2016.05.007.
10. Yurchuk NI, Kozlov VP, Mandrik PA. A method of paired integral equations in the region of laplace transforms for solving nonstationary heat conduction problems with mixed discontinuous boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1999;72(3):534–549. DOI: 10.1007/BF02699221.
11. Kozlov VP, Yurchuk NI, Mandrik PA. Method of paired integral equations in the region of L-transforms for solving two-dimensional problems of nonstationary heat conduction with mixed boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1998;71(4):731–739. DOI: 10.1007/BF03449555.
12. Korzyuk VI, Rudzko JV. The problem of a longitudinal impact on an elastic bar with an elastic attachment of one of its ends. In: Gusev OK, Vorobei RI, Gurevich VL, Knyazev MA, Kuleshov NV, Malyarevich AM, et al., editors. *Instrumentation Engineering – 2022. Proceedings of the 15th International scientific and technical conference; 2022 November 16–18; Minsk, Belarus*. Minsk: Belarusian National Technical University; 2022. p. 305–307. Russian.
13. Bakhshinyan RM, Veinert YaV, Denisova IV. [On a method for solving the problem of nonstationary heat conduction of a ball with discontinuous boundary conditions]. In: Shul'ga OA, Akhmetova MN, Ivanova YuV, Laktionov KS, Komogortsev MG, Akhmetova VV, et al., editors. *Tekhnicheskie nauki: teoriya i praktika. Materialy Mezhdunarodnoi zaochnoi nauchnoi konferentsii; aprel' 2012 g.; Chita, Rossiya* [Technical sciences: theory and practice. Proceedings of the International correspondence scientific conference; April 2012; Chita, Russia]. Chita: Molodoi uchenyi; 2012. p. 120–123. Russian.
14. Gaiduk SI. Application of the contour integral method to the solution of a problem on transverse vibrations of a viscoelastic membrane caused by an impact. *Differential Equations*. 1991;27(8):977–985.
15. Akhondizadeh M. Analytical solution of the longitudinal wave propagation due to the single impact. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2018;37(4):849–858. DOI: 10.1177/1461348418793122.
16. Belyaev AK, Morozov NF, Tovstik PE, Tovstik TP. Beating in the problem of longitudinal impact on a thin rod. *Mechanics of Solids*. 2015;50(4):451–462. DOI: 10.3103/s0025654415040111.
17. Belyaev AK, Morozov NF, Tovstik PE, Tovstik TP. Parametric resonances in the problem of longitudinal impact on a thin rod. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*. 2016;49(1):53–67. DOI: 10.3103/s1063454116010040.
18. Valeš F, Morávka Š, Brepta R, Červ J. Wave propagation in a thick cylindrical bar due to longitudinal impact. *JSME International Journal. Series A, Solid Mechanics and Material Engineering*. 1996;39(1):60–70. DOI: 10.1299/jsmea1993.39.1_60.
19. Yurko V. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. *Integral Transforms and Special Functions*. 2000;10(2):141–164. DOI: 10.1080/10652460008819282.
20. Bateman H. Physical problems with discontinuous initial conditions. *PNAS*. 1930;16(3):205–211. DOI: 10.1073/pnas.16.3.205.
21. Polyanin AD. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. New York: Chapman & Hall/CRC; 2001. 800 p. DOI: 10.1201/9781420035322.
22. Pikulin VP, Pokhozhaev SI. *Prakticheskii kurs po uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Equations in mathematical physics: a practical course]. 2nd edition. Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education; 2004. 208 p. Russian.
23. Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of one problem of a perfectly inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar with a linear elastic element at the end. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;2:34–46. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-34-46.
24. Rozhdestvenskii BL, Yanenko NN. *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* [Systems of quasi-linear equations and their applications to gas dynamics]. 2nd edition. Moscow: Nauka; 1978. 688 p. Russian.
25. Whitham GB. *Linear and nonlinear waves*. New York: John Wiley & Sons; 1999. XVI, 636 p. (Pure and applied mathematics; volume 1237). DOI: 10.1002/9781118032954.
26. Kulikovskii AG, Sveshnikova EI, Chugainova AP. *Matematicheskie metody izucheniya razryvnykh reshenii nelineinykh giperbolicheskikh sistem uravnenii* [Mathematical methods for studying discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic systems of equations]. Moscow: Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences; 2010. 120 p. (Lektsionnye kursy NOTs; issue 16). Russian. DOI: 10.4213/lkn16.
27. Ladyzhenskaya OA. [Sixth problem of the millennium: Navier – Stokes equations, existence and smoothness]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 2003;58(2):45–78. Russian. DOI: 10.4213/rm610.
28. Korzyuk VI, Kozlovskaya IS. *Klassicheskie resheniya zadach dlya giperbolicheskikh uravnenii. Chast' 2* [Classical solutions of problems for hyperbolic equations. Part 2]. Minsk: Belarusian State University; 2017. 48 p. Russian.
29. Koshlyakov NS, Gliner EB, Smirnov MM. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola; 1970. 712 p. Russian.
30. Nowacki WK. *Zagadnienia falowe w teorii plastycznosci*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe; 1974. 207 s. (Biblioteka mechaniki stosowanej).
Russian edition: Nowacki WK. *Volnovye zadachi teorii plastichnosti*. Shachnev VA, translator; Shapiro GS, editor. Moscow: Mir; 1978. 307 p.

31. Gorbach NI. *Teoreticheskaya mekhanika. Dinamika* [Theoretical mechanics. Dynamics]. 2nd edition. Minsk: Vyshhejskaja shkola; 2012. 320 p. Russian.
32. Rabotnov YuN. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solid]. Moscow: Nauka; 1979. 744 p. Russian.
33. Korzyuk VI. *Uraveniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. 2nd edition. Moscow: URSS; 2021. 480 p. Russian.
34. Yurchuk NI, Novikov EN. Necessary conditions for existence of classical solutions to the equation of semi-bounded string vibration. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2016;4:116–120. Russian.
35. Lomovtsev FE, Lysenko VV. Non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhavnaga wniversitjeta*. 2019;3:5–17. Russian.
36. Lysenko VV, Lomovtsev FE. [Solution and well-posedness criterion for a mixed problem for the general equation of vibrations of a semi-bounded string with non-characteristic and non-stationary second derivatives on the boundary]. In: Demenchuk AK, Krasovskii SG, Makarov EK, editors. *Eruginskie chteniya – 2019. Materialy XIX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam; 14–17 maya 2019 g.; Mogilev, Belarus'*. Chast' 2 [Erugin readings – 2019. Proceedings of the 19th International scientific conference on differential equations; 2019 May 14–17; Mogilev, Belarus. Part 2]. Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus; 2019. p. 30–32. Russian.
37. Korzyuk VI, Kovnatskaya OA. Solutions of problems for the wave equation with conditions on the characteristics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2021;57(2):148–155. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155.
38. Korzyuk VI, Kovnatskaya OA. [The Goursat problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation]. In: Amel'kin VV, Antonevich AB, Astrovskii AI, Bashun SYu, Vas'kovskii MM, Gladkov AL, et al., editors. *Eruginskie chteniya – 2022. Materialy XX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam; 31 maya – 3 iyunya 2022 g.; Novopolotsk, Belarus'*. Chast' 2 [Erugin readings – 2022. Proceedings of the 20th International scientific conference on differential equations; 2022 May 31 – June 3; Novopolotsk, Belarus. Part 2]. Novopolotsk: Polotsk State University; 2022. p. 16–17. Russian.
39. Korzyuk VI, Stolyarchuk II. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients. *Differential Equations*. 2017;53(1):74–85. DOI: 10.1134/s0012266117010074.
40. Korzyuk VI, Naumavets SN, Serikov VP. Mixed problem for a one-dimensional wave equation with conjugation conditions and second-order derivatives in boundary conditions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2020;56(3):287–297. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-3-287-297.
41. Korzyuk VI, Rudzko JV. The classical solution of one problem of an absolutely inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2021;57(4):417–427. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427.
42. Korzyuk VI, Rudzko JV. The classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the non-smooth second initial condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2021; 57(1):23–32. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32.
43. Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2020;64(6):657–662. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662.

Получена 24.01.2023 / исправлена 14.10.2023 / принята 17.10.2023.
Received 24.01.2023 / revised 14.10.2023 / accepted 17.10.2023.

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ИЕРАРХИЕЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Е. В. ГРОМАК¹⁾, В. И. ГРОМАК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается нестационарная иерархия второго уравнения Пенлеве, которая представляет собой последовательность полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру, определяемую оператором $\tilde{L}_N$. Первый член этой иерархии при $N = 1$ есть второе уравнение Пенлеве, а последующие уравнения порядка $2N$ содержат произвольные параметры. Их также называют обобщенными высшими аналогами второго уравнения Пенлеве порядка $2N$. С данной иерархией связаны иерархии первого уравнения Пенлеве и уравнения P_{34} из классификационного списка канонических уравнений Пенлеве. Кроме того, рассматривается линейное уравнение второго порядка, коэффициенты которого определяются решениями уравнений нестационарной иерархии второго уравнения Пенлеве и уравнения P_{34} . С использованием метода Фробениуса получены достаточные условия мероморфности общего решения линейных уравнений второго порядка с коэффициентами, определяемыми решениями первых трех уравнений нестационарной иерархии второго уравнения Пенлеве и уравнения P_{34} . Также получены достаточные условия рациональности общего решения линейных уравнений второго порядка с коэффициентами, определяемыми рациональными решениями уравнений нестационарной иерархии второго уравнения Пенлеве и уравнения P_{34} .

Ключевые слова: уравнения Пенлеве; иерархия второго уравнения Пенлеве; мероморфные решения.

ON MEROMORPHIC SOLUTIONS OF THE EQUATIONS RELATED TO THE NON-STATIONARY HIERARCHY OF THE SECOND PAINLEVÉ EQUATION

E. V. GROMAK^a, V. I. GROMAK^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: E. V. Gromak (lenagromak@tut.by)

The non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation is herein considered. It is a sequence of polynomial ordinary differential equations of even order with a single differential-algebraic structure determined by the operator $\tilde{L}_N$. The first member of this hierarchy for $N = 1$ is the second Painlevé equation, and the subsequent equations of $2N$ order contain

Образец цитирования:

Громак ЕВ, Громак ВИ. О мероморфных решениях уравнений, связанных с нестационарной иерархией второго уравнения Пенлеве. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;3:19–31. EDN: ODCDYE

For citation:

Gromak EV, Gromak VI. On meromorphic solutions of the equations related to the non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:19–31. Russian. EDN: ODCDYE

Авторы:

Елена Валерьевна Громак – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Валерий Иванович Громак – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Authors:

Elena V. Gromak, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.

lenagromak@tut.by

<https://orcid.org/0000-0003-3646-6227>

Valeri I. Gromak, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics.

vgromak@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-1868-2313>

arbitrary parameters. They are also named generalised higher analogues of the second Painlevé equation of $2N$ order. The hierarchies of the first Painlevé equation and the equation P_{34} from the classification list of canonical Painlevé equations are also associated with this hierarchy. In this paper, we also consider a second order linear equation the coefficients of which are determined by solutions of the hierarchy of the second Painlevé equation and the equation P_{34} . Using the Frobenius method, we obtain sufficient conditions for the meromorphicity of the general solution of second-order linear equations with the coefficients defined by the solutions of the first three equations of the non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation and the equation P_{34} . We also find sufficient conditions for the rationality of the general solution of second-order linear equations with coefficients determined by rational solutions of the equations of the non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation and the equation P_{34} .

Keywords: Painlevé equations; the hierarchy of the second Painlevé equation; meromorphic solutions.

Введение

Известно, что канонические уравнения Пенлеве ($P_1 - P_6$), которые являются решением классификационной проблемы относительно свойства Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в общем случае определяют новые трансцендентные функции, имеющие приложения как в различных математических задачах, так и в вопросах физики и математической физики [1–4]. В связи с этим существует интерес к изучению иерархий уравнений Пенлеве, которые представляют собой бесконечные последовательности нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве [5–9]. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, при специальных значениях параметров имеют специальные классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения.

Известно, что общее решение линейного уравнения $u'' + (\lambda q(z) + \mu)u = 0$ (уравнение Ламе), где $\lambda = -n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, $q(z)$ – двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами ω , ω' и двукратными полюсами в точках $m\omega + m'\omega'$, $m', m \in \mathbb{Z}$, а μ – произвольная постоянная, представляет собой мероморфную функцию [10, с. 150].

В настоящей работе найдем достаточные условия на постоянные параметры A, B, C, μ линейного уравнения

$$u'' + (Aw^2 + Bw + Cw' + \mu)u = 0, \quad (1)$$

где $w(z)$ – фиксированное решение нелинейного уравнения нестационарной иерархии второго уравнения Пенлеве, при выполнении которых общее решение уравнения (1) мероморфно или даже рационально.

Иерархия второго уравнения Пенлеве

Нестационарная иерархия второго уравнения Пенлеве имеет вид

$$\tilde{P}_2^{[2N]} : (D + 2w)\tilde{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \quad D(\cdot) = \frac{d}{dz}(\cdot), \quad N = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где оператор $\tilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением [11]

$$D\tilde{L}_{N+1}[u] = (D^3 + (4u + \beta_N)D + 2u_z)\tilde{L}_N[u], \quad \tilde{L}_1[u] = u, \quad u = u(z), \quad N = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

здесь β_N – параметр. Тогда для $N = 1, 2, 3$ последовательно получаем первые три уравнения иерархии $\tilde{P}_2^{[2N]}$:

$$P_2 : w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \quad (4)$$

$$\tilde{P}_2^{[4]} : w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + zw + \alpha, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2^{[6]} : w^{(6)} = & 2w^2(5s_1w'' + 7w^{(4)}) - 70w^4w'' + w(10s_1(w')^2 + 42(w'')^2 + 56w'w^{(3)}) - \\ & - w^{(4)}s_1 - (s_2 - 70(w')^2)w'' + 2w^3(s_2 - 70(w')^2) - 6w^5s_1 + 20w^7 + zw + \alpha, \end{aligned} \quad (6)$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$.

Иерархию $\tilde{P}_2^{[2N]}$ также называют обобщенной (или нестационарной) иерархией второго уравнения Пенлеве P_2 (см., например, [7–9; 12; 13]), поскольку первое уравнение этой иерархии, равно как и первое уравнение иерархии $P_2^{[2N]}$, которая впервые приведена в работе [14] и может быть получена из иерархии $\tilde{P}_2^{[2N]}$ при $\beta = 0$ (здесь и далее $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$), есть второе уравнение Пенлеве, а последующие уравнения обобщают соответствующие уравнения иерархии $P_2^{[2N]}$. Заметим, что уравнение $\tilde{P}_2^{[2N]}$ имеет порядок $2N$, где N определяет номер оператора $\tilde{L}_N$ и номер уравнения иерархии. Аналитические свойства решений второго уравнения Пенлеве, т. е. случай $N = 1$, рассмотрены, например, в работах [2; 15], а свойства второго члена иерархии, т. е. случай $N = 2$, – в статьях [16–19].

С иерархией (2), (3), которая является редукцией иерархий KdV и mKdV [14], связаны другие иерархии обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, введем функции

$$q(z) := w'(z) - w(z)^2, \quad \Psi^{[N]}(q(z)) := \tilde{L}_N[q(z)] - \frac{z}{2}. \quad (7)$$

Тогда уравнение (2) можно записать как $(D + 2w)\Psi^{[N]} = \alpha - \frac{1}{2}$, а также представить в виде эквивалентной системы

$$w' = q + w^2, \quad (\Psi^{[N]})' + 2w\Psi^{[N]} - \sigma = 0, \quad (8)$$

где $\Psi^{[N]} = \Psi^{[N]}(q(z))$, $\sigma = \alpha - \frac{1}{2}$, $(\cdot)' = D(\cdot)$. Функция $q(z)$ при этом удовлетворяет уравнению

$$\tilde{P}_{34}^{[2N]}: \Psi'' - \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} + 2q\Psi + \frac{\sigma^2}{2\Psi} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) определяет обобщенную иерархию уравнения P_{34} [20], так как в случае $N = 1$ функция $\Psi(q(z))$ из формулы (7) имеет вид $\Psi_1(z) = q - \frac{z}{2}$, а уравнение (9) сводится к уравнению

$$q'' = \frac{4q^3 - 4zq^2 + z^2q + q' - (q')^2 + \sigma^2 - \frac{1}{4}}{z - 2q}, \quad (10)$$

которое калибровочным преобразованием $q \rightarrow \sigma q + \frac{z}{2}$ приводится к виду

$$q'' = \frac{(q')^2}{2q} - zq - 2\sigma q^2 - \frac{1}{2q}.$$

Это уравнение обладает свойством Пенлеве и имеет порядок 34 из классификационного списка Пенлеве [1, с. 456].

В случае $N = 2$ функция $\Psi(q(z))$ имеет вид $\Psi_2(z) = q'' + 3q^2 + \beta_1q - \frac{z}{2}$, а уравнение относительно $q(z)$ сводится к уравнению

$$q^{(4)} = \frac{(\Psi_2')^2}{2\Psi_2} - 2q\Psi_2 - 6(q')^2 - q''(6q + \beta_1) - \frac{\sigma^2}{2\Psi_2}. \quad (11)$$

В случае $N = 3$ функция $\Psi(q(z))$ имеет вид

$$\Psi_3(z) = q^{(4)} + 10q^3 + (3q^2 + q'')s_1 + 5(q')^2 + q(s_2 + 10q'') - \frac{z}{2},$$

а уравнение относительно $q(z)$ сводится к уравнению

$$q^{(6)} = \frac{(\Psi_3')^2}{2\Psi_3} - 2q\Psi_3 - (60q + 6s_1)(q')^2 - (30q^2 + 6qs_1 + s_2)q'' - 20(q'')^2 - 30q'q^{(3)} - (10q + s_1)q^{(4)} - \frac{\sigma^2}{2\Psi_3}, \quad (12)$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$.

В уравнении (9) предполагаем, что $\Psi(q) \neq 0$. В противном случае имеем уравнение

$$\tilde{P}_1^{[2N-2]} : \Psi(q) = \tilde{L}_N[q(z)] - \frac{z}{2} = 0, \quad (13)$$

которое определяет обобщенную иерархию первого уравнения Пенлеве. В силу системы (8), если $q = q(z)$ есть решение уравнения $\tilde{P}_1^{[2N-2]}$, то функция $w(z)$, определяемая из уравнения Риккати $w' - w^2 = q$, является решением уравнения $P_2^{[2N]}$ при $\alpha = \frac{1}{2}$.

При $N = 1$ в формуле (13) уравнение $w' - w^2 = \frac{z}{2}$ определяет однопараметрическое семейство решений второго уравнения Пенлеве (4) при $\alpha = \frac{1}{2}$, которые выражаются через функции Эйри и их производные.

При $N = 2$ уравнение (13) определяет первое уравнение Пенлеве $q'' + 3q^2 + \beta_1 q = \frac{z}{2}$.

Хорошо известно, что решения уравнений P_1 и P_2 являются мероморфными функциями [21]. Доказательство аналогичного свойства мероморфного продолжения (СМП) для уравнений иерархий $\tilde{P}_1^{[2N-2]}$ и $\tilde{P}_2^{[2N]}$, т. е. доказательство того, что любое локальное голоморфное решение произвольного уравнения этих иерархий допускает аналитическое продолжение до функции, мероморфной на всей комплексной плоскости, приведено в работах [22; 23]. Заметим также, что решения соответствующих уравнений иерархий $\tilde{P}_2^{[2N]}$ и $\tilde{P}_{34}^{[2N]}$ связаны бирациональными соотношениями (7) и (8). Следовательно, решения $w^{[N]}(z)$, $q^{[N]}(z)$ уравнений этих иерархий мероморфны или рациональны одновременно (см. [20, лемма 1]). Это означает, что уравнения иерархии $\tilde{P}_{34}^{[2N]}$ также обладают СМП.

Прежде всего рассмотрим некоторые свойства уравнений иерархии $\tilde{P}_2^{[2N]}$, которые непосредственно следуют из определения оператора $\tilde{L}_N$.

Порядок подвижных полюсов решений такой же, как и для решений уравнения $P_2^{[2N]}$ (т. е. первый порядок), причем

$$w(z) = \frac{c}{z - z_0} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j (z - z_0)^j, \quad (14)$$

где $c \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm N\}$. В силу совпадения доминантных членов уравнения $P_2^{[2N]}$ и $\tilde{P}_2^{[2N]}$ имеют одинаковые резонансные полиномы, которые можно выписать в явной форме. Эти полиномы определяют номера коэффициентов разложения (14), являющиеся произвольными. Также решения уравнения $\tilde{P}_2^{[2N]}$, как и решения уравнения $P_2^{[2N]}$, обладают свойством нечетности относительно параметра α , т. е. уравнение $\tilde{P}_2^{[2N]}$ инвариантно относительно дискретной симметрии $S : w(z, \alpha, \beta) \rightarrow -w(z, -\alpha, \beta)$.

Для решений уравнения $\tilde{P}_2^{[2N]}$ бесконечно удаленная точка может быть точкой голоморфности, при этом для рациональных решений бесконечно удаленная точка является точкой голоморфности с разложением

$$w(z) = -\frac{\alpha}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Нетрудно привести пример значений параметров и решений уравнений иерархии $\tilde{P}_2^{[2N]}$, для которых уравнение (1) как имеет, так и не имеет СМП.

В частности, для параметров $A = \frac{1}{4}$, $B = C = \mu = 0$ и решения произвольного уравнения иерархии (2) $w = \frac{1}{z}$, $\alpha = -1$ (см. [11, лемма 2]) уравнение $u'' + \frac{1}{4z^2}u = 0$ не обладает СМП, поскольку общее решение имеет вид $u = \sqrt{z}(C_1 + C_2 \operatorname{Log}(z))$, тогда как в случае $-A = C = 1$, $B = \mu = 0$ уравнение $u'' - \frac{2}{z^2}u = 0$ с общим решением $u = C_1 z^2 + C_2 z^{-1}$ обладает СМП.

Для получения условий наличия СМП для уравнения (1) достаточно, чтобы оно имело только регулярные особые точки в комплексной плоскости (для решений уравнений иерархий $\tilde{P}_2^{[2N]}$ это выполняется), а показатели, относящиеся к данным особым точкам, были целыми, причем разложения решений в окрестностях особых точек не должны содержать логарифмических членов, т. е., по сути, в окрестности произвольной регулярной особой точки должна существовать мероморфная фундаментальная система решений (ФСР).

Второе уравнение Пенлеве (4) и линейное уравнение (1)

Произвольное решение уравнения (4) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ в зависимости от выбора ε ($\varepsilon^2 = 1$) имеет одно из двух разложений:

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} - \frac{1}{6}\varepsilon z_0 t - \frac{\alpha + \varepsilon}{4}t^2 + ht^3 + \frac{3\alpha + \varepsilon}{72}z_0 t^4 + O(t^5), \quad (15)$$

где $z - z_0 = t$, а h – произвольная постоянная. Разложение (15), по сути, определяет локальное общее решение уравнения (4) в окрестности особой точки z_0 . Для особой точки z_0 определяющее уравнение записывается в виде

$$\rho(\rho - 1) + \lambda = 0, \quad (16)$$

где $\lambda = A - \varepsilon C$, и при

$$\lambda = A - \varepsilon C = -m(m + 1), \quad m \in \mathbb{Z}^+, \quad (17)$$

имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$, при этом m зависит от выбора ε и от выбора особой точки z_0 . В соответствии с методом Фробениуса для старшего показателя $\rho_1 = m + 1$ имеем голоморфное в окрестности особой точки z_0 решение

$$u_1(z) = t^{m+1} \left(1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + O(t^5) \right), \quad t = z - z_0. \quad (18)$$

Второе решение, линейно независимое с решением $u_1(z)$, можно построить по формуле $u_2(z) = u_1(z) \int u_1^{-2}(z) dz$. Решение $u_2(z)$ не содержит $\ln(z - z_0)$, если вычет $R_m(m) := \operatorname{res}_{z=z_0} u_1^{-2}(z)$ равен нулю. Это условие вместе с условием целостности показателей ρ_1 и ρ_2 является достаточным для мероморфности общего решения уравнения (1) в окрестности точки $z = z_0$. Если данные условия выполняются для произвольного конечного полюса z_0 , то общее решение уравнения (1) глобально мероморфно, т. е. уравнение (1) допускает СМП. Заметим, что из формулы (18) имеем

$$\begin{aligned} R_m(0) &= -2a_1, \quad R_m(1) = -2(2a_1^3 - 3a_1a_2 + a_3), \\ R_m(2) &= -2(3a_1^5 - 10a_1^3a_2 + 6a_1^2a_3 - 3a_2a_3 + a_1(6a_2^2 - 3a_4) + a_5), \\ R_m(3) &= -2(4a_1^7 - 21a_1^5a_2 + 15a_1^4a_3 + 6a_2^2a_3 + 10a_1^3(3a_2^2 - a_4) - 3a_3a_4 - \\ &\quad - 3a_2a_5 + 6a_1^2(a_5 - 5a_2a_3) + a_1(6a_3^2 - 10a_2^3 + 12a_2a_4 - 3a_6) + a_7). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим различные возможности для параметров A , B , C , μ . Для поставленной задачи необходимо рассматривать независимо две возможности ($\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$), поскольку фундаментальная система должна быть мероморфной как в окрестности полюсов с вычетом 1, так и в окрестности полюсов с вычетом -1 .

1. Пусть в формуле (17) $\lambda = A - \varepsilon C = 0$, т. е. $m = 0$ для обоих значений ε . Тогда это условие влечет $A = C = 0$, а определяющее уравнение (16) имеет корни $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$. Для старшего показателя $\rho_1 = 1$ получаем решение (18), где $m = 0$,

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{B\varepsilon}{2}, \quad a_2 = \frac{B^2 - 2\mu}{12}, \quad a_3 = -\frac{B\varepsilon}{144}(B^2 - 2z_0 - 8\mu), \\ a_4 &= \frac{1}{2880}(B^4 + 36B(\varepsilon + \alpha) + 24\mu^2 - 2B^2(7z_0 + 10\mu)), \dots, \end{aligned}$$

при этом $R_m(0) = B\varepsilon$. Следовательно, условие $B = 0$ вместе с условием $A = C = 0$ является необходимым и достаточным для мероморфности ФСР уравнения (1) в этом случае.

2. Пусть $m \neq 0$ для некоторого выбора ε . Тогда $A - \varepsilon C = -m(m + 1)$, и для показателя $\rho_1 = m + 1$ имеем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{B\varepsilon}{2(1+m)}, \quad a_2 = \frac{3B^2 + (1+m)(3Az_0 + mz_0 + m^2z_0 - 6\mu)}{12(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{\varepsilon \left(-B^3 - B \left(\alpha(4+3m) + (1+m)(m^2-2) \right) z_0 + 2(1+m)(3+2m) \left(2A + m + m^2 \right) (\varepsilon + \alpha) + 2B(4+3m)\mu \right)}{24(1+m)(2+m)(3+2m)}, \dots$$

Тогда из формулы (19) следует: если $m = 0$, то $R_m(0) = B\varepsilon$, если же $m = 1$, то

$$R_m(1) = \frac{\varepsilon \left(B^3 - 4(1+A)(\alpha + \varepsilon) - 2B(z_0 + Az_0 - 2\mu) \right)}{36}.$$

Пусть $\varepsilon = 1$ и $A - C = -m_1 - m_1^2$, $m_1 \in \mathbb{Z}^+$. Для $\varepsilon = -1$ положим, что $A + C = -m_2 - m_2^2$, $m_2 \in \mathbb{Z}^+$. Тогда корни определяющего уравнения в обоих случаях целые. В первом случае имеем корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m_1$, а во втором случае – корни $\rho_1 = m_2 + 1$, $\rho_2 = -m_2$.

Для $\varepsilon = 1$, вычисляя вычеты $u_1^{-2}(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ при $m_1 = 0$ и $m_1 = 1$, получаем два случая:

$$\begin{aligned} A - C = 0, R_{m_1}(0) &= B, m_1 = 0, \\ A - C = -2, R_{m_1}(1) &= \frac{B(B^2 + 4\mu)}{36}, A = -1, m_1 = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Для $\varepsilon = -1$ также имеем два случая:

$$\begin{aligned} A + C = 0, R_{m_2}(0) &= B, m_2 = 0, \\ A + C = -2, R_{m_2}(1) &= \frac{-B(B^2 + 4\mu)}{36}, A = -1, m_2 = 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассматривая совместно случаи (20) и (21) и считая, что $B = 0$, для параметров получаем следующие возможности:

$$\begin{aligned} A = B = C = 0 \quad (m_1 = m_2 = 0), \\ A = -1, B = 0, C = 1 \quad (m_1 = 1, m_2 = 0), \\ A = -1, B = 0, C = -1 \quad (m_1 = 0, m_2 = 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, справедлива нижеприведенная лемма.

Лемма 1. Пусть $w(z)$ есть произвольное фиксированное решение уравнения (4) и выполняется хотя бы одно из условий (22). Тогда в окрестности произвольной особой точки решения $w(z)$ для уравнения (1) существует мероморфная ФСР.

Доказательство. В случае выполнения первого из условий (22) общее решение выписывается в явной форме и является целым. Особые точки уравнения (1) исчерпываются особыми точками решения $w(z)$, которые при выполнении второго или третьего из условий (22) могут быть лишь регулярными особыми точками с целыми показателями как для полюсов с вычетом 1, так и для полюсов с вычетом -1 . Разложение решений ФСР в окрестности произвольной особой точки z_0 не имеют $\ln(z - z_0)$. Лемма 1 доказана.

Исключая тривиальный случай (первое из условий (22)), при выполнении второго и третьего из условий (22) из уравнения (1) получаем

$$u'' + (\varepsilon_2 w' - w^2 + \mu)u = 0, \varepsilon_2^2 = 1. \quad (23)$$

Целью дальнейшего рассмотрения уравнений (5) и (6) является доказательство следующего утверждения, которое в силу леммы 1 справедливо для уравнения (4).

Теорема 1. Для уравнения (23), где $w(z)$ есть произвольное фиксированное решение уравнений (4)–(6), общее решение мероморфно.

Уравнение $\tilde{P}_2^{[4]}$ и линейное уравнение (23)

Решение уравнения (5) может иметь лишь простые полюсы (14) с вычетами $\pm 1, \pm 2$. Подставляя выражение $w(z) = c(z - z_0)^{-1} + \gamma(z - z_0)^r$ и сравнивая коэффициенты при первой степени γ , находим уравнение для резонансов. Если $c = \pm 1$, то резонансы $r \in \{-2, 1, 2, 5\}$. Если же $c = \pm 2$, то резонансы $r \in \{-4, -2, 5, 7\}$. Непосредственной подстановкой полярного разложения (14) убеждаемся, что в окрестности подвижного полюса z_0 решение может иметь одно из следующих представлений:

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} + h_1 t + h_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + h_3 t^5 + \sum_{j=6}^{\infty} c_j t^j, \quad (24)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1, h_2, h_3 – произвольные постоянные, а $c_3 = \frac{-z_0 \varepsilon - 6\beta_1 h_1 + 50h_1^2 \varepsilon}{20}$, $c_4 = \frac{-\varepsilon - \alpha - 4\beta_1 h_2 + 60h_1 h_2 \varepsilon}{36}$ и все остальные коэффициенты $c_j, j \geq 6$, однозначно определяются через h_1, h_2, h_3 и z_0 ;

$$w(z) = \frac{2\varepsilon}{t} + c_1 t + c_3 t^3 + c_4 t^4 + h_1 t^5 + c_6 t^6 + h_2 t^7 + \sum_{j=8}^{\infty} c_j t^j, \quad (25)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а $c_1 = \frac{\varepsilon \beta_1}{30}$, $c_3 = \frac{90z_0 \varepsilon + 13\varepsilon \beta_1^2}{12\,600}$, $c_4 = \frac{2\varepsilon + \alpha}{144}$, $c_6 = \frac{\beta_1(\varepsilon + 5\alpha)}{21\,600}$ и все остальные коэффициенты $c_j, j \geq 8$, однозначно определяются через h_1, h_2 и z_0 .

Покажем, что для решений уравнения (5) справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $w(z)$ есть произвольное фиксированное решение уравнения (5). Тогда в окрестности произвольной особой точки решения $w(z)$ для уравнения (23) существует мероморфная ФСР.

Доказательство. 1. Пусть $w(z) \neq 0$ – решение уравнения (5) с разложением (24) в окрестности произвольного полюса $z = z_0$. Тогда для уравнения (1) в окрестности особой точки z_0 определяющее уравнение принимает вид (16) и при выполнении условия (17) имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{B\varepsilon}{2(1+m)}, \quad a_2 = \frac{B^2 - 2(1+m)(\varepsilon h_1(3A + m + m^2) + \mu)}{4(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{-B^3\varepsilon - 8\varepsilon h_2(2A + m + m^2)(3 + 5m + 2m^2) + 2B\varepsilon(4 + 3m)\mu + 6Bh_1(-2 - 2m + m^2 + m^3 + A(4 + 3m))}{24(1+m)(2+m)(3+2m)}.$$

Обозначим вычет полюса $z = z_0$ функции $u_1^{-2}(z)$ при $m = m_0$ через $R_m(m_0) = \operatorname{res}_{z=z_0} u_1^{-2}(z) \Big|_{m=m_0}$. Тогда из формул (18) и (19) следует: если $m = 0$, то $R_m(0) = B\varepsilon$, если же $m = 1$, то $R_m(1) = \frac{B\varepsilon(B^2 + 4\mu)}{36}$.

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -2$, $m = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$ и $R_m(1) = 0$. Если же $\varepsilon_2 = -\varepsilon$, то $\lambda = 0$, $m = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$, при этом $R_m(0) = 0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнения (5) с разложением (24) имеет мероморфную ФСР.

2. Рассмотрим случай полюсов решения $w(z)$ уравнения (5) с разложением (25). В этом случае определяющее уравнение для уравнения (1) принимает вид (16), где $\lambda = 4A - 2\varepsilon C$, и при

$$\lambda = 4A - 2\varepsilon C = -m(m+1), \quad m \in \mathbb{Z}^+, \quad (26)$$

имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Тогда для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{B\varepsilon}{1+m}, \quad a_2 = \frac{120B^2 - (1+m)(12A\beta_1 + (m+m^2)\beta_1 + 60\mu)}{120(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{B(4A(4+3m)\beta_1 - 40B^2 + (1+m)(m^2-2)\beta_1 + 20(4+3m)\mu)}{120\varepsilon(1+m)(2+m)(3+2m)},$$

при этом

$$R_m(0) = 2B\varepsilon,$$

$$R_m(1) = \frac{B\varepsilon(20B^2 + (2\varepsilon C - 1)\beta_1 + 20\mu)}{90},$$

$$R_m(2) \Big|_{B=0} = \frac{(2\varepsilon + \alpha)(C - \varepsilon)}{600}.$$

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -6$, $m = 2$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = -2$ и $R_m(2) = 0$. Если же $\varepsilon_2 = -\varepsilon$, то $\lambda = -2$, $m = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$, при этом $R_m(1) = 0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнения (5) с разложением (25) имеет мероморфную ФСР, что и доказывает справедливость леммы 2.

Уравнение (6) и линейное уравнение (23)

Непосредственной подстановкой разложения (14) в уравнение (6) убеждаемся, что в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ решение уравнения (6) может иметь одно из следующих представлений:

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + h_4 t^4 + c_5 t^5 + c_6 t^6 + h_5 t^7 + \sum_{j=8}^{\infty} c_j t^j, \quad (27)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – произвольные постоянные,

$$c_5 = \frac{-420h_1^3 + 112\varepsilon h_2^2 + 504\varepsilon h_1 h_3 - \varepsilon z_0 + 50\varepsilon h_1^2 s_1 - 20h_3 s_1 - 6h_1 s_2}{336},$$

$$c_6 = \frac{\varepsilon(-1 + 560h_2 h_3 + 840h_1 h_4 + 60h_1 h_2 s_1) - 4(140h_1^2 h_2 + 9h_4 s_1 + h_2 s_2) - \alpha}{960}$$

и все остальные коэффициенты c_j , $j \geq 8$, однозначно определяются через $h_1 - h_5$ и z_0 ;

$$w(z) = \frac{2\varepsilon}{t} + h_1 t + c_3 t^3 + h_2 t^4 + c_5 t^5 + c_6 t^6 + h_3 t^7 + \sum_{j=8}^{\infty} c_j t^j, \quad (28)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1, h_2, h_3 – произвольные постоянные,

$$c_3 = \frac{30s_1 h_1 - \varepsilon s_2 - 770\varepsilon h_1^2}{140},$$

$$c_5 = \frac{5\varepsilon(s_1 s_2 + z_0) - 6(25s_1^2 + 32s_2)h_1 + 10\ 260\varepsilon s_1 h_1^2 - 168\ 840h_1^3}{5040},$$

$$c_6 = \frac{2\varepsilon + \alpha - 48h_2(3s_1 - 140\varepsilon h_1)}{2400}$$

и все остальные коэффициенты c_j , $j \geq 8$, однозначно определяются через $h_1 - h_3$ и z_0 ;

$$w(z) = \frac{3\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon s_1}{70} t + c_3 t^3 + c_5 t^5 - \frac{3\varepsilon + \alpha}{14\ 400} t^6 + h_1 t^7 + \sum_{j=8}^{\infty} c_j t^j, \quad (29)$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а $c_3 = \frac{\varepsilon(19s_1^2 - 70s_2)}{88\ 200}$, $c_5 = \frac{\varepsilon(207s_1^3 - 1085s_1 s_2 - 6125z_0)}{67\ 914\ 000}$,
 $c_8 = \frac{-s_1(\varepsilon + 7\alpha)}{7\ 056\ 000}$, $c_9 = h_2, \dots$

1. Пусть $w(z) \neq 0$ – решение уравнения (6) с разложением (27) в окрестности произвольного полюса $z = z_0$. Тогда для уравнения (1) и особой точки z_0 определяющее уравнение принимает вид (16) и при выполнении условия (17) имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{B\varepsilon}{2(1+m)}, \quad a_2 = \frac{B^2 - 2(1+m)(\varepsilon h_1(3A + m + m^2) + \mu)}{4(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{-\left(B^3\varepsilon + 4(1+m)(3+2m)(Bh_1 + 2\varepsilon h_2(2A + m + m^2)) - 2B\varepsilon(4+3m)(h_1(3A + m + m^2) + \mu)\right)}{24(1+m)(2+m)(3+2m)}.$$

Обозначим вычет полюса $z = z_0$ функции $u_1^{-2}(z)$ при $m = m_0$ через $R_m(m_0) = \operatorname{res}_{z=z_0} u_1^{-2}(z) \Big|_{m=m_0}$. Тогда из формул (18) и (19) следует: если $m = 0$, то $R_m(0) = B\varepsilon$, если же $m = 1$, то

$$R_m(1) = \frac{B^3\varepsilon + 8(C + A\varepsilon)h_2 + 4B((1 + 2A + \varepsilon C)h_1 + \varepsilon\mu)}{36}.$$

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -2$, $m = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$ и $R_m(1) = 0$. Если же $A = -1$, $C = -\varepsilon$, $B = 0$, то $\lambda = 0$, $m = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$, при этом $R_m(0) = 0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнения (6) с разложением (27) имеет мероморфную ФСР.

2. Рассмотрим случай полюсов решения $w(z)$ уравнения (6) с разложением (28). В этом случае определяющее уравнение принимает вид (16), где $\lambda = 4A - 2\varepsilon C$, и при выполнении условия (26) имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Тогда для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{B\varepsilon}{1+m}, \quad a_2 = \frac{-4B^2 + 2(1+m)\mu + \varepsilon(1+m)(12A + m + m^2)h_1}{4(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{B(-4B^2\varepsilon + 2\varepsilon(4+3m)\mu + 3(4A(4+3m) + (1+m)(m^2-2))h_1)}{12(1+m)(2+m)(3+2m)},$$

при этом

$$R_m(0) = 2B\varepsilon,$$

$$R_m(1) = \frac{B(2\varepsilon(B^2 + \mu) + 3(2\varepsilon C - 1)h_1)}{9},$$

$$R_m(2) \Big|_{B=0} = \frac{-6h_2(\varepsilon - C)}{25}.$$

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -6$, $m = 2$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = -2$ и $R_m(2) = 0$. Если же $\varepsilon_2 = -\varepsilon$, то $\lambda = -2$, $m = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$, при этом $R_m(1) = 0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнения (6) с разложением (28) имеет мероморфную ФСР.

3. Рассмотрим случай полюсов решения $w(z)$ уравнения (6) с разложением (29). В этом случае определяющее уравнение принимает вид (16), где $\lambda = 9A - 3\varepsilon C$, и при

$$\lambda = 9A - 3\varepsilon C = -m(m+1), \quad m \in \mathbb{Z}^+,$$

имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Тогда для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{3B\varepsilon}{2(1+m)}, \quad a_2 = \frac{945B^2 - (1+m)((27A + m + m^2)s_1 + 210\mu)}{420(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{B\varepsilon(-315B^2 + 9A(4+3m)s_1 + (1+m)(m^2-2)s_1 + 70(4+3m)\mu)}{280(1+m)(2+m)(3+2m)}, \dots,$$

при этом

$$R_m(0) = 3B\varepsilon,$$

$$R_m(1) = \frac{B\varepsilon(945B^2 + 2s_1(1 + 18A + 3\varepsilon C) + 420\mu)}{1260},$$

$$R_m(2) \Big|_{B=0} = R_m(3) \Big|_{B=0} = 0.$$

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -12$, $m = 3$, $\rho_1 = 4$, $\rho_2 = -3$ и $R_m(3) = 0$. Если же $\varepsilon_2 = -\varepsilon$, то $\lambda = -6$, $m = 2$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = -2$, при этом $R_m(2) = 0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнений (5) и (6) с возможными разложениями (24), (25) и (27)–(29) соответственно имеет мероморфную ФСР, что и доказывает теорему 1 для уравнений (5) и (6).

Рациональные решения уравнения (2) и линейное уравнение (23)

В этом разделе покажем, что общее решение уравнения (23) для решений уравнений иерархии (2) может быть рациональным.

Известно (см., например, [11]), что условие $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ является необходимым и достаточным условием существования рациональных решений $w(z, \alpha)$ и $q(z, \sigma, \beta)$ уравнений иерархии (2) и (9) соответственно. Рациональные решения имеют структуру

$$w^{[N]}(z, n) = \frac{d}{dz} \left(\ln \frac{Q_{n-1}^{[N]}(z)}{Q_n^{[N]}(z)} \right), \quad q^{[N]} \left(z, n + \frac{1}{2}, \beta \right) = 2 \frac{d^2}{dz^2} \ln Q_n^{[N]}(z), \quad \alpha = n, \quad (30)$$

где $Q_n^{[N]}(z)$ – обобщенные полиномы Яблонского – Воробьева, которые для N -го уравнения иерархии могут быть построены по рекуррентным соотношениям

$$Q_{n+1}^{[N]}(z) Q_{n-1}^{[N]}(z) = z \left(Q_n^{[N]}(z) \right)^2 - 2 \left(Q_n^{[N]}(z) \right)^2 \tilde{L}_N \left[2 \frac{d^2}{dz^2} \ln Q_n^{[N]}(z) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

с начальными полиномами $Q_0^{[N]} = 1$, $Q_1^{[N]} = z$.

Структура полиномов $Q_n^{[N]}(z)$ получена в работе [11]. В частности, справедливо соотношение (формула (48) в статье [11]; далее для упрощения записи опускаем верхний индекс, т. е. $Q_n^{[N]}(z) = Q_n$)

$$Q_{n-1} Q'_{n+1} - Q'_{n-1} Q_{n+1} = (2n+1) Q_n^2. \quad (31)$$

Из формулы (31) получаем два соотношения:

$$(2n+1) \frac{Q_n^2}{Q_{n-1}^2} = \left(\frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}} \right)', \quad -(2n+1) \frac{Q_n^2}{Q_{n+1}^2} = \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_{n+1}} \right). \quad (32)$$

Прежде всего заметим, что уравнение (23) при $\mu = 0$ имеет решение $u_1(z) = \exp \left(-\varepsilon_2 \int^z w(z) dz \right)$, которое в силу формулы (30) для рационального решения $w(z)$ записывается в виде

$$u_1(z) = \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right)^{-\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_2 = 1.$$

Второе решение уравнения (23) при $\mu = 0$, линейно независимое с решением $u_1(z)$, построим по формуле

$$u_2(z) = u_1(z) \int^z u_1^{-2}(z) dz = \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right)^{-\varepsilon_2} \int^z \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right)^{2\varepsilon_2} dz. \quad (33)$$

Из формулы (33) при $\varepsilon_2 = 1$, считая, что во втором из соотношений (32) $n \rightarrow n-1$, находим

$$u_2(z) = -\frac{1}{2n-1} \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \int^z \left(\frac{Q_{n-2}}{Q_n} \right)' dz = -\frac{1}{2n-1} \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}.$$

В этом случае общее решение уравнения (23) при $\mu = 0$ и $\varepsilon_2 = 1$ имеет вид

$$u(z) = \frac{C_1 Q_n + C_2 Q_{n-2}}{Q_{n-1}}. \quad (34)$$

Если в уравнении (23) $\mu = 0$ и $\varepsilon_2 = -1$, то $u_1(z) = \frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$. Тогда в силу формулы (33) получаем

$$u_2(z) = \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \int^z \left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \right)^2 dz = \frac{1}{2n+1} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \int^z \left(\frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}} \right)' dz = \frac{1}{2n+1} \frac{Q_{n+1}}{Q_n}.$$

Общее решение уравнения (23) при $\mu = 0$ и $\varepsilon_2 = -1$ имеет вид

$$u(z) = \frac{C_1 Q_{n-1} + C_2 Q_{n+1}}{Q_n}. \quad (35)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в уравнении (23) $\mu = 0$ и $w = \frac{d}{dz} \ln \frac{Q_{n-1}^{[N]}(z)}{Q_n^{[N]}(z)}$ есть рациональное решение уравнения (2) при $\alpha = n \in \mathbb{Z}^+$, где $Q_n^{[N]}(z)$ – полиномы Яблонского – Воробьева. Тогда общее решение уравнения (23) имеет вид (34) при $\varepsilon_2 = 1$ и вид (35) при $\varepsilon_2 = -1$.

Из бирациональной зависимости между решениями уравнений (2) и (9), определяемой соотношениями (7) и (8), а также из теорем 1 и 2 следует справедливость нижеприведенного утверждения.

Теорема 3. Пусть в уравнении $u'' + (q(z) + \mu)u = 0$ функция $q(z)$ является произвольным фиксированным решением уравнений (10)–(12). Тогда общее решение этого уравнения мероморфно. Если же $\mu = 0$ и $q(z)$ есть рациональное решение уравнения (9), то общее решение рационально.

Заметим, что результаты настоящей работы для второго уравнения Пенлеве (2) частично получены в статье [24]. Некоторые результаты данного исследования анонсированы в публикации [25]. Аналогичная задача для иерархии первого уравнения Пенлеве рассмотрена в работе [26].

Пример. Для уравнения (6) ($N = 3$) первые полиномы Яблонского – Воробьева имеют вид

$$\begin{aligned} Q_0^{[3]} &= 1, \quad Q_1^{[3]} = z, \quad Q_2^{[3]} = z^3 + 4s_2, \\ Q_3^{[3]} &= z^6 + 20s_2z^3 - 144s_1z - 80s_2^2, \\ Q_4^{[3]} &= z^{10} + 60s_2z^7 - 1008s_1z^5 + 14\,400z^3 + \\ &+ 20\,160s_1s_2z^2 + 11\,200s_2^3z - 48\,384s_1^2 + 57\,600s_2. \end{aligned}$$

Тогда при $\alpha = 3$ получаем рациональное решение

$$w_3^{[3]} = \frac{3z^2}{z^3 + 4s_2} - \frac{6(z^5 + 10s_2z^2 - 24s_1)}{z^6 + 20s_2z^3 - 144s_1z - 80s_2^2}.$$

Линейное уравнение (23) при $\mu = 0$, $w = w_3^{[3]}$ и $\varepsilon_2 = 1$ и $\varepsilon_2 = -1$ соответственно принимает вид

$$\begin{aligned} u'' + \frac{6(8s_2z - z^4)}{(z^3 + 4s_2)^2} u &= 0, \\ u'' - \frac{12(z^{10} + 432s_1z^5 + 600s_2^2z^4 + 1600s_2^3z + 3456s_1^2)}{(z^6 + 20s_2z^3 - 144s_1z - 80s_2^2)^2} u &= 0. \end{aligned}$$

В силу теоремы 2 эти уравнения имеют общее решение $u(z) = \frac{C_1 Q_3^{[3]} + C_2 Q_1^{[3]}}{Q_2^{[3]}}$ и $u(z) = \frac{C_1 Q_2^{[3]} + C_2 Q_4^{[3]}}{Q_3^{[3]}}$

соответственно. Заметим, что в приведенных формулах s_1, s_2 – произвольные параметры уравнения (6), а C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Библиографические ссылки

1. Айнс ЭЛ. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Эфрос АМ, редактор. Харьков: Научно-техническое издательство Украины; 1939. 719 с.
2. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: De Gruyter; 2002. 303 p. (De Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.
3. Кудряшов НА. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект; 2010. 364 с.

4. Итс АР, Капаев АА, Новокшенов ВЮ, Фокас АС. *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*. Москва: Институт компьютерных исследований; 2005. 728 с. Совместно с издательством «Регулярная и хаотическая динамика».
5. Conte R, Musette M. *The Painlevé handbook*. Dordrecht: Springer; 2008. XXIII, 256 p.
6. Gromak VI. Bäcklund transformations of the higher order Painlevé equations. In: Coley A, Levi D, Milson R, Rogers C, Winter-nitz P, editors. *Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons. AARMS – CRM workshop; 1999 June 4–9; Halifax, Canada*. Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 3–28 (CRM proceedings and lecture notes; volume 29).
7. Clarkson PA, Joshi N, Pickering A. Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation ap-proach. *Inverse Problems*. 1999;15(1):175–187. DOI: 10.1088/0266-5611/15/1/019.
8. Clarkson PA, Mansfield EL. The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials. *Nonlinearity*. 2003;16(3):R1–R26. DOI: 10.1088/0951-7715/16/3/201.
9. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009; 42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.
10. Гурса Э. *Курс математического анализа. Том 3. Часть 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление*. Шесто-пал МГ, переводчик; Степанов ВВ, редактор. Москва: Государственное технико-теоретическое издательство; 1934. 318 с.
11. Громак ВИ. Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Диффе-ренциальные уравнения*. 2020;56(8):1017–1033. DOI: 10.1134/S0374064120080038.
12. Kudryashov NA. Amalgamations of the Painlevé equations. *Journal of Mathematical Physics*. 2003;44(12):6160–6178. DOI: 10.1063/1.1623332.
13. Bobrova I. On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications. arXiv:2010.10617v2 [Preprint]. 2020 [cited 2020 November 23]: [25 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2010.10617v2>.
14. Airault H. Rational solutions of Painlevé equations. *Studies in Applied Mathematics*. 1979;61(1):31–53. DOI: 10.1002/sapm 197961131.
15. Okamoto K. Studies on the Painlevé equations. III. Second and fourth Painlevé equations, P_{II} and PIV. *Mathematische Annalen*. 1986;275(2):221–255. DOI: 10.1007/BF01458459.
16. Gromak VI, Zenchenko AS. On the theory of higher-order Painlevé equations. *Differential Equations*. 2004;40(5):625–633. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000043520.27878.5c.
17. Громак ВИ, Голубева ЛЛ. Обобщенное второе уравнение Пенлеве четвертого порядка. *Весті НАН Беларусі. Серыя фі-зіка-матэматычных навук*. 2005;4:5–10.
18. Голубева ЛЛ, Зенченко АС. Некоторые свойства решений уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$. *Труды Института математики*. 2004;12(2): 54–56.
19. Громак ВИ. О решениях уравнения четвертого порядка обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифферен-циальные уравнения*. 2019;55(3):337–347. DOI: 10.1134/S0374064119030075.
20. Громак ВИ. О свойствах решений уравнений обобщенной иерархии уравнения P_{34} . *Дифференциальные уравнения*. 2022; 58(2):153–163.
21. Hinkkanen A, Laine I. Solutions of the first and second Painlevé equations are meromorphic. *Journal d'Analyse Mathématique*. 1999;79:345–377. DOI: 10.1007/BF02788247.
22. Домрин АВ, Сулейманов БИ, Шумкин МА. О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2020;311:106–122. DOI: 10.4213/tm4116.
23. Domrin AV, Shumkin MA, Suleimanov BI. Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Pain-levé type. *Journal of Mathematical Physics*. 2022;63(2):023501. DOI: 10.1063/5.0075416.
24. Громак ЕВ. О мероморфных решениях линейных уравнений второго порядка, связанных со вторым уравнением Пен-леве. *Вестнік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылі-чальная тэхніка і кіраванне*. 2022;12(3):42–49.
25. Громак ЕВ, Громак ВИ. О глобальной мероморфности решений линейных уравнений, связанных со вторым уравнением Пенлеве и его иерархией. В: Амелькин ВВ, Антоневич АБ, Астровский АИ, Васильковский ММ, Гладков АЛ, Громак ВИ и др., редакторы. *Еругинские чтения – 2023. Материалы XXI Международной научной конференции по дифференциальным уравне-ниям; 23–27 мая 2023 г.; Могилёв, Беларусь. Часть 1*. Могилёв: Белорусско-Российский университет; 2023. с. 9–11.
26. Громак ЕВ. О мероморфных решениях уравнений, связанных с первым уравнением Пенлеве. *Журнал Белорусского го-сударственного университета. Математика. Информатика*. 2022;2:15–22. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-15-22.

References

1. Ince EL. *Obykhnovennyye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Efros AM, editor. Kharkiv: Nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo Ukrainy; 1939. 719 p. Russian.
2. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane*. Berlin: De Gruyter; 2002. 303 p. (De Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.
3. Kudryashov NA. *Metody nelineinoy matematicheskoy fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny: Intellect; 2010. 364 p. Russian.
4. Its AR, Капаев АА, Новокшенов ВЮ, Фокас АС. *Transtsendenty Penleve. Metod zadachi Rimana* [Painlevé transcendents. Method of the Riemann problem]. Moscow: Institut komp'yuternykh issledovaniy; 2005. 728 p. Co-published by the «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika». Russian.
5. Conte R, Musette M. *The Painlevé handbook*. Dordrecht: Springer; 2008. XXIII, 256 p.
6. Gromak VI. Bäcklund transformations of the higher order Painlevé equations. In: Coley A, Levi D, Milson R, Rogers C, Winter-nitz P, editors. *Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons. AARMS – CRM workshop; 1999 June 4–9; Halifax, Canada*. Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 3–28 (CRM proceedings and lecture notes; volume 29).
7. Clarkson PA, Joshi N, Pickering A. Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach. *Inverse Problems*. 1999;15(1):175–187. DOI: 10.1088/0266-5611/15/1/019.
8. Clarkson PA, Mansfield EL. The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials. *Nonlinearity*. 2003; 16(3):R1–R26. DOI: 10.1088/0951-7715/16/3/201.

9. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009; 42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.
10. Goursat É. *Cours d'analyse mathématique. Tome 3, Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles du second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations*. 5^e édition. Paris: Gauthier-Villars; 1933. 702 p.
Russian edition: Goursat É. *Kurs matematicheskogo analiza. Tom 3. Chast' 2, Integral'nye uravneniya. Variatsionnoe ischislenie*. Shestopal MG, translator; Stepanov VV, editor. Moscow: Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatel'stvo; 1934. 318 p.
11. Gromak VI. [Analytic properties of solutions to equations in the generalized hierarchy of the second Painlevé equation]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2020;56(8):1017–1033. Russian. DOI: 10.1134/S0374064120080038.
12. Kudryashov NA. Amalgamations of the Painlevé equations. *Journal of Mathematical Physics*. 2003;44(12):6160–6178. DOI: 10.1063/1.1623332.
13. Bobrova I. On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications. arXiv:2010.10617v2 [Preprint]. 2020 [cited 2020 November 23]: [25 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2010.10617v2>.
14. Airault H. Rational solutions of Painlevé equations. *Studies in Applied Mathematics*. 1979;61(1):31–53. DOI: 10.1002/sapm 197961131.
15. Okamoto K. Studies on the Painlevé equations. III. Second and fourth Painlevé equations, P_{II} and PIV. *Mathematische Annalen*. 1986;275(2):221–255. DOI: 10.1007/BF01458459.
16. Gromak VI, Zenchenko AS. On the theory of higher-order Painlevé equations. *Differential Equations*. 2004;40(5):625–633. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000043520.27878.5c.
17. Gromak VI, Golubeva LL. [Generalized second Painlevé equation of the fourth order]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2005;4:5–10. Russian.
18. Golubeva LL, Zenchenko AS. [Some properties of solutions of the equation $({}_4\tilde{P}_2)$]. *Trudy Instituta matematiki*. 2004;12(2): 54–56. Russian.
19. Gromak VI. [Solutions of the fourth-order equation in the generalized hierarchy of the second Painlevé equation]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2019;55(3):337–347. Russian. DOI: 10.1134/S0374064119030075.
20. Gromak VI. [On the properties of solutions of the equations in the generalized hierarchy of the equation P_{34}]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2022;58(2):153–163. Russian.
21. Hinkkanen A, Laine I. Solutions of the first and second Painlevé equations are meromorphic. *Journal d'Analyse Mathématique*. 1999;79:345–377. DOI: 10.1007/BF02788247.
22. Domrin AV, Suleimanov BI, Shumkin MA. [Global meromorphy of solutions of the Painlevé equations and their hierarchies]. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova*. 2020;311:106–122. Russian. DOI: 10.4213/tm4116.
23. Domrin AV, Shumkin MA, Suleimanov BI. Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Painlevé type. *Journal of Mathematical Physics*. 2022;63(2):023501. DOI: 10.1063/5.0075416.
24. Gromak EV. On meromorphic solutions of the linear equations of the second order related to the second Painlevé equation. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2, Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*. 2022;12(3):42–49. Russian.
25. Gromak EV, Gromak VI. [On global meromorphy of solutions of the linear equations related to the second Painlevé equation and its hierarchy]. In: Amel'kin VV, Antonevich AB, Astrovskii AI, Vas'kovskii MM, Gladkov AL, Gromak VI, et al., editors. *Erugin-skie chteniya – 2023. Materialy XXI Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam; 23–27 maya 2023 g.; Mogilev, Belarus'. Chast' 1* [Erugin readings – 2023. Proceedings of the 21st International scientific conference on differential equations; 2023 May 23–27; Mogilev, Belarus. Part 1]. Mogilev: Belarusian-Russian University; 2023. p. 9–11. Russian.
26. Gromak EV. On meromorphic solutions of the equations related to the first Painlevé equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;2:15–22. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-15-22.

Получена 30.06.2023 / исправлена 12.10.2023 / принята 13.10.2023.
Received 30.06.2023 / revised 12.10.2023 / accepted 13.10.2023.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 512.552.16

ОПИСАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Ф. АРЗИКУЛОВ^{1), 2)}, О. САМСАКОВ²⁾

¹⁾Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, 9, 100174, г. Ташкент, Узбекистан

²⁾Андижанский государственный университет, ул. Университетская, 129, 170100, г. Андижан, Узбекистан

В 2020 г. Ф. Арзикулов и Н. Умрзаков ввели и изучили понятие (линейного) локального оператора умножения на ассоциативных алгебрах. Они доказали, что каждый локальный оператор левого (правого) умножения на кольце матриц над телом является оператором левого (правого соответственно) умножения. Настоящая статья посвящена (линейным) локальным операторам слабого левого (правого) умножения на 5-мерных естественным образом градуированных 2-филиформных нерасщепляемых ассоциативных алгебрах. Разработан алгоритм получения общего вида матриц операторов слабых левых (правых) умножений на 5-мерных естественным образом градуированных 2-филиформных нерасщепляемых ассоциативных алгебрах λ_1^5 и λ_2^5 , построенных И. Каримжановым и М. Ладрой. Алгоритм получения общего вида матриц локальных операторов слабых левых (правых) умножений на алгебрах λ_1^5 и λ_2^5 также разработан. Показано, что ассоциативные алгебры λ_1^5 и λ_2^5 имеют локальные операторы слабого левого (правого) умножения, которые не являются операторами слабого левого (правого соответственно) умножения.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра; оператор левого (правого) умножения; дифференцирование; локальное дифференцирование; локальный оператор левого (правого) умножения.

Образец цитирования:

Арзикулов Ф, Самсаков О. Описание локальных операторов умножения на конечномерных ассоциативных алгебрах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;3:32–41 (на англ.). EDN: MXICZS

For citation:

Arzikulov F, Samsaqov O. Description of local multipliers on finite-dimensional associative algebras. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:32–41. EDN: MXICZS

Авторы:

Фарходжон Арзикулов – главный научный сотрудник.
Одилжон Самсаков – аспирант кафедры алгебры и анализа факультета математики.

Authors:

Farhodjon Arzikulov, principal researcher.
arzikulovfn@gmail.com
Odiljon Samsaqov, postgraduate student at the department of algebra and analysis, faculty of mathematics.

DESCRIPTION OF LOCAL MULTIPLIERS ON FINITE-DIMENSIONAL ASSOCIATIVE ALGEBRAS

F. ARZIKULOV^{a, b}, O. SAMSAQOV^b

^a*V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
9 University Street, Tashkent 100174, Uzbekistan*

^b*Andijan State University, 129 University Street, Andijan 170100, Uzbekistan*

Corresponding author: F. Arzikulov (arzikulovfn@gmail.com)

In 2020 F. Arzikulov and N. Umrzaqov introduced the concept of a (linear) local multiplier. They proved that every local left (right) multiplier on the matrix ring over a division ring is a left (right, respectively) multiplier. This paper is devoted to (linear) local weak left (right) multipliers on 5-dimensional naturally graded 2-filiform non-split associative algebras. An algorithm for obtaining a common form of the matrices of the weak left (right) multipliers on the 5-dimensional naturally graded 2-filiform non-split associative algebras λ_1^5 and λ_2^5 , constructed by I. Karimjanov and M. Ladra, is developed. An algorithm for obtaining a general form of the matrices of the local weak left (right) multipliers on the algebras λ_1^5 and λ_2^5 is also developed. It turns out that the associative algebras λ_1^5 and λ_2^5 have a local weak left (right) multiplier that is not a weak left (right, respectively) multiplier.

Keywords: associative algebra; left (right) multiplier; derivation; local derivation; local left (right) multiplier.

Introduction

Associative algebras are classical algebras widely studied by specialists. Associative algebras turned out to be related to other classical algebras, i. e. Lie algebras and Jordan algebras. The classification of finite-dimensional associative algebras is one of the primary areas of modern algebra and, as is known, was first studied by B. Peirce. The classification theorems for 4- and 5-dimensional associative algebras were proved by P. Gabriel [1] and G. Mazzola [2]. The case of associative algebras of dimension ≤ 4 was discussed by O. Hazlett [3]. The most classification problems for finite-dimensional associative algebras are studied to establish some properties of associative algebras, while the complete classification of associative algebras is still an open problem.

The present article is devoted to weak left and right multipliers and their characterisation. Every derivation is a sum of one weak left and one weak right multipliers. The results of the present paper allow us to study derivation, in particular, to compute the dimension of the space of derivations of an associative algebra. The dimension of the space of derivations of an algebra is an important invariant in the geometric classification of algebras and it has many applications in a number of scientific areas.

In this article, we also study local weak left and right multipliers of finite-dimensional associative algebras introduced in the work [4]. The notion of a weak left (right) multiplier is closely related to the notion of a local derivation. The concept of local derivations goes back to the Gleason – Kahane – Zelazko theorem, which is a fundamental contribution to the theory of Banach algebras. This theorem states that every unital linear functional F on a complex unital Banach algebra A such that $F(a)$ belongs to the spectrum $\sigma(a)$ of the element a for every $a \in A$, is multiplicative (cf. [5; 6]). In view of the modern terminology, this is equivalent to the following condition: any unital linear local homomorphism from an unital complex Banach algebra A to the field C of complex numbers is multiplicative. Recall that a linear mapping T from a Banach algebra A to a Banach algebra B is called a local homomorphism, if for every a in A there exists a homomorphism $\Phi_a : A \rightarrow B$, depending on a such that $T(a) = \Phi_a(a)$.

A similar notion was introduced and studied to characterise derivations on operator algebras. Namely, the notion of local derivations was introduced by R. Kadison [7] and D. Larson, A. Sourour [8] independently of each other in 1990. Recall that a linear mapping ∇ of an algebra A into itself is a local derivation, if for each a in A , there exists a derivation D_a on A such that $D_a(a) = \nabla(a)$. R. Kadison proves that any continuous local derivation of a von Neumann algebra into its dual Banach bimodule is a derivation. B. Johnson [9] generalises the above result to prove that every local derivation of a C^* -algebra into its Banach bimodule is a derivation. Based on these achievements, many authors have studied the local derivations on operator algebras.

The work is structured as follows. In the introduction, we substantiate the problem discussed in this article, present some previously obtained results and bring some basic notions necessary for explaining the results of this paper. Further, in section «Materials and methods» we propose an algorithm for obtaining a common form of the matrix of weak left multipliers on five-dimensional associative algebras λ_1^5 and λ_2^5 constructed in proposition 4.3 of the work [10]. Then, in section «Results and discussion», we develop an algorithm for obtaining

a common form of the matrix of local weak left multipliers on 5-dimensional associative algebras λ_1^5 and λ_2^5 . By the results, we conclude that the common form of the matrix of a weak left (right) multiplier on the associative algebras λ_1^5 and λ_2^5 does not coincide with the common form of the matrix of a local weak left (right, respectively) multiplier on these algebras. Therefore, the associative algebras λ_1^5 and λ_2^5 have a local weak left (right) multiplier that is not a weak left (right, respectively) multiplier.

Materials and methods

Let A be an associative algebra. Let $\varphi: A \rightarrow A$ be a linear mapping. If, for any $x, y \in A$, $\varphi(xy) = \varphi(x)y$ ($\varphi(yx) = y\varphi(x)$), then φ is called a weak left (right, respectively) multiplier. Let $L: A \rightarrow A$ be a mapping. If there exists $a \in A$ such that $L(x) = ax$ for any $x \in A$, then L is a weak left multiplier, i. e. every left multiplier is a weak left multiplier. Such weak left multiplier we denote as L_a .

Theorem 1 [4]. *Let A be a unital associative algebra, and let $\varphi: A \rightarrow A$ be a weak left multiplier. Then φ is a left multiplier.*

Example 1. Let $K(H)$ be the C^* -algebra of all compact operators on a separable infinite-dimensional Hilbert space H . For $a \in B(H)$, put $L_a(x) = ax$ ($x \in K(H)$). Then L_a is a weak left multiplier on $K(H)$. But it is not a left multiplier if a does not belong to $K(H)$.

Similar to a weak left multiplier we get the appropriate statements for a weak right multiplier. Let $R: A \rightarrow A$ be a mapping. If there exists $a \in A$ such that $R(x) = xa$ for any $x \in A$, then R is a weak right multiplier, i. e. every right multiplier is a weak right multiplier. Such weak right multiplier we denote as R_a .

It is clear that, every derivation $D: A \rightarrow A$ on an associative algebra A is a subtraction of the weak left multiplier $D(x)y$ and the weak right multiplier $yD(x)$. Similarly, every inner derivation $D_a: A \rightarrow A$ on an associative algebra A is a subtraction of the left multiplier L_a and the right multiplier R_a . In this case $L_a(e) = R_a(e)$ for the identity element $e \in A$. The following theorem is valid.

Recall that a linear map $D: A \rightarrow A$ is called an inner derivation, if there exists $a \in A$ such that $D(x) = ax - xa$ for any element $x \in A$.

Theorem 2 [4]. *Let A be a unital associative algebra, and let $D: A \rightarrow A$ be a derivation. Then D is an inner derivation if and only if there exist a weak left multiplier φ and a weak right multiplication ψ such that $D = \varphi - \psi$, $\varphi(e) = \psi(e)$.*

In the present article, a pure algebraic approach to the investigation of multiplier operators and local multipliers on associative algebras is developed. For this propose we use a notion of local left multiplier on an associative algebra as follows: given an associative algebra A , a linear map $\Delta: A \rightarrow A$ is called a local left multiplier, if for every $x \in A$ there exists an element a in A depending on x such that $\Delta(x) = ax$.

Theorem 3 [4]. *Let A be an associative division algebra, and let ψ be a local left multiplier on $M_n(A)$. Then ψ is a left multiplier.*

A linear map $\nabla: A \rightarrow A$ is called a local inner derivation, if for any element $x \in A$ there exists an element $a \in A$ depending on x such that $\nabla(x) = ax - xa$.

Theorem 4 [4]. *Let A be a unital division associative algebra, and let $\Delta: M_n(A) \rightarrow M_n(A)$ be a local inner derivation on $M_n(A)$. Suppose that there exists a local left multiplier φ and a local right multiplier ψ such that $\Delta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, $x \in M_n(A)$. Then Δ is an inner derivation on $M_n(A)$.*

Proposition 5 [10]. *Let A be a 5-dimensional naturally graded 2-filiform non-split associative algebras of type $\mu(1, 2)$ over an algebraically closed field F of characteristic zero. Then A is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras, where the omitted products vanish:*

$$\lambda_1^5: \begin{cases} e_1e_1 = e_2, \\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3, \\ e_4e_1 = e_5, \end{cases} \quad \lambda_2^5: \begin{cases} e_1e_1 = e_2, \\ e_1e_2 = e_2e_1 = e_3, \\ e_4e_1 = e_5, \\ e_4e_2 = e_5e_1 = e_3. \end{cases}$$

Results and discussion

Description of weak left multipliers of the algebras λ_1^5 , λ_2^5 . Let's consider the following theorem.

Theorem 6. *A linear operator on the associative algebra λ_1^5 is a weak left multiplier if and only if the matrix of this linear operator has the following matrix form:*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{1,1} & 0 & a_{2,4} & 0 \\ a_{3,1} & a_{2,1} & a_{1,1} & a_{3,4} & a_{2,4} \\ a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 \\ a_{5,1} & a_{4,1} & 0 & a_{5,4} & a_{4,4} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Proof. Let $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_5 e_5$ be an element of λ_1^5 . Then we write $\bar{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$.

Let $L: \lambda_1^5 \rightarrow \lambda_1^5$ be a weak left multiplier on λ_1^5 , i. e. L is linear and $L(xy) = L(x)y$ for any $x, y \in \lambda_1^5$, and $M = (a_{ij})_{ij=1}^5$ be the matrix of L . Then

$$\overline{L(a)} = M\bar{a}.$$

We compute the components of the matrix M . By the multiplication table for λ_1^5 and the definition of a weak left multiplier, we have:

- 1) from $L(e_1 e_1) = L(e_1) e_1 = L(e_2)$ it follows that $a_{1,2} e_1 + a_{2,2} e_2 + a_{3,2} e_3 + a_{4,2} e_4 + a_{5,2} e_5 = a_{1,1} e_2 + a_{2,1} e_3 + a_{4,1} e_5$, and, hence, $a_{1,2} = 0$, $a_{1,1} = a_{2,2}$, $a_{2,1} = a_{3,2}$, $a_{4,2} = 0$, $a_{4,1} = a_{5,2}$;
- 2) from $L(e_1 e_2) = L(e_1) e_2 = L(e_3)$ it follows that $a_{1,3} e_1 + a_{2,3} e_2 + a_{3,3} e_3 + a_{4,3} e_4 + a_{5,3} e_5 = a_{1,1} e_3$, and, hence, $a_{1,3} = 0$, $a_{2,3} = 0$, $a_{4,3} = 0$, $a_{5,3} = 0$, $a_{1,1} = a_{3,3}$;
- 3) from $L(e_2 e_1) = L(e_2) e_1 = L(e_3)$ it follows that $a_{1,3} e_1 + a_{2,3} e_2 + a_{3,3} e_3 + a_{4,3} e_4 + a_{5,3} e_5 = a_{1,2} e_2 + a_{2,2} e_3 + a_{4,2} e_5$, and, hence, $a_{1,3} = 0$, $a_{2,3} = a_{1,2}$, $a_{3,3} = a_{2,2}$, $a_{4,3} = 0$, $a_{4,2} = a_{5,3} = 0$;
- 4) from $L(e_2 e_2) = L(e_2) e_2 = a_{1,2} e_3 = 0$ it follows that $a_{1,2} = 0$;
- 5) from $L(e_3 e_1) = L(e_3) e_1$ it follows that $a_{1,3} e_2 + a_{2,3} e_3 + a_{4,3} e_5 = 0$, and, hence, $a_{1,3} = 0$, $a_{2,3} = 0$, $a_{4,3} = 0$;
- 6) from $L(e_3 e_2) = L(e_3) e_2 = 0$ it follows that $a_{1,3} e_3 = 0$, and, hence, $a_{1,3} = 0$;
- 7) from $L(e_4 e_1) = L(e_4) e_1 = L(e_5)$ it follows that $a_{1,5} e_1 + a_{2,5} e_2 + a_{3,5} e_3 + a_{4,5} e_4 + a_{5,5} e_5 = a_{1,4} e_2 + a_{2,4} e_3 + a_{4,4} e_5$, and, hence, $a_{1,5} = 0$, $a_{1,4} = a_{2,5}$, $a_{2,4} = a_{3,5}$, $a_{4,5} = 0$, $a_{4,4} = a_{5,5}$;
- 8) from $L(e_4 e_2) = L(e_4) e_2$ it follows that $a_{1,4} e_3 = 0$, and, hence, $a_{1,4} = 0$;
- 9) from $L(e_5 e_1) = L(e_5) e_1 = 0$ it follows that $a_{1,5} e_2 + a_{2,5} e_3 + a_{4,5} e_5 = 0$, and, hence, $a_{4,5} = 0$, $a_{1,5} = 0$, $a_{2,5} = 0$, $a_{1,4} = 0$;
- 10) from $L(e_5 e_2) = L(e_5) e_2 = 0$ it follows that $a_{1,5} e_3 = 0$, and, hence, $a_{1,5} = 0$.

As the result we get the following matrix:

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{1,1} & 0 & a_{2,4} & 0 \\ a_{3,1} & a_{2,1} & a_{1,1} & a_{3,4} & a_{2,4} \\ a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 \\ a_{5,1} & a_{4,1} & 0 & a_{5,4} & a_{4,4} \end{pmatrix}.$$

This matrix coincides with matrix (1).

Now we prove that the matrix M defines a weak left multiplier on λ_1^5 . Let $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_5 e_5$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_5 e_5$ be an element of λ_1^5 . Then

$$\overline{L(ab)} = M\bar{ab} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{1,1} & 0 & a_{2,4} & 0 \\ a_{3,1} & a_{2,1} & a_{1,1} & a_{3,4} & a_{2,4} \\ a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 \\ a_{5,1} & a_{4,1} & 0 & a_{5,4} & a_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \\ 0 \\ \alpha_4 \beta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ a_{1,1}\alpha_1\beta_1 \\ a_{2,1}\alpha_1\beta_1 + a_{1,1}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{2,4}\alpha_4\beta_1 \\ 0 \\ a_{4,4}\alpha_4\beta_1 + a_{4,1}\alpha_1\beta_1 \end{pmatrix}.$$

At the same time,

$$\overline{L(a)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha_1 \\ \alpha_{2,1}\alpha_1 + a_{1,1}\alpha_2 + a_{2,4}\alpha_4 \\ \alpha_{3,1}\alpha_1 + a_{2,1}\alpha_2 + a_{1,1}\alpha_3 + a_{3,4}\alpha_4 + a_{2,4}\alpha_5 \\ a_{4,1}\alpha_1 + a_{4,4}\alpha_4 \\ a_{5,1}\alpha_1 + a_{4,1}\alpha_2 + a_{5,4}\alpha_4 + a_{4,4}\alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$\overline{L(a)b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{1,1}\alpha_1\beta_1 \\ a_{2,1}\alpha_1\beta_1 + a_{1,1}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{2,4}\alpha_4\beta_1 \\ 0 \\ a_{4,4}\alpha_4\beta_1 + a_{4,1}\alpha_1\beta_1 \end{pmatrix}.$$

From this it follows that $L(ab) = L(a)b$ for any elements a and b in λ_1^5 . Therefore, this common form of a matrix is sufficient to the linear operator on λ_1^5 , generated by the matrix M , be a weak left multiplier on λ_1^5 . This ends the proof.

The following theorem is proven similar to the proof of theorem 6.

Theorem 7. *A linear operator on the associative algebra λ_2^5 is a weak left multiplier if and only if the matrix of this linear operator has the following matrix form:*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,4} & 0 \\ a_{2,1} & a_{1,1} & 0 & a_{2,4} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{2,1} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{3,3} - a_{1,1} & 0 & 0 & a_{3,3} - a_{1,4} & 0 \\ 0 & a_{3,3} - a_{1,1} & 0 & a_{3,5} - a_{2,4} & a_{3,3} - a_{1,4} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Description of local weak left multipliers of the algebras λ_1^5 , λ_2^5 . In the present article, a pure algebraic approach to the investigation of multiplier operators and local multipliers on associative algebras is developed. For this propose we use a notion of a local weak left multiplier on an associative algebra as follows: given an associative algebra A , a linear map $\Delta: A \rightarrow A$ is called a local weak left multiplier, if for every $x \in A$ there exists a weak left multiplier L on A , depending on x such that $\Delta(x) = L(x)$.

Theorem 8. *A linear operator on the associative algebra λ_1^5 is a local weak left multiplier if and only if the matrix of this linear operator has the following matrix form:*

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & b_{2,4} & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} \\ b_{4,1} & 0 & 0 & b_{4,4} & 0 \\ b_{5,1} & b_{5,2} & 0 & b_{5,4} & b_{5,5} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Proof. Let ∇ be a local weak left multiplier on λ_1^5 , let $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^5$ be the matrix, defining the linear operator ∇ . By the definition, for any element $x \in \lambda_1^5$ there exists a weak left multiplier operator L_x such that $\nabla(x) = L_x(x)$. Then, for the appropriate matrix A_x of the operator L_x we have

$$\overline{L_x(x)} = B\bar{x} = A_x\bar{x}, \quad A_x = \left(a_{i,j}^x\right)_{i,j=1}^5. \quad (4)$$

By form (1) of the matrix of a weak left multiplier on λ_1^5 , using equalities $\nabla(e_i) = L_{e_i}(e_i) = B\bar{e}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, we get

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= a_{1,1}^{e_1}, \quad b_{2,1} = a_{2,1}^{e_1}, \quad b_{3,1} = a_{3,1}^{e_1}, \quad b_{4,1} = a_{4,1}^{e_1}, \quad b_{5,1} = a_{5,1}^{e_1}, \\ b_{1,2} &= 0, \quad b_{2,2} = a_{1,1}^{e_2}, \quad b_{3,2} = a_{2,1}^{e_2}, \quad b_{4,2} = 0, \quad b_{5,2} = a_{4,1}^{e_2}, \\ b_{1,3} &= 0, \quad b_{2,3} = 0, \quad b_{3,3} = a_{1,1}^{e_3}, \quad b_{4,3} = 0, \quad b_{5,3} = 0, \\ b_{1,4} &= 0, \quad b_{2,4} = a_{2,4}^{e_4}, \quad b_{3,4} = a_{3,4}^{e_4}, \quad b_{4,4} = a_{4,4}^{e_4}, \quad b_{5,4} = a_{5,4}^{e_4}, \\ b_{1,5} &= 0, \quad b_{2,5} = 0, \quad b_{3,5} = a_{2,4}^{e_5}, \quad b_{4,5} = 0, \quad b_{5,5} = a_{4,4}^{e_5}. \end{aligned}$$

Thus, according to (4) we get the following system of linear equations:

$$\begin{cases} x_1 a_{1,1}^x = x_1 a_{1,1}^{e_1}, \\ x_1 a_{2,1}^x + x_2 a_{1,1}^x + x_4 a_{2,4}^x = x_1 a_{2,1}^{e_1} + x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_4 a_{2,4}^{e_4}, \\ x_1 a_{3,1}^x + x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{1,1}^x + x_4 a_{3,4}^x + x_5 a_{2,4}^x = x_1 a_{3,1}^{e_1} + x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{1,1}^{e_3} + x_4 a_{3,4}^{e_4} + x_5 a_{2,4}^{e_5}, \\ x_1 a_{4,1}^x + x_4 a_{4,4}^x = x_1 a_{4,1}^{e_1} + x_4 a_{4,4}^{e_4}, \\ x_1 a_{5,1}^x + x_2 a_{4,1}^x + x_4 a_{5,4}^x + x_5 a_{4,4}^x = x_1 a_{5,1}^{e_1} + x_2 a_{4,1}^{e_2} + x_4 a_{5,4}^{e_4} + x_5 a_{4,4}^{e_5}. \end{cases} \quad (5)$$

If for each element $x \in \lambda_1^5$ there exists a matrix A_x of form (1) such that

$$B\bar{x} = A_x\bar{x},$$

then the linear operator, defined by the matrix B is a local weak left multiplier. In other words, if for each element $x \in \lambda_1^5$ system of linear equations (5) has a solution with respect to the variables

$$a_{1,1}^x, a_{2,1}^x, a_{2,4}^x, a_{3,1}^x, a_{3,4}^x, a_{4,1}^x, a_{4,4}^x, a_{5,1}^x, a_{5,4}^x,$$

then the linear operator, defined by the matrix B is a local weak left multiplier. Note that, if the left part of any equation of system (5) is equal to zero, then the right part of this equation is also equal to zero. We show that for each element $x \in \lambda_1^5$, system of linear equations (5) has a solution.

Now, suppose that $x_1 \neq 0$. Then, from (5) it follows that

$$\begin{cases} a_{1,1}^x = a_{1,1}^{e_1}, \\ x_1 a_{2,1}^x + x_4 a_{2,4}^x = x_1 a_{2,1}^{e_1} + x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_4 a_{2,4}^{e_4} - x_2 a_{1,1}^{e_1}, \\ x_1 a_{3,1}^x + x_2 a_{2,1}^x + x_4 a_{3,4}^x + x_5 a_{2,4}^x = x_1 a_{3,1}^{e_1} + x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{1,1}^{e_3} + x_4 a_{3,4}^{e_4} + x_5 a_{2,4}^{e_5} - x_3 a_{1,1}^{e_1}, \\ x_1 a_{4,1}^x + x_4 a_{4,4}^x = x_1 a_{4,1}^{e_1} + x_4 a_{4,4}^{e_4}, \\ x_1 a_{5,1}^x + x_2 a_{4,1}^x + x_4 a_{5,4}^x + x_5 a_{4,4}^x = x_1 a_{5,1}^{e_1} + x_2 a_{4,1}^{e_2} + x_4 a_{5,4}^{e_4} + x_5 a_{4,4}^{e_5}. \end{cases}$$

It is not hard to see that the last system of linear equations has solution for each $x_1 \neq 0$ from the field F .

Now, suppose that $x_1 = 0$, $x_4 \neq 0$. Then we have

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ x_2 a_{1,1}^x + x_4 a_{2,4}^x = x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_4 a_{2,4}^{e_4}, \\ x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{1,1}^x + x_4 a_{3,4}^x + x_5 a_{2,4}^x = x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{1,1}^{e_3} + x_4 a_{3,4}^{e_4} + x_5 a_{2,4}^{e_5}, \\ x_4 a_{4,4}^x = x_4 a_{4,4}^{e_4}, \\ x_2 a_{4,1}^x + x_4 a_{5,4}^x + x_5 a_{4,4}^x = x_2 a_{4,1}^{e_2} + x_4 a_{5,4}^{e_4} + x_5 a_{4,4}^{e_5}. \end{cases}$$

By virtue of distinct variables $a_{2,4}^x$, $a_{3,4}^x$, $a_{4,4}^x$ and $a_{5,4}^x$ with the nonzero coefficient x_4 this system of linear equations always has a solution. If $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, then we have the following system of linear equations:

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ x_2 a_{1,1}^x = x_2 a_{1,1}^{e_2}, \\ x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{1,1}^x + x_5 a_{2,4}^x = x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{1,1}^{e_3} + x_5 a_{2,4}^{e_5}, \\ 0 = 0, \\ x_2 a_{4,1}^x + x_5 a_{4,4}^x = x_2 a_{4,1}^{e_2} + x_5 a_{4,4}^{e_5}. \end{cases}$$

It is clear that, if $x_2 \neq 0$, then the last system of linear equations always has a solution.

Now, suppose that $x_1 = 0, x_4 = 0, x_2 = 0$. Then

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ 0 = 0, \\ x_3 a_{1,1}^x + x_5 a_{2,4}^x = x_3 a_{1,1}^{e_3} + x_5 a_{2,4}^{e_5}, \\ 0 = 0, \\ x_5 a_{4,4}^x = x_5 a_{4,4}^{e_5}. \end{cases}$$

It is clear that, for any x_3 and x_5 the last system of linear equations has a solution. Thus, system of linear equations (5) always has a solution, i. e. the linear operator, generated by the matrix

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1}^{e_1} & a_{1,1}^{e_2} & 0 & a_{2,4}^{e_4} & 0 \\ a_{3,1}^{e_1} & a_{2,1}^{e_2} & a_{1,1}^{e_3} & a_{3,4}^{e_4} & a_{2,4}^{e_5} \\ a_{4,1}^{e_1} & 0 & 0 & a_{4,4}^{e_4} & 0 \\ a_{5,1}^{e_1} & a_{4,1}^{e_2} & 0 & a_{5,4}^{e_4} & a_{4,4}^{e_5} \end{pmatrix}$$

is a local weak left multiplier. Since the local weak left multiplier was chosen arbitrarily we can the matrix B rewrite in the following form:

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & b_{2,4} & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} \\ b_{4,1} & 0 & 0 & b_{4,4} & 0 \\ b_{5,1} & b_{5,2} & 0 & b_{5,4} & b_{5,5} \end{pmatrix}.$$

This matrix coincides with matrix (3). The proof is completed.

Theorem 9. A linear operator on the associative algebra λ_2^5 is a weak left multiplier if and only if the matrix of this linear operator has the following matrix form:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & b_{1,4} & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & b_{2,4} & b_{2,5} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} \\ b_{4,1} & 0 & 0 & b_{4,4} & 0 \\ b_{5,1} & b_{5,2} & 0 & b_{5,4} & b_{5,5} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Proof. Let ∇ be a local weak left multiplier on λ_2^5 , let $B = (b_{ij})_{i,j=1}^5$ be the matrix, generating the linear operator ∇ . By the definition, for any element $x \in \lambda_2^5$ there exists a weak left multiplier operator L_x such that $\nabla(x) = L_x(x)$. Then for the appropriate matrix A_x of the operator L_x , we have

$$\overline{L_x(x)} = B\bar{x} = A_x \bar{x}, \quad A_x = (a_{i,j}^x)_{i,j=1}^5. \quad (7)$$

By form (2) of the matrix of a weak left multiplier on λ_2^5 , using equalities $\nabla(e_i) = L_{e_i}(e_i) = B\bar{e}_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, we get

$$\begin{aligned}
 b_{1,1} &= a_{1,1}^{e_1}, b_{2,1} = a_{2,1}^{e_1}, b_{3,1} = a_{3,1}^{e_1}, b_{4,1} = a_{3,3}^{e_1} - a_{1,1}^{e_1}, b_{5,1} = 0, \\
 b_{1,2} &= 0, b_{2,2} = a_{1,1}^{e_2}, b_{3,2} = a_{2,1}^{e_2}, b_{4,2} = 0, b_{5,2} = a_{3,3}^{e_2} - a_{1,1}^{e_2}, \\
 b_{1,3} &= 0, b_{2,3} = 0, b_{3,3} = a_{3,3}^{e_3}, b_{4,3} = 0, b_{5,3} = 0, \\
 b_{1,4} &= a_{4,1}^{e_4}, b_{2,4} = a_{2,4}^{e_4}, b_{3,4} = a_{3,4}^{e_4}, b_{4,4} = a_{3,3}^{e_4} - a_{1,4}^{e_4}, b_{5,4} = a_{3,5}^{e_4} - a_{2,4}^{e_4}, \\
 b_{1,5} &= 0, b_{2,5} = a_{4,1}^{e_5}, b_{3,5} = a_{3,5}^{e_5}, b_{4,5} = 0, b_{5,5} = a_{3,3}^{e_5} - a_{1,4}^{e_5}.
 \end{aligned}$$

Thus, according to (7) we get the following system of linear equations:

$$\begin{cases}
 x_1 a_{1,1}^x + x_4 a_{1,4}^x = x_1 a_{1,1}^{e_1} + x_4 a_{1,4}^{e_4}, \\
 x_1 a_{2,1}^x + x_2 a_{1,1}^x + x_4 a_{2,4}^x + x_5 a_{1,4}^x = x_1 a_{2,1}^{e_1} + x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_4 a_{2,4}^{e_4} + x_5 a_{1,4}^{e_5}, \\
 x_1 a_{3,1}^x + x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{3,3}^x + x_4 a_{3,4}^x + x_5 a_{3,5}^x = x_1 a_{3,1}^{e_1} + x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{3,3}^{e_3} + x_4 a_{3,4}^{e_4} + x_5 a_{3,5}^{e_5}, \\
 x_1 (a_{3,3}^x - a_{1,1}^x) + x_4 (a_{3,5}^x - a_{2,4}^x) = x_1 (a_{3,3}^{e_1} - a_{1,1}^{e_1}) + x_4 (a_{3,5}^{e_4} - a_{2,4}^{e_4}), \\
 x_2 (a_{3,3}^x - a_{1,1}^x) + x_4 (a_{3,5}^x - a_{2,4}^x) + x_5 (a_{3,3}^x - a_{1,4}^x) = x_2 (a_{3,3}^{e_2} - a_{1,1}^{e_2}) + x_4 (a_{3,5}^{e_4} - a_{2,4}^{e_4}) + x_5 (a_{3,3}^{e_5} - a_{1,4}^{e_5}).
 \end{cases} \quad (8)$$

If for each element $x \in \lambda_1^5$ there exists a matrix A_x of form (2) such that

$$B\bar{x} = A_x \bar{x},$$

then the linear operator, defined by the matrix B is a local weak left multiplier. In other words, if for each element $x \in \lambda_1^5$ system of linear equations (8) has a solution with respect to the variables

$$a_{1,1}^x, a_{2,1}^x, a_{2,4}^x, a_{3,1}^x, a_{3,4}^x, a_{4,1}^x, a_{4,4}^x, a_{5,1}^x, a_{5,4}^x, \quad (9)$$

then the linear operator, defined by the matrix B is a local weak left multiplier. Note that, if the left part of any equation of system (8) is equal to zero, then the right part of this equation is also equal to zero. We show that for each element $x \in \lambda_1^5$ system of linear equations (8) has a solution.

Now, suppose that $x_1 \neq 0$. System of linear equations (8) is equivalent to the following system of linear equations:

$$\begin{cases}
 x_1 a_{1,1}^x + x_4 a_{1,4}^x = x_1 a_{1,1}^{e_1} + x_4 a_{1,4}^{e_4}, \\
 x_1 a_{2,1}^x + x_2 a_{1,1}^x + x_4 a_{2,4}^x + x_5 a_{1,4}^x = x_1 a_{2,1}^{e_1} + x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_4 a_{2,4}^{e_4} + x_5 a_{1,4}^{e_5}, \\
 x_1 a_{3,1}^x + x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{3,3}^x + x_4 a_{3,4}^x + x_5 a_{3,5}^x = x_1 a_{3,1}^{e_1} + x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{3,3}^{e_3} + x_4 a_{3,4}^{e_4} + x_5 a_{3,5}^{e_5}, \\
 (x_1 + x_4) a_{3,3}^x = x_1 a_{3,3}^{e_1} + x_4 a_{3,3}^{e_4}, \\
 x_2 (a_{3,3}^x - a_{1,1}^x) + x_4 (a_{3,5}^x - a_{2,4}^x) + x_5 (a_{3,3}^x - a_{1,4}^x) = x_2 (a_{3,3}^{e_2} - a_{1,1}^{e_2}) + x_4 (a_{3,5}^{e_4} - a_{2,4}^{e_4}) + x_5 (a_{3,3}^{e_5} - a_{1,4}^{e_5}).
 \end{cases} \quad (10)$$

The order of computation of the values of variables (9) is the following:

$$\begin{cases}
 x_1 a_{1,1}^x + x_4 a_{1,4}^x = x_1 a_{1,1}^{e_1} + x_4 a_{1,4}^{e_4}, \\
 x_1 a_{2,1}^x + x_2 a_{1,1}^x + x_4 a_{2,4}^x + x_5 a_{1,4}^x = x_1 a_{2,1}^{e_1} + x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_4 a_{2,4}^{e_4} + x_5 a_{1,4}^{e_5}, \\
 (x_1 + x_4) a_{3,3}^x = x_1 a_{3,3}^{e_1} + x_4 a_{3,3}^{e_4}, \\
 x_2 (a_{3,3}^x - a_{1,1}^x) + x_4 (a_{3,5}^x - a_{2,4}^x) + x_5 (a_{3,3}^x - a_{1,4}^x) = x_2 (a_{3,3}^{e_2} - a_{1,1}^{e_2}) + x_4 (a_{3,5}^{e_4} - a_{2,4}^{e_4}) + x_5 (a_{3,3}^{e_5} - a_{1,4}^{e_5}), \\
 x_1 a_{3,1}^x + x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{3,3}^x + x_4 a_{3,4}^x + x_5 a_{3,5}^x = x_1 a_{3,1}^{e_1} + x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{3,3}^{e_3} + x_4 a_{3,4}^{e_4} + x_5 a_{3,5}^{e_5}.
 \end{cases}$$

Note that the variables $a_{1,1}^x, a_{2,1}^x, a_{3,3}^x, a_{3,1}^x$ have a nonzero coefficient, if $x_1 + x_4 \neq 0$ and system of linear equations (10) has a solution. If $x_1 \neq 0$ and $x_1 + x_4 = 0$, then $x_4 = -x_1$ and similar to the previous case system of linear equations (10) has a solution. Thus, system of linear equations (8) has a solution for each $x_1 \neq 0$ from the field F .

Now, suppose that $x_1 = 0, x_4 \neq 0$, then system of linear equations (8) is equivalent to the following system of linear equations:

$$\begin{cases} x_4 a_{1,4}^x = x_4 a_{1,4}^{e_4}, \\ x_2 a_{1,1}^x + x_4 a_{2,4}^x + x_5 a_{1,4}^x = x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_4 a_{2,4}^{e_4} + x_5 a_{1,4}^{e_5}, \\ x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{3,3}^x + x_4 a_{3,4}^x + x_5 a_{3,5}^x = x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{3,3}^{e_3} + x_4 a_{3,4}^{e_4} + x_5 a_{3,5}^{e_5}, \\ x_4 a_{3,3}^x = x_4 a_{3,3}^{e_4}, \\ x_2(a_{3,3}^x - a_{1,1}^x) + x_4(a_{3,5}^x - a_{2,4}^x) + x_5(a_{3,3}^x - a_{1,4}^x) = x_2(a_{3,3}^{e_2} - a_{1,1}^{e_2}) + x_4(a_{3,5}^{e_4} - a_{2,4}^{e_4}) + x_5(a_{3,3}^{e_5} - a_{1,4}^{e_5}). \end{cases}$$

In this case the variables $a_{1,4}^x$, $a_{2,4}^x$, $a_{3,4}^x$, $a_{3,3}^x$, $a_{3,5}^x$ have a nonzero coefficient, and the order of computation of the values of these variables is the following:

$$\begin{cases} x_4 a_{1,4}^x = x_4 a_{1,4}^{e_4}, \\ x_2 a_{1,1}^x + x_4 a_{2,4}^x + x_5 a_{1,4}^x = x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_4 a_{2,4}^{e_4} + x_5 a_{1,4}^{e_5}, \\ x_4 a_{3,3}^x = x_4 a_{3,3}^{e_4}, \\ x_2(a_{3,3}^x - a_{1,1}^x) + x_4(a_{3,5}^x - a_{2,4}^x) + x_5(a_{3,3}^x - a_{1,4}^x) = x_2(a_{3,3}^{e_2} - a_{1,1}^{e_2}) + x_4(a_{3,5}^{e_4} - a_{2,4}^{e_4}) + x_5(a_{3,3}^{e_5} - a_{1,4}^{e_5}), \\ x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{3,3}^x + x_4 a_{3,4}^x + x_5 a_{3,5}^x = x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{3,3}^{e_3} + x_4 a_{3,4}^{e_4} + x_5 a_{3,5}^{e_5}. \end{cases}$$

As the result we have a solution of (10). Thus, system of linear equations (8) has a solution in the case of $x_1 = 0$, $x_4 \neq 0$.

Now, suppose that $x_1 = 0$, $x_4 = 0$. Then system of linear equations (8) is equivalent to the following system of linear equations:

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ x_2 a_{1,1}^x + x_5 a_{1,4}^x = x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_5 a_{1,4}^{e_5}, \\ x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{3,3}^x + x_5 a_{3,5}^x = x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{3,3}^{e_3} + x_5 a_{3,5}^{e_5}, \\ 0 = 0, \\ x_2(a_{3,3}^x - a_{1,1}^x) + x_5(a_{3,3}^x - a_{1,4}^x) = x_2(a_{3,3}^{e_2} - a_{1,1}^{e_2}) + x_5(a_{3,3}^{e_5} - a_{1,4}^{e_5}), \end{cases}$$

i. e.

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ x_2 a_{1,1}^x + x_5 a_{1,4}^x = x_2 a_{1,1}^{e_2} + x_5 a_{1,4}^{e_5}, \\ x_2 a_{2,1}^x + x_3 a_{3,3}^x + x_5 a_{3,5}^x = x_2 a_{2,1}^{e_2} + x_3 a_{3,3}^{e_3} + x_5 a_{3,5}^{e_5}, \\ 0 = 0, \\ (x_2 + x_5) a_{3,3}^x = x_2 a_{3,3}^{e_2} + x_5 a_{3,3}^{e_5}. \end{cases}$$

Similar to the previous cases this system of linear equations also has a solution. Thus, system of linear equations (8) always has a solution, i. e. the linear operator, generated by the matrix

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{e_1} & 0 & 0 & a_{1,4}^{e_4} & 0 \\ a_{2,1}^{e_1} & a_{1,1}^{e_2} & 0 & a_{2,4}^{e_4} & a_{1,4}^{e_5} \\ a_{3,1}^{e_1} & a_{2,1}^{e_2} & a_{3,3}^{e_3} & a_{3,4}^{e_4} & a_{3,5}^{e_5} \\ a_{3,3}^{e_1} - a_{1,1}^{e_1} & 0 & 0 & a_{3,3}^{e_4} - a_{1,4}^{e_4} & 0 \\ 0 & a_{3,3}^{e_2} - a_{1,1}^{e_2} & 0 & a_{3,5}^{e_4} - a_{2,4}^{e_4} & a_{3,3}^{e_5} - a_{1,4}^{e_5} \end{pmatrix},$$

is a local weak left multiplier. Since the local weak left multiplier was chosen arbitrarily we can rewrite the matrix B in the following form:

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & b_{1,4} & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & b_{2,4} & b_{2,5} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} \\ b_{4,1} & 0 & 0 & b_{4,4} & 0 \\ 0 & b_{5,2} & 0 & b_{5,4} & b_{5,5} \end{pmatrix}.$$

This matrix coincides with matrix (6). This completes the proof.

Conclusions

Note that the common form of the matrix of a local weak left (right) multiplier on an algebra includes the common form of the matrix of a weak left (right, respectively) multiplier on this algebra. The coincidence of these common forms denotes that every local weak left (right) multiplier of the considering algebra is a weak left (right, respectively) multiplier. But the common form of the matrix of a weak left (right) multiplier on the associative algebras λ_1^5 and λ_2^5 does not coincide with the common form of the matrix of a local weak left (right, respectively) multiplier on these algebras by theorems 6, 8 and 7, 9, respectively. Therefore, the associative algebras λ_1^5 and λ_2^5 have local weak left (right) multipliers that are not weak left (right, respectively) multipliers.

We note that local weak left (right) multipliers of an arbitrary low-dimension algebra can be similarly described using a common form of the matrix of weak left (right, respectively) multipliers on this algebra. A technique for constructing a local weak left (right) multiplier, which is not a weak left (right, respectively) multiplier, developed by us, can be applied to an arbitrary low-dimension algebra, weak left (right) multipliers of which have a matrix of a generalised form.

References

1. Gabriel P. Finite representation type is open. In: Dlab V, Gabriel P, editors. *Representations of algebras. Proceedings of the International conference; 1974 September 3–7; Ottawa, Canada*. Berlin: Springer-Verlag; 1975. p. 132–155 (Lecture notes in mathematics; volume 488). DOI: 10.1007/BFb0081219.
2. Mazzola G. The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five. *Manuscripta Mathematica*. 1979;27(1):81–101. DOI: 10.1007/BF01297739.
3. Hazlett OC. On the classification and invariantive characterization of nilpotent algebras. *American Journal of Mathematics*. 1916;38(2):109–138. DOI: 10.2307/2370262.
4. Arzikulov FN, Umrzaqov NM. Local mappings generated by a multiplication on rings of matrices. *Mathematical Notes*. 2020;107(5–6):887–897. DOI: 10.1134/S0001434620050193.
5. Gleason AM. A characterization of maximal ideals. *Journal d'Analyse Mathématique*. 1967;19:171–172. DOI: 10.1007/BF02788714.
6. Kahane J, Żelazko W. A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras. *Studia Mathematica*. 1968;29(3):339–343. DOI: 10.4064/sm-29-3-339-343.
7. Kadison RV. Local derivations. *Journal of Algebra*. 1990;130(2):494–509. DOI: 10.1016/0021-8693(90)90095-6.
8. Larson DR, Sourour AR. Local derivations and local automorphisms of $\mathcal{B}(X)$. In: Arveson WB, Douglas RG, editors. *Operator theory. Operator algebras and applications. Part 2*. Providence: American Mathematical Society; 1990. p. 187–194 (Proceedings of symposia in pure mathematics; volume 51).
9. Johnson BE. Local derivations on C^* -algebras are derivations. *Transactions of the American Mathematical Society*. 2001;353(1):313–325. DOI: 10.1090/S0002-9947-00-02688-X.
10. Karimjanov IA, Ladra M. Some classes of nilpotent associative algebras. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2020;17(2):70. DOI: 10.1007/s00009-020-1504-x.

Received 12.10.2023 / revised 06.11.2023 / accepted 08.11.2023.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3

ТЕРМОСИЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ¹⁾, М. А. ЖУРАВКОВ²⁾, А. В. НЕСТЕРОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет транспорта, ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Приведена постановка краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием осесимметричной нагрузки и теплового потока. Деформирование материалов тонких несущих слоев подчиняется гипотезам теории малых упругопластических деформаций. Относительно толстый заполнитель принят нелинейно-упругим. При выводе системы нелинейных дифференциальных уравнений равновесия использован вариационный принцип Лагранжа. Соответствующее итерационное решение получено методом прямого интегрирования. Проведена численная апробация аналитического решения.

Ключевые слова: круговая трехслойная пластина; неосесимметричная нагрузка; перемещения; пластичность.

Благодарность. Работа выполнена в рамках задания государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

Образец цитирования:

Старовойтов ЭИ, Журавков МА, Нестерович АВ. Термосиловое нагружение упругопластической трехслойной пластины. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;3:42–52. EDN: EJWCME

For citation:

Starovoitov EI, Zhuravkov MA, Nesterovich AV. Thermo force loading of an elastic-plastic a three-layer plate. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023; 3:42–52. Russian. EDN: EJWCME

Авторы:

Эдуард Иванович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.

Алина Викторовна Нестерович – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства.

Authors:

Eduard I. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of structural mechanics, geotechnics and building structures, faculty of industrial and civil engineering.

edstar0@yandex.by

Mikhail A. Zhuravkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.

zhuravkov@bsu.by

Alina V. Nesterovich, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of structural mechanics, geotechnics and building structures, faculty of industrial and civil engineering.

alina_nest92@bk.ru

THERMO FORCE LOADING OF AN ELASTIC-PLASTIC A THREE-LAYER PLATE

E. I. STAROVOITOV^a, M. A. ZHURAVKOV^b, A. V. NESTEROVICH^a

^a*Belarusian State University of Transport, 34 Kirava Street, Gomel 246653, Belarus*

^b*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: E. I. Starovaitov (edstar0@yandex.by)

The formulation of the boundary value problem of deformation of a circular three-layer plate in its plane under the action of an axisymmetric load and heat flow is herein given. The deformation of materials of thin bearing layers obeys the hypotheses of the theory of small elastic-plastic deformations. The relatively thick filler is assumed to be non-linearly elastic. A system of non-linear differential equilibrium equations is obtained. To derive it, the Lagrange's variational principle was used. The corresponding iterative solution is obtained by direct integration. Numerical approbation of the analytical solution is carried out.

Keywords: circular three-layer plate; non-axisymmetric load; movement; plasticity.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the assignment of the state programme of scientific research «Convergence-2025».

Введение

В настоящее время композиты широко используются в технике и строительстве. Это обусловило спрос на расчетные модели слоистых, в частности трехслойных, элементов конструкций. Разработка общей теории деформирования трехслойных элементов конструкций, в том числе пластин, еще не завершена и интенсивно продолжается. Данной теме посвящен ряд работ, включая монографии [1–3], в которых приведены подходы к разработке линейных и нелинейных математических моделей неоднородных стержней, пластин и цилиндрических оболочек при квазистатических и динамических нагрузках.

Деформирование трехслойных пластин и оболочек под действием динамических нагрузок исследовано в статьях [4–7]. Материалы вязкоупругопластических цилиндрических оболочек подчиняются наследственным соотношениям деформационной теории пластичности. Решения выписаны с помощью разложения в ряд по собственным функциям. Резонансные колебания рассмотрены у круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием [7]. Оценка динамических характеристик тонких цилиндрических сэндвич-панелей с магнитореологическим наполнителем проведена в статье [8]. Свободные и резонансные колебания упругих слоистых балок, пластин и цилиндрических оболочек рассмотрены в работах [9–11]. Распространение упругих волн в трехслойной пластине с высококонтрастными механическими и геометрическими свойствами слоев проанализировано в публикациях [12; 13].

Статьи [14; 15] посвящены математическому моделированию гидроупругих колебаний круглой пластины, опирающейся на основания Винклера и Пастернака. Нестационарный контакт сферических и цилиндрических оболочек исследован в публикациях [16–18]. В работах [19–21] рассмотрено статическое и моногармоническое акустическое воздействие на многослойную пластину, исследован динамический резонансный отклик пластины, армированной углеродным волокном, при резонансных колебаниях с учетом внутреннего трения в материале и внешнего аэродинамического демпфирования. Отклик многослойных композитных плит на косой удар описан в публикации [22]. Статья [23] посвящена сверхзвуковому флаттеру многослойных композитных пластин.

Деформирование упругопластических трехслойных стержней и пластин с нелинейно-упругим наполнителем рассмотрено в работах [24–26]. Анализ деформирования и устойчивости многослойных балок проведен в статьях [27–29]. Несущая способность круглых многослойных плит при большом прогибе исследована в публикации [30]. Анализ изгиба круглой многослойной пластины и сравнение изгибных свойств сэндвич-панелей с ячеистым наполнителем выполнены в работах [31–33].

Деформирование упругой круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием косинусоидальной нагрузки исследовано в статье [34]. Изотермическое деформирование круглой физически нелинейной трехслойной пластины при неосесимметричной нагрузке рассмотрено в работе [35]. Здесь деформирование упругопластической трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости рассмотрено с учетом воздействия температурного поля.

Постановка краевой задачи

Пусть несимметричная по толщине круговая трехслойная пластина радиусом r_0 состоит из двух тонких прочных несущих слоев ($h_1 \neq h_2$) и жесткого несжимаемого по толщине заполнителя ($h_3 = 2c$). Для постановки задачи используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). Результирующая внешняя распределенная нагрузка приложена в срединной плоскости заполнителя. Ее проекции на оси координат – $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$.

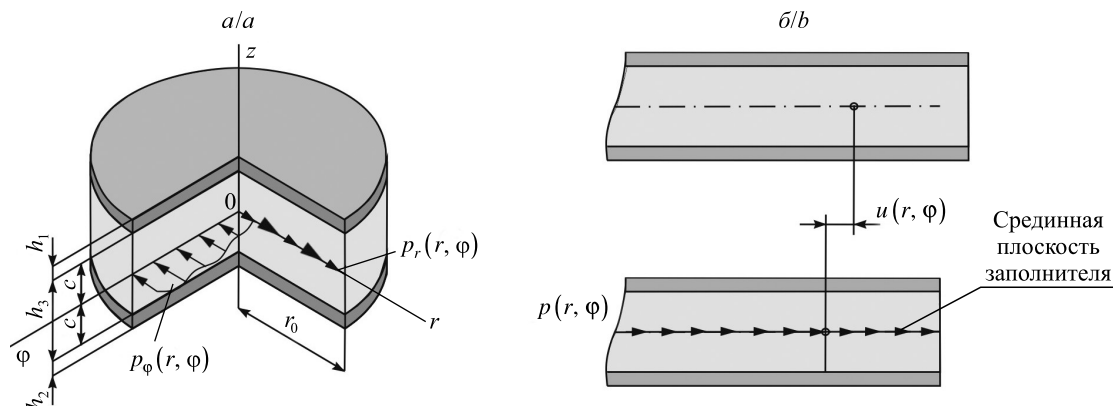


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины при нагружении в своей плоскости

Fig. 1. Calculation scheme of a three-layer plate when loaded in its plane

Нижняя поверхность $z = -c - h_2$ и контур пластины теплоизолированы. В этом случае неоднородное температурное поле $\theta(z, t)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , можно вычислять с достаточной точностью по формуле [1]

$$\theta = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\},$$

где $\tau = \frac{at}{H^2}$; $s = \frac{z}{H}$; $a = \frac{\lambda}{C}$; $\lambda = \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_k h_k}{H}$; $C = \sum_{k=1}^3 \frac{C_k h_k \rho_k}{H}$; H – суммарная толщина пластины; λ_k , C_k и ρ_k – коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотность материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$); t – время.

Возникающим в несимметричной по толщине трехслойной пластине изгибным деформированием пренебрегаем в силу его малости при отсутствии поперечной нагрузки. Рассматриваем только плоскую часть задачи. Искомые радиальные и тангенциальные перемещения обозначим через $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$. На границах слоев склейки перемещения непрерывны. Для предотвращения относительного сдвига слоев на торце пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы. Деформации малы.

Материалы несущих слоев упругопластические, заполнитель нелинейно-упругий. Для описания связи напряжений и деформаций применяются соотношения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [36]

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \left(1 - \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k \right) \right) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k) \left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)} \theta \right) (\alpha, \beta = r, \varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее $k = 1, 2, 3$ – номер слоя; $s_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части этих тензоров; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – термозависимые модули сдвига и объемной деформации; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций; $\alpha_0^{(k)}$ – коэффициент линейного температурного расширения; $\omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k \right)$ – функции пластичности материалов несущих слоев, причем $\omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k \right) = 0$, если $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(T_k)$; $\omega_3 \left(\varepsilon_u^{(3)}, T_k \right)$ – универсальная функция физической нелинейности материала заполнителя, причем $\omega_3 \left(\varepsilon_u^{(3)}, T_k \right) = 0$, если $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s^{(k)}(T_k)$; $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев; $\varepsilon_s^{(k)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя.

С помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ вводятся обобщенные внутренние силы в пластине

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^3 \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} h_k \quad (\alpha, \beta = r, \varphi). \quad (2)$$

Из вариационного принципа Лагранжа следует система дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных усилиях [34]

$$\begin{aligned} T_{rr'r} + \frac{1}{r} (T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) &= -p_r, \\ T_{r\varphi'r} + \frac{1}{r} (T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}) &= -p_\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где штрих в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ним координате.

Компоненты напряжений представим в виде линейной (индекс e), нелинейной (индекс ω) и температурной (индекс t) составляющих:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} - \sigma_t^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} \quad (\alpha, \beta = r, \varphi). \quad (4)$$

Здесь слагаемые напряжений выражаются через деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} &= s_{\alpha\alpha}^{(k)} + \sigma^{(k)} = 2G_k(T_k) \left(\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \right) + 3K_k(T_k) \varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + K_k^-(T_k) \varepsilon_{\beta\beta}^{(k)}, \\ \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k \right) \left(\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \right), \\ \sigma_{r\varphi e}^{(k)} &= s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)} = s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T_k) \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k \right) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_t^{(k)} &= 3K_k(T_k) \alpha_0^{(k)} T_k \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; \alpha \neq \beta), \end{aligned} \quad (5)$$

где $K_k^+(T_k) = K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k)$, $K_k^-(T_k) = K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k)$.

Внутренние усилия (2) с помощью напряжений (4) и (5) также представим в виде трех составляющих:

$$T_{\alpha\beta}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} dz - \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} dz - \delta_{\alpha\beta} \int_{h_k} \sigma_t^{(k)} dz = T_{\alpha\beta e}^{(k)} - T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} - T_t^{(k)} \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = r, \varphi), \quad (6)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кронекера.

Обобщенные усилия получим, просуммировав внутренние усилия (6) по слоям:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &\equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} - \delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} = T_{\alpha\beta e} - T_{\alpha\beta\omega} - \delta_{\alpha\beta} T_t = \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} dz - 3\delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T_k) \Delta T_k dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив усилия (7) в уравнения (3) и перейдя к безразмерной радиальной координате $x = \frac{r}{r_0}$, получим следующую систему дифференциальных уравнений для рассматриваемой пластины, осесимметрично деформируемой в своей плоскости:

$$\begin{cases} T_{rr'x} + \frac{1}{x} (T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) = (-p_r + p_{r\omega}) r_0, \\ T_{r\varphi'x} + \frac{1}{x} (T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}) = (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}) r_0, \end{cases} \quad (8)$$

где нижний индекс e в дальнейшем опущен для удобства; нелинейные добавки (индекс ω), вынесенные вправо, определяются формулами

$$p_{r\omega} = \frac{1}{r_0} \left(T_{rr\omega'x} + \frac{1}{x} (T_{r\varphi\omega'\varphi} + T_{rr\omega} - T_{\varphi\varphi\omega}) \right), \quad p_{\varphi\omega} = \frac{1}{r_0} \left(T_{r\varphi\omega'x} + \frac{1}{x} (T_{\varphi\varphi\omega'\varphi} + 2T_{r\varphi\omega}) \right).$$

В фиксированный момент времени t линейные составляющие внутренних обобщенных усилий выражаются через перемещения $u_r(r)$, $u_\varphi(r)$ после подстановки в усилия (7) напряжений (5):

$$\begin{aligned} T_{rr} &= a_1 u_{r'r} + \frac{a_2}{r} u_r - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k \Delta T_k dz, \quad T_{r\varphi} = \frac{a_3}{r} (r u_{\varphi'r} - u_\varphi), \\ T_{\varphi\varphi} &= a_2 u_{r'r} + \frac{a_1}{r} u_r - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k \Delta T_k dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k(T) + \frac{4}{3} G_k(T) \right) dz, \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k(T) - \frac{2}{3} G_k(T) \right) dz, \\ a_3 &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T) dz, \quad a_2 = a_1 - 2a_3, \end{aligned}$$

где T – температура, осредненная по толщине пластины.

После подстановки выражений (9) в систему (8) получим нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, служащие для определения перемещений при осесимметричном термостатическом нагружении упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости:

$$\begin{aligned} u_{r'xx} + \frac{u_{r'x}}{x} - \frac{u_r}{x^2} &= \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}), \\ u_{\varphi'xx} + \frac{u_{\varphi'x}}{x} - \frac{u_\varphi}{x^2} &= \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что уравнения (10) не содержат температуру в явном виде, учитывается лишь ее влияние на величину модулей упругости материалов слоев, для описания которого применяется линейная формула Белла [1].

Краевая задача о деформировании круговой трехслойной пластины с физически нелинейными слоями неосесимметричной нагрузкой замыкается добавлением к уравнениям равновесия (10) граничных условий на контуре ($x = 1$) и ограничений на величину перемещений в центре пластины ($x = 0$).

Аналитическое решение краевой задачи

Система дифференциальных уравнений (10) существенно нелинейная, поэтому для ее решения необходимо применять приближенные или численные методы. В рассматриваемом случае используем модификацию метода упругих решений Ильюшина [36], сходимость которого доказана в широких пределах. Уравнения (10) переписываем в итерационном виде:

$$\begin{aligned} u_{r'xx}^{(n)} + \frac{u_{r'x}^{(n)}}{x} - \frac{u_r^{(n)}}{x^2} &= \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}^{(n-1)}), \\ u_{\varphi'xx}^{(n)} + \frac{u_{\varphi'x}^{(n)}}{x} - \frac{u_\varphi^{(n)}}{x^2} &= \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (11)$$

где n – номер приближения.

Дополнительные «внешние» нагрузки $p_{r\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ на первом шаге итерации принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения по формулам, введенным в системе (8):

$$p_{r\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{r_0} \left(T_{rr\omega'x}^{(n-1)} + \frac{1}{x} (T_{rr\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\varphi\omega}^{(n-1)}) \right), \quad p_{\varphi\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{r_0} \left(T_{r\varphi\omega'x}^{(n-1)} + \frac{2}{x} T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \right), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} - \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T) \Delta T dz = \\ &= 2 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T) \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T \right) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)(n-1)} dz - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T) \Delta T dz \quad (\alpha = r, \varphi), \end{aligned}$$

$$T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} dz = 2 \sum_{k=1}^3 \int G_k(T) \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T \right) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)(n-1)} dz.$$

В результате на каждом шаге итерации нелинейная задача сводится к линейной задаче с дополнительными «внешними» нагрузками (12).

Решение системы (11) получено методом прямого интегрирования:

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= C_1^{(n)} x + \frac{C_2^{(n)}}{r} - \frac{r_0^2}{a_1 x} \int_0^x \int_0^x (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) dx dx, \\ u_\varphi^{(n)} &= C_3^{(n)} x + \frac{C_4^{(n)}}{r} - \frac{r_0^2}{a_3 x} \int_0^x \int_0^x (p_\varphi - p_{\varphi\omega}^{(n-1)}) dx dx, \end{aligned} \quad (13)$$

где $C_1, \dots, C_4$ – константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Величина перемещений в центре пластины должна быть конечной, поэтому необходимо положить, что $C_2 = C_4 = 0$. На закрепленном контуре пластины ($x = 1$) перемещения будут равны нулю, отсюда получим константы интегрирования

$$C_1^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_1} \int_0^1 \int_0^1 (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) dx dx, \quad C_3^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_3} \int_0^1 \int_0^1 (p_\varphi - p_{\varphi\omega}^{(n-1)}) dx dx. \quad (14)$$

В случае свободного опирания на контуре должно выполняться условие

$$T_{rr}|_{r=r_0} = a_1 u_{r'r} + \frac{a_2}{r} u_r - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} K_k \theta h_k = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим деформирование пластины от радиальной нагрузки p_r при отсутствии окружной нагрузки ($p_\varphi = 0$). Граничное условие (15) принимает вид

$$\begin{aligned} T_{rr}^{(n)}|_{r=r_0} &= a_1 \left(C_1^{(n)} - \frac{2}{3a_1} (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) r_0 \right) + \\ &+ \frac{a_2}{r_0} \left(C_1^{(n)} r_0 - \frac{1}{3a_1} (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) r_0^2 \right) - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} K_k \Delta T h_k = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда имеем константу интегрирования

$$C_1^{(n)} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left(\frac{2a_1 + a_2}{3a_1} (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) r_0 + 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} K_k \Delta T h_k \right). \quad (17)$$

Деформации в слоях следуют из полученных перемещений (13) и соотношений Коши в полярной системе координат [1]. Ввиду симметрии нагрузки имеем

$$\varepsilon_{rr}^{(n)} = u_{r'r}^{(n)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)} = \frac{1}{r} u_r^{(n)}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(u_{\varphi'r}^{(n)} - \frac{1}{r} u_\varphi^{(n)} \right). \quad (18)$$

Следовательно, в температурном поле осесимметричное деформирование круговой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости при закрепленном или свободно опертом контуре описывается формулами (13)–(18).

Численные результаты

Численно исследовано деформирование круговой упругопластической трехслойной пластины единичного радиуса ($r_0 = 1$ м) при осесимметричном нагружении в срединной плоскости заполнителя нагрузкой $p_{r0} = 300$ МПа, $p_{\varphi0} = 0$. Внешние несущие слои выполнены из дюралюминия марки Д16-Т, заполнитель изготовлен из фторопласта-4. На контуре принято свободное опирание. Осредненное температурное поле – $T = \text{const}$, толщина внешних несущих слоев – $h_1 = h_2 = 0,02$ м, толщина заполнителя – $h_3 = 0,4$ м.

Функция пластичности в соотношениях (1) при термосиловом нагружении для несущих слоев принималась в следующем виде [1]:

$$\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T) = \begin{cases} 0, \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(T), \\ A_k \left(1 - \frac{\varepsilon_{y0}^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)} + \varepsilon_{y0}^{(k)} - \varepsilon_y^{(k)}(T)} \right)^{\alpha_k}, \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}(T), \end{cases}$$

где A_k, α_k – константы нелинейности материалов несущих слоев, получаемые экспериментально; $\varepsilon_{y0}^{(k)}$ – деформационный предел текучести при температуре $T_0 = 293$ К; $\varepsilon_y^{(k)}(T)$ – деформационный предел упругости при температуре T .

Функция нелинейности в соотношениях (1) для заполнителя (фторопласт-4) принималась в следующем виде [1]:

$$\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) = \begin{cases} 0, \varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}, \\ A_3 \left(1 - \frac{\varepsilon_s^{(3)}}{\varepsilon_u^{(3)}} \right)^{\alpha_3}, \varepsilon_u^{(3)} > \varepsilon_s^{(3)}, \end{cases}$$

где $A_3, \alpha_3, \varepsilon_s^{(3)}$ – константы нелинейности материала заполнителя.

На рис. 2 представлена сходимость итерационного процесса ($T = 293$ К). Номер кривой совпадает с шагом итерации. Второе приближение отличается от первого примерно на 10 %. Принятое за искомое решение пятое приближение отличается от четвертого на 0,14 %. В результате физическая нелинейность материалов слоев добавляет к упругим перемещениям около 14,5 %. Следует отметить, что указанные численные значения практически совпадают с аналогичными результатами для упругопластической пластины с жестко заданным контуром.

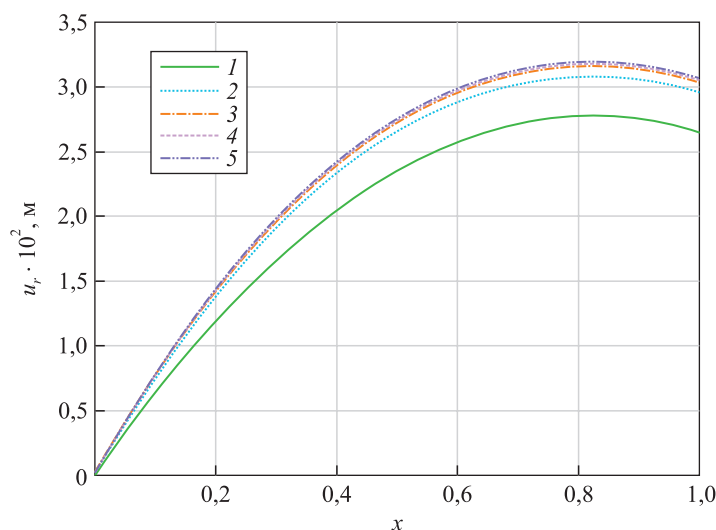


Рис. 2. Сходимость метода упругих решений ($T = 293$ К):

1, 2, 3, 4, 5 – номер итерации

Fig. 2. Convergence of the elastic solution method ($T = 293$ К):

1, 2, 3, 4, 5 – iteration number

На рис. 3 отражено влияние температуры на радиальные перемещения u_r . Перемещения при комнатной температуре ($T = 293$ К) максимальны в сечении $x = 0,82$, с ростом температуры максимумы сдвигаются к сечениям $x = 0,86$ ($T = 373$ К) и $x = 0,89$ ($T = 473$ К). Нагревание приводит к увеличению максимальных перемещений на 21,8 % ($T = 373$ К) и 43,8 % ($T = 473$ К).

Распределение областей пластичности и физической нелинейности по поперечному сечению пластины с ростом температуры изображено на рис. 4. Несущие слои полностью переходят в упругопластическое состояние. Нагревание пластины приводит к существенному увеличению областей физической нелинейности в заполнителе вследствие роста интенсивности деформаций.

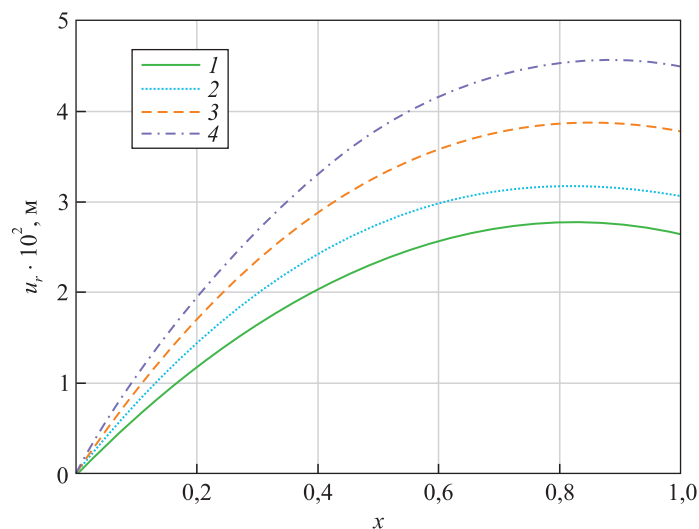


Рис. 3. Радиальные перемещения u_r в трехслойной пластине при различных температурах:

1 – упругая пластина при $T = 293$ K; 2, 3, 4 – упругопластическая пластина при $T = 293$ K, $T = 373$ K, $T = 473$ K соответственно

Fig. 3. Radial movements of u_r in a three-layer plate at different temperatures:

1 – elastic plate at $T = 293$ K; 2, 3, 4 – elastic-plastic plate at $T = 293$ K, $T = 373$ K, $T = 473$ K respectively

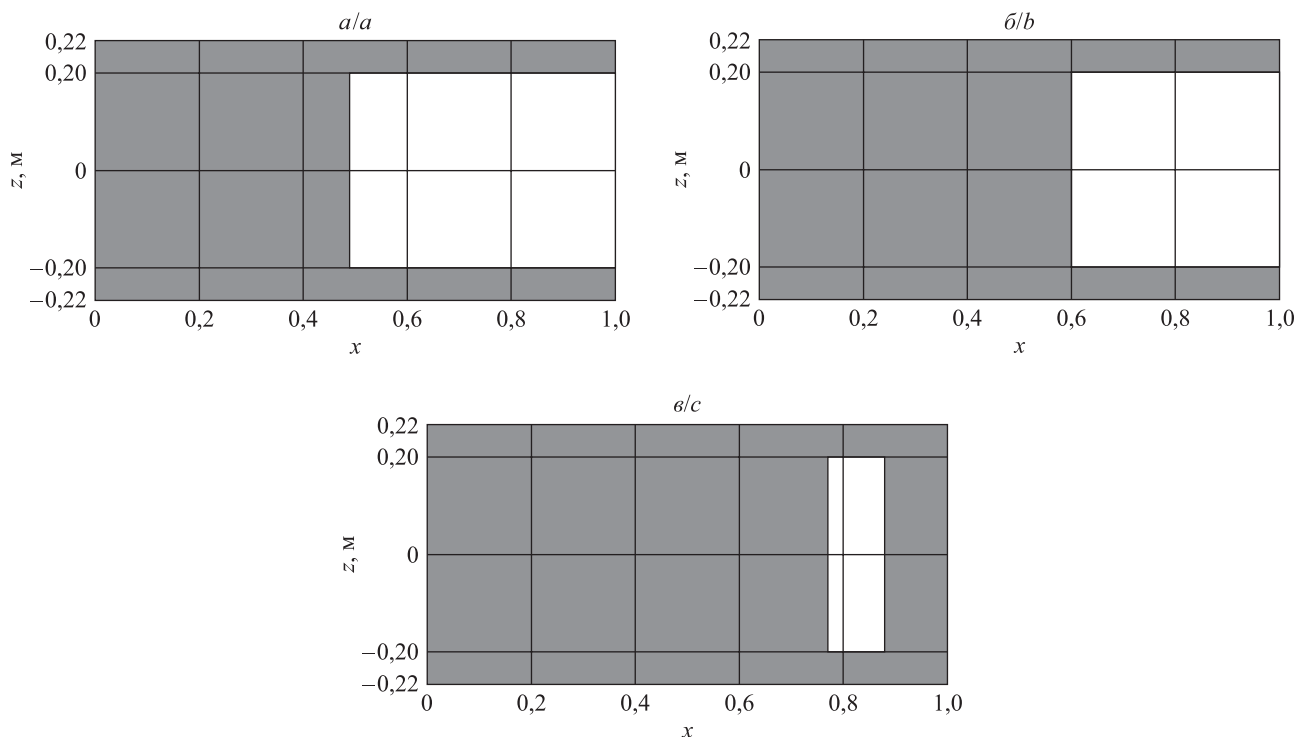


Рис. 4. Распределение областей пластичности и физической нелинейности (серая заливка)

при $T = 293$ K (a), $T = 373$ K (б) и $T = 473$ K (в)

Fig. 4. Distribution of areas of plasticity and physical non-linearity (gray fill)

at $T = 293$ K (a), $T = 373$ K (b) and $T = 473$ K (c)

Заклучение

Учет физической нелинейности материалов слоев и воздействия температуры позволяет существенно уточнить напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины при деформировании в своей плоскости. Численные результаты подтвердили сходимость метода упругих решений, а также значительное влияние физической нелинейности материалов слоев и температуры на перемещения в пластине. Приведенные решения и численные результаты могут найти применение для расчетов слоистых элементов конструкций.

Библиографические ссылки

1. Журавков МА, Старовойтов ЭИ. *Математические модели механики твердых тел*. Минск: БГУ; 2021. 535 с.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific Publishing; 2015. XV, 360 p. DOI: 10.1142/9048.
3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.
4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
5. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads. *Strength of Materials*. 2002;34(5):474–481. DOI: 10.1023/A:1021050611206.
6. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*. 2003;39(12):1458–1463. DOI: 10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a.
7. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*. 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.
8. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
9. Mikhasev GI, Altenbach H. *Thin-walled laminated structures: buckling, vibrations and their suppression*. Cham: Springer; 2019. Chapter 4, Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells; p. 157–198 (Öchsner A, da Silva LFM, Altenbach H, editors. *Advanced structured materials*; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.
10. Bakulin VN, Volkov EN, Simonov AI. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Russian Aeronautics*. 2017;60(4):508–513. DOI: 10.3103/S1068799817040055.
11. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AY. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.
12. Kaplunov J, Prikazchikova L, Alkinidri M. Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021;33(4):1247–1262. DOI: 10.1007/s00161-021-00969-6.
13. Kaplunov J, Prikazchikov DA, Prikazchikova LA. Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2017;113–114:169–179. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.01.042.
14. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
15. Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA, Christoforova AV. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012081. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012081.
16. Fedotenkov GV, Tarlakovsky DV, Vahterova YA. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(4):439–447. DOI: 10.1134/S1995080219040061.
17. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
18. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
19. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.
20. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.
21. Paimushin VN. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(1):1–16. DOI: 10.1007/s11029-017-9636-1.
22. Ivañez I, Moure MM, Garcia-Castillo SK, Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*. 2015;133:1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035.
23. Grover N, Singh BN, Maiti DK. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*. 2016;52:41–51. DOI: 10.1016/j.ast.2016.02.017.
24. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
25. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.
26. Starovoitov EI, Zhuravkov MA, Pronina PF. Bending of an elastic three-layer plate with a hole connected to the soil foundation. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences*. 2021;1:164–171. DOI: 10.32014/2021.2518-170X.23.

27. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials*. 2018; 54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.
28. Kudin A, Al-Omari MAV, Al-Athamneh BGM, Al-Athamneh HKM. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2015;3(8):1487–1493. DOI: 10.18535/ijmeit/v2i8.02.
29. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014; 225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.
30. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*. 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.
31. Wang Zhihua, Lu Guoxing, Zhu Feng, Zhao Longmao. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.
32. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.
33. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*. 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
34. Нестерович АВ. Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости. *Проблемы физики, математики и техники*. 2020;1:85–90.
35. Старовойтов ЭИ, Нестерович АВ. Неосесимметричное нагружение упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;2:57–69. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
36. Ильюшин АА. Пластичность. Часть 1, Упругопластические деформации. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1948. 376 с.

References

1. Zhuravkov MA, Starovoitov EI. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdykh tel* [Mathematical models of solid mechanics]. Minsk: Belarusian State University; 2021. 535 p. Russian.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific Publishing; 2015. XV, 360 p. DOI: 10.1142/9048.
3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.
4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
5. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads. *Strength of Materials*. 2002;34(5):474–481. DOI: 10.1023/A:1021050611206.
6. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*. 2003;39(12):1458–1463. DOI: 10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a.
7. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*. 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.
8. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
9. Mikhasev GI, Altenbach H. *Thin-walled laminated structures: buckling, vibrations and their suppression*. Cham: Springer; 2019. Chapter 4, Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells; p. 157–198 (Öchsner A, da Silva LFM, Altenbach H, editors. Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.
10. Bakulin VN, Volkov EN, Simonov AI. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Russian Aeronautics*. 2017;60(4):508–513. DOI: 10.3103/S1068799817040055.
11. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AY. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.
12. Kaplunov J, Prikazchikova L, Alkinidri M. Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021;33(4):1247–1262. DOI: 10.1007/s00161-021-00969-6.
13. Kaplunov J, Prikazchikov DA, Prikazchikova LA. Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2017;113–114:169–179. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.01.042.
14. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
15. Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA, Christoforova AV. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012081. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012081.
16. Fedotenkov GV, Tarlakovsky DV, Vahterova YA. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(4):439–447. DOI: 10.1134/S1995080219040061.
17. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
18. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
19. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.
20. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*. 2017; 53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.

21. Paimushin VN. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(1):1–16. DOI: 10.1007/s11029-017-9636-1.
22. Ivañez I, Moure MM, Garcia-Castillo SK, Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*. 2015;133:1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035.
23. Grover N, Singh BN, Maiti DK. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*. 2016;52:41–51. DOI: 10.1016/j.ast.2016.02.017.
24. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
25. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.
26. Starovoitov EI, Zhuravkov MA, Pronina PF. Bending of an elastic three-layer plate with a hole connected to the soil foundation. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences*. 2021;1:164–171. DOI: 10.32014/2021.2518-170X.23.
27. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials*. 2018;54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.
28. Kudin A, Al-Omari MAV, Al-Athamneh BGM, Al-Athamneh HKM. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2015;3(8):1487–1493. DOI: 10.18535/ijmeit/v2i8.02.
29. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014;225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.
30. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*. 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.
31. Wang Zhihua, Lu Guoxing, Zhu Feng, Zhao Longmao. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.
32. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.
33. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*. 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
34. Nestsiarovich AV. Deformation of a three-layer circular plate under cosine loading in its plane. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2020;1:85–90. Russian.
35. Starovoitov EI, Nesterovich AV. The non-axisymmetric loading of an elastoplastic three-layer plate in its plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;2:57–69. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
36. Il'yushin AA. *Plastichnost'. Chast' I, Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plastic. Chapter 1, Elastoplastic deformation]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1948. 376 p. Russian.

Получена 09.09.2022 / исправлена 12.10.2023 / принята 13.10.2023.
Received 09.09.2022 / revised 12.10.2023 / accepted 13.10.2023.

УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. ВОЛКОВ¹⁾, Е. И. КАЧАЛОВСКАЯ²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина,
бул. Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Беларусь

Построены и исследованы два варианта итерационных алгоритмов реализации спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами. Рассмотренные алгоритмы основаны на использовании стабилизированной версии итерационного метода бисопряженных градиентов с комбинированным переобусловливателем в виде диагональной матрицы коэффициентов уравнения и дискретного аналога оператора Лапласа, представленного конечно-разностной или спектральной аппроксимацией. Для обработки дискретного аналога оператора Лапласа в первом случае реализован итерационный метод переменных направлений с оптимальным набором итерационных параметров, а во втором случае – алгоритм Бартельса – Стюарта. На основе численных экспериментов показана высокая эффективность предлагаемых алгоритмов. В обоих случаях количество итераций практически не зависит от размерности сетки и умеренно возрастает при увеличении степени неоднородности коэффициентов задачи. Вычислительная сложность алгоритмов характеризуется величиной $O(N\sqrt{N})$, где N – количество узлов сетки. Несмотря на существенную субоптимальность вычислительной сложности, при размерности сетки $N = n \times n$, $n \leq 300$, временные затраты на реализацию алгоритмов демонстрируют значения не хуже, чем у алгоритмов оптимальной вычислительной сложности $O(N)$.

Ключевые слова: спектральные методы Чебышева; метод бисопряженных градиентов; метод переменных направлений; алгоритм Бартельса – Стюарта; эллиптические уравнения.

Образец цитирования:

Волков ВМ, Качаловская ЕИ. Итерационная реализация спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;3:53–62.
EDN: CZNGYI

For citation:

Volkov VM, Kachalouskaya EI. An iterative Chebyshev spectral solver for two-dimensional elliptic equations with variable coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:53–62. Russian.
EDN: CZNGYI

Авторы:

Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Екатерина Ивановна Качаловская – старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики физико-математического факультета.

Authors:

Vasily M. Volkov, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
v.volkov@tut.by

Ekaterina I. Kachalouskaya, senior lecturer at the department of applied mathematics and informatics, faculty of physics and mathematics.
katerina.kulgun@gmail.com

AN ITERATIVE CHEBYSHEV SPECTRAL SOLVER FOR TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

V. M. VOLKOV^a, E. I. KACHALOUSKAYA^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bBrest State A. S. Pushkin University, 21 Kasmanawtaw Boulevard, Brest 224016, Belarus

Corresponding author: E. I. Kachalouskaya (katerina.kulgun@gmail.com)

In this paper, we constructed and investigated two variants of iterative algorithms implemented the Chebyshev spectral method solving two-dimensional elliptic equations with variable coefficients. The considered algorithms are based on the use of the stabilised version of the bi-conjugate gradient iterative method with a combined preconditioner in the form of a diagonal matrix of equation coefficients and the discrete analogue of the Laplace operator represented by the finite difference or spectral approximations. To process the discrete analogue of the Laplace operator, we implemented the alternative direction implicit method with an optimal set of iterative parameters and the Bartels – Stewart algorithm in the first and the second cases respectively. Based on numerical experiments, we showed the high efficiency of the proposed algorithms. In both cases, the number of iterations is practically independent of the mesh size and increases moderately with an increasing degree of heterogeneity of the problem coefficients. The computational complexity of the algorithms is estimated as $O(N\sqrt{N})$, where N is the number of grid points. Despite of the significant suboptimality of the computational complexity, in the case of a moderate grid size $N = n \times n$, $n \leq 300$, the computation time demonstrates values no worse than those of algorithms of optimal computational complexity $O(N)$.

Keywords: Chebyshev spectral methods; bi-conjugate gradient method; alternative direction implicit method; Bartels – Stewart algorithm; elliptic equations.

Введение

Разработка эффективных численных алгоритмов решения многомерных эллиптических задач с использованием спектральных методов на основе полиномов Чебышева [1–3] имеет ряд особенностей, не свойственных методам конечных элементов и конечных разностей. В первую очередь это касается разработки алгоритмов оптимальной вычислительной сложности, количество арифметических операций которых возрастает пропорционально количеству узлов сетки [4]. Кроме того, сама формулировка дискретной задачи для спектральных методов имеет свою специфику, связанную с тем, что операторы спектрального дифференцирования выражаются матрицами полной структуры. Отмеченные особенности порождают существенные трудности при использовании спектральных методов для решения многомерных задач.

К настоящему времени задача построения эффективных численных алгоритмов для решения многомерных эллиптических уравнений на основе спектрального метода Чебышева всесторонне изучена на примере двумерного уравнения Пуассона. Среди результатов в этой области можно выделить развитие двух перспективных подходов к реализации спектральных моделей, представленных в виде матричной системы алгебраических уравнений Ляпунова – Сильвестра, таких как использование итерационного метода переменных направлений [5] и использование итерационных методов в пространствах Крылова с переобусловливателем [6]. В качестве переобусловливателя традиционно выступает конечно-разностный (конечно-элементный) аналог оператора Лапласа в виде пятидиагональной разреженной матрицы [3; 7], для обращения которой высокую эффективность показал метод переменных направлений [6].

Второй из отмеченных подходов представляется более эффективным. Это связано с тем, что метод переменных направлений допускает близкую к оптимальной вычислительную сложность лишь при существенных ограничениях на свойства одномерных компонент оператора спектрального дифференцирования. В частности, требование перестановочности произведения компонент дискретного оператора лишает перспективы непосредственного использования данного подхода в общем случае задач с переменными коэффициентами. В то же время, как будет показано ниже, метод переменных направлений остается эффективным для обработки переобусловливателя.

В настоящей статье представлены результаты численного исследования эффективности спектрального метода Чебышева при решении эллиптических задач с переменными коэффициентами. Для реализации спектральной модели использован метод бисопряженных градиентов [8] с комбинированным переобусловливателем в виде композиции диагональной матрицы коэффициентов уравнения, применяемой до начала вычислений к дискретной модели, и матрицы дискретного аналога оператора Лапласа. Обработка второй составляющей переобусловливателя на каждой итерации метода бисопряженных градиентов реализована посредством итерационного метода переменных направлений либо алгоритма Бартельса – Стюарта [9].

На примере модельной задачи показано, что рассмотренные алгоритмы демонстрируют близкие к оптимальным характеристики эффективности, которые объективно подтверждаются слабой зависимостью количества итераций от размерности сетки и пределов изменения коэффициентов задачи.

Постановка дифференциальной задачи и спектральный метод Чебышева

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения в прямоугольной области с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = -q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = (-1; 1) \times (-1; 1), \quad (1)$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \quad (2)$$

Без существенного нарушения общности ограничимся рассмотрением случая, когда коэффициенты уравнения (1) имеют вид

$$\sigma(x, y) = \exp(-0,5 \ln(\alpha)(x^2 + y^2)), \quad (3)$$

где постоянная $\alpha = \frac{\max_{(x, y) \in \Omega} (\sigma(x, y))}{\min_{(x, y) \in \Omega} (\sigma(x, y))}$ определяет диапазон изменения коэффициента задачи $\alpha^{-1} \leq \sigma(x, y) \leq 1$.

Функция $q(x, y)$ задавалась таким образом, чтобы точное решение задачи (1)–(3) выражалось аналитически:

$$u(x, y) = \sin^2(p_x \pi x) \sin^2(p_y \pi y). \quad (4)$$

Очевидно, что функция (4) удовлетворяет краевым условиям (2) для произвольных целых значений p_x, p_y .

Для построения спектральной модели во внутренних узлах сетки

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), x_k = y_m = \cos \frac{k\pi}{n-1}, k = \overline{0, n-1}, m = \overline{0, n-1} \right\} \quad (5)$$

аппроксимируем дифференциальные операторы уравнения (1) с помощью соответствующих операторов спектрального дифференцирования [1; 2], в результате чего приходим к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$Au = f, \quad A \in R^{N \times N}, \quad f, u \in R^N, \quad N = (n-2)^2. \quad (6)$$

Структура матрицы системы уравнений (6) аналогична структуре матрицы

$$\tilde{A} = (E \otimes \bar{D}) \bar{S} (E \otimes \bar{D}) + (\bar{D} \otimes E) \bar{S} (\bar{D} \otimes E),$$

где $E \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – единичная матрица; $\bar{D} \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – матрица спектрального дифференцирования Чебышева [2], в которой удалены первые и последние строки и столбцы; $\bar{S} \in R^{N \times N}$ – диагональная матрица коэффициентов во внутренних узлах сетки (5). Отметим, что $A \neq \tilde{A}$, поскольку $\tilde{A}$ не учитывает корректно краевые условия. Кроме того, структура матрицы $\tilde{A}$, а следовательно, и матрицы A (например, при наличии в уравнении смешанных производных) не является разреженной. В силу этого непосредственное умножение такой матрицы на вектор имеет вычислительную сложность $O(N^2)$ (а ее обращение – $O(N^3)$), что на порядок и более превосходит оптимальные затраты.

Для итерационных методов неотъемлемой составляющей алгоритма является вычисление произведения матрицы системы уравнений (6) на вектор приближенного решения. В рассмотренном случае данное произведение может быть вычислено следующим образом:

$$Au = \mathfrak{N} \left\{ D \cdot (S * (D \cdot U)) + (S * (U \cdot D^T)) \cdot D^T \right\}. \quad (7)$$

Здесь $U \in R^{n \times n}$ – двумерный массив (квадратная матрица) значений приближенного решения в узлах сетки (5), включая граничные; $D \in R^{n \times n}$ – матрица спектрального дифференцирования Чебышева; $S \in R^{n \times n}$ – матрица значений коэффициентов в узлах сетки; символ $*$ обозначает поэлементное умножение массивов (матриц), а матричная операция $\mathfrak{N}\{X\}$ – удаление из двумерного массива $X \in R^{n \times n}$ граничных точек с последующим преобразованием его в вектор-столбец.

В случае достаточной гладкости коэффициентов существует альтернативный способ вычисления произведения переобусловленной матрицы дискретной задачи на вектор приближенного решения, основанный на недивергентном представлении дифференциального оператора:

$$\bar{S}^{-1}Au = \bar{D}_2 \cdot \bar{U} + \bar{U} \cdot \bar{D}_2^T + \bar{S}_x * (\bar{D} \cdot \bar{U}) + \bar{S}_y * (\bar{U} \cdot \bar{D}^T). \quad (7')$$

Здесь $\bar{D}_2, \bar{D}, \bar{U}, \bar{S}_x, \bar{S}_y \in R^{(n-2) \times (n-2)}$; $\bar{D}_2$ и $\bar{D}$ – матрицы спектрального дифференцирования второго и первого порядков; $\bar{S}_x$ и $\bar{S}_y$ – матрицы частных производных коэффициентов уравнения по x и y соответственно, нормированные на значение самого коэффициента $\sigma = \sigma(x, y)$.

Наиболее трудоемкой операцией в вычислениях по формулам (7) и (7') является умножение полных матриц размера $n \times n$ в формуле (7) и размера $(n-2) \times (n-2)$ в формуле (7'), что требует порядка

$$O(n^3) = O\left(N^{\frac{3}{2}}\right) \text{ арифметических операций.}$$

Отметим, что поскольку речь идет об умножении матрицы спектрального дифференцирования Чебышева, имеющей циклическую структуру, то существует способ вычисления данного произведения с использованием алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье [2], позволяющего снизить вычислительные затраты до уровня $O(N \ln(N))$. Однако следует учитывать, что асимптотические оценки вычислительной сложности алгоритма не всегда объективно отражают его реальную эффективность при конечных значениях размерности сетки, обеспечивающих приемлемую точность результатов. Численные эксперименты показывают, что эффективность непосредственного умножения матрицы на вектор согласно формулам (7) и (7') способна конкурировать с алгоритмом на основе быстрого дискретного преобразования Фурье при размерности сетки вплоть до $n = 10^3$ и более, что представляется достаточным для широкого круга приложений. Оценка вычислительных затрат при умножении системной матрицы на вектор приближенного решения по формулам (7) и (7') позволяет отметить незначительное преимущество (в пределах 5 % согласно результатам численных экспериментов) вычислений по формуле (7').

Прежде чем перейти к непосредственному исследованию эффективности итерационных алгоритмов реализации спектральной модели, приведем результаты численных экспериментов, показывающих возможности достижения необходимой точности на примере модельной задачи (1)–(4). На рис. 1 представлены вид решения задачи и графики зависимости относительной погрешности решения от количества узлов сетки при различной степени неоднородности коэффициентов.

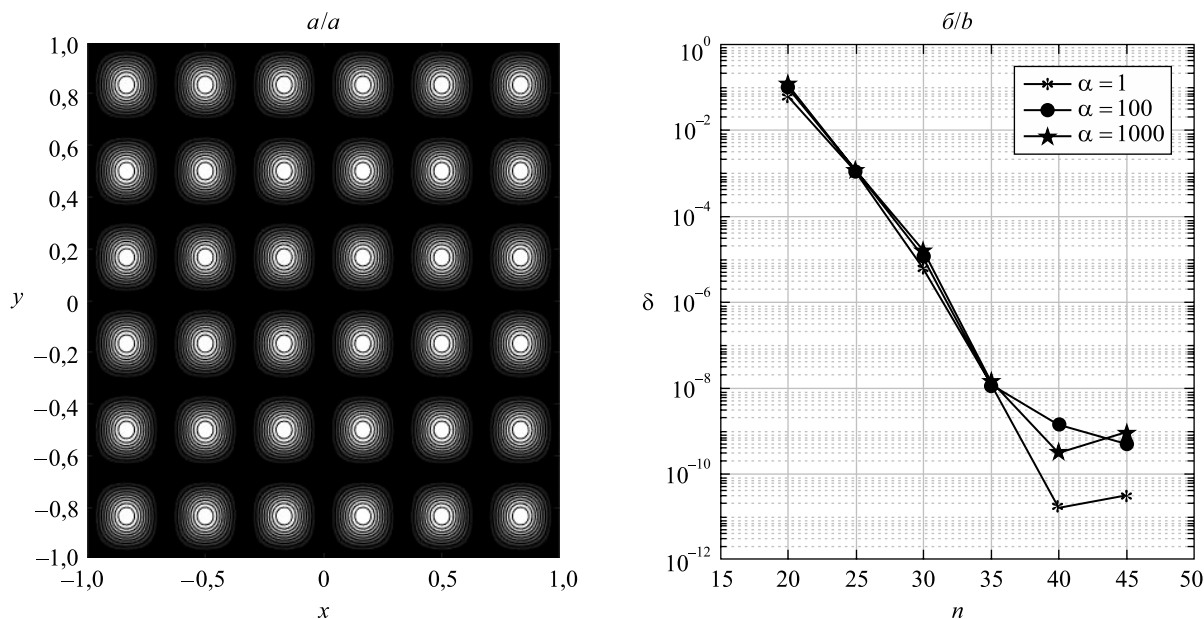


Рис. 1. Решение задачи (1)–(4) при $p_x = p_y = 3$ (a) и зависимость относительной погрешности (δ) спектрального метода от количества узлов (n) сетки при различных диапазонах изменения коэффициента $\sigma(x, y)$ задачи (1)–(4) (б)

Fig. 1. The solution of the problem (1)–(4) with $p_x = p_y = 3$ (a) and dependence of relative error (δ) of the spectral method on the number of grid nodes (n) for different ranges of variation of the coefficient $\sigma(x, y)$ of the problem (1)–(4) (b)

Решение задачи получено с помощью спектрального метода Чебышева, реализуемого с использованием итерационного метода бисопряженных градиентов. Итерации прекращались при достижении значения относительной нормы невязки $\varepsilon \leq 10^{-10}$. Как видно из рис. 1, скорость сходимости погрешности метода носит экспоненциальный характер. Предельная точность решения, ограниченная величиной ε , достигается на сетке с количеством узлов $n \geq 40$, т. е. наличие 6–7 точек на один период решения (4) оказывается достаточным для достижения предельной точности, при этом уменьшение относительной погрешности с $\delta \cong 10^{-1}$ до $\delta \cong 10^{-10}$ происходит при увеличении количества узлов сетки всего лишь в 2 раза (с $n = 20$ до $n = 40$). Последнее обстоятельство указывает на ограниченность возможностей использования многосеточных итерационных техник с той же эффективностью, что и при реализации дискретных моделей на основе методов конечных элементов и конечных разностей, имеющих полиномиальную скорость сходимости.

Итерационный метод реализации спектральной модели

Для решения системы алгебраических уравнений (6), характерной для спектрального метода решения задачи (1), (2), как уже отмечалось выше, использована стабилизированная версия метода бисопряженных градиентов [7] с комбинированным переобусловливателем в виде диагональной матрицы коэффициентов $\bar{S}$, применяемой непосредственно к системе (6) до начала основной итерационной процедуры:

$$\bar{S}^{-1}Au = \bar{S}^{-1}f$$

– и дискретного аналога оператора Лапласа

$$\Lambda = (E \otimes P) + (P \otimes E).$$

В качестве матрицы $P = P^T \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ может быть использована симметричная трехдиагональная матрица второй разностной производной ($P = P_{FD}$) в классе сеточных функций, удовлетворяющих нулевым краевым условиям на сетке (5), а также матрица спектрального дифференцирования Чебышева второго порядка ($P = P_{SP}$), в которой удалены первые и последние строки и столбцы согласно однородным краевым условиям (2).

За основу был взят итерационный алгоритм, реализованный в функции `bicgstab` математического пакета *Matlab*, в которой потребовалось модифицировать процедуру умножения системной матрицы на вектор приближенного решения по формуле (7') и процедуру обработки переобусловливателя. В частности, для обработки переобусловливателя (решения системы алгебраических уравнений с матрицей конечно-разностного оператора Лапласа на сетке (5)) удобно представить соответствующую систему в виде матричной системы Ляпунова

$$\Lambda u = f \Leftrightarrow PU + UP^T = F, \quad (8)$$

где $U, F \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – двумерные массивы значений приближенного решения и правой части системы, полученные путем преобразования размерности $R^N \rightarrow R^{(n-2) \times (n-2)}$. Для решения системы (8) в случае, когда $P = P_{FD}$, использован итерационный метод переменных направлений с оптимальным набором итерационных параметров [8], а в случае, когда $P = P_{SP}$, – прямой алгоритм Бартельса – Стюарта [9].

Принимая во внимание, что $P = P^T$, итерационный метод переменных направлений для системы (8) может быть представлен в виде [8]

$$\begin{aligned} \left(\omega_{m+1}^{(1)} I - P \right) U_{m+\frac{1}{2}} &= U_m \left(\omega_{m+1}^{(1)} I + P^T \right) + F, \\ U_{m+1} \left(\omega_{m+1}^{(2)} I - P^T \right) &= \left(\omega_{m+1}^{(2)} I + P \right) U_{m+\frac{1}{2}} + F, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, M, U_0 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В рассмотренном случае оптимальный набор итерационных параметров вычисляется по формулам [8]

$$\omega_m^{(1)} = \omega_m^{(2)} = \Delta \chi_m, \chi_m = \operatorname{dn} \left(\frac{2m-1}{2M} K(\eta'), \eta' \right), \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \eta' = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad (10)$$

где $\operatorname{dn}(u, \eta)$ – эллиптическая функция Якоби аргумента u и модуля η ; $K(\eta)$ – полный эллиптический интеграл первого рода; δ и Δ – наименьшее и наибольшее по модулю собственные значения оператора P соответственно. Количество итераций метода переменных направлений (9), (10) для достижения заданной точности ε оценивается выражением [8]

$$M \geq M_0 = \pi^{-2} \ln(4\eta^{-1}) \ln(4\varepsilon^{-1}). \quad (11)$$

Согласно формуле (11) количество итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-10}$ при количестве узлов сетки $50 \leq n \leq 300$ изменяется в диапазоне $31 \leq M_0 \leq 49$. Тем не менее, как показано в работе [10] на примере численного решения обобщенных матричных систем уравнений Ляпунова, количество внутренних итераций метода переменных направлений может быть многократно уменьшено без ущерба для сходимости внешнего итерационного процесса.

На рис. 2 представлены результаты численного эксперимента, показывающие зависимость количества внешних итераций и удельных вычислительных затрат метода бисопряженных градиентов от количества внутренних итераций метода переменных направлений с переобусловливателем $P = P_{FD}$ при $\alpha = 10$. Как видно из рис. 2, минимизация удельных вычислительных затрат по времени наблюдается в широком диапазоне значений n ($100 \leq n \leq 300$) при количестве внутренних итераций $M = 5$, что многократно ниже оценки (11). Фиксированное количество внутренних итераций метода переменных направлений обеспечивает его оптимальную вычислительную сложность порядка $O(N)$.

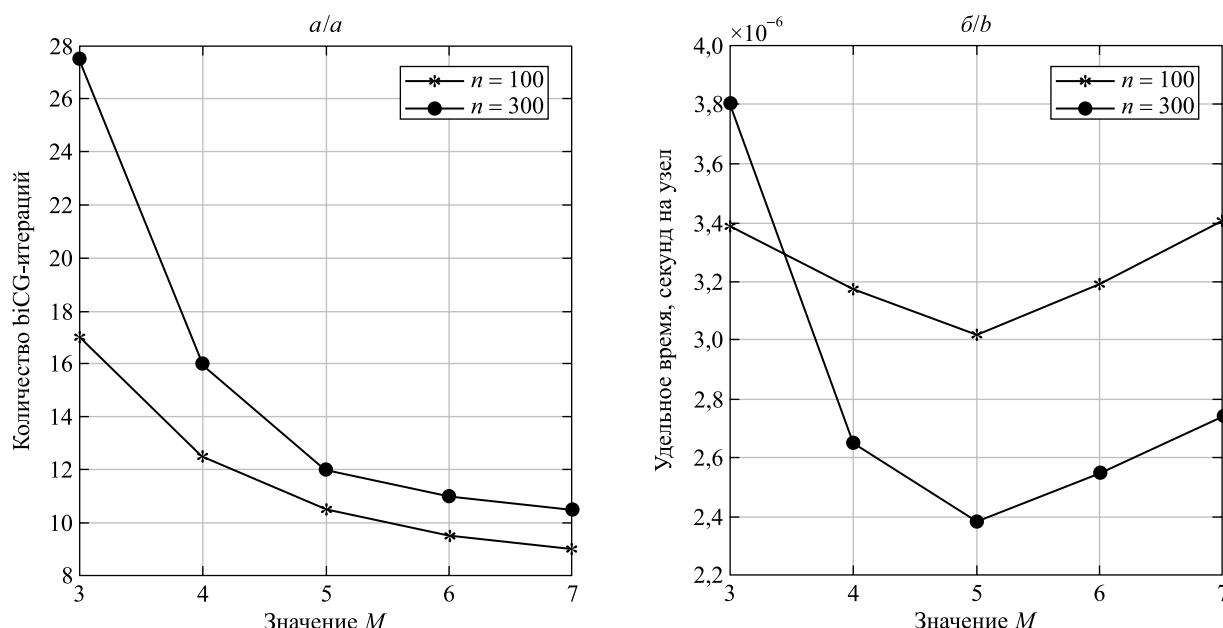


Рис. 2. Зависимость количества внешних итераций метода бисопряженных градиентов (biCG-итераций) (а) и удельных вычислительных затрат алгоритма (б) от количества внутренних итераций (M) метода переменных направлений

Fig. 2. Dependence of the number of external iterations of the bi-conjugate gradient (biCG) method (a) and the specific computation time of the algorithm (b) on the number of internal iterations (M) of the alternative direction implicit (ADI) method

Далее переходим к исследованию эффективности итерационного алгоритма. На рис. 3 представлены результаты, характеризующие зависимость количества biCG-итераций и удельных вычислительных затрат алгоритма от размерности сетки и степени неоднородности коэффициентов при численном решении задачи (1)–(4). Использовано пять внутренних итераций метода переменных направлений с переобусловливателем $P = P_{FD}$, что согласно представленным выше результатам соответствует условию минимизации суммарных вычислительных затрат.

Как видно из рис. 3, а, количество итераций очень медленно растет с увеличением размерности сетки. Такое поведение указывает на близость эффективности использованного переобусловливателя к спектрально оптимальным характеристикам [4]. Кроме того, скорость сходимости итераций слабо реагирует на повышение степени неоднородности коэффициентов задачи.

Зависимость удельных вычислительных затрат от размерности сетки требует более подробных комментариев. Прежде всего отметим, что если удельные вычислительные затраты не зависят от n , то это свидетельствует об оптимальной вычислительной сложности алгоритма (общие вычислительные затраты растут пропорционально числу неизвестных задачи ($N = n^2$)). Асимптотические оценки количества арифметических операций использованного алгоритма, как отмечалось выше, характеризуются величиной

$O(n^3) = O\left(N^{\frac{3}{2}}\right)$, что связано с необходимостью умножения на каждой итерации системной матрицы на

вектор приближенного решения по формулам (7) и (7'). Согласно этим оценкам при отсутствии существенного роста количества итераций с увеличением n удельные вычислительные затраты при достаточно больших значениях n должны приобретать линейную зависимость от n , т. е. субоптимальность вычислительной сложности алгоритма характеризуется величиной $O(N\sqrt{N})$. Однако при $n = 300$, по данным профайлинга (рис. 4, строки № 220 и 304), более 70 % общих вычислительных затрат итерационного метода приходится на обработку переобусловливателя и лишь около 22 % – на наиболее затратную по вычислительной сложности операцию, а именно умножение системной матрицы дискретной модели на вектор приближенного решения (см. рис. 4, строки № 237 и 321).

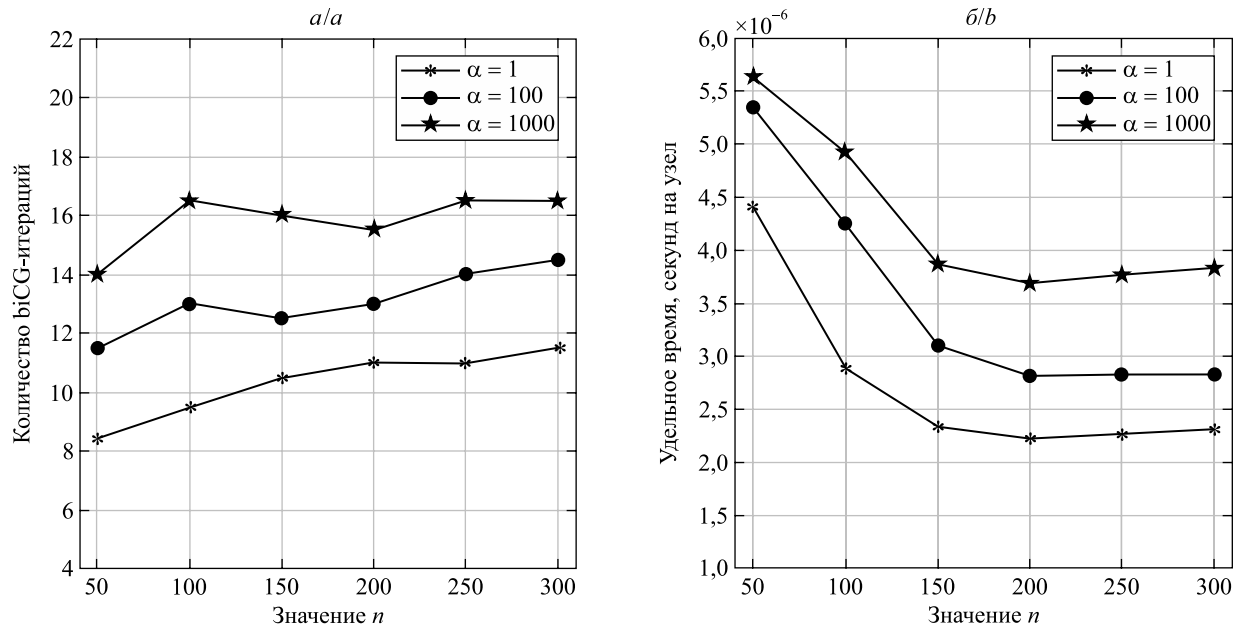


Рис. 3. Зависимость количества biCG-итераций (а) и удельных вычислительных затрат алгоритма (б) от размерности сетки (n) при различных диапазонах изменения коэффициента $\sigma(x, y)$

Fig. 3. Dependence of the number of external iterations of the biCG method (a) and the specific computation time of the algorithm (b) on the grid size (n) for different ranges of variation of the coefficient $\sigma(x, y)$

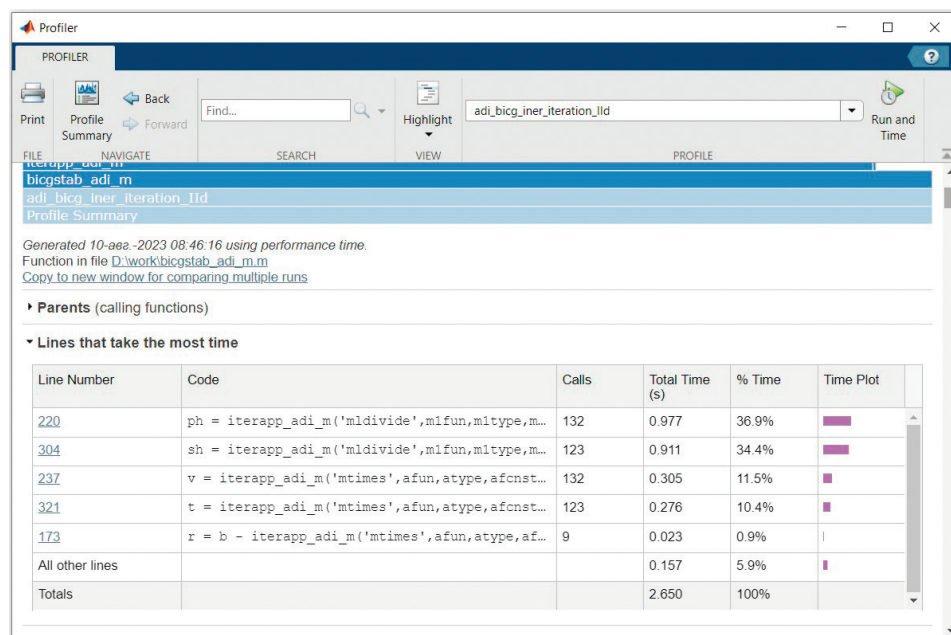


Рис. 4. Данные профайлинга для наиболее затратных строк модифицированной функции `bicgstab`

Fig. 4. Profiling data for the most expensive lines of the modified `bicgstab` function

Таким образом, в рассмотренном диапазоне значений n ($50 \leq n \leq 300$) в алгоритме существенно преобладает доля вычислений с оптимальной вычислительной сложностью, что объясняет отсутствие заметного роста удельных затрат в пределах $150 \leq n \leq 300$. Отрицательный тренд в зависимости удельных вычислительных затрат при размерности сетки $50 \leq n \leq 150$, по-видимому, можно объяснить более эффективным выполнением матричных операций векторизованного алгоритма при увеличении размерности данных, что подтверждается соответствующим повышением степени загрузки процессора с возрастанием n .

Отметим, что использование переобусловливателя $P = P_{SP}$ вместо переобусловливателя $P = P_{FD}$ позволяет снизить количество biCG-итераций, однако суммарные вычислительные затраты при этом возрастают из-за увеличения вычислительной сложности алгоритма метода переменных направлений с $O(N)$ до $O(N\sqrt{N})$. В связи с этим отметим еще одну возможность итерационной реализации спектрального метода Чебышева для рассмотренной задачи (1), (2), а именно использование для обработки переобусловливателя $P = P_{SP}$ прямого алгоритма Бартельса – Стюарта [9], имеющего такую же вычислительную сложность $O(N\sqrt{N})$ и реализованного в функции `lyap` математического пакета *Matlab*.

На рис. 5 представлены результаты, характеризующие эффективность данной модификации алгоритма.

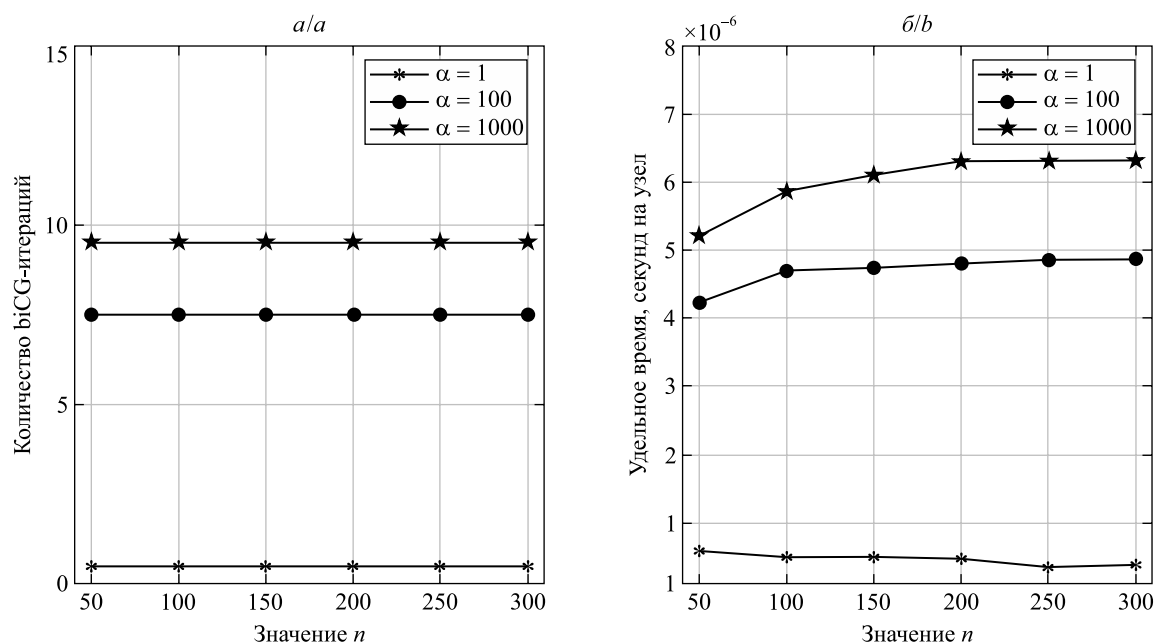


Рис. 5. Зависимость количества biCG-итераций (а) и удельных вычислительных затрат алгоритма (б) от размерности сетки (n) при различных диапазонах изменения коэффициента $\sigma(x, y)$ в случае использования переобусловливателя $P = P_{SP}$ вместо переобусловливателя $P = P_{FD}$ и алгоритма Бартельса – Стюарта вместо метода переменных направлений

Fig. 5. Dependence of the number of external iterations of the biCG method (a) and the specific computation time of the algorithm (b) on the grid size (n) for different ranges of variation of the coefficient $\sigma(x, y)$ in the case of using $P = P_{SP}$ preconditioner instead of $P = P_{FD}$ preconditioner and the Bartels – Stewart algorithm instead of the ADI method

Сравнение результатов, представленных на рис. 3 и 5, позволяет заметить, что использование алгоритма Бартельса – Стюарта вместо метода переменных направлений (исключая случай однородных коэффициентов $\alpha = 1$) в целом увеличивает временные затраты, однако в пределах $50 \leq n \leq 300$ его характеристики близки к таковым алгоритмов оптимальной вычислительной сложности, несмотря на то что асимптотические оценки в обоих случаях показывают субоптимальную вычислительную сложность $O(N\sqrt{N})$.

Заключение

Проанализированы два варианта итерационной реализации спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических задач с неоднородными коэффициентами. Рассмотренные алгоритмы основаны на использовании стабилизированного метода бисопряженных градиентов с комбинированным пере-

обусловливателем в виде диагональной матрицы коэффициентов уравнения и дискретного аналога оператора Лапласа спектрального или конечно-разностного типа. Для обработки второго переобусловливателя уравнение приводится к виду уравнения Ляпунова – Сильвестра с последующим использованием метода переменных направлений, который показал лучшую эффективность для конечно-разностного переобусловливателя, или алгоритма Бартельса – Стюарта, более предпочтительного для спектрального переобусловливателя. В обоих случаях вычислительная сложность алгоритма в целом имеет асимптотическую оценку $O(N\sqrt{N})$. Эффективность алгоритмов представлена в терминах удельной вычислительной сложности, которая определяется отношением времени счета к количеству узлов сетки N . Данная характеристика позволяет наглядно сопоставить эффективность исследуемого алгоритма с эффективностью алгоритмов оптимальной вычислительной сложности, для которых удельные вычислительные затраты инвариантны относительно количества узлов сетки. Несмотря на отмеченную выше субоптимальность вычислительной сложности представленных алгоритмов, их фактические показатели эффективности во многом сопоставимы с таковыми алгоритмов оптимальной вычислительной сложности в диапазоне размера сетки $2500 \leq N \leq 90\,000$. Кроме того, предлагаемые алгоритмы по удельным временным затратам не уступают разностным аналогам [11], многократно превосходя их в точности при достаточной гладкости входных данных задачи. Чтобы обеспечить возможность сравнения полученных результатов с результатами исследований других авторов, отметим, что все расчеты выполнены с использованием программного обеспечения *Matlab R2020a* на платформе мобильной вычислительной системы с операционной системой Windows 10 Pro, процессором Intel® Core™ i5-10210U (частота 1,60–2,11 ГГц), оперативной памятью DDR3 объемом 8 Гб, SSD-накопителем объемом 250 Гб. Время, необходимое на умножение матриц размера 5000×5000 в использованной системе, составляет приблизительно 1,6 с.

Библиографические ссылки

1. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2nd edition. New York: Dover Publications; 2000. XVI, 594 p.
2. Trefethen LN. *Spectral methods in MATLAB*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2000. XVII, 165 p. (Dongarra JJ, Demmel JW, Gannon D, Grosse E, Moré JJ, editors. Software, environments, and tools).
3. Orszag SA. Spectral methods for problems in complex geometries. In: Parter SV, editor. *Numerical methods for partial differential equations. Proceedings of an advanced seminar; 1978 October 23–25; Madison, USA*. New York: Academic Press; 1979. p. 273–305 (Publication of the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin – Madison; No. 42). DOI: 10.1016/B978-0-12-546050-7.50014-9.
4. D'yakonov EG. *Optimization in solving elliptic problems*. McCormick S, editor. Boca Raton: CRC Press; 2018. XXVIII, 561 p. (CRC revivals).
5. Fortunato D, Townsend A. Fast Poisson solvers for spectral methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2020;40(3):1994–2018. DOI: 10.1093/imanum/drz034.
6. Jbilou K. ADI preconditioned Krylov methods for large Lyapunov matrix equations. *Linear Algebra and its Applications*. 2010; 432(10):2473–2485. DOI: 10.1016/j.laa.2009.12.025.
7. van der Vorst HA. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1992;13(2):631–644. DOI: 10.1137/0913035.
8. Самарский АА, Николаев ЕС. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 592 с.
9. Bartels RH, Stewart GW. Algorithm 432 [C2]: solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4]. *Communications of the ACM*. 1972;15(9):820–826. DOI: 10.1145/361573.361582.
10. Damm T. Direct methods and ADI-preconditioned Krylov subspace methods for generalized Lyapunov equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2008;15(9):853–871. DOI: 10.1002/nla.603.
11. Волков ВМ, Прокопина ЕВ. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;1:69–76. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1-69-76.

References

1. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2nd edition. New York: Dover Publications; 2000. XVI, 594 p.
2. Trefethen LN. *Spectral methods in MATLAB*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2000. XVII, 165 p. (Dongarra JJ, Demmel JW, Gannon D, Grosse E, Moré JJ, editors. Software, environments, and tools).
3. Orszag SA. Spectral methods for problems in complex geometries. In: Parter SV, editor. *Numerical methods for partial differential equations. Proceedings of an advanced seminar; 1978 October 23–25; Madison, USA*. New York: Academic Press; 1979. p. 273–305 (Publication of the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin – Madison; No. 42). DOI: 10.1016/B978-0-12-546050-7.50014-9.
4. D'yakonov EG. *Optimization in solving elliptic problems*. McCormick S, editor. Boca Raton: CRC Press; 2018. XXVIII, 561 p. (CRC revivals).
5. Fortunato D, Townsend A. Fast Poisson solvers for spectral methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2020;40(3):1994–2018. DOI: 10.1093/imanum/drz034.

6. Jbilou K. ADI preconditioned Krylov methods for large Lyapunov matrix equations. *Linear Algebra and its Applications*. 2010; 432(10):2473–2485. DOI: 10.1016/j.laa.2009.12.025.
7. van der Vorst HA. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1992;13(2):631–644. DOI: 10.1137/0913035.
8. Samarskii AA, Nikolaev ES. *Metody resheniya setochnykh uravnenii* [Methods for solving grid equations]. Moscow: Nauka; 1978. 592 p. Russian.
9. Bartels RH, Stewart GW. Algorithm 432 [C2]: solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4]. *Communications of the ACM*. 1972;15(9):820–826. DOI: 10.1145/361573.361582.
10. Damm T. Direct methods and ADI-preconditioned Krylov subspace methods for generalized Lyapunov equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2008;15(9):853–871. DOI: 10.1002/nla.603.
11. Volkov VM, Prakonina AU. Iterative realization of finite difference schemes in the fictitious domain method for elliptic problems with mixed derivatives. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:69–76. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1-69-76.

Получена 29.08.2023 / исправлена 30.10.2023 / принята 02.11.2023.
Received 29.08.2023 / revised 30.10.2023 / accepted 02.11.2023.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.65

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ПОРОГОВОЙ k -ЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ В УЗЛЕ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ ПРИ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ

А. В. БУРДЕЛЁВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается задача восстановления пороговой функции в узле защиты информации по входу и выходу в случае, когда известны не все значения. Для решения этой задачи предлагается использовать геометрический алгоритм характеристики частично известной пороговой k -значной функции. Доказывается сходимость алгоритма на конечном шаге, а также показывается, что в результате работы алгоритма будет построена некоторая пороговая функция, совпадающая с данной функцией во всех известных точках.

Ключевые слова: алгоритм характеристики; доказательство сходимости; пороговая функция; коэффициенты роста; коэффициенты возрастания.

Образец цитирования:

Бурделёв АВ. Восстановление аналитического задания пороговой k -значной функции в узле защиты информации при неполных данных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;3:63–71. EDN: XPGVEV

For citation:

Burdeliyov AV. Restoration of the analytical task of the threshold k -valued function in the information protection node with incomplete data. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:63–71. Russian. EDN: XPGVEV

Автор:

Александр Владимирович Бурделёв – преподаватель кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Alexander V. Burdeliiov, lecturer at the department of mathematical modelling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
aburd2011@mail.ru
<https://orcid.org/0009-0009-1177-3635>

RESTORATION OF THE ANALYTICAL TASK OF THE THRESHOLD k -VALUED FUNCTION IN THE INFORMATION PROTECTION NODE WITH INCOMPLETE DATA

A. V. BURDELIOV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

This article considers the problem of restoring the threshold function in the information protection node from a input and output in the case when not all values are known. To solve this problem, it is proposed to use a geometric algorithm for characterising a partially known threshold k -valued function. The article proves the convergence of the algorithm at the final step; it is also shown that as a result of the algorithm, a certain threshold function will be constructed, which will coincide with this function at all known points.

Keywords: algorithm of learning of threshold functions; proof of convergence; threshold function; expansion coefficients; increase coefficients.

Введение

Рассмотрим задачу восстановления аналитического задания функции усложнения $f(x_1, \dots, x_n)$ в узле защиты информации по известным входу и выходу. В случае применения пороговой k -значной функции в роли функции усложнения задача нахождения ее аналитического задания может быть успешно решена по входу и выходу с помощью геометрического алгоритма характеристики пороговых k -значных функций, введенного в работах [1; 2].

Пороговые функции и их характеристика

Определение 1 [3]. Функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$, для которой существуют линейная форма $L(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, $x_i \in \mathbb{Z}_k$, с действительными коэффициентами и набор действительных порогов $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ такие, что для всех $i \in \overline{0, k-1}$ выполняется условие

$$f(x_1, \dots, x_n) = i \Leftrightarrow b_i \leq L(x_1, \dots, x_n) < b_{i+1},$$

называется пороговой k -значной функцией. Не ограничивая общности определения, можем положить, что здесь и далее $b_0 = -\infty$ и $b_k = +\infty$. Пороговую k -значную функцию будем писать в следующем сокращенном виде: $f = [a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_{k-1}]$.

Под алгоритмом характеристики пороговой k -значной функции понимается процедура нахождения какого-либо семейства параллельных гиперплоскостей, разделяющих множества различных значений данной функции, т. е. процедура нахождения коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейной формы $L(x_1, \dots, x_n)$ и множества порогов $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$. Отметим, что задача характеристики пороговой функции имеет не единственное решение (например, все коэффициенты линейной формы и пороги могут быть домножены на ненулевой коэффициент). Кроме того, каждой пороговой функции f можно поставить в соответствие класс $\mathcal{L}_f$ векторов коэффициентов линейной формы и порогов, реализующих данную пороговую функцию:

$$\mathcal{L}_f = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) \mid f = [a_1, a_2, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_{k-1}] \right\}.$$

В целом ряде разделов дискретной математики возникает задача распознавания принадлежности функции некоторому классу и восстановления (характеристики) неизвестной дискретной функции из заданного класса с помощью последовательных вопросов о ее значениях в точках. Нахождение параметров пороговой булевой функции является объективно более сложной математической задачей, чем определение принадлежности функции классу пороговых функций, и сводится к итеративной процедуре.

Рассмотрение задачи нахождения параметров пороговой функции в k -значной логике ставит первый важный вопрос о возможных вариантах трактовки близости или отличия двух k -значных функций, а в случае решения задачи нахождения аналитического представления k -значных функций – вопрос о вариантах трактовки их близости к функциям x_i . Может быть предложено несколько мер близости двух k -значных функций.

Определение 2 [1; 2; 4]. Для функции k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ коэффициентом роста по переменной x_i называется величина

$$\Delta_i = \sum_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^{n-1}} \left(f(x_1, \dots, x_{i-1}, k-1, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \right).$$

Определение 3 [1; 2; 4]. Для функции k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ коэффициентом возрастания по переменной x_i называется величина

$$\lambda_i = \sum_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^{n-1}} \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1} \left(f(x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, l, x_{i+1}, \dots, x_n) \right).$$

Геометрический алгоритм характеризации пороговых k -значных функций

В работах [1; 2] вводится геометрический алгоритм характеристики пороговых k -значных функций, при этом в статье [2] доказывается его сходимость на конечном шаге.

Условие 1. В силу неоднозначности задания пороговой функции будем полагать возможным использование порогов, удовлетворяющих нестрогую неравенству $b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_k$. В случае равенства порогов $b_i = b_{i+1}$ для некоторого $i \in \overline{0, k-1}$ очевидно, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не принимает значения i . Также далее будем полагать справедливым строгое двустороннее неравенство в определении пороговой k -значной функции:

$$f(x_1, \dots, x_n) = i \Leftrightarrow b_i < L(x_1, \dots, x_n) < b_{i+1}.$$

Этого всегда можно добиться небольшим изменением соответствующего порога или весов.

Определение 4 [1; 2]. Будем говорить, что линейная форма $L(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ дает чистое разделение областей значений пороговой k -значной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, принимающей все значения из множества $\mathbb{Z}_k$, если для любого $\alpha = \overline{0, k-2}$ выполняется строгое неравенство

$$\max_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \alpha} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\} < \min_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \alpha+1} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\}.$$

Если оно выполняется, то пороги $b_0, b_1, \dots, b_k$ можно определить, например, следующим способом:

$$b_\alpha = \min_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \alpha+1} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\}, \quad \alpha = \overline{0, k-1},$$

$$b_k = \max_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = k-1} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\} + 1.$$

В случае, когда функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не принимает некоторых значений из множества $\overline{0, k-1}$, необходимо убрать из рассмотрения соответствующие области значений следующим образом: пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает только значения $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_t < k$, $0 < t < k$. Тогда для всех $i = \overline{0, t-1}$ требуется проверить выполнение строгого неравенства

$$\max_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \alpha_i} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\} < \min_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \alpha_{i+1}} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\}.$$

При его выполнении пороги можно определить, например, по правилу: для всех значений $a_0, \dots, a_t$ присвоить значения $b_{\alpha_i} = \min_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \alpha_i} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\}$; если функция принимает значение $k-1$, положить,

что $b_k = \max_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = k-1} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\} + 1$, в противном случае положить, что $b_k = +\infty$; для оставшихся

значений $j \in \mathbb{Z}_k \setminus \{\alpha_0, \dots, \alpha_t\}$ (которые не являются значениями функции $f(x_1, \dots, x_n)$) присвоить соответствующему порогу, начиная со старшего, значение $b_j = b_{j+1}$.

Далее для всех $i = \overline{0, k-1}$ введем обозначения

$$F_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = i\},$$

$$\max(F_i) = \max_{(x_1, \dots, x_n) \in F_i} \{L(x_1, \dots, x_n)\},$$

$$x_{\max}(F_i) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^n \mid L(x_1, \dots, x_n) = \max(F_i) \right\},$$

$$\min(F_i) = \min_{(x_1, \dots, x_n) \in F_i} \{L(x_1, \dots, x_n)\},$$

$$x_{\min}(F_i) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^n \mid L(x_1, \dots, x_n) = \min(F_i) \right\}.$$

Если $F_i = \emptyset$, положим, что $\max(F_i) = +\infty$, $\min(F_i) = -\infty$, $x_{\max}(F_i) = (-1, \dots, -1)$ и $x_{\min}(F_i) = (-1, \dots, -1)$.

Приведем геометрический алгоритм характеристики пороговых k -значных функций.

Вход алгоритма: вектор значений функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть пороговая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает только значения $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_t < k$, $0 < t < k$.

Шаг 1: инициализация. Проинициализировать начальный вектор коэффициентов линейной формы коэффициентами роста либо коэффициентами возрастания:

$$(a_1, \dots, a_n) := (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \text{ либо } (a_1, \dots, a_n) := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Шаг 2: вычисление проверочной таблицы. Для всех $i = \overline{0, t}$ вычислить $\min(F_{\alpha_i})$, $\max(F_{\alpha_i})$.

Шаг 3: проверка чистого разделения областей значений функции. Для каждого $i = \overline{0, t-1}$ проверить выполнение неравенства

$$\max(F_{\alpha_i}) < \min(F_{\alpha_{i+1}}).$$

При выполнении неравенства для некоторого $i \in \{0, \dots, t-1\}$ перейти к блоку коррекции с параметрами (a_i, a_{i+1}) . В противном случае перейти к блоку вычисления порогов.

Блок коррекции. Входным параметром блока является пара (a_i, a_{i+1}) .

Шаг 1: выбор точек. Произвольным образом выбрать точки $(x_1, \dots, x_n) \in x_{\max}(F_{\alpha_i})$ и $(y_1, \dots, y_n) \in x_{\min}(F_{\alpha_{i+1}})$.

Шаг 2: коррекция линейной формы. Для всех $j \in \overline{1, n}$ присвоить $a_j = a_j - x_j + y_j$.

Шаг 3: возврат в основной цикл. Вернуться к шагу 2 основного цикла алгоритма.

Блок вычисления порогов. Для всех значений $a_0, \dots, a_t$ присвоить значения

$$b_{\alpha_i} = \min_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \alpha_i} \{a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n\}.$$

Если функция принимает значение $k-1$, то положить, что

$$b_k = \max_{f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = k-1} \{a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n\} + 1,$$

в противном случае положить, что $b_k = +\infty$; для оставшихся значений $j \in \mathbb{Z}_k \setminus \{a_0, \dots, a_t\}$ (которые не являются значениями функции $f(x_1, \dots, x_n)$) присвоить соответствующему порогу, начиная со старшего, значение $b_j = b_{j+1}$.

Выход алгоритма: векторы $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_0, \dots, b_k)$.

Восстановление аналитического задания пороговой k -значной функции в узле защиты информации при неполных данных

Как правило, при решении задачи восстановления аналитического задания функции усложнения $f(x_1, \dots, x_n)$ в узле защиты информации по известным входу и выходу в распоряжении имеются значения функции $f(x_1, \dots, x_n)$ не во всех точках. В этом случае на задачу характеристики пороговой функции накладываются дополнительные ограничения – неполные данные.

Определение 5. Функцию $f(x_1, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{Z}_k$, где $M \subseteq \mathbb{Z}_k^n$, для которой существуют линейная форма $L(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, $x_i \in \mathbb{Z}_k$, с действительными коэффициентами и набор действительных порогов $b_0 < b_1 < \dots < b_k$ такие, что для всех $i \in \overline{0, k-1}$ выполняется условие

$$f(x_1, \dots, x_n) = i \Leftrightarrow b_i \leq L(x_1, \dots, x_n) < b_{i+1},$$

будем называть частично известной пороговой k -значной функцией. Не ограничивая общности определения, можем положить, что здесь и далее $b_0 = -\infty$ и $b_k = +\infty$.

Под алгоритмом характеристики частично известной пороговой k -значной функции понимается процедура нахождения какого-либо семейства параллельных гиперплоскостей, разделяющих множества различных значений данной функции, т. е. процедура нахождения коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейной формы $L(x_1, \dots, x_n)$ и множества порогов $b_0, b_1, \dots, b_{k+1}$.

Рассмотрим применение геометрического алгоритма для характеристики частично известной пороговой k -значной функции. Для этого следует определиться, как действовать геометрическому алгоритму, когда он обращается к точке, в которой значение искомой функции неизвестно, т. е. в терминах определения 5 обращается к точке из множества $\mathbb{Z}_k \setminus M$.

Геометрический алгоритм обращается к значениям функции в следующих случаях:

- 1) при подсчете коэффициентов роста либо коэффициентов возрастания для первичной аппроксимации линейной формы;
- 2) при вычислении максимумов и минимумов значений линейной формы в областях значений искомой функции.

Наиболее простым и логичным действием при отсутствии информации о значении функции в точке видится игнорирование данной точки, которое в обоих случаях должно быть реализовано следующим образом:

- 1) при подсчете коэффициентов роста

$$\Delta_i = \sum_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^{n-1}} \left(f(x_1, \dots, x_{i-1}, k-1, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \right)$$

либо коэффициентов возрастания

$$\lambda_i = \sum_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_k^{n-1}} \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1} \left(f(x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, l, x_{i+1}, \dots, x_n) \right)$$

в соответствующих им суммах игнорируются слагаемые, для вычисления которых осуществляется обращение к неизвестному значению искомой функции;

- 2) при вычислении максимума ($\max(F_{\alpha_i})$) и минимума ($\min(F_{\alpha_i})$) значений линейной формы в областях значений искомой функции следует игнорировать значение линейной формы в данной точке.

Определение 6. Геометрический алгоритм характеристики пороговой k -значной функции, обрабатывающий точки из множества $\mathbb{Z}_k \setminus M$ указанным выше способом, будем называть геометрическим алгоритмом характеристики частично известной пороговой k -значной функции.

Актуальным вопросом является сходимость данного алгоритма. Для доказательства сходимости необходимо рассмотреть вопрос принадлежности к одному ортанту вектора коэффициентов роста, вектора коэффициентов возрастания и вектора коэффициентов линейной формы частично известной пороговой k -значной функции.

Теорема 1. Пусть частично известная пороговая k -значная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задается линейной формой

$$L(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Введем вектор коэффициентов линейной формы $\vec{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Тогда вектор коэффициентов роста $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ и вектор коэффициентов возрастания $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ лежат в одном ортанте с вектором $\vec{L}$ либо некоторые их координаты равны нулю. Другими словами, знаки соответствующих координат у всех трех векторов совпадают с точностью до равенства нулю.

Доказательство. Согласно работе [4] пороговая k -значная функция является полностью монотонной, т. е. для любого $s \leq n$, любого подмножества переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ и любых двух фиксаций переменных $(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$, $(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = (\delta_1, \dots, \delta_s)$ соответствующие этим фиксациям подфункции

$$f_\varepsilon = (x_1, \dots, x_n | (x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)),$$

$$f_\delta = (x_1, \dots, x_n | (x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = (\delta_1, \dots, \delta_s))$$

удовлетворяют одному из следующих условий: либо $f_\varepsilon \leq f_\delta$, либо $f_\varepsilon \geq f_\delta$. Исключение из рассмотрения некоторых значений пороговой k -значной функции не нарушает ее полную монотонность. Таким образом, частично известная пороговая k -значная функция является полностью монотонной.

Рассмотрим фиксации переменной x_j значениями $x_j = p$ и $x_j = p + 1$ для некоторого $p = \overline{0, k-2}$. Для любого значения $p = \overline{0, k-2}$ соотношение между фиксациями f_p и f_{p+1} определяется только соответствующим знаком коэффициента линейной формы a_j : если $a_j > 0$, то $f_p \leq f_{p+1}$; если $a_j = 0$, то $f_p = f_{p+1}$; если $a_j < 0$, то $f_p \geq f_{p+1}$.

Тогда слагаемые из определения 2

$$\xi_{KR} \equiv f(x_1, \dots, x_{j-1}, k-1, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

и слагаемые из определения 3

$$\xi_{KV} \equiv \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1} \left(f(x_1, \dots, x_{j-1}, \varepsilon, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, l, x_{j+1}, \dots, x_n) \right)$$

имеют одинаковый знак с коэффициентом линейной формы a_j либо равны нулю. Суммы значений ξ_{KR} и ξ_{KV} , соответствующие значениям коэффициента роста Δ_i и коэффициента возрастания λ_r , имеют одинаковый знак (либо равны нулю), и этот знак совпадает со знаком коэффициента линейной формы a_j . В случае, когда $a_j = 0$, суммы значений ξ_{KR} и ξ_{KV} также будут равны нулю. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ – частично известная пороговая k -значная функция, то геометрический алгоритм характеристики частично известной пороговой k -значной функции сходится за конечное число шагов и дает ее реализацию.

Доказательство. Пусть пороговая k -значная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задается линейной формой $L(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$. Введем вектор коэффициентов линейной формы $\vec{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Вокруг вектора $\vec{L}$ всегда можно построить конус допустимых решений Q такой, что любой вектор, лежащий в данном конусе, будет давать чистое разделение областей значений функции $f(x_1, \dots, x_n)$ [5]. Напомним, что для конуса выполняются два свойства:

- $\vec{\alpha} \in Q \Rightarrow k\vec{\alpha} \in Q$ для всех $k > 0$;
- $\vec{\alpha} \in Q, \vec{\beta} \in Q \Rightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \in Q$.

Конусом допустимых решений Q назовем такой конус, в котором для любого $\vec{\alpha} \in Q$ линейная форма, построенная по коэффициентам вектора $\vec{\alpha}$, дает чистое разделение областей значений функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Угол раствора конуса обозначим через Θ ($\Theta > 0$).

Докажем, что за конечное число шагов алгоритма вектор коэффициентов линейной формы окажется внутри конуса допустимых решений.

По теореме 1 вектор коэффициентов роста и вектор коэффициентов возрастания лежат в одном ортанте с вектором $\vec{L}$. Таким образом, алгоритм начинает работу с вектора $\vec{A}_0$, лежащего в одном ортанте с вектором $\vec{L}$.

Рассмотрим операцию коррекции в алгоритме. Пусть $\vec{A}_i$ – текущий вектор линейной формы, который поступает на вход блока коррекции. После коррекции он переходит в вектор $\vec{A}_{i+1}$.

Алгоритм осуществляет коррекцию с помощью двух точек – $u_i \in x_{\max}(F_{a_j})$ и $v_i \in x_{\min}(F_{a_{j+1}})$ – тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два неравенства:

- $\vec{A}_i v_i \leq \vec{A}_i u_i$ (так как задействован блок коррекции алгоритма);
- $\vec{L} v_i > \vec{L} u_i$ (в силу определения 1).

Эти неравенства равносильны системе

$$\begin{cases} \vec{L}(v_i - u_i) > 0, \\ \vec{A}_i(v_i - u_i) \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Вектор коррекции $(v_i - u_i) \equiv \vec{C}_i$ прибавляется к текущему вектору $\vec{A}_i$ и получается новый вектор $\vec{A}_{i+1}$:

$$\vec{A}_{i+1} = \vec{A}_i + \vec{C}_i.$$

Рассмотрим плоскость, на которой лежат векторы $\vec{L}$ и $\vec{A}_i$ (рис. 1). Обозначим через $\vec{C}_{LA_i}$ проекцию вектора $\vec{C}_i$ на плоскость, образованную векторами $\vec{L}$ и $\vec{A}_i$. Перенесем начало этой проекции в конец вектора $\vec{A}_i$.

В силу первого неравенства системы (1) конец вектора $\vec{C}_{LA_i}$ должен быть ниже прямой q , в силу второго неравенства системы (1) конец вектора $\vec{C}_{LA_i}$ должен быть выше прямой p , т. е. лежать в заштрихованной области на рис. 1. Таким образом, вектор $\vec{C}_{LA_i}$ направлен к вектору $\vec{L}$.

Рассмотрим конус K_i , образованный вращением вектора $\vec{A}_i$ вокруг вектора $\vec{L}$. Очевидно, что вектор $\vec{C}_i$, приложенный к окончанию вектора $\vec{A}_i$, заходит внутрь конуса K_i . Для каждого шага алгоритма возможны два случая: вектор $\vec{C}_i$ целиком лежит внутри конуса K_i или вектор $\vec{C}_i$ выходит за пределы конуса K_i , т. е. «прокалывает» конус, как на рис. 2.

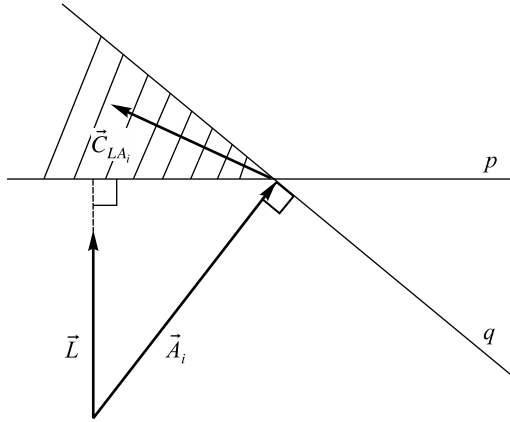


Рис. 1. Проекция вектора коррекции
Fig. 1. Projection of the correction vector

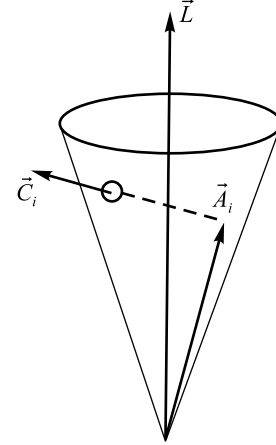


Рис. 2. «Прокол» конуса
Fig. 2. «Puncture» of the cone

Далее покажем, что «прокол» конуса может произойти конечное число раз. Так как по условию 1 для любых $u_i, v_i \in \mathbb{Z}_k^n$ выполняется неравенство

$$\vec{L}(v_i - u_i) > 0,$$

то существует $\delta > 0$ такое, что для любых $u_i, v_i \in \mathbb{Z}_k^n$

$$\vec{L}(v_i - u_i) > r.$$

Это означает, что часть заштрихованной области на рис. 1, заведомо содержащая конец вектора $\vec{C}_{LA_i}$, лежит на $\frac{r}{|\vec{L}|}$ выше (по нормали к плоскости p), чем окончание вектора $\vec{A}_i$. Рассмотрим рис. 3, являющийся модификацией рис. 1 с учетом вышеизложенного. Расстояние от конца проекции вектора $\vec{C}_i$ на плоскость основания конуса K_i до касательной к окружности конуса K_i в точке окончания вектора $\vec{A}_i$ будет не менее чем d .

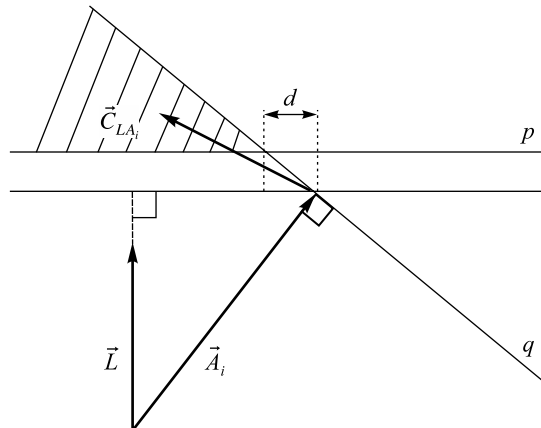


Рис. 3. Проекция вектора коррекции после модификации
Fig. 3. Projection of the correction vector after modification

Нижнюю границу для расстояния d определяет тот факт, что угол между векторами $\vec{A}_i$ и $\vec{L}$ составляет не менее чем Θ (иначе алгоритм останавливает работу) и менее чем $\frac{\pi}{2} - \Theta$. Таким образом,

$$d \geq \frac{r}{|\vec{L}|} \operatorname{tg} \Theta > 0.$$

Длина вектора $\vec{C}_i$ ограничена сверху величиной $(k-1)\sqrt{n}$.

На рис. 4 изображены две окружности – окружность основания конуса K_i вокруг вектора $\vec{L}$ и окружность радиусом $(k-1)\sqrt{n}$ вокруг окончания вектора $\vec{A}_i$. К окружности основания конуса K_i проведена касательная в точке окончания вектора $\vec{A}_i$. На расстоянии d от касательной проведена линия.

Согласно вышеизложенному окончание проекции вектора $\vec{C}_i$ на плоскость основания конуса K_i должно лежать на расстоянии не менее чем d от касательной, на расстоянии не более чем $(k-1)\sqrt{n}$ от окончания вектора $\vec{A}_i$ и по одну сторону с вектором $\vec{L}$ относительно касательной. Таким образом, окончание проекции вектора $\vec{C}_i$ лежит в заштрихованной области (см. рис. 4).

Легко заметить, что заштрихованная область не целиком лежит внутри окружности основания конуса K_i . Когда окончание проекции вектора $\vec{C}_i$ попадает в заштрихованную область вне окружности основания конуса K_i , происходит «прокол» конуса.

Покажем, что с ростом числа итераций i «прокол» конуса прекратится. Так как вектор $\vec{C}_i$ всегда содержит вертикальную составляющую не менее $\frac{r}{|\vec{L}|}$, то высота конуса K_i растет с каждой итерацией алгоритма. Угол между векторами $\vec{L}$ и $\vec{A}_i$ больше Θ (в противном случае алгоритм останавливается, поскольку решение найдено). Таким образом, радиус основания конуса K_i увеличивается неограниченно.

С увеличением радиуса основания конуса K_i вся заштрихованная область попадает внутрь окружности основания конуса K_i , как показано на рис. 5, и «прокол» конуса прекращается.

Таким образом, «прокол» конуса может произойти конечное число раз, после чего вектор коррек-

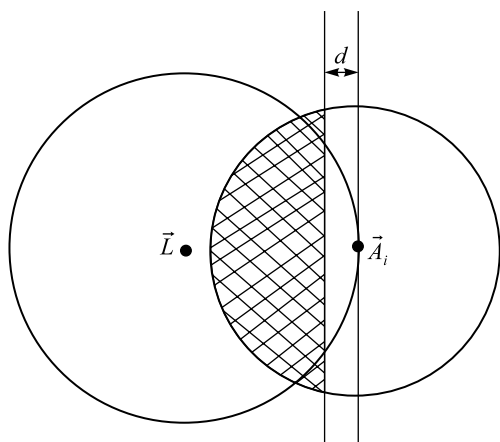


Рис. 4. Проекция на плоскость основания конуса K_i

Fig. 4. Projection onto the plane of the base of the cone K_i

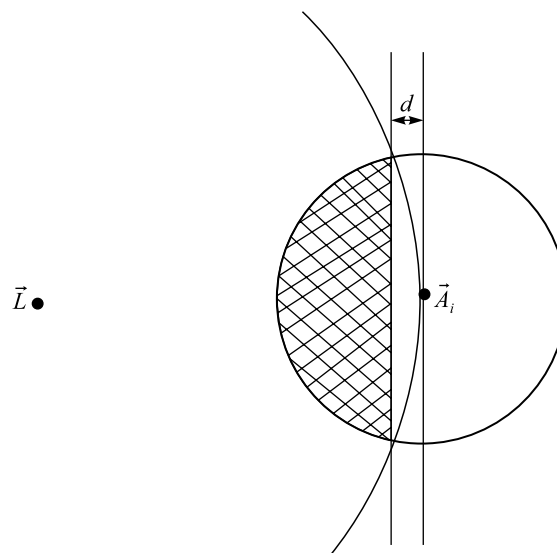


Рис. 5. Проекция на плоскость основания конуса K_i при увеличении радиуса

Fig. 5. Projection onto the plane of the base of the cone with increasing radius

ции $\vec{C}_i$ целиком будет лежать внутри конуса K_i , а окончание вектора коррекции всегда будет попадать внутрь круга фиксированного радиуса. С ростом числа итераций высота конуса K_i будет увеличиваться неограниченно, минимум на $\frac{r}{|\vec{L}|}$ с каждой итерацией (см. рис. 3). Вместе с высотой конуса K_i будет расти радиус основания конуса допустимых решений Q , минимум на $\frac{r}{|\vec{L}|} \operatorname{tg} \Theta$ с каждой итерацией.

Итак, начиная с некоторого конечного числа шагов алгоритма, все векторы $\vec{A}_i$ будут лежать в вертикальном цилиндре, расположенном внутри конуса допустимых решений, имеющего своей осью вектор $\vec{L}$. Теорема 2 доказана.

Как следует из доказательства, алгоритм сходится при использовании и коэффициентов роста, и коэффициентов возрастания для первичной аппроксимации коэффициентов линейной формы.

Заключение

Таким образом, задача восстановления аналитического задания пороговой функции усложнения при неполных данных может быть успешно решена с помощью геометрического алгоритма характеристики частично известной пороговой k -значной функции. В результате будет построена некоторая пороговая функция, совпадающая с частично известной пороговой k -значной функцией во всех точках множества M .

Библиографические ссылки

1. Бурделёв АВ, Никонов ВГ. О новом алгоритме характеристики k -значных пороговых функций. *Computational Nanotechnology*. 2017;1:7–14.
2. Бурделёв АВ. О сходимости нового алгоритма характеристики k -значных пороговых функций. *Прикладная дискретная математика*. 2018;39:107–115. DOI: 10.17223/20710410/39/10.
3. Бурделёв АВ, Никонов ВГ. О построении аналитического задания k -значной пороговой функции. *Computational Nanotechnology*. 2015;2:5–13.
4. Никонов ВГ, Никонов НВ. Особенности пороговых представлений k -значных функций. *Труды по дискретной математике*. 2008;11(1):60–85.
5. Минский М, Пейперт С. *Перцептроны*. Гимельфарб ГЛ, Шарыпанов ВМ, переводчики; Ковалевский ВА, редактор. Москва: Мир; 1971. 261 с.

References

1. Burdeliov AV, Nikonov VG. About the new algorithm of characterization of k -valued threshold functions. *Computational Nanotechnology*. 2017;1:7–14. Russian.
2. Burdelev AV. Convergence of an iterative algorithm for computing parameters of multi-valued threshold functions. *Prikladnaya diskretnaya matematika*. 2018;39:107–115. Russian. DOI: 10.17223/20710410/39/10.
3. Burdeliov AV, Nikonov VG. About construction of analytical definition of k -valued threshold function. *Computational Nanotechnology*. 2015;2:5–13. Russian.
4. Nikonov VG, Nikonov NV. [Features of threshold representations of k -valued functions]. *Trudy po diskretnoi matematike*. 2008; 11(1):60–85. Russian.
5. Minsky M, Papert S. *Perceptrons: an introduction to computational geometry*. Cambridge: MIT Press; 1969. VI, 258 p.
Russian edition: Minsky M, Papert S. *Perseptrony*. Gimel'farb GL, Sharypanov VM, translators; Kovalevskii VA, editor. Moscow: Mir; 1971. 261 p.

Получена 04.05.2023 / исправлена 25.10.2023 / принята 27.10.2023.
Received 04.05.2023 / revised 25.10.2023 / accepted 27.10.2023.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004.93

ОБНАРУЖЕНИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ПАРКОВОЧНЫХ МЕСТ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ YOLOv5 С ПОЛУКОНТРОЛИРУЕМЫМ ОБУЧЕНИЕМ

ЧЖАН ШУАЙ^{1), 2)}, ГУАНГДИ МА³⁾, ЯН ВЕЙЧЕН³⁾, ФАН ЖУ⁴⁾, С. В. АБЛАМЕЙКО^{2), 5)}

¹⁾Лоян скорпио информейшн технолоджи, 471000, г. Лоян, пров. Хэнань, Китай

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

³⁾Эрсвью имэйдж корпорейшн, ул. Кейан роуд, 11, 313200, г. Хучжоу, Китай

⁴⁾Хэнаньский университет, ул. Минлун, 85, 475004, г. Кайфэн, Китай

⁵⁾Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

Образец цитирования:

Чжан Шуай, Гуангди Ма, Ян Вейчен, Фан Жу, Абламейко СВ. Обнаружение автомобильных парковочных мест на изображениях с использованием модифицированной модели YOLOv5 с полуконтролируемым обучением. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;3:72–81 (на англ.).
EDN: XVDRSN

For citation:

Zhang Shuai, Guangdi Ma, Yang Weichen, Fang Zuo, Ablameyko SV. Car parking detection in images by using a semi-supervised modified YOLOv5 model. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:72–81.
EDN: XVDRSN

Авторы:

Чжан Шуай – менеджер по исследованиям и разработкам¹⁾, аспирант кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета²⁾. Научный руководитель – С. В. Абламейко.

Гуангди Ма – главный инженер.

Ян Вейчен – главный управляющий.

Фан Жу – директор Хэнаньской международной объединенной лаборатории теорий и ключевых технологий разведывательных сетей.

Сергей Владимирович Абламейко – доктор технических наук, академик НАН Беларуси, профессор; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета²⁾, главный научный сотрудник отдела интеллектуальных информационных систем⁵⁾.

Authors:

Zhang Shuai, research and development manager^a, postgraduate student at the department of web-technologies and computer modelling, faculty of mechanics and mathematics^b.

coultering@gmail.com

Guangdi Ma, chief engineer.

magd@ev-image.com

Yang Weichen, general manager.

yangwch@ev-image.com

Fang Zuo, director of Henan International Joint Laboratory of Theories and Key Technologies on Intelligence Networks.

zuofang@henu.edu.cn

Sergey V. Ablameyko, doctor of science (engineering), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics^b, and chief researcher at the department of intelligent information systems^c.
ablameyko@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0001-9404-1206>

Прямоугольные, непрерывные парковочные места довольно сложно идентифицировать на любых изображениях городской территории при различных погодных условиях, низкой освещенности и низкой стоимости системы, обеспечивая при этом высокую точность обнаружения. Для решения этой проблемы предлагается использовать модифицированную версию модели YOLOv5, дополненную полуконтролируемым обучением (полуавтоматическим обучением или частичным обучением), которая позволяет обнаруживать парковки в любой сложной сцене независимо от линий парковочных мест и условий парковки. Благодаря сочетанию характера полуконтролируемого обучения и высокой точности моделей обучения с учителем модифицированная версия модели YOLOv5 позволяет использовать очень мало размеченных данных и большой объем неразмеченных данных. Это значительно сокращает время обучения, сохраняя при этом точность распознавания. По сравнению с другими моделями нейронных сетей модифицированная версия модели YOLOv5 обладает такими характеристиками, как высокая скорость обучения, небольшой размер модели и данных, а также высокая точность параметров распознавания.

Ключевые слова: обнаружение парковок; полуконтролируемое обучение; нейронная сеть YOLOv5.

CAR PARKING DETECTION IN IMAGES BY USING A SEMI-SUPERVISED MODIFIED YOLOv5 MODEL

ZHANG SHUAI^{a, b}, GUANGDI MA^c,
YANG WEICHEN^c, FANG ZUO^d, S. V. ABLAMEYKO^{b, c}

^aLuoyang Scorpio Information Technology Ltd., Luoyang 471000, Henan, China

^bBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^cEarthView Image Inc., 11 Keyuan Road, Huzhou 313200, China

^dHenan University, 85 Minglun Street, Kaifeng 475004, China

^eUnited Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surganova Street, Minsk 220012, Belarus

Corresponding author: S. V. Ablameyko (ablameyko@bsu.by)

The problem of car parking detection in images attracts the attention of many researchers. In this task, it is quite difficult to identify rectangular, continuous parking spaces in all kinds of city images under different weather conditions, combining the low-light environment and the system's low cost with high detection accuracy. In this paper, we propose a modified version of the YOLOv5 model joined with semi-supervised learning that allows us to detect parking lots in any complex scene, independent of parking space lines and parking environments. Due to the combination of the nature of semi-supervised learning and the high accuracy of supervised learning models, the modified version of YOLOv5 model permits to use very little labeled data and a large amount of unlabeled data. It can significantly reduce training time while maintaining recognition accuracy. Compared with other neural network models, the modified version of YOLOv5 model has the characteristics of fast training speed, persistent operation, small model size, and high model precision and recall values.

Keywords: car parking detection; semi-supervised learning; YOLOv5 neural network.

Introduction

With the increase of the number of cars in cities, the task to make effective use of parking lots, reduce the time people spend in the parking process has become more and more important in smart cities. Over the last decade numerous intelligent systems have been developed for parking space detection with different lighting conditions and restrictions [1].

In this task, it is quite difficult to identify rectangular, continuous parking spaces with high accuracy using the detection of parking monitoring images, and it is not possible to effectively identify irregularly shaped parking lots and irregularly arranged parking lot vehicles. However, there is a need to realise a low-cost parking vehicle detection system which can be applied in all kinds of complex parking spaces, different weather conditions, combining the low-light environment and the low cost with high detection accuracy [2].

In terms of vehicle detection, there are two common approaches: the conventional computer vision approach and image analysis based on convolutional neural networks. The conventional image analysis approach is a vehicle detection method based on image feature analysis and parking space localisation [3]. The core question is what kind of features are extracted to detect a vehicle and what kind of classification tools are applied [4]. Parking spaces localisation allows us to locate a parking space on a video frame (segmentation) and record these positions. Input image perspective transformation is used to facilitate the possibility of describing the parking

space as being rectangle and of easier detecting the separating parking lines. The parking spaces classification subsystem solves the following problems: co-ordinates of the parking space extraction on the video frame based on a given location for further processing the extracted images area (regions of interest), which corresponds to the parking spaces; calculation of the features of the parking space, generation of the features vector describing this state, and use of the features classification to separate the vacant and the occupied parking spaces for every region of interest; visual demonstration of the occupied parking spaces [5].

In parking space vehicle detection, object detection methods based on neural network models have recently started to be used. The most important part of this solution is a neural network model used to detect vehicles. The existing methods of identifying parking spaces through neural networks often use multi-layer neural networks. After a specific parking space is segmented, neural networks are used to detect whether there are vehicles in the parking space, such as Fast R-CNN, Faster R-CNN, Mask R-CNN. This is more difficult to use in an irregularly laid out parking lot, especially if the parking space markings are not clear. Another approach is to use the single-layer neural network and use the first-level target detector neural network model to directly return the target across the target candidate area without the need to segment the target. In this case, the detection speed is fast, and it has become the mainstream model category for vehicle identification in parking lots, such as SSD, YOLO series [6]. However, the accuracy of identifying object positions in this approach is not sufficient, and the recall rate is quite low.

Having this short analysis, one can see that typically neural network models focus on accuracy, detection speed, and model architecture complexity. However, the cost incurred by the large datasets required to train the model is also significant. How to train a neural network model suitable for various parking lots with less datasets? It has become an important problem.

In this paper, we propose a modified version of the YOLOv5 (you only look once version 5) model joined with semi-supervised learning that allows us to detect parking lots in any complex scene, independent of parking space lines and parking environments. Due to the combination of the nature of semi-supervised learning and the high accuracy of supervised learning models, the model allows us to use very little labeled data and a large amount of unlabeled data. It can significantly reduce training time while maintaining recognition accuracy.

Overview of neural network approaches for car parking detection

Let us consider some recent approaches for car detection in parking lots based on neural networks. D. Acharya, et al., used a deep CNN and a binary support vector machine classifier to detect spaces in outdoor parking lot occupancy images, and determined parking space occupancy from the images obtained from surveillance [7]. J. Nyambal, et al., used the Caffe and Nvidia DiGITS frameworks for predictive detection of vacant and occupied parking spaces [8].

A. Naufal, et al., proposed a preprocessed region-based convolutional neural network (Mask R-CNN) to mark the parking position on the input image of a full parking lot [9]. At the first stage, preprocessing is performed that combines contrast enhancement using the exposure fusion framework. At the second stage, each parking position is examined whether the position is vacant or not, using mAlexNet. A series of trials on images with varying light conditions indicate that the preprocessed Mask R-CNN can improve marking the parking positions with an accuracy of intersection over union reaching 85.80 %. The result of marking the parking position is then used in the trial of the availability of the parking space on video data using mAlexNet, and an accuracy attains 73.73 %.

The use of the Mask R-CNN method for the detection of the parking space has been proposed by J. Ahmad, et al. [10]. The bounding box from the detection is compared with the manually annotated bounding box to determine the classification of the parking space status. This research scenario is still limited because it is necessary to initialise manual annotations for each parking space. This research can detect parking spots correctly, with an accuracy of about 90 %. Missclassification occurs because of camera angles.

T. Agrawal and S. Urolagin used Mask R-CNN to solve the multi-angle parking problem [11]. This research proves that the Mask R-CNN model can run well in low angle closed circuit television areas with the highest accuracy value of 86 %. The model has tended to adapt to various parking scenarios. However, a problem found in this research still has issues related to lighting, and car detection failure occurs if there are other objects in front of it (such as trees or light poles, or even other cars).

Recently YOLO CNN started to be widely used for this task. Yucheng Guo and Hongtao Shi proposed the improved convolution neural network algorithm and image recognition technology to identify and locate parking spaces [12]. Then, the vehicle license plate information is identified using the improved YOLO model, the parking system model is established, and the parking selection algorithm is used.

Y. Miao, et al., proposed an effective nighttime vehicle detection approach [13]. First of all, the original nighttime images were enhanced by an optimal multi-scale retinex algorithm. Then, a pretrained YOLOv3

network was used and fine-tuned by the enhanced images. Finally, the detection network was used to detect vehicles from the nighttime images and outperformed two widely used object detection methods, namely the Faster R-CNN and SSD, on the precision and detection efficiency. The average precision of the proposed method reaches 93.66 %, which is 6.14 and 3.21 % higher than that of the Faster R-CNN and SSD, respectively.

Based on YOLOv3, Wang Hai, et al., combined visual images and lidar to improve detection accuracy and real-time performance [14]. Firstly, the obstacles are detected by the grid projection method using the lidar point cloud information. Then, the obstacles are mapped to the image to get several separated regions of interest (ROIs). After that, the ROIs are expanded based on the dynamic threshold and merged to generate the final ROI. Finally, a network YOLO is applied on the ROI to detect vehicles. The experimental results on the KITTI dataset demonstrate that the proposed algorithm has high detection accuracy and good real-time performance. Compared with the detection method based only on the YOLO, the mean average precision (mAP) is increased by 17 %.

D. Carrasco, et al., used YOLOv5 and a multi-scale mechanism to learn deep discriminative feature representations of different scales and automatically determined the scale most suitable for detecting objects in the scene, reducing the number of trainable parameters [15].

H. Bura, et al., proposed an edge based smart parking solution using camera networks and deep learning [16]. The object detection and tracking were performed using the YOLO model. On the contrary, the parking lot occupancy detection was carried out using the custom AlexNet: 1 input layer, 1 convolution layer, 1 ReLU, 1 max pooling, and 3 fully connected layers. The dataset was trained and evaluated using 150 000 images and could achieve 99.51 % better than the model called mini AlexNet-10 and outperformed as well in terms of inference time in order to perform in real time with the result of 7.11 ms.

M. Uzar, et al., analysed YOLO architectures in terms of performance assessments of vehicle detection in parking lots [17]. The labeling process was performed for three classes (car, bus, and minibus) using the Visual Object Tagging Tool. The labeled dataset was trained via transfer learning in YOLOv4-CSP, YOLOv4-tiny, YOLOv4-P5, YOLOv4-P6, YOLOv5n, YOLOv5s, YOLOv5m, YOLOv5l, YOLOv5x architectures. The weights of YOLO versions were implemented to the parking lots and the results were compared. To assess the performance of YOLO-based vehicle detection, mAP and F_1 -score values were computed.

According to the results, when analysing the dataset with a limited graphics processing unit support, it is seen that large-scale models could not be trained properly. Thus, to determine the real performances of YOLOv4-P5, YOLOv4-P6, YOLOv5l and YOLOv5x models, it is recommended to train models with an unlimited graphics processing unit support and more training epochs. Moreover, the number and diversity of the dataset should be increased with the use of high-capacity processors.

Based on this analysis, we have chosen the YOLOv5 model that is the most popular detection model: it is fast enough to train, easy to deploy and expand, and has a small project code.

Materials and methods

YOLOv5 and supervised learning. Our model is based on YOLOv5, combined with the semi-supervised learning concept, to reduce the model size and the training time while ensuring the model's detection accuracy.

YOLOv5 is a highly popular single-layer neural network model in computer vision. YOLOv5 is known for its exceptional speed, top-tier performance, and user-friendly interface. These features make it ideal for real-time object detection tasks, such as autonomous driving, surveillance, and robotics. While YOLOv5 maintains the YOLO model's core architecture, it introduces a groundbreaking PyTorch-based training and deployment framework. This integration simplifies the model development and customisation, making it accessible to researchers and developers. YOLOv5 is a dynamic advancement in object detection technology. The network structure of the model is shown in fig. 1.

In the network structure diagram of YOLOv5, it can be seen that it is divided into four parts: input, backbone, neck, and prediction [18].

Semi-supervised learning is a machine learning algorithm used in the training data mixed with labeled data plus unlabeled data [19]. It combines a small amount of labeled data with a large amount of unlabeled data during training. Semi-supervised learning algorithms can be divided into groups: self-training, graph-based semi-supervised learning, semi-supervised support vector machine.

The self-training classifier is the most common self-training tool in semi-supervised learning [20]. The simple self-training process is to train a classifier with labeled data, and then use this classifier to classify unlabeled data, which will produce a pseudo-label [21] or soft label. The selected unlabeled samples are used to train the classifier. Self-supervised learning only needs a small number of low-cost characteristics of labeled datasets. It can achieve a highly scalable, highly robust vehicle identification model.

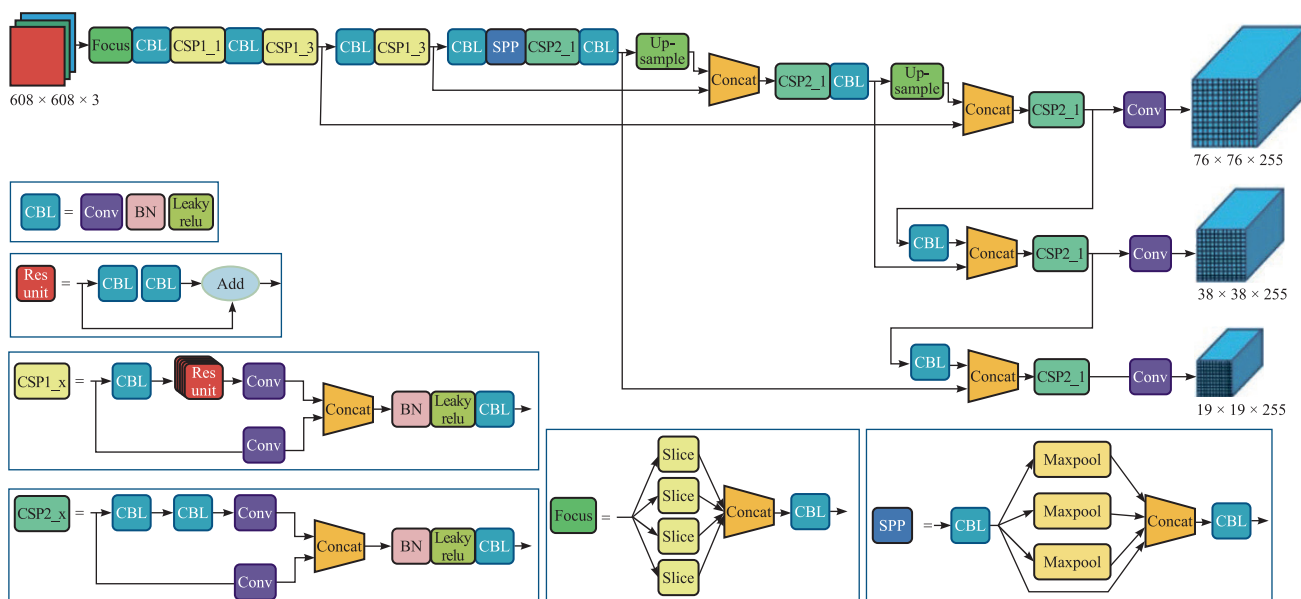


Fig. 1. The YOLOv5 network structure.
Source: [18]

Model design. The current mainstream approach using semi-supervised learning is to use the concept of semi-supervised learning models to train supervised learning models. Our idea is to combine the self-training idea, YOLOv5l model features, and parking lot usage scenarios to design a self-training learning method that adds a supervised learning model and a semi-supervised learning model using pseudo-labels.

We insert a full YOLOv5 training epoch in each loop of the self-trained model. In each YOLOv5 training cycle, we use the labeled data to train the YOLOv5 pre-trained model or the object detection model generated in the previous cycle. Then, we detect unlabeled data and generate pseudo-labels and use the generated pseudo-label loss data. The loss data modify the detection model produced by YOLOv5 training. Looping in turn, the system generates more pseudo-label and loss data, reduces unlabeled data, and generates object detection model files with higher accuracy. Figure 2 describes the basic process, which is as follows:

- use a small amount of labeled data to train a detection model;
- use the detection model to identify unlabeled data and obtain results;
- select high-quality detection results as pseudo-labels;
- use pseudo-labels and labeled data.

A new detection model is trained, recursively in turn, until it is manually stopped or the unlabeled data all become labeled data (see fig. 2).

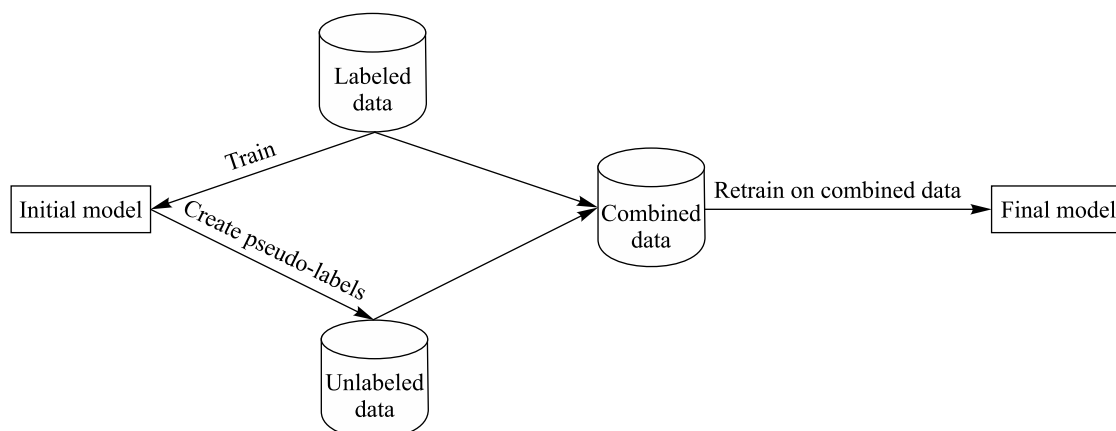


Fig. 2. The supervised learning model plus semi-supervised learning using pseudo-labels

Pseudo-labeling is the SSL method that helps with untagged data [22]. First, we can annotate a small batch of data and train a model with it, and then use this model to detect objects on unlabeled data. The labels annotated by the model are called pseudo-labels. We can then combine the labeled and pseudo-labeled data and train the model again. The basic workflow is:

- 1) train the original model M with a small amount of the labeled dataset D ;
- 2) identify unlabeled datasets using the M model;
- 3) filter out the detection results of precision $>90\%$ and recall $>90\%$, and construct a new pseudo-label dataset D' ;
- 4) train a new M model with new labeled data and keep iterating.

Since in the parking environment, monitoring images can be continuously acquired as unlabeled data, the continuous operation of the neural network model can be realised until human intervention stops or the model data is infinitely close to 1. Because it is too time-consuming to complete the training in actual training, especially after the unlabeled dataset is gradually converted into a labeled dataset, a large number of training datasets will be generated, which will gradually increase the single training time and reduce the training efficiency.

Modifying the new pseudo-label dataset D' directly modifies the loss function of the model, that is, the loss value of the existing model is superimposed on the loss value of the prediction dataset D' : $\text{loss} = \text{loss}(\text{labeled_data}) + \alpha * \text{loss}(\text{unlabeled_data})$ [23]. The specific flow chart and analysis are shown in fig. 3, which includes the following stages:

- 1) train the supervised model M using labeled data;
- 2) the supervised model M is used to predict unlabeled data, resulting in the predicted probabilities P and pseudo-labels;
- 3) update the loss calculation method of the model: use $\text{loss}(\text{labeled_data}) + \alpha * \text{loss}(\text{unlabeled_data})$ as the loss value of the model;
- 4) train a new model M' using the labeled data and the pseudo-labeled data filtered according to the predicted probability P (the pseudo-label filtering method is step 3 in the self-training plus YOLOv5 model design);
- 5) replace M' with M and repeat the above steps until the model effect does not improve.

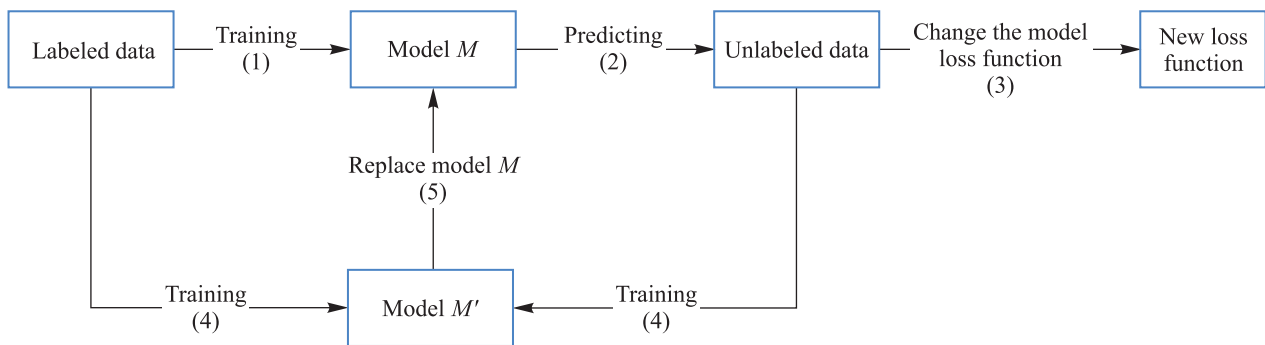


Fig. 3. The improved model of the training process

Due to the characteristics used in the production environment of a parking lot, the keyframes can be extracted regularly in the parking lot surveillance video. The unlabeled data can be added as a picture, and the results will be returned to the system after the detection is completed. The model continues to learn.

The advantages of the proposed model are:

- the possibility to use a small amount of labeled data to achieve similar training results for the same YOLOv5 model. It allows us to reduce the cost of the model dataset construction;
- thanks to the learning method of sustainable words, it can be persistently operated on the object detection settings in the parking lot;
- there is no need to consider that the dataset of vehicles is too small and difficult to train.

Datasets and training process

The database based on the CNRPark¹ open source parking lot dataset, which uses more than 200 photos of Italy's parking lots, consisting of 9 cameras, taken every 30 min, since 16 November 2015. All-weather parking information for the period 9 December 2015, including images of parking lots in different climates such as daytime, night, sunny, cloudy, rainy, etc., with a variety of environmental elements such as parking spaces, roads, sidewalks, trees, and green spaces to train vehicle identification in the parking lot. Using the filtered datasets «vehicles open images», we filter out top views, test maps, and have common vehicle types such as motorcycles and trucks to train multiple vehicle type identification. Ultimately, the dataset for this project contains 276 training data, 32 verification data, parking lot plus photos taken by drones.

¹CNRPark + EXT is a dataset for visual occupancy detection of parking lots / G. Amato [et al.] // CNR Parking Dataset : website. July 2015. URL: <http://cnrpark.it/> (date of access: 14.04.2022).

In our study, we employed a dedicated validation dataset to evaluate the performance and accuracy of the model. This validation dataset is created by randomly sampling data from our dataset, making sure it does not overlap with the training data. The validation dataset accounts for 1 % of the total dataset. The validation process involves evaluating whether the model can correctly detect objects in the validation dataset. This approach is taken to ensure that the performance of the model is evaluated on the unseen data, thereby preventing over-reliance on the training dataset.

The training process follows the training cycle of semi-supervised learning, and the training method of YOLOv5 is used in each training cycle.

Each training cycle follows the training, generates a pre-training model, identifies unlabeled data, generates pseudo-labels, and uses pseudo-labeled data to modify model parameters. It is divided into two steps in a single training cycle [24]:

1) pre-training. We use ImageNet data to train the first 20 convolutional layers of the YOLOv5 network plus 1 average pooling layer plus 1 fully connected layer. We train the image resolution resize to 224×224 ;

2) initialisation. The network parameters of the first 20 convolutional layers of the YOLOv5 model are initialised with the first 20 convolutional layers of the VOC model, and then the VOC-20 class annotation data is used for YOLOv5 model training. To improve the image accuracy, when training the detection model, resize the input image resolution to 448×448 .

Such a training mode has the characteristics of a quick, low background false detection rate, strong versatility.

Experimental results

In our experiments, we used the database CNRPark. We analysed images taken from stationary cameras and from drones. Images were taken in day time, evening and night time, and in different weather conditions: sunny and rainy.

We set three classification categories: car, motorbike, traffic cone. The definition of precision >0.7 and recall >0.8 is considered a hit target. Precision, recall, mAP are mainly used as indicators of detection accuracy, detection hit rate, and detection ability.

Training model is represented as follows: YOLOv5 plus self-training model.

Dataset includes 18 images, selected from the standard dataset as labeled datasets, and the remaining images, used as unlabeled datasets.

Number of training is limited to 400 times.

The experiment results for car detection are shown in table 1. Semi-supervised learning is affected by dataset changes and the model is affected by pseudo-labels generated by the previous detection. In order to ensure the stability of the experimental result data, the experimental results are obtained by taking the average after three experiments. The precision – recall (PR) curve and F_1 curve of the training process are shown in fig. 4.

Table 1

Experimental results for car detection

Experiment	Precision	Recall	mAP	F_1	Labeled images	Train time cost
1	0.999	0.941	0.601	0.969	18	20 min 29 s
2	0.998	0.941	0.595	0.970	18	20 min 20 s
3	0.999	0.941	0.607	0.971	18	20 min 39 s

Figure 5 shows the car parking detection results: the image from a drone on a sunny day (see fig. 5, *a*) and from a stationary camera in different conditions: evening (see fig. 5, *b*), night (see fig. 5, *c*), and rain (see fig. 5, *d*). Due to the influence of scene and environment on the image brightness and contrast, the detection results are different in different environments. However, the obtained results show that the proposed models can effectively identify parking lot vehicles.

From the obtained results, it can be seen that with 18 labeled data and training time of 20 min, a better precision and recall can be obtained. Although the mAP is lower than YOLOv5, the results are still satisfactory.

It can be seen from the number of training sessions used, labeled data, and training use: only 18 labeled data are used, indicating that the model can be trained with a very small amount of data labels, and because there is less labeled data, the training speed is extremely fast. It can be seen from table 1 that the values of precision, recall, and F_1 are extremely high, particularly the precision is close to 1. Figure 4 shows that the overall curve of the model is stable, and fig. 5 shows that the model can effectively identify vehicles in the parking lot.

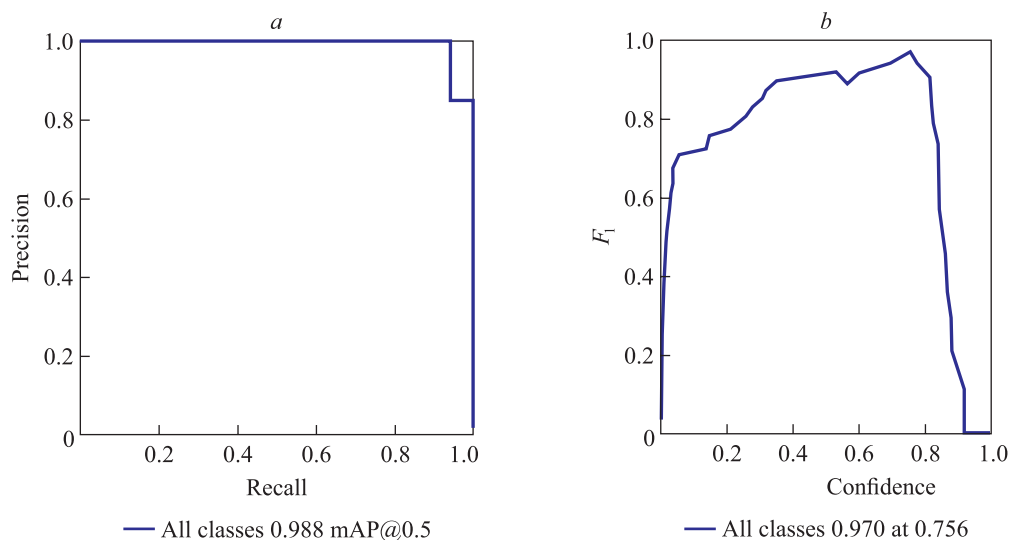


Fig. 4. The PR curve (a) and the F_1 curve (b)



Fig. 5. Car detection results on a sunny day (a), in the evening (b), at night (c), on a rainy day (d)

From the above experiments, it can be concluded that for the model using YOLOv5 plus semi-supervised learning, the training speed can be improved by adding cache, and it is also verified that the longer the training time, the better the training accuracy and accuracy of the model. For the multi-scale parameter, since the modified model precision has tended to be close to 1 there is no need to use this parameter to promote precision and recall.

Comparison and discussion

In order to compare the characteristics of our approach with the existing ones, we tested the Fast R-CNN, YOLOv4, YOLOv5l and modified YOLOv5 models to detect cars at parking lots. We tested the models to define the speed of 93 parking spaces in 16 pictures on a low-performance device (take Raspberry Pi 4B as an example).

The results show that the training results are very accurate. We use test data (test data from the CNRPark dataset, independent of training and validation data). The test results show that it can be used with high accuracy and run on low-performance devices. The comparison results of different models are shown in table 2.

Table 2

Comparison results of different models

Model	Precision	Recall	Detection model size, Mb	Training time, min
Fast R-CNN	0.977	0.893	341	173
YOLOv4	0.988	0.916	254	134
YOLOv5l	0.983	0.927	92	118
Proposed model	0.998	0.941	31	20

The detection accuracy of the Fast R-CNN model is affected by the arrangement of parking spaces, and it is best detected only in consecutively arranged parking lots. The YOLO model is not affected by the arrangement of parking spaces, and it is more suitable for parking lots with irregular arrangements.

The precision and recall of different models are similar, and the trained precision and recall are both close to 1, indicating that they can complete the task of object detection well.

The size of the target detection files of different model training results varies greatly. The proposed model has only 18 labeled data, only 5 % of the datasets available to other models, and is modified based on the YOLOv5 model, so the target detection file size is extremely small and the inference speed is faster. It is also more suitable for continuous training with low performance equipment and high training efficiency. The detection results show that it can be well applied in low-light environments.

Conclusions

In this paper, a new modified YOLOv5 model is proposed by adding semi-supervised learning ideas to the standard YOLOv5 model. Through experimental comparison, the model can use a small amount of labeled data and a large amount of unlabeled data to train a good neural network model. Compared with other neural network models, the model has the characteristics of fast training speed, persistent operation, small model size, and high model precision and recall values. Through the deployment in the production environment, the feasibility and effectiveness of the model are fully verified.

The experimental results show that the modified YOLOv5 model is fully capable of vehicle detection in a parking lot environment, and has the ability to operate in an industrial environment. Its extremely fast training speed is also very suitable for training on low-performance equipment.

In the future, we will achieve a better target detection application technology from the six directions of light-weight object detection, object detection in combination with AutoML, domain adaptive object detection, weak supervision target detection, small object detection, and information fusion object detection. With the application of the concept of adaptive learning in the field of neural networks, attempts will be made to realise multi-machine collaborative identification, increase vehicle entry and exit behaviour detection, and improve detection accuracy.

References

1. Alam M, Moroni D, Pieri G, Tampucci M, Gomes M, Fonseca J, et al. Real-time smart parking systems integration in distributed ITS for smart cities. *Journal of Advanced Transportation*. 2018;2018:1485652. DOI: 10.1155/2018/1485652.
2. Faheem F, Mahmud SA, Khan GM, Rahman M, Zafar H. A survey of intelligent car parking system. *Journal of Applied Research and Technology*. 2013;11(5):714–726. DOI: 10.1016/S1665-6423(13)71580-3.

3. Yusnita R, Norbaya F, Basharuiddin N. Intelligent parking space detection system based on image processing. *International Journal of Innovation, Management and Technology*. 2012;3(3):232–235. DOI: 10.7763/IJIMT.2012.V3.228.
4. Huang Ching-Chun, Vu Hoang Tran, Chen Yi-Ren. A multiclass boosting approach for integrating weal classifiers in parking space detection. In: *2015 IEEE International conference on consumer electronics; 2015 June 6–8; Taipei, Taiwan*. [S. l.]: IEEE; 2015. p. 314–315. DOI: 10.1109/ICCE-TW.2015.7216918.
5. Bohush R, Yarashevich P, Ablameyko S, Kalganova T. Extraction of image parking spaces in intelligent video surveillance systems. *Machine Graphics and Vision*. 2018;27(1–4):47–62. DOI: 10.22630/MGV.2018.27.1.3.
6. Wang Hai, Yu Yljie, Cai Yingfeng, Chen Xiaobo, Chen Long, Liu Qingchao. A comparative study of state-of-the-art deep learning algorithms for vehicle detection. *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*. 2019;11(2):82–95. DOI: 10.1109/MITS.2019.2903518.
7. Acharya D, Yan W, Khoshelham K. Real-time image-based parking occupancy detection using deep learning. In: Peters S, Khoshelham K, editors. *Research@Locate-2018. Proceedings of the 5th annual conference; 2018 April 9–11; Adelaide, Australia*. [S. l.]: [s. n.]; 2018. p. 33–40 (CEUR workshop proceedings; volume 2087).
8. Nyambal J, Klein R. Automated parking space detection using convolutional neural networks. arXiv:2106.07228v1 [Preprint]. 2021 [cited 2023 January 10]; [6 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2106.07228v1>.
9. Naufal AA, Faticah C, Suciati N. Preprocessed mask RCNN for parking space detection in smart parking systems. *International Journal of Intelligent Engineering and Systems*. 2020;13(6):255–265. DOI: 10.22266/ijies2020.1231.23.
10. Ahmad J, Lewis Z, Duraisamy P, McDonald T. Parking lot monitoring using MRCNN. In: *10th International conference on computing, communication and networking technologies (ICCCNT); 2019 July 6–8; Kanpur, India*. [S. l.]: IEEE; 2019. p. 10–13. DOI: 10.1109/ICCCNT45670.2019.8944394.
11. Agrawal T, Urolagin S. Multi-angle parking detection system using mask R-CNN. In: *BDET-2020. Proceedings of the 2nd International conference on big data engineering and technology; 2020 January 3–5; Singapore, China*. New York: Association for Computing Machinery; 2020. p. 76–80. DOI: 10.1145/3378904.3378914.
12. Yucheng Guo, Hongtao Shi. Automatic parking system based on improved neural network algorithm and intelligent image analysis. *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2021;2021:4391864. DOI: 10.1155/2021/4391864.
13. Miao Y, Liu F, Hou T, Liu L, Liu Y. A nighttime vehicle detection method based on YOLOv3. In: *2020 Chinese automation congress (CAC); 2020 November 6–8; Shanghai, China*. [S. l.]: IEEE; 2020. p. 6617–6621. DOI: 10.1109/CAC51589.2020.9326819.
14. Wang Hai, Lou Xinyu, Cai Yingfeng, Li Yicheng, Chen Long. Real-time vehicle detection algorithm based on vision and lidar point cloud fusion. *Journal of Sensors*. 2019;2019:8473980. DOI: 10.1155/2019/8473980.
15. Carrasco DP, Rashwan HA, García MÁ, Puig D. T-YOLO: tiny vehicle detection based on YOLO and multi-scale convolutional neural networks. *IEEE Access*. 2023;11:22430–22440. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3137638.
16. Bura H, Lin N, Kumar N, Malekar S, Nagaraj S, Liu K. An edge based smart parking solution using camera networks and deep learning. *2018 IEEE International conference on cognitive computing (ICCC); 2018 July 2–7; San Francisco, USA*. [S. l.]: IEEE; 2018. p. 17–24. DOI: 10.1109/ICCC.2018.00010.
17. Uzar M, Öztürk Ş, Bayrak OC, Arda T, Öcalan NT. Performance analysis of YOLO versions for automatic vehicle detection from UAV images. *Advanced Remote Sensing Journal*. 2021;1(1):16–30.
18. Detailed YOLOv5 model framework [Internet]. Beijing: Lezhi Network Technology Co.; 2021 March 3 [updated 2022 July 12; cited 2022 November 19]. Available from: https://blog.csdn.net/qq_16792139/article/details/114310670.
19. Zhu X, Goldberg AB. *Introduction to semi-supervised learning*. Cham: Springer; 2009. XII, 116 p. (Brachman RJ, Dietterich T, editors. Synthesis lectures on artificial intelligence and machine learning; lecture 6). DOI: 10.1007/978-3-031-01548-9.
20. Rosenberg C, Hebert M, Schneiderman H. Semi-supervised self-training of object detection models. In: *Seventh IEEE workshops on applications of computer vision (WACV/MOTION'05); 2005 January 5–7; Breckenridge, USA. Volume 1*. [S. l.]: IEEE; 2005. p. 29–36. DOI: 10.1109/ACVMOT.2005.107.
21. Lee Dong-Hyun. Pseudo-label: the simple and efficient semi-supervised learning method for deep neural networks. In: *ICML 2013 workshop: challenges in representation learning (WREPL); 2013 June 16–21; Atlanta, USA. Volume 3*. [S. l.]: [s. n.]; 2013. p. 2–4.
22. Sohn K, Zhang Z, Li C-L, Zhang H, Lee C-Y, Pfister T. A simple semi-supervised learning framework for object detection. arXiv:2005.04757 [Preprint]. 2020 [cited 2023 January 21]; [15 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2005.04757v2>.
23. Janocha K, Czarnecki WM. On loss functions for deep neural networks in classification. arXiv:1702.05659 [Preprint]. 2017 [cited 2023 January 21]; [10 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1702.05659v1>.
24. Zhang Haoting, Tian Mei, Shao Gaoping, Cheng Juan, Liu Jingjing. Target detection of forward-looking sonar image based on improved YOLOv5. *IEEE Access*. 2022;10:18023–18034. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3150339.

Received 11.01.2023 / revised 21.11.2023 / accepted 23.11.2023.

МНОГОУРОВНЕВЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРЕЦЕДЕНТНОГО ТИПА

В. В. КРАСНОПРОШИН¹⁾, В. А. ОБРАЗЦОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается специальный класс задач принятия решений прецедентного типа, которые часто возникают в слабо формализованных предметных областях. Для решения таких задач, как правило, применяются эвристические алгоритмы, которые не могут быть строго обоснованы. Показано, что данный класс задач сводится к стандартной задаче распознавания образов с обучением. Это позволяет вместо эвристических алгоритмов использовать многоуровневые модели, которые дают возможность повысить точность решения, а в некоторых случаях обосновать его правильность. Приведен анализ различных вариантов построения многоуровневых моделей. Предложен многоуровневый алгоритм для задачи принятия решений, основанный на структурировании информации.

Ключевые слова: многоуровневый алгоритм; задача принятия решений; прецедентный тип; распознавание образов с обучением; модели коррективки; модели на основе структурирования информации.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф21АРМ-005).

MULTILEVEL ALGORITHMS FOR PRECEDENT-TYPE DECISION-MAKING PROBLEMS

V. V. KRASNOPROSHIN^a, V. A. OBRAZTSOV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. A. Obratsov (obratsov@bsu.by)

In this paper, we consider a special class of precedent-type decision-making problems, which often arise in weakly formalised subject areas. To solve such problems, as a rule, heuristic algorithms are used, which cannot be strictly justified. It is shown that this class of problems can be reduced to a standard problem of pattern recognition with learning. Instead of heuristic algorithms, this allows to use multilevel models that make it possible to improve the accuracy of the solution, and in some cases to justify its correctness. An analysis of different variants for constructing multilevel models is given. A multilevel algorithm for the decision-making problem based on the structuring of information is proposed.

Keywords: multilevel algorithms; decision-making problem; precedent-type; pattern recognition with learning; correction models; models based on information structuring.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. F21ARM-005).

Образец цитирования:

Краснопрошин ВВ, Образцов ВА. Многоуровневые алгоритмы для задач принятия решений прецедентного типа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;3:82–91.
EDN: QJCRMQ

For citation:

Krasnoproshin VV, Obratsov VA. Multilevel algorithms for precedent-type decision-making problems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023; 3:82–91. Russian.
EDN: QJCRMQ

Авторы:

Виктор Владимирович Краснопрошин – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики.

Владимир Алексеевич Образцов – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Viktor V. Krasnoproshin, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of information management systems, faculty of applied mathematics and computer science.

krasnoproshin@bsu.by

Vladimir A. Obratsov, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of information management systems, faculty of applied mathematics and computer science.
obratsov@bsu.by

Анализ проблемы и постановка задачи

Проблема принятия решений играет важную роль в жизни человека. В результате развития формальных методов ее решения сложилась отдельная дисциплина – теория принятия решений (ТПР) [1]. Становление ТПР определялось, с одной стороны, развитием вычислительной техники и математических методов, а с другой – возникновением новых задач в сфере жизнедеятельности человека. Появление задач в порой слабо формализованных предметных областях требует модификации уже существующих и разработки новых подходов. В последнее время это часто связано с проблемами измеримости и структуризации информации, использования экспертных знаний и многими другими аспектами ТПР. Решение подобных проблем невозможно без привлечения современных научных теорий, таких как теория искусственного интеллекта, теория распознавания образов (ТРО) и пр. Симбиоз ТПР и ТРО как раз и представляет собой одно из возможных направлений в развитии новых моделей и методов принятия решений.

Универсальной постановки для задач принятия решений не существует. Построение решений осуществляется стандартным для математики образом. Если обозначить через X множество возможных решений, то процесс построения решений реализуется в множестве X^2 . Для организации процесса в множестве X^2 необходимо определить тип отношения на этом множестве: либо частичный порядок, либо эквивалентность. Множества могут быть заданы либо аналитически (с использованием принципа свертки), либо по прецедентности (или по примерам).

Таким образом, конкретизируя тип отношения на множестве X^2 , а также способы задания информации и принятия решений, можно получить большое разнообразие задач принятия решений.

Ограничимся случаем, когда на множестве X^2 задано отношение эквивалентности. Следствием этого [2] является разбиение множества решений X на непересекающиеся подмножества, включающие сходные между собой решения. Существенную роль при этом играет способ задания информации о множестве X . Практически важным является случай, когда такая информация задана неполностью (частично). В этой ситуации говорят о задании информации по прецедентности (или по примерам). Приходим к варианту задачи, который можно назвать задачей выбора или в формальном смысле задачей вычисления свойств объектов $x \in X$. Сам же способ принятия решений в такой последовательности просто ассоциируется с вычисленным свойством [3].

В данной ситуации задача принятия решений сводится к вычислению (определению) свойств анализируемой информации и на формальном уровне может быть сведена к одной постановке. Это задачи исчисления высказываний, предикатов [4], задачи логической диагностики [5] и, наконец, просто плохо формализованные задачи ТРО [6].

Во всех перечисленных задачах имеются множества, разбитые на подмножества, которые заданы примерами объектов – носителями определенного свойства. Таким образом, приходим к классическому варианту задачи распознавания образов с обучением: множество объектов X произвольной природы разбито на некоторое, возможно и бесконечное, число подмножеств (классов) $X_1, \dots, X_l$. Информация о подмножествах $X_1, \dots, X_l$ задана с помощью конечной выборки X^0 , содержащей объекты из каждого класса X_i . Требуется, пользуясь только выборкой X^0 , указать алгоритм A (может быть, наилучший в некотором смысле), определенный на всем множестве X , результат работы которого для каждого $x \in X$ можно интерпретировать в терминах принадлежности классам X_i .

Задача распознавания в приведенной постановке является индуктивной по построению, и все алгоритмы, используемые для ее решения, будут эвристическими. Вместе с тем в задачах принятия решений даже в условиях индуктивности необходимо, чтобы результат был в максимальной степени строгим. Для этого в ТРО разработана методология, характерная именно для индуктивных задач. Ее суть заключается в следующем: вначале с помощью эвристических алгоритмов получается возможное решение, которое затем улучшается допустимыми математическими средствами. Это позволяет как минимум существенно упростить требования к алгоритмам, а как максимум повысить качество финального решения.

На рис. 1 приведена общая схема построения многоуровневых моделей распознавания для случая, когда число уровней равно двум. Обобщение для большего числа уровней очевидно.

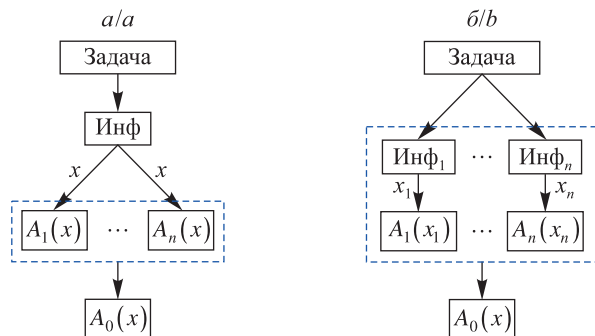


Рис. 1. Общая схема построения двухуровневых моделей распознавания (Инф – информация):
а – вариант 1; б – вариант 2

Fig. 1. General scheme for constructing two-level recognition models:
a – variant 1; b – variant 2

Принципы построения моделей в представленных двух вариантах различаются. В варианте 1 (см. рис. 1, а) строится суперпозиция алгоритмов $A_1, \dots, A_n$ и некоторых отображений, результатом чего является алгоритм A_0 . Все алгоритмы работают с одним входным объектом x . В варианте 2 (см. рис. 1, б) информация о задаче структурируется (декомпозируется). Каждый алгоритм A_i работает со своим входным объектом x_i , а алгоритм A_0 применяется для синтеза результата на входном объекте x , который является суперпозицией объектов $x_1, \dots, x_n$.

Предполагается рассмотреть варианты построения многоуровневых (двухуровневых) алгоритмов распознавания в контексте задачи принятия решений.

Многоуровневые модели корректировки

Активное использование варианта 1 (см. рис. 1, а) в ТРО было инициировано Ю. И. Журавлевым [7]. Смысл его предложения был очень простым. Поскольку эвристические алгоритмы являются плохо управляемыми, то, получив с их помощью на первом шаге хоть какое-то решение, на следующем шаге можно скорректировать его так, чтобы итоговое решение было лучше любого из исходных решений, полученных эвристическими алгоритмами. Тем самым управление решением передавалось на второй либо последующие шаги, а требования к эвристическим алгоритмам существенно понижались. Также было замечено, что любой алгоритм распознавания можно рассматривать как суперпозицию распознающего оператора и решающего правила. Вследствие этого исследования таких схем стали развиваться в двух направлениях. В рамках первого направления предполагалось, что набором алгоритмов $A_1, \dots, A_n$ доставляется финальный результат, который формируется на базе пространства $\mathbb{B}_2 = \{0, 1\}$ либо $\mathbb{B}_3 = \{0, 1, 2\}$. Данное направление стало называться логической корректировкой, так как для построения алгоритма A_0 использовалась алгебра логики [8]. В рамках второго направления в качестве алгоритмов $A_1, \dots, A_n$ применялись распознающие операторы, которые в общем случае формируют результат на базе пространства действительных чисел $\mathbb{R}$. Благодаря этому для построения алгоритма A_0 на уровне распознающих операторов можно использовать обычные алгебраические операции, а далее остается достроить суперпозицию с решающим правилом. Такое направление называется алгебраической корректировкой.

Уточним постановку задачи распознавания, а также введем некоторые дополнительные обозначения. Уточнение постановки связано со свойством алгоритма «может быть, наилучший в некотором смысле». Дело в том, что в задаче имеется только конечная выборка объектов $X^0 \subset X$. При условии, что множество X разбито на подмножества $X_1, \dots, X_l$, информация $P(x) = (P_1(x), \dots, P_l(x))$ считается заданной для всех $x \in X^0$. Здесь $P_i(x) \in \{0, 1\} \wedge (P_i(x) = 1 \Leftrightarrow x \in X_i)$ – обычный предикат, характеризующий принадлежность классам X_i . Так как система предикатов $P(x)$ определена только для объектов $x \in X^0$, то и наилучший в любом смысле алгоритм можно определить лишь на этих объектах. В итоге выборка объектов $X^0 \subset X$ обычно разбивается на две выборки – обучающую ($X_S^0 \subset X, |X_S^0| = m, \forall i \in \{1, \dots, l\}, X_i \cap X_S^0 \neq \emptyset$) и контрольную ($X_C^0 \subset X, |X_C^0| = q, \forall i \in \{1, \dots, l\}, X_i \cap X_C^0 \neq \emptyset$). Эти выборки удовлетворяют условию $X_S^0 \cap X_C^0 = \emptyset, X_S^0 \cup X_C^0 = X^0$. Теперь свойство «может быть, наилучший в некотором смысле» подразумевает, что алгоритм A должен доставлять результат, наилучший для выборки X_C^0 . С учетом этого уточним постановку задачи распознавания следующим образом: требуется, пользуясь только выборкой X_S^0 , указать алгоритм A , являющийся наилучшим для контрольной выборки X_C^0 и определенный на всем множестве X , результат работы которого для каждого $x \in X$ можно интерпретировать в терминах принадлежности классам X_i .

Задачу, которая решается в такой постановке, обозначим через $Z = (X_S^0, X_C^0)$. Нетрудно заметить, что каждой выборке $X_C^0 = \{x_1, \dots, x_q\}$ можно поставить в соответствие матрицу $I(X_C^0) = [P(x_1), \dots, P(x_q)] \in \mathbb{B}_2^{q \times l}$. Назовем ее информационной матрицей для задачи Z . Теперь алгоритм распознавания можно определить как отображение вида $\forall x \in X, A: x \times X_S^0 \rightarrow (P_1^A(x), \dots, P_l^A(x))$, где $P_i^A(x) \in \mathbb{B}_2 \vee \mathbb{B}_3$. Но независимо от выбора пространства результатов в последнем случае выборке X_C^0 сопоставим матрицу $I^A(X_C^0) = [P^A(x_1), \dots, P^A(x_q)] \in \mathbb{B}_2^{q \times l} \vee \mathbb{B}_3^{q \times l}$. Здесь через $P^A(x) = (P_1^A(x), \dots, P_l^A(x))$ обозначена система предикатов, полученная с помощью алгоритма A . В свою очередь, матрица $I^A(X_C^0)$ может быть названа алгоритмической матрицей для задачи Z . Перейдем непосредственно к рассмотрению результатов различных видов корректировки.

Логическая корректировка. Зафиксируем задачу Z и набор эвристических алгоритмов $A_1, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Результатом решения задачи Z алгоритмом A_i будет матрица $I^{A_i}(X_C^0) \in \mathbb{B}_2^{q_l} \vee \mathbb{B}_3^{q_l}$, которая в силу эвристичности алгоритма A_i может не совпадать с матрицей $I(X_C^0)$. Предположим, что любая оптимизация алгоритма A_i , которая привела бы к уменьшению указанного несовпадения, либо невозможна, либо избыточно трудозатратна. В таких условиях уместно ввести некоторую функцию $f: (\mathbb{B}_3^{q_l})^n \rightarrow \mathbb{B}_3^{q_l}$. Если при этом потребовать, чтобы f была инвариантна относительно размерности задачи (величин q, l , числа алгоритмов n), а также строилась только с помощью логических операций (дизъюнкции ($\vee$), конъюнкции ($\wedge$), отрицания ($\neg$)), то вполне уместно говорить, что с помощью f можно корректировать результаты $A_1(X_C^0), \dots, A_n(X_C^0)$. Соответствующий алгоритм A_f называется логическим корректором (на рис. 1 он обозначен через A_0). Заметим также, что аналогичную функцию f можно ввести и для пространства $\mathbb{B}_2^{q_l}$. Во всех случаях приходим к следующей задаче: необходимо построить логический корректор A_f , который улучшает результаты работы эвристических алгоритмов, и при этом снизить сложность его реализации.

Результаты решения такой задачи в полном объеме можно найти в работе [9]. Ниже излагается только их суть и дается краткий анализ.

Первый результат касается построения оптимального по качеству логического корректора. Для этого из матриц $A_1(X_C^0), \dots, A_n(X_C^0)$ строится специальная матрица T , столбец i которой соответствует последовательности наборов строк матрицы $A_i(X_C^0)$. Для оценки качества алгоритма вводится функционал качества $\varphi: \mathbb{B}_3^{q_l} \times \mathbb{B}_2^{q_l} \rightarrow \mathbb{R}$, который вычисляется покомпонентно следующим образом: $\varphi(0, 0) = \varphi(1, 1) = 0$, $\varphi(0, 1) = \varphi_{01}$, $\varphi(1, 0) = \varphi_{10}$, $\varphi(2, 0) = \varphi_{20}$, $\varphi(2, 1) = \varphi_{21}$. Корректирующую функцию f предлагается строить как набор строк матрицы T . Доказано, что в этом наборе с помощью простых замен можно осуществить конструктивное построение f^* , для которого $\varphi(I^{A_{f^*}}(X_C^0), I(X_C^0)) \rightarrow \min$. Также показано, что сложность построения алгоритма A_{f^*} не превосходит $O(q^2 l^2)$.

Второй результат касается реализации функций f на базе формул трехзначной логики. Для этого вначале определяются функции, аналогичные дизъюнктивным нормальным формам (ДНФ) двухзначной логики. Для построения f используется матрица T . В этом случае f можно рассматривать как не всюду определенную функцию трехзначной логики на решетке E_n^3 . В итоге задачу построения корректора можно свести к продолжению f на E_n^3 . Последнюю задачу предлагается рассматривать в классе нормальных канонических форм [10]. Построение искомой функции f осуществляется в несколько этапов. Вначале с помощью матрицы T строятся ДНФ, соответствующие различным областям истинности. Затем для продолжения на решетке E_n^3 осуществляется специальная операция склеивания построенных ДНФ. И наконец, для полученной функции строится сокращенная (тупиковая) ДНФ, что позволяет существенно снизить сложность итогового алгоритма A_f .

Необходимо отметить еще два обстоятельства. Во-первых, любое теоретическое исследование в такой области, как ТРО, было бы неполноценным без подкрепления практическими результатами. В этом смысле исследование логической корректировки можно считать вполне полноценным. Описанные выше алгоритмы A_f использовались при решении практических задач. Полученные при этом результаты подтвердили возможность применения таких алгоритмов на практике. Более подробно с данными выводами можно ознакомиться в работе [11]. Во-вторых (и это, может быть, самое главное), алгебры $\mathfrak{B}_2 = \langle \mathbb{B}_2^{q_l}, \wedge, \vee, \neg \rangle$ и $\mathfrak{B}_3 = \langle \mathbb{B}_3^{q_l}, \wedge, \vee, \neg \rangle$ не являются конечно представимыми и, как следствие, не содержат базис. По этой причине логические корректоры не обладают всеми необходимыми свойствами, обеспечивающими существование алгоритмов, точных для задачи Z . В лучшем случае удастся построить оптимальный алгоритм, что не позволяет ничего сказать о разрешимости задачи в глобальном смысле.

Алгебраическая корректировка. Смысл алгебраической корректировки также очень простой. Алгоритм $A: x \times X_S^0 \rightarrow (P_1^A(x), \dots, P_l^A(x))$, который плохо поддается корректировке логическими функциями f , заменяется на новый. Для этого вводится более «богатое» по сравнению с $\mathbb{B}_3^l$ ($\mathbb{B}_2^l$) пространство Y (как правило, $Y = \mathbb{R}^l$), но с одним ограничением: должно существовать отображение $c: Y \rightarrow \mathbb{B}_3^l$ ($\mathbb{B}_2^l$) (называемое обычно решающим правилом), которое является непротиворечивым и допускает существование корректных алгоритмов таких, что $I^A(X_C^0) = I(X_C^0)$. Отображение $B: x \times X_S^0 \rightarrow Y$, являющееся частью исходного алгоритма A , называется обычно распознающим оператором. В работе [7] показано,

что всякий алгоритм A допускает представление в виде суперпозиции распознающего оператора B и корректного решающего правила c (для этого отображение c должно быть просто сюръективным).

Введем в пространстве Y операторные корректоры $g: Y \rightarrow Y$, подходящая суперпозиция которых с наборами распознающих операторов и образует искомые алгебры. В работах [7; 8] было показано, что для большинства известных эвристических моделей построение корректных алгоритмов может быть осуществлено в рамках линейной алгебры. Правда, к таким моделям предъявлялись достаточно серьезные требования: существование набора операторов B , которые на контрольной выборке размерности q образуют базис пространства матриц $(Y)^q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{ql}$. Таким образом, в рамках данного направления можно сформулировать следующую задачу: необходимо указать отличные от линейных методы построения операторных корректоров g , обеспечивающих существование (а еще лучше построение в явном виде) корректных алгоритмов в модели A_g , а также определить, как это сделать наиболее простым с вычислительной точки зрения способом и, главное, что это дает для разрешимости задачи Z .

Более подробное описание соответствующих результатов можно найти в работе [11]. Ниже приводится их краткий обзор. Итак, начнем с того, что необходимо решить задачу Z , причем указать в модели A_g корректный алгоритм такой, что $I^A(X_C^0) = I(X_C^0)$. Зафиксируем решающее правило c в пространстве $\mathbb{R}^{ql}$ и построим область $R_c(Z)$ такую, что $\forall b \in \mathbb{B}_2^{ql}, \exists r \in R_c(Z): c(r) = b$. Последнее условие гарантируется сюръективностью c , а то, что оно приводится только для $\mathbb{B}_2^{ql}$, не ограничивает общности изложенных ниже результатов. Теперь можно сформулировать первый результат: для корректности модели A_g на Z необходимо и достаточно, чтобы $A_g(X_C^0) \cap R_c(Z) \neq \emptyset$. Этот простой критерий корректности дает возможность свести исходную задачу к исследованию области $R_c(Z)$. Данная область образует выпуклое подмножество в пространстве $\mathbb{R}^{ql}$, что в классе линейных пороговых решающих правил c позволяет рассматривать ее как решение системы нестрогих линейных неравенств. Множество таких решений может быть охарактеризовано в терминах отделимости специальным образом построенных подпространств. Для их описания потребуется следующее обозначение. Разобьем множество индексов $I = \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, l\}$ на два ($t \in \{0, 1\}$) подмножества: $M_t = \{(i, j) | (i, j) \in I, P_j(x_i) = t\}$. Такая возможность существует в силу введенных выше ограничений. Теперь критерий корректности можно сделать более конструктивным: для корректности модели A_g на Z необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists B \in g(B_1, \dots, B_m) : \left(\min_{(i, j) \in M_1} \left\{ \left\langle B(X_C^0), E_{ij} \right\rangle \right\} > c_0 \geq \max_{(i, j) \in M_0} \left\{ \left\langle B(X_C^0), E_{ij} \right\rangle \right\} \right),$$

где $g(B_1, \dots, B_m)$ – суперпозиция отображений g и набора распознающих операторов $B_1, \dots, B_m$ ($m \in \mathbb{N}$); E_{ij} – канонический базис в пространстве $\mathbb{R}^{ql}$; $\langle B(X_C^0), E_{ij} \rangle$ – скалярное произведение матриц в пространстве $\mathbb{R}^{ql}$; c_0 – параметр линейного порогового решающего правила c .

Введем два вида алгебр: $\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{R}^{ql}, +, \circ \rangle$ (имеет тип $\langle 2, 1 \rangle$; символ $\circ$ обозначает унарную операцию умножения матрицы на скаляр) и $\mathfrak{A}_2 = \langle \mathbb{R}^{ql}, +, \times, \circ \rangle$ (имеет тип $\langle 2, 2, 1 \rangle$). Обе алгебры являются коммутативными относительно введенных операций, т. е. операции выполняются покомпонентно. Дело в том, что в общем случае $q \neq l$, и поэтому определить иначе коммутативные алгебры невозможно. Нетрудно заметить, что алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ представляют собой модели для построения искомой суперпозиции. Для алгебры $\mathfrak{A}_1$, линейной по построению, без труда можно определить условия полноты (так как она является конечно представимой и содержит базис) и корректности. Фактически эти условия повторяют полученные в работе [8] результаты. Что касается алгебры $\mathfrak{A}_2$, то это уже полиномиальная модель. Для нее могут быть получены более интересные результаты. Полнота для алгебры $\mathfrak{A}_2$ также связана с существованием распознающих операторов B , обеспечивающих возможность алгебраического несовпадения для каждого элемента из множества I , а вот корректность определяется условием, позволяющим отличать в алгебраическом смысле элементы из множества M_1 . Кроме того, показано, что в алгебре $\mathfrak{A}_3 = \langle \mathbb{R}^{ql}, +, \circ^{-1}, \circ \rangle$ (имеет тип $\langle 2, 1, 1 \rangle$; символ $\circ^{-1}$ обозначает операцию коммутативного обращения матриц) условия корректности могут быть получены в линейном замыкании [11].

Еще один вид операторных корректоров можно построить, основываясь на изоморфизме пространства $\mathbb{R}^{ql}$ и тензорного произведения $\mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^l$. Для этого можно использовать билинейное отображение $h: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{ql}$ (билинейным оно названо, так как является линейным по каждой из двух переменных – классам и объектам контрольной выборки). Детали построения таких корректоров изложены в работах [9; 12]. Полученную в итоге билинейную модель обозначим через $\mathfrak{A}_4$ (в данном случае не

совсем уместно использовать алгебраическую нотацию, так как здесь скорее можно вести речь о суперпозиции алгебр). Для нее основной результат сформулируем следующим образом: в $\mathfrak{A}_4$ корректный алгоритм A можно построить, если существует распознающий оператор B такой, что строки матрицы $B(X_C^0)$ не совпадают для всех объектов из X_C^0 , принадлежащих различным классам. Для модели $\mathfrak{A}_4$ также определено условие полноты и предложен явный вид корректного алгоритма A .

Полученные для алгебраической корректировки результаты позволили расширить представление о разрешимости задачи распознавания в целом. Ранее при рассмотрении задачи оптимизации для логической корректировки вводились специальные функционалы качества φ . Теперь сделаем небольшое уточнение для данных функционалов в терминах предикатов $P(x)$ и $P^A(x)$. Для этого зафиксируем некоторый алгоритм A и предположим, что ему можно сопоставить подмножества $X_i^A = \{x \in X : P_i^A(x) = 1\}$.

Почти очевидно, что $X_i \neq X_i^A$ для всех $i \in \{1, \dots, l\}$, но тем не менее $X^A = \bigcup_{i=1}^l X_i^A = \bigcup_{i=1}^l X_i = X$. Тогда лю-

бая монотонная функция $\varphi_A : X \times X^A \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая условиям $\varphi_A(X, X^A) = 1$, если $X = X^A$, и $\varphi_A(X, X^A) = 0$, если $X \cap X^A = \emptyset$, представляет собой функционал качества алгоритма A . Очевидно, что задача Z может быть названа разрешимой, если существует такой алгоритм A , для которого $\varphi_A(X, X^A) = 1$. В задаче распознавания все множество X является недоступным, имеется только конечная выборка объектов $X^0 \subset X$. Более того, качество алгоритма A можно оценивать только на контрольной выборке X_C^0 . Исходя из этого, если говорить о разрешимости задачи Z , то интерес представляет связь между $\varphi_A(X, X^A)$ и $\varphi_A(X_C^0, X_C^{0A})$. Такая связь также почти очевидна: $\forall A \left(\varphi_A(X, X^A) < 1 \Leftrightarrow \exists X_C^0, \varphi_A(X_C^0, X_C^{0A}) < 1 \right)$. Непосредственным следствием данной эквивалентности будет такое утверждение: корректность алгоритма A является необходимым условием разрешимости задачи. С использованием этой зависимости можно получить целый ряд достаточных условий разрешимости, а также условия на структуру контрольной выборки X_C^0 , метод корректировки для построения пространства X .

Сформулируем теперь некоторые выводы из приведенного описания способов решения задачи распознавания. Первый вывод: для логической и алгебраической корректировок достаточно двухуровневой схемы. Для логической корректировки это обуславливается тем, что соответствующие алгебры не являются конечно представимыми и, как следствие, не содержат базис. Для алгебраической корректировки дело обстоит несколько иначе. В данном случае может быть сформулирован в некотором смысле предельный результат, который стал следствием развития такого подхода. Суть этого результата очень проста: если объекты контрольной выборки не совпадают, а эвристический алгоритм не является невырожденным, то в билинейном замыкании единственного распознающего оператора всегда может быть конструктивно построен корректный (точный для заданной выборки) алгоритм. Отсюда почти очевидно такое утверждение: если корректный алгоритм невозможно построить в двухуровневой модели, то его невозможно построить в принципе для рассматриваемой задачи. Второй вывод касается постановочной сути задачи. В процессе решения любой задачи приходится ограничиваться рассмотрением только корректных алгоритмов, что обеспечивает лишь необходимые условия разрешимости задачи распознавания на всем множестве допустимых объектов. Любые другие предположения относительно структуры информации, свойств алгоритмов и прочих параметров носят исключительно теоретический характер и не оказывают влияния на индуктивность задачи. И наконец, третий вывод имеет в большей степени практический характер. За пределами контрольной выборки X_C^0 алгебраический корректор A_0 вел себя не совсем адекватно. Когда речь шла о нелинейных замыканиях (степенные корректоры, билинейные операторы [11]), то соответствующие алгоритмы отказывались от распознавания даже при небольших отклонениях от объектов контрольной выборки. Можно предположить, что при использовании линейных корректоров [7] алгоритмы были бы лучше, но для них, к сожалению, нет явного вида алгоритмов. Последнее обстоятельство затрудняет практическую проверку линейных корректоров.

Многоуровневые модели, основанные на структурировании информации

Перейдем теперь к обсуждению варианта 2, представленного на рис. 1, б. В этом варианте подразумевается, что решение задачи осуществляется через структурирование информации. Изложенные ниже результаты можно разделить на два направления. В первом из них структурируется выборка объектов X^0 , а во втором – признаковое пространство, в котором определено множество X . Сразу отметим, что в первом

случае решение полностью соответствует схеме, приведенной на рис. 1, б. Во втором случае требуется незначительное уточнение схемы, которое представлено на рис. 2. Стоит упомянуть, что само по себе структурирование информации играет несущественную роль, обычно оно осуществляется для достижения одной из следующих целей. Первая цель – это уменьшение сложности решения исходной задачи через ее разбиение на подзадачи. Такое разбиение обычно называется декомпозицией. Вторая цель, которая здесь также достижима, – это синтез алгоритма как результат комбинирования алгоритмов, решающих отдельные подзадачи в рамках построенной структуры. Эти подзадачи двойственны и могут рассматриваться в рамках единой методологии. Ниже приводится интерпретация результатов в контексте достижения второй цели.

Синтез алгоритмов на основе структурирования выборок. Полное описание результатов, представленных далее, можно найти в работе [13]. Отметим только, что там рассмотрение ведется исходя из достижения первой цели, т. е. речь идет о декомпозиции задачи распознавания. Пусть задана некоторая задача $Z = (X_S^0, X_C^0)$. Предположим, что выборки X_S^0 и X_C^0 можно разбить на конечное число $t \in \mathbb{N}$ подмножеств: $X_S^0 = \{X_S^{0,1}, \dots, X_S^{0,t}\}$ и $X_C^0 = \{X_C^{0,1}, \dots, X_C^{0,t}\}$. Допустим, что между этими выборками можно установить соответствие, которое представим в виде матрицы

$$\begin{matrix} & X_C^{0,1} & \dots & X_C^{0,t} \\ \begin{bmatrix} (X_S^{0,1}, X_C^{0,1}) & \dots & (X_S^{0,1}, X_C^{0,t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_S^{0,t}, X_C^{0,1}) & \dots & (X_S^{0,t}, X_C^{0,t}) \end{bmatrix} & \begin{matrix} X_S^{0,1} \\ \vdots \\ X_S^{0,t} \end{matrix} \end{matrix}$$

Каждый элемент данной матрицы, соответствующий некоторым столбцу $X_C^{0,j}$ и строке $X_S^{0,i}$, можно рассматривать как подзадачу $Z_{ij} = (X_S^{0,i}, X_C^{0,j})$. Полное описание всего множества таких задач получается в том случае, если имеется набор подзадач Z_{ii} , $i \in \{1, \dots, l\}$. По нему же восстанавливается исходная задача Z . Таким образом, при описании свойств, которыми должно обладать разбиение, можно ограничиться свойствами набора из t подзадач. Показано, что при выполнении условий $X_S^{0,i} \cap X_S^{0,j} = \emptyset$, $X_C^{0,i} \cap X_C^{0,j} = \emptyset \forall i \neq j$ для большинства известных моделей распознавания решения подзадач Z_{ii} соответствующими алгоритмами A_i совпадут с решением задачи Z алгоритмом $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_l$ (символ $\oplus$ обозначает операцию прямого суммирования), при этом существует условие, которому каждый алгоритм A_i должен удовлетворять на подзадачах Z_{ui} при $u \neq i$, и оно является необходимым и достаточным.

Условия, о которых идет речь выше, хотя и просты, но не очень конструктивны, так как в большей степени носят существовательный характер. По этой причине проверить их выполнение на практике непросто. Чтобы избежать подобных затруднений, определены еще два достаточных условия, при выполнении которых на наборе задач искомым алгоритм может быть получен также прямым суммированием алгоритмов A_i . Для формулировки первого условия введем понятие линейной оболочки $l(X_S^{0,i} \cup X_C^{0,i})$ в пространстве X . Оказывается, если подзадачи Z_{ii} , $i \in \{1, \dots, l\}$, удовлетворяют условию $\forall i, j \in \{1, \dots, t\}$, $l(X_S^{0,i} \cup X_C^{0,i}) \cap l(X_S^{0,j} \cup X_C^{0,j}) = \emptyset$ при $i \neq j$, то результат будет аналогичен сформулированному выше в тех же самых моделях и с теми же последствиями для синтеза алгоритмов. Для определения второго достаточного условия введем понятие характеристического вектора. Пусть $R_i \subset \mathbb{R}$ ($i = \{1, \dots, n\}$), $R_1 \times \dots \times R_n \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $\gamma_{(R_1, \dots, R_n)}(x) = (\gamma_{R_1}(x_1), \dots, \gamma_{R_n}(x_n))$, определенное для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ на основании правила $(\gamma_{R_i}(x) = 1, x \in R_i) \wedge (\gamma_{R_i}(x) = 0, x \notin R_i)$, назовем характеристическим вектором. По аналогии с линейной оболочкой можно определить характеристическую оболочку: $\gamma_{(R_1, \dots, R_n)}(X_S^{0,i} \cup X_C^{0,i})$. В этом случае легко доказать, что если для всех подзадач выполняется условие $\forall i, j \in \{1, \dots, t\}$, $\gamma_{(R_1, \dots, R_n)}(X_S^{0,i} \cup X_C^{0,i}) \cap \gamma_{(R_1, \dots, R_n)}(X_S^{0,j} \cup X_C^{0,j}) = \emptyset$ при $i \neq j$, то результат снова будет аналогичен сформулированному выше.

Таким образом, для реализации алгоритмов по варианту 2 потребуется построить совокупность подзадач Z_{ii} , $i \in \{1, \dots, l\}$, проверить выполнение одного из трех условий (указанных выше), а затем синтезировать алгоритм в виде $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_l$. При выполнении всех условий решение (и даже корректность) сохраняется. Но во всех случаях алгоритмы остаются эвристическими.

Синтез алгоритмов на основе структурирования признакового пространства. Необходимость в подобных алгоритмах часто возникает при решении задач медицинской диагностики [14]. Для таких задач часть информации о диагнозе, как правило, берется из литературы в виде логических построений (правил), а часть информации – из личного опыта врача. В последнем случае информация обычно не формализована и может быть представлена в виде примеров (прецедентов). Таким образом, имеем дело с вариантом 2. Для установления диагноза, когда информация представлена по правилам, используется алгоритм A_1 . Традиционно в качестве такого алгоритма применяется метод (алгоритм) резолюций Робинсона, который реализует логический вывод. В свою очередь, для диагностики по примерам целесообразно использовать подходящий алгоритм распознавания A_2 . Но здесь могут возникнуть проблемы. Для одного и того же пациента алгоритм A_1 по части описания, соответствующей логической информации, может предложить одно решение, а алгоритм A_2 по другой части описания может предложить иное решение. Возникает вопрос, нельзя ли объединить решения $A_1(x)$ и $A_2(x)$, чтобы получить интегрированный результат $A_0(x)$.

Предлагаемый подход к решению указанной проблемы основан на модификации двухуровневой модели в варианте 2. Схематично это решение представлено на рис. 2.

Возможность такого объединения информации возникает по причине того, что в предметной области часто можно выполнить бинеаризацию признакового пространства. В данном случае правила представляются в виде формул алгебры логики, а прецедентная информация рассматривается как векторы в пространстве $\mathbb{B}_2^n$ ($n \in \mathbb{N}$). По этой причине предлагается вначале построить специальный алгоритм распознавания, ориентированный на работу в таком пространстве. Для его построения можно использовать меру прецедентности $\mu : \mathbb{B}_2^n \times \mathbb{B}_2^n \rightarrow [-1, 1]$ как функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{B}_2^n \begin{cases} \mu(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \\ \mu(x_1, x_2) = \mu(x_2, x_1), \\ \mu(x_1, x_2) + \mu(x_1, \bar{x}_2) = 0, \end{cases}$$

где $\bar{x}_2$ – логическое отрицание объекта x_2 . Введем обозначения $I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$, $L \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, l\}$ и некоторую матрицу $\|a_{ij}\| \in \mathbb{R}^{ln}$. Будем полагать, что элементы данной матрицы удовлетворяют следующим условиям: $\forall i, j, a_{ij} \geq 0$; $\forall i, \sum_j a_{ij} > 0$. И наконец, так как речь идет о задаче распознавания, будем считать, что заданы все ее компоненты в виде выборок X^0, X_S^0, X_C^0 . В результате проведенных рассуждений алгоритм A_2 можно рассматривать как отображение $\forall x \in X, A : x \times X_S^0 \rightarrow (P_1^A(x), \dots, P_l^A(x))$ и описать в виде последовательности следующих шагов.

Шаг 1. Фиксируем некоторый объект $x \in X$.

Шаг 2. Для каждого $i \in L$ и для всех $x_v \in X_{S,i}^0$ вычисляем

$$\mu(x, x_v) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^{-1} \times \left(\sum_{j=1}^n (-1)^u \times a_{ij} \right),$$

где

$$u = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \neq x_{vj}, \\ 2, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Шаг 3. Если все $x_v \in X_{S,i}^0$ исчерпаны, то вычисляем

$$P_i^A(x) = \max_{x_v \in X_{S,i}^0} \{ \mu(x, x_v) \}.$$

Если номера классов $i \in L$ не исчерпаны, то выбираем очередной класс $i \in L$ и возвращаемся к шагу 2. В противном случае алгоритм заканчивает работу.

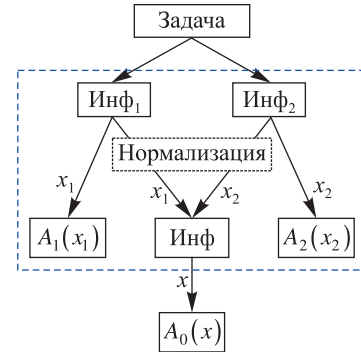


Рис. 2. Схема для задачи со структуризацией признакового пространства
Fig. 2. Scheme for a problem with structuring feature space

Нетрудно заметить, что описанный алгоритм A однозначно связан с параметрами $\|a_{ij}\|$, выбор и способ подсчета которых определяется в основном внеалгоритмическими соображениями: выбором пространства описания объектов из множества X , желанием придать числам $a_{ij} \in \mathbb{R}$ и величинам $P_i^A(x)$ некоторую содержательную интерпретацию, способом формализации понятия прецедентности объектов и т. п. Для лучшего понимания задачи и анализа исходной информации величины $P_i^A(x)$ желательно интерпретировать в терминах предметной области, поэтому выбор и способ подсчета параметров $\|a_{ij}\|$ имеют существенное значение. Хотя стоит заметить, что работа алгоритма A от этого зависит несильно. К примеру, их значения можно положить равными единице, что для задачи распознавания непринципиально.

Опишем одну из возможных схем определения параметров $\|a_{ij}\|$.

Шаг 1. Фиксируем номер класса $i \in L$.

Шаг 2. Для всех признаков $j \in \{1, \dots, n\}$ вычисляем

$$b_{ij} = (m_i)^{-1} \left(\sum_{x_v \in X_{S,i}^0} x_{vj} \right),$$

где x_{vj} – значение признака j в векторе $x_v \in X_{S,i}^0$.

Шаг 3. Выполняем шаги 1 и 2 до тех пор, пока все номера классов и все признаки в каждом классе не будут исчерпаны. Затем переходим к шагу 4.

Шаг 4. Для всех признаков $j \in I$ и классов $i \in L$ вычисляем

$$b_j = (l)^{-1} \left(\sum_{i=1}^l b_{ij} \right), \quad a_{ij} = |b_{ij} - b_j|.$$

Отметим, что введение такого алгоритма A_2 позволило получить лишь часть решения. Для получения решения на всем объеме информации предлагается информацию из правил преобразовать к объектному представлению. Нетрудно показать, что в этом случае применимым является алгоритм A_2 , при этом результаты его использования совпадают с результатами применения алгоритма резолюций к исходному множеству правил. Предлагается также провести процедуру нормализации, в ходе которой полученное множество объектов объединяется с выборкой $X^0(X_S^0)$. Для объединенной выборки доказано, что нормализация не меняет результатов, которые могли быть получены в случае обратного перехода к исходной информации алгоритмами $A_1(x)$ и $A_2(x)$.

В данном случае синтез заключается в доопределении алгоритма A_2 на множество объектов, полученных в ходе нормализации. С использованием построенной схемы были проведены тесты для данных, содержащихся в различных репозиториях машинного обучения. Кроме того, успешно решены практические задачи из области ортопедии и спортивной травматологии.

Заключение

В работе рассмотрен специальный класс задач принятия решений прецедентного типа, для решения которых, как правило, применяются эвристические алгоритмы. Показано, что данный класс задач сводится к стандартной задаче распознавания образов с обучением. Это позволяет вместо эвристических алгоритмов использовать многоуровневые модели, которые дают возможность повысить точность решения, а в некоторых случаях обосновать его правильность. Приведен анализ различных вариантов построения многоуровневых моделей.

Библиографические ссылки

1. Таха ХА. *Введение в исследование операций*. 7-е издание. Минько АА, переводчик. Москва: Издательский дом «Вильямс»; 2007. 912 с.
2. Мальцев АИ. *Алгебраические системы*. Москва: Наука; 1970. 392 с. (Современная алгебра).
3. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1931;38:173–198. DOI: 10.1007/BF01700692.
4. Laurière J-L. *Intelligence artificielle. Résolution de problèmes par l'homme et la machine*. Paris: Eyrolles; 1987. XI, 473 p.
5. Barwise J, editor. *Handbook of mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland; 1977. XII, 1165 p. (Studies in logic and the foundations of mathematics; volume 90).
6. Nilsson NJ. *Learning machines: foundations of trainable pattern-classifying systems*. New York: McGraw-Hill; 1965. XI, 137 p. (McGraw-Hill series in systems science).

7. Журавлев ЮИ. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. В: Яблонский СВ, редактор. *Проблемы кибернетики. Выпуск 33*. Москва: Физматгиз; 1978. с. 5–68.
8. Журавлев ЮИ. Экстремальные алгоритмы в алгебре над некорректными алгоритмами. *Доклады Академии наук СССР*. 1977;237(3):509–512.
9. Krasnoproshin VV, Obraztsov VA. The choice of algorithms to solve the pattern recognition problem. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 1996;6(3):526–535.
10. Краснопрошин ВВ. Об оптимальном корректоре совокупности алгоритмов распознавания. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1979;19(1):204–215.
11. Zhuravlev YuI, Ablameiko SV, Biryukov AS, Dokukin AA, Krasnoproshin VV, Obraztsov VA, et al. Algorithms for algebraic and logical correction and their applications. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2010;20(2):105–117. DOI: 10.1134/S105466181002001X.
12. Krasnoproshin VV, Obraztsov VA. Problems of solvability and choice of algorithms for decision making by precedence. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2006;16(2):155–169. DOI: 10.1134/S1054661806020027.
13. Краснопрошин В, Образцов В. Сложные задачи распознавания образов и возможности их решения. В: Марков К, Рязанов В, Иванова К, Митов И, редакторы. *Classification, forecasting, data mining*. София: ИТЕА; 2009. с. 69–75 (Information science and computing; number 8).
14. Krasnoproshin VV, Obraztsov VA, Popok SA, Vissia H. Decision-making in sports traumatology. In: Peris-Ortiz M, Álvarez-García J, Del Río-Rama M. *Sports management as an emerging economic activity: trends and best practices*. Cham: Springer; 2017. p. 207–219. DOI: 10.1007/978-3-319-63907-9_13.

References

1. Taha HA. *Operations research: an introduction*. 7th edition. Upper Saddle River: Prentice Hall; 2003. XVII, 830 p. Russian edition: Taha HA. *Vvedenie v issledovanie operatsii*. 7th edition. Min'ko AA, translator. Moscow: Williams Publishing House; 2007. 912 p.
2. Mal'tsev AI. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems]. Moscow: Nauka; 1970. 392 p. (Sovremennaya algebra). Russian.
3. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1931;38:173–198. DOI: 10.1007/BF01700692.
4. Laurière J-L. *Intelligence artificielle. Résolution de problèmes par l'homme et la machine*. Paris: Eyrolles; 1987. XI, 473 p.
5. Barwise J, editor. *Handbook of mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland; 1977. XII, 1165 p. (Studies in logic and the foundations of mathematics; volume 90).
6. Nilsson NJ. *Learning machines: foundations of trainable pattern-classifying systems*. New York: McGraw-Hill; 1965. XI, 137 p. (McGraw-Hill series in systems science).
7. Zhuravlev YuI. [An algebraic approach to solving recognition or classification problems]. In: Yablonskii SV, editor. *Problemy kibernetiki. Vypusk 33* [Problems of cybernetics. Issue 33]. Moscow: Fizmatgiz; 1978. p. 5–68. Russian.
8. Zhuravlev YuI. [Extremal algorithms in algebra over incorrect algorithms]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1977;237(3):509–512. Russian.
9. Krasnoproshin VV, Obraztsov VA. The choice of algorithms to solve the pattern recognition problem. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 1996;6(3):526–535.
10. Krasnoproshin VV. [On the optimal corrector of a set of recognition algorithms]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 1979;19(1):204–215. Russian.
11. Zhuravlev YuI, Ablameiko SV, Biryukov AS, Dokukin AA, Krasnoproshin VV, Obraztsov VA, et al. Algorithms for algebraic and logical correction and their applications. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2010;20(2):105–117. DOI: 10.1134/S105466181002001X.
12. Krasnoproshin VV, Obraztsov VA. Problems of solvability and choice of algorithms for decision making by precedence. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2006;16(2):155–169. DOI: 10.1134/S1054661806020027.
13. Krasnoproshin V, Obraztsov V. [Complex problems of pattern recognition and the possibilities of their solution]. In: Markov K, Ryzanov V, Ivanova K, Mitov I, editors. *Classification, forecasting, data mining*. Sofia: ITHEA; 2009. p. 69–75 (Information science and computing; number 8). Russian.
14. Krasnoproshin VV, Obraztsov VA, Popok SA, Vissia H. Decision-making in sports traumatology. In: Peris-Ortiz M, Álvarez-García J, Del Río-Rama M. *Sports management as an emerging economic activity: trends and best practices*. Cham: Springer; 2017. p. 207–219. DOI: 10.1007/978-3-319-63907-9_13.

Получена 29.06.2023 / исправлена 01.11.2023 / принята 03.11.2023.
Received 29.06.2023 / revised 01.11.2023 / accepted 03.11.2023.

УДК 519.218.64+519.112.6

ОЦЕНКИ КРИТИЧЕСКИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРКОЛЯЦИЙ НА КОНЕЧНЫХ КВАДРАТНЫХ РЕШЕТКАХ

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ¹⁾, А. О. ЗАДОРЖНЮК¹⁾, А. Д. ДОСОВА²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾ЭПАМ Системз, ул. Академика Купревича, 1, корп. 1, 220141, г. Минск, Беларусь

Исследуется задача о нахождении критических вероятностей перколяций на графах конечных квадратных решеток. На основе теоремы Харриса – Кестена о критической вероятности $p_c(\mathbb{Z}^2)$ в бесконечной квадратной решетке доказывается, что точная граница вероятности $p_g(\mathbb{Z}^2)$, при которой имеет место экспоненциальное угасание на бесконечной квадратной решетке, равняется $\frac{1}{2}$. С помощью найденного точного значения величины $p_g(\mathbb{Z}^2)$ устанавливается, что критические вероятности перколяций на конечных квадратных решетках сколь угодно близки к $\frac{1}{2}$ для достаточно больших размеров решетки.

Ключевые слова: перколяция; критическая вероятность; решетка.

Образец цитирования:

Васьковский ММ, Задоржнюк АО, Досова АД. Оценки критических вероятностей перколяций на конечных квадратных решетках. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;3:92–97. EDN: UYFTTX

For citation:

Vaskouski MM, Zadorozhnyuk AO, Dosova AD. Estimates of critical probabilities of percolation on finite square grids. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;3:92–97. Russian. EDN: UYFTTX

Авторы:

Максим Михайлович Васьковский – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Анна Олеговна Задоржнюк – ассистент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Анна Дмитриевна Досова – системный аналитик.

Authors:

Maksim M. Vaskouski, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science. vaskovskii@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0001-5769-3678>

Anna O. Zadorozhnyuk, assistant at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science. a_zadorozhnyuk@mail.ru

Anna D. Dosova, system analyst.

anndosova@gmail.com

ESTIMATES OF CRITICAL PROBABILITIES OF PERCOLATION ON FINITE SQUARE GRIDS

M. M. VASKOUSKI^a, A. O. ZADOROZHNYUK^a, A. D. DOSOVA^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bEPAM Systems, 1 Akademika Kuprevicha Street, 1 building, Minsk 220141, Belarus

Corresponding author: M. M. Vaskouski (vaskovskii@bsu.by)

In this paper, we investigate the problem of determining the critical probabilities of percolation for finite square grids. Basing on the Harris – Kesten theorem on critical probability $p_c(\mathbb{Z}^2)$ in the infinite square grid, we prove that the exact threshold of exponential decay in the infinite square grid is equal to $\frac{1}{2}$. With the help of the evaluated value of $p_g(\mathbb{Z}^2)$ we show that the critical probabilities of percolation on finite square grids are arbitrarily close to $\frac{1}{2}$ when the size of a grid is large enough.

Keywords: percolation; critical probability; grid.

Введение

Математическая теория перколяций представляет собой мощный и эффективный инструмент для решения задач, связанных с протеканием жидкостей в сложных стохастических системах, распространением эпидемий, передачей информации и пр. В последние десятилетия были получены выдающиеся результаты в теории перколяций на решетках, отмеченные медалью Филдса (С. К. Смирнов (2010)).

Задача о перколяции для бесконечных решеток, где каждое ребро (или каждая вершина) считается независимым, впервые была поставлена С. Р. Бродбентом и Дж. М. Хаммерсли в 1957 г. [1]. Тогда же введено понятие порога перколяции (критической вероятности), при превышении которого в системе будет существовать бесконечный перколяционный кластер. С математической точки зрения перколяционный кластер (связный случайный граф) можно интерпретировать как связное подмножество всех проводящих ребер (или вершин) решетки. Нахождение точного значения критической вероятности перколяции представляет собой очень сложную задачу. М. Ф. Сайкс и Дж. У. Эссам в 1964 г. нашли пороги перколяции для некоторых плоских решеток [2]. Для бесконечных квадратных решеток на плоскости Т. Э. Харрисом и Х. Кестеном было доказано, что критическая вероятность равна $\frac{1}{2}$ [3; 4]. Для конечных графов наличие бесконечной связной компоненты в постановке задачи меняется на наличие связной компоненты, мощность которой пропорциональна мощности самого графа с некоторым коэффициентом γ [5]. В статье [5] эта задача исследуется в том числе и для конечных прямоугольных решеток размера $m \times n$. Авторы работы [5] доказывают, что при определенных соотношениях между размерами решетки (в частности, при $m = n$) критические вероятности перколяции отделены сверху от единицы. В настоящей статье для конечных квадратных решеток усиливаются результаты работы [5]: доказывается, что критические вероятности сколь угодно близки к $\frac{1}{2}$ для достаточно больших размеров решетки.

Предварительные сведения

Рассмотрим связный неориентированный граф $G = (V, E)$, $|E| \neq 0$. Для произвольного $p \in [0, 1]$ p -перколяцией будем называть процедуру, при которой каждое из ребер $e \in E$ удаляется с вероятностью $1 - p$ независимо от других ребер. Результатом p -перколяции является случайный граф $G' = (V, E')$, где $E' \subseteq E$.

Определим модели p -перколяции для конечных и бесконечных графов.

Модель p -перколяции для конечных графов. Зададим вероятностное пространство $(\Omega_G, F_G, P_{G,p})$,

соответствующее p -перколяции [6]: $\Omega_G = \prod_{e \in E} \{0, 1\}$, $F_G = 2^{\Omega_G}$, $P_{G,p}(A) = \sum_{\omega \in A} p^{|E'(\omega)|} (1-p)^{|E| - |E'(\omega)|} \forall A \in F_G$.

Пусть $W_{G,p}^{(1)}$ – число вершин наибольшей (по числу вершин) компоненты связности в случайном графе G' , полученном в результате p -перколяции. Для постоянных $p, \alpha, \gamma \in [0, 1]$ обозначим через $\Gamma(p, \alpha, \gamma)$ множество всех связных неориентированных графов G таких, что $P_{G,p}(\gamma|G| \leq W_{G,p}^{(1)}) \geq \alpha$. Заметим, что

связная компонента требуемой мощности для $\gamma = 0$ существует всегда независимо от остальных параметров. Этот случай не представляет интереса, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\gamma > 0$. Критической вероятностью $p_c(G, \alpha, \gamma)$ будем называть величину

$$p_c(G, \alpha, \gamma) = \inf \{p \in [0, 1] : G \in \Gamma(p, \alpha, \gamma)\}.$$

Модель p -перколяции для бесконечных графов. Зададим вероятностное пространство $(\Omega_G, F_G, P_{G,p})$, соответствующее p -перколяции: $\Omega_G = \prod_{e \in E} \{0, 1\}$, F_G – σ -алгебра подмножеств Ω_G , порожденная конечными цилиндрами $\{(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in \Omega_G \mid x_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, k}, k \in \mathbb{N}\}$. На цилиндрических множествах из F_G мера $P_{G,p}$ определяется так же, как в модели p -перколяции для конечных графов. Согласно теореме Каратеодори, задав такую меру на цилиндрических множествах, можно единственным образом продолжить ее на всю σ -алгебру F_G .

Рассмотрим множество графов $\Gamma(p)$, для которых после p -перколяции существует бесконечная связная компонента с положительной вероятностью [3; 4]. Соответственно, критическая вероятность становится функцией лишь от G :

$$p_c(G) = \inf \{p \in [0, 1] : G \in \Gamma(p)\}.$$

Известно, что для графа бесконечной квадратной решетки $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$ [3; 4].

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Определим множество $B(x, n)$ следующим образом:

$$B(x, n) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2 : |y_1 - x_1| \leq n, |y_2 - x_2| \leq n\}.$$

Через $\partial B(x, n)$ будем обозначать множество граничных вершин решетки $B(x, n)$. Далее вместо $B(0, n)$ будем писать $B(n)$.

Определим величину

$$p_g = \sup \left\{ p : \exists c_p \geq 0 \mid \forall n \geq 1 : P_{\mathbb{Z}^2, p}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \leq e^{-c_p n} \right\},$$

где $\partial B(n)$ обозначает граничные вершины решетки $B(n)$, а $0 \leftrightarrow \partial B(n)$ – существование пути между $\partial B(n)$ и началом координат после p -перколяции.

Приведем несколько утверждений, необходимых для доказательства основного результата.

Утверждение 1 [7]. Для любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ существует такое $\gamma_0(\varepsilon)$, что $\frac{W^{(1)}_{B(n), \frac{1}{2} + \varepsilon}}{|B(n)| \gamma_0(\varepsilon)} \rightarrow 1$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$.

Утверждение 2 [6, р. 132]. Пусть $0 < p < \frac{1}{2}$. Тогда существует такое $\lambda(p) > 0$, что $P_{\mathbb{Z}^2, p}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \leq e^{-n\lambda(p)}$ для любого $n \geq 1$.

Пусть A – произвольное непустое подмножество решетки $\mathbb{Z}^2$. Определим диаметр подмножества A следующим образом:

$$\text{diam}(A) = \max \left\{ \sup_{(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A} |x_1 - y_1|, \sup_{(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A} |x_2 - y_2| \right\}.$$

Лемма 1. Пусть $0 < p < p_g$. Тогда найдется такое $c > 0$, что для любых натуральных n и l вероятность существования в $B(n)$ после p -перколяции пути диаметром не менее l не превосходит величины $(2n + 1)^2 e^{-cl}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные n и l . Для каждой вершины $x \in B(n)$ рассмотрим пути, соединяющие эту вершину с $\partial B(x, l)$ после p -перколяции. Суммарная вероятность существования таких путей по всем $x \in B(n)$ не превосходит величины $|B(n)| \sup_{x \in B(n)} P_{B(n), p}(x \leftrightarrow \partial B(x, l) \cap B(n))$. Предположим, что произошло событие «существует путь диаметром не менее l в $B(n)$ после p -перколяции».

То есть в данном пути найдутся две вершины, чьи координаты в одном из измерений отличаются хотя бы на l . Одну из этих вершин обозначим через x и определим вершину $y \in \partial B(x, l)$ таким образом, что путь $x \leftrightarrow y$ впервые пересекает границу решетки $B(x, l)$ в точке y . Следовательно,

$$P_{B(n), p}(\exists \text{ путь диаметром } \geq l \text{ в } B(n)) \leq |B(n)| \sup_{x \in B(n)} P_{B(n), p}(x \leftrightarrow \partial B(x, l) \cap B(n)).$$

Поскольку $p < p_g$, то по определению p_g верно неравенство $P_{B(n), p}(x \leftrightarrow \partial B(x, l) \cap B(n)) \leq e^{-c_p l}$. Таким образом, $P_{B(n), p}(\exists \text{ путь диаметром } \geq l \text{ в } B(n)) \leq (2n+1)^2 e^{-cl}$ для некоторого $c > 0$, не зависящего от n и l . Лемма 1 доказана.

Основные результаты

Теорема 1. Для любых $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $\alpha \in (0, 1)$ существуют такие $\gamma_0(\varepsilon) > 0$, $n_0(\alpha, \varepsilon)$, что $p_c(B(n), \alpha, \gamma) \in \left[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right]$ для любых $\gamma \in (0, \gamma_0)$, $n \geq n_0$.

Доказательство теоремы 1 вытекает из следующих двух предложений.

Предложение 1. Для любых $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $\alpha \in (0, 1)$ найдутся такие $\gamma_0(\varepsilon) > 0$, $n_0(\alpha, \varepsilon)$, что для любых $\gamma \in (0, \gamma_0)$, $n \geq n_0(\alpha, \varepsilon)$ выполняется неравенство $p_c(B(n), \alpha, \gamma) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Доказательство. Положим, что $p = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Воспользуемся утверждением 1. Для любых $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ найдется такое n_0 , что $\forall n \geq n_0$ справедливо неравенство

$$P_{B(n), p} \left(\left| \frac{W_{B(n), p}^{(1)}}{|B(n)|\gamma_0(\varepsilon)} - 1 \right| > \varepsilon_0 \right) < \varepsilon_1.$$

Отсюда получаем

$$P_{B(n), p} \left(-\varepsilon_0 \leq \frac{W_{B(n), p}^{(1)}}{|B(n)|\gamma_0(\varepsilon)} - 1 \leq \varepsilon_0 \right) \geq 1 - \varepsilon_1.$$

Возьмем $\varepsilon_1 = 1 - \alpha$, $\varepsilon_0 = 1 - \frac{\gamma}{\gamma_0(\varepsilon)}$. Тогда имеем

$$\alpha \leq P_{B(n), p}(|B(n)|(1 - \varepsilon_0)\gamma_0(\varepsilon) \leq W_{B(n), p}^{(1)} \leq |B(n)|(1 + \varepsilon_0)\gamma_0(\varepsilon)) \leq P_{B(n), p}(|B(n)|\gamma \leq W_{B(n), p}^{(1)}).$$

Последнее неравенство показывает, что для любых $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ существуют такие $\gamma_0(\varepsilon)$, $n_0(\alpha, \varepsilon)$, что неравенство $p_c(B(n), \alpha, \gamma) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ выполняется для любых $\gamma \leq \gamma_0(\varepsilon)$, $n \geq n_0(\alpha, \varepsilon)$. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Для любых $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, 1]$ найдется такое $n_0(\alpha, \varepsilon, \gamma)$, что для любых $n \geq n_0(\alpha, \varepsilon, \gamma)$ выполняется неравенство $p_c(B(n), \alpha, \gamma) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Доказательство. Сначала докажем, что $p_g \leq p_c(\mathbb{Z}^2)$. Допустим обратное: пусть $p_g > p_c(\mathbb{Z}^2)$. Возьмем p' такое, что $p_c(\mathbb{Z}^2) < p' < p_g$. Поскольку $p' > p_c(\mathbb{Z}^2)$, то при p' -перколяции решетки $\mathbb{Z}^2$ существует бесконечная связная компонента с вероятностью $\alpha > 0$. Существование бесконечной связной компоненты равносильно существованию пути между началом координат и граничными вершинами решетки $\partial B(n)$ для любого n . Произведение вероятностей существования путей $\prod_n P_{\mathbb{Z}^2, p'}(0 \leftrightarrow \partial B(n))$ должно быть больше α . Это означает, что $P_{\mathbb{Z}^2, p'}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) > \alpha$ при каждом n . С другой стороны, так как $p' < p_g$, имеем $P_{\mathbb{Z}^2, p'}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \leq e^{-c_{p'} n}$ по определению p_g . Также $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists n_0(\varepsilon_1, p')$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon_1, p')$

выполняется неравенство $|e^{-c_p n}| \leq \varepsilon_1$. Таким образом, выбирая $\varepsilon_1 < \alpha$, получаем противоречие: $P_{\mathbb{Z}^2, p}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \leq \varepsilon_1 < \alpha$. Следовательно, $p_g \leq p_c(\mathbb{Z}^2)$.

Теперь докажем, что $p_g \geq p_c(\mathbb{Z}^2)$. Используя утверждение 2, получаем, что для любых $p < p_c(\mathbb{Z}^2)$, $n \geq 1$ существует такое $c_p > 0$, что $P_{\mathbb{Z}^2, p}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \leq e^{-c_p n}$. Из определения p_g следует, что $p_g \geq p_c(\mathbb{Z}^2)$.

Таким образом, доказано, что величина p_g равна критической вероятности $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$.

Возьмем $p = \frac{1}{2} - \varepsilon$. Используем лемму 1 для дальнейшего доказательства предложения 2. Число вершин подграфа решетки $B(n)$, в котором не существует пути диаметром не менее l , не превосходит l^2 . Тогда вероятность отсутствия в $B(n)$ после p -перколяции пути диаметром не менее l будет не меньше, чем вероятность отсутствия в $B(n)$ компоненты связности размера не более l^2 . Возьмем $l = \sqrt{\gamma}(2n+1)$. Получаем соотношения

$$\begin{aligned} P_{B(n), p}(W_{B(n), p}^{(1)} \geq \gamma | B(n)) &= 1 - P_{B(n), p}(W_{B(n), p}^{(1)} < \gamma | B(n)) \leq \\ &\leq 1 - P_{B(n), p}(\text{не } \exists \text{ путь диаметром } \geq \sqrt{\gamma}(2n+1)) = P_{B(n), p}(\exists \text{ путь диаметром } \geq \sqrt{\gamma}(2n+1)). \end{aligned}$$

Величина $P_{B(n), p}(\exists \text{ путь диаметром } \geq \sqrt{\gamma}(2n+1))$ не превосходит $(2n+1)^2 e^{-c_p(\sqrt{\gamma}(2n+1))}$. Так как $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists n_0(\varepsilon_1, p, \gamma)$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon_1, p, \gamma)$ выполняется неравенство $\left| (2n+1)^2 e^{-c_p(\sqrt{\gamma}(2n+1))} \right| \leq \varepsilon_1$, то для любого $n \geq n_0\left(\frac{\alpha}{2}, p, \gamma\right)$ справедливо неравенство $P_{B(n), p}(W_{B(n), p}^{(1)} \geq \gamma | B(n)) \leq \frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $p_c(B(n), \alpha, \gamma) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ для любого $n \geq n_0\left(\frac{\alpha}{2}, p, \gamma\right)$. Следовательно, предложение 2, а вместе с ним и теорема 1 доказаны.

Замечание 1. Графы, полученные из исходного графа в результате применения процедуры p -перколяции, можно рассматривать как случайные графы. В частности, такие графы широко используются для моделирования информационных сетей и анализа их производительности [8].

Замечание 2. Модель p -перколяции можно рассматривать как вероятностный аналог модели электрической цепи, в которой каждое ребро соответствует резистору с вероятностью p (при сопротивлении 1 Ом) и $1-p$ (при бесконечно большом сопротивлении). Свойства резистивных расстояний для электрических цепей на решетках исследовались в работе [9].

Библиографические ссылки

1. Broadbent SR, Hammersley JM. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1957;53(3):629–641. DOI: 10.1017/S0305004100032680.
2. Sykes MF, Essam JW. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*. 1964;5(8):1117–1127. DOI: 10.1063/1.1704215.
3. Harris TE. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1960;56(1):13–20. DOI: 10.1017/S0305004100034241.
4. Kesten H. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2. *Communications in Mathematical Physics*. 1980;74(1):41–59. DOI: 10.1007/BF01197577.
5. Malon C, Pak I. Percolation on finite Cayley graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*. 2006;15(4):571–588. DOI: 10.1017/S0963548305007406.
6. Grimmett G. *Percolation*. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag; 1999. XIII, 447 p. (Chern SS, Eckmann B, de la Harpe P, Hiro-naka H, Hirzebruch F, Hitchin N, et al., editors. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 321). DOI: 10.1007/978-3-662-03981-6.
7. Borgs C, Chayes JT, Kesten H, Spencer J. The birth of the infinite cluster: finite-size scaling in percolation. *Communications in Mathematical Physics*. 2001;224(1):153–204. DOI: 10.1007/s002200100521.
8. Русилко ТВ. G-сеть как стохастическая модель сети передачи данных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2023;2:45–54 (на англ.).
9. Задорожнюк АО. Монотонность вероятностей состояний случайного блуждания на конечных решетках. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:38–45. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-38-45.

References

1. Broadbent SR, Hammersley JM. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1957;53(3):629–641. DOI: 10.1017/S0305004100032680.
2. Sykes MF, Essam JW. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*. 1964;5(8):1117–1127. DOI: 10.1063/1.1704215.
3. Harris TE. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1960;56(1):13–20. DOI: 10.1017/S0305004100034241.
4. Kesten H. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. *Communications in Mathematical Physics*. 1980;74(1):41–59. DOI: 10.1007/BF01197577.
5. Malon C, Pak I. Percolation on finite Cayley graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*. 2006;15(4):571–588. DOI: 10.1017/S0963548305007406.
6. Grimmet G. *Percolation*. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag; 1999. XIII, 447 p. (Chern SS, Eckmann B, de la Harpe P, Hironaka H, Hirzebruch F, Hitchin N, et al., editors. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 321). DOI: 10.1007/978-3-662-03981-6.
7. Borgs C, Chayes JT, Kesten H, Spencer J. The birth of the infinite cluster: finite-size scaling in percolation. *Communications in Mathematical Physics*. 2001;224(1):153–204. DOI: 10.1007/s002200100521.
8. Rusilko TV. The G-network as a stochastic data network model. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;2:45–54.
9. Zadorozhnyuk AO. Monotonicity of random walks' states on finite grids. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:38–45. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-38-45.

Получена 09.05.2022 / исправлена 12.10.2023 / принята 13.10.2023.
Received 09.05.2022 / revised 12.10.2023 / accepted 13.10.2023.

О C^* -АЛГЕБРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ИДЕМПОТЕНТАМИ

М. В. ШУКИН¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь

Банаховы алгебры, порожденные идемпотентами, начали интересовать специалистов давно. В 1968–1969 гг. П. Р. Халмош и Г. К. Педерсен изучали структуру C^* -алгебр, порожденных двумя самосопряженными проекторами. Банаховы алгебры, порожденные двумя идемпотентами, были описаны С. Рохом и Б. Зильберманом в 1988 г. Такие алгебры могут иметь неприводимые представления первого или второго порядка. Теория банаховых алгебр, порожденных тремя идемпотентами, полностью не разработана. Такие алгебры могут иметь неприводимые представления любого порядка. В 1974 г. Ф. Краусс и Т. Лоусон описали структуру n -однородных C^* -алгебр над сферами S^2, S^3, S^4 . С использованием этих результатов в настоящей работе доказывается, что n -однородная ($n > 2$) C^* -алгебра с пространством примитивных идеалов $\text{Prim } A \cong S^4$ может быть порождена конечным набором идемпотентов.

Ключевые слова: C^* -алгебра; идемпотент; конечно-порожденная алгебра; число порождающих элементов; примитивный идеал; база расслоения; алгебраическое расслоение; операторная алгебра; неприводимые представления.

ON C^* -ALGEBRAS GENERATED BY IDEMPOTENTS

M. V. SHCHUKIN^a

^aBelarusian National Technical University, 65 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220013, Belarus

Banach algebras generated by two idempotents appear in many places. In 1968–1969 P. R. Halmos and G. K. Pedersen studied C^* -algebras generated by two self-adjoint projections. The Banach algebras generated by two idempotents were described by S. Roch and B. Silbermann in 1988. Such algebras can have irreducible representations of first or second order. The theory of Banach algebras generated by three idempotents has not yet been constructed. Such algebras can have irreducible representations of any order. In 1974 F. Krauss and T. Lawson described the n -homogeneous C^* -algebras over spheres S^2, S^3, S^4 . By using these results we prove that n -homogeneous ($n > 2$) C^* -algebra such that $\text{Prim } A \cong S^4$ can be generated by finite number of idempotents.

Keywords: C^* -algebra; idempotent; finitely generated algebra; number of generators; primitive ideals; base space; algebraic bundle; operator algebra; irreducible representation.

Образец цитирования:

Шукин МВ. О C^* -алгебрах, порожденных идемпотентами. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2023;3:98–103 (на англ.).
EDN: WDLQQR

For citation:

Shchukin MV. On C^* -algebras generated by idempotents. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2023;3:98–103.
EDN: WDLQQR

Автор:

Михаил Владимирович Шукин – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой высшей математики факультета информационных технологий и робототехники.

Author:

Mikhail V. Shchukin, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of high mathematics, faculty of information technology and robotics.
mvshchukin@bntu.by
<http://orcid.org/0000-0002-9351-3774>

Introduction

An element a from an algebra A is idempotent if $a^2 = a$. Moreover, if the Banach algebra A has the operation of involution $*$ and the idempotent a is self-adjoint ($a^* = a$) then the element a is called a projection.

Algebras generated by two idempotents appear in many places. In 1960s P. R. Halmos [1] and G. K. Pedersen [2] studied an C^* -algebra A generated by two projections (p and q) such that the spectrum $\sigma(prp)$ equals to the segment $[0, 1]$. Furthermore, P. R. Halmos supposed that any two sets from $\text{Ker}(p)$, $\text{Im}(p)$, $\text{Ker}(q)$, $\text{Im}(q)$ have the intersection equals to zero.

The Banach algebras generated by two idempotents were studied by S. Roch and B. Silbermann [3]. The approach of the paper uses the PI-algebras that were studied by N. Krupnik. As a result, the next theorem appeared.

Theorem 1 (two projections theorem) [3]. *Let A be a Banach algebra with identity e , and let p and r be idempotents in A . The smallest closed subalgebra of A , which contains p , r and e , will be denoted by B . Then:*

(i) *for each $x \in \sigma_B(e - p - r + pr + rp) \setminus \{0, 1\}$, the mapping $F_x : e, p, r \rightarrow C^{2 \times 2}$ given by*

$$F_x(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F_x(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_x(r) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix},$$

where $\sqrt{x(1-x)}$ denotes any number with $(\sqrt{x(1-x)})^2 = x(1-x)$, extends to a continuous algebra homomorphism from B onto $C^{2 \times 2}$, which we denote also by F_x ;

(ii) *for each $m \in \sigma_B(p + 2r) \cap \{0, 1, 2, 3\}$, the mapping $G_m : \{e, p, r\} \rightarrow C$ given by $G_0(e) = 1$, $G_0(p) = G_0(r) = 0$, $G_1(e) = G_1(p) = 1$, $G_1(r) = 0$, $G_2(e) = G_2(r) = 1$, $G_2(p) = 0$, $G_3(e) = G_3(p) = G_3(r) = 1$ extends to a continuous algebra homomorphism from B onto C ;*

(iii) *an element $a \in B$ is invertible in B if and only if the matrices $F_x(a)$ are invertible for all $x \in \sigma_B(e - p - r + pr + rp) \setminus \{0, 1\}$ and if the numbers $G_m(a)$ are non-zero for all $m \in \sigma_B(p + 2r) \cap \{0, 1, 2, 3\}$.*

The theory of Banach algebras generated by three idempotents is still not constructed. There are some results showing that Banach algebras generated by three idempotents can have a complicated structure. The next theorem appeared in 1955.

Theorem 2 [4]. *The ring B of all bounded operators on separable Hilbert space can be generated by three idempotents in weak topology.*

In this theorem the term «generate» means that the smallest weakly-closed self-adjoint algebra A that contains the idempotents p, q, r and constants coincides with B . On the other hand, the next question is interesting: which Banach algebras can be generated by three and more idempotents in uniform topology?

Theorem 3 [5]. *The algebra $M_n(c)$ ($n \geq 3$) can be generated by three idempotents. The algebra cannot be generated by two idempotents.*

In fact, the Banach algebra A generated by three idempotents can have irreducible representations of any dimension. On the other hand, several algebras that have the same space of irreducible representations can be non-isomorphic. Suppose A is a n -homogeneous C^* -algebra. It means that all irreducible representations for the algebra A are of the order n . If the algebra A is isomorphic to the algebra $M_n(B)$ then the algebra A is called trivial. Here $M_n(B)$ denotes the algebra of all continuous matrix-functions from the set B to the algebra of matrices $C^{n \times n}$. There are also non-trivial n -homogeneous C^* -algebras. It was shown by J. M. G. Fell [6], J. Tomiyama and M. Takesaki [7] in 1961 that every n -homogeneous C^* -algebra is isomorphic to the algebra $\Gamma(E)$ of all continuous sections for the appropriate algebraic bundle (E, B, p) . Here the base space B for the bundle is homeomorphic to the space $\text{Prim } A$ of primitive ideals for the n -homogeneous C^* -algebra A .

Let us remind that a triple (E, B, p) is called bundle if the following conditions hold.

(I) E and B are topological spaces.

(II) $p : E \rightarrow B$ is a continuous surjection.

The space E is called a bundle space; the space B is said to be the base space. The surjection p is called a projection. The set $F = p^{-1}(x)$ is the fiber over a point $x \in B$. For example, consider the product-bundle $E = B \times F$, where B and F are topological spaces. By p denote the projection $B \times F \rightarrow B$ to the first multiplier.

The bundle ξ is said to be the trivial bundle if it is isomorphic to a product-bundle. On the other hand, consider the Mobius tape M . Note that the Mobius tape M is a non-trivial bundle. The circle S^1 is the bundle space. The interval I is the fiber. However M is not isomorphic to the product-bundle $S^1 \times I$. At the same time M is locally trivial. Such bundles can be called twisted bundles.

A G -bundle $\xi = (E, B, p)$ is called as the algebraic bundle if the following conditions hold.

(I) The fiber F_x is the algebra $\text{Mat}(n) = C^{n \times n}$ of square matrices of the order n .

(II) The group G is the group $\text{Aut}(n)$ of all automorphisms for the algebra $\text{Mat}(n)$.

Bundles $\xi_1 = (E_1, B_1, p_1)$ and $\xi_2 = (E_2, B_2, p_2)$ are said to be isomorphic if there exists a homeomorphism $\gamma: E_1 \rightarrow E_2$ such that $\gamma(F_x) = F_{\alpha(x)}$. Here $\alpha: B_1 \rightarrow B_2$ is a homeomorphism of the bases, the set $F_{\alpha(x)} = p_2^{-1}(\alpha(x))$ is the fiber over the point $\alpha(x) \in B_2$. The author considered the n -homogeneous C^* -algebras over the sphere S^2 .

Theorem 4 [8]. *Let A be a n -homogeneous ($n \geq 2$) C^* -algebra. Suppose the space $\text{Prim} A$ is homeomorphic to the sphere S^2 . In this case, there are three idempotents $p, q, r \in A$ such that the minimal Banach algebra containing these elements coincides with the algebra A .*

The next theorem extends the result to a n -homogeneous C^* -algebra A such that $\text{Prim} A \cong P_k$. Here P_k denotes a two-dimensional oriented manifold. The manifold P_k can be realised as the sphere S^2 with k handles attached.

Theorem 5 [9]. *Let A be a n -homogeneous ($n \geq 2$) C^* -algebra. We suppose that the space $\text{Prim} A$ is homeomorphic to the two-dimensional oriented connected manifold P_k . In this case, the algebra A can be generated by three idempotents. The algebra A can not be generated by two idempotents.*

In fact, these results allow to find the minimal number of idempotent generators for several algebras. The next result describes the class of n -homogeneous C^* -algebras that can be generated by finite number of idempotents.

Proposition 1 [10]. *Let A be a finitely generated n -homogeneous ($n \geq 2$) C^* -algebra. We suppose that the algebra A contains at least one idempotent a ($a \neq 0, a \neq 1$). In this case, there exist idempotents $p_1, \dots, p_k \in A$ such that the algebra A can be generated by these elements $p_1, \dots, p_k$.*

Moreover, the class of algebras that can be generated by three idempotents is extremely large. Let us remind that a topological space is separable if it possesses a countable dense subset.

Theorem 6 [11]. *Every separable Banach algebra is isomorphic to a subalgebra of a Banach algebra generated by three idempotents.*

On the other hand, if the Banach algebra A can be generated by N idempotents with some concrete relations between generators then the structure of the algebra A can be described. Let A be a Banach algebra with the identity element e , and let $p_1, p_2, \dots, p_{2N}$ be a partition of the identity into non-zero idempotents: $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$ for all $i, j = 1, \dots, 2N$. Here δ_{ij} is the Kronecker delta, and $p_1 + p_2 + \dots + p_{2N} = e$. Further, let P be an idempotent element of A , set $Q = e - P$ and $p_{2N+1} = p_1$. We suppose that the conditions

$$P(p_{2i-1})P = (p_{2i-1} + p_{2i})P \quad (1)$$

and

$$Q(p_{2i} + p_{2i+1})Q = (p_{2i} + p_{2i+1})Q \quad (2)$$

hold for all $i, j = 1, \dots, N$.

Let us define $p_k = p_l$, where $l \in \overline{1, 2N}$ whenever $k - l$ is divisible by $2N$. We suppose that the algebra B is the smallest Banach algebra that contains $p_1, \dots, p_{2N}$ as well as P . Further, set

$$X = \sum_{i=1}^N (p_{2i-1} P p_{2i-1} + p_{2i} P p_{2i}) \quad (3)$$

and

$$Y = \sum_{i=1}^N (p_{2i-1} P + p_{2i} Q) + \sum_{i=1}^{2N} (2i-1) p_i. \quad (4)$$

Theorem 7 (N projections theorem) [11]. *Let A be a Banach algebra with the identity e , and suppose $p_1, \dots, p_{2N}$ and P are non-zero elements of A satisfying (1)–(4). Further, let B stand for the smallest closed subalgebra of A containing the elements P and $p_1, \dots, p_{2N}$. Then the following assertions hold.*

(I) If $x \in \sigma_B(X) \setminus \{0, 1\}$, then the mapping $F_x: P, p_1, \dots, p_{2N} \rightarrow C^{2N \times 2N}$ given by $F_x(p_i) = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ with one standing at the i^{th} place and

$$F_x(p_i) = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1) \begin{pmatrix} x & x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 & x-1 \\ x & x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 & x-1 \\ x & x & x & x-1 & \cdots & x-1 & x-1 \\ x & x & x & x-1 & \cdots & x-1 & x-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & x & x-1 \\ x & x & x & x & \cdots & x & x-1 \end{pmatrix}$$

extends to a continuous algebra homomorphism from B onto $C^{2N \times 2N}$.

(II) If $m \in \sigma_B(Y) \cap \{1, \dots, 4N\}$, then the mapping $G_m : P, p_1, \dots, p_{2N} \rightarrow C$ defined by

$$G_{4k}(p_i) = \begin{cases} 1, & i = 2k, \\ 0, & i \neq 2k, \end{cases} \quad G_{4k}(P) = 0,$$

$$G_{4k-1}(p_i) = \begin{cases} 1, & i = 2k, \\ 0, & i \neq 2k, \end{cases} \quad G_{4k-1}(P) = 0,$$

$$G_{4k-2}(p_i) = \begin{cases} 1, & i = 2k-1, \\ 0, & i \neq 2k-1, \end{cases} \quad G_{4k-2}(P) = 0,$$

$$G_{4k-3}(p_i) = \begin{cases} 1, & i = 2k-1, \\ 0, & i \neq 2k-1, \end{cases} \quad G_{4k-3}(P) = 0,$$

where $k = 1, \dots, N$, extends to a continuous algebra homomorphism from B onto C .

(III) An element $b \in B$ is invertible in B if and only if the matrices $F_x(b)$ are invertible for all $x \in \sigma_B(X) \setminus \{0, 1\}$ and if the numbers $G_m(b)$ are non-zero for all $m \in \sigma_B(Y) \cap \{1, \dots, 4N\}$.

(IV) An element $b \in B$ is invertible in A if and only if the matrices $F_x(b)$ are invertible for all $x \in \sigma_A(X) \setminus \{0, 1\}$ and if the numbers $G_m(b)$ are non-zero for all $m \in \sigma_A(Y) \cap \{1, \dots, 4N\}$.

The main results

Let $\coprod$ denote the coproduct of two spaces. Suppose e_+^4 and e_-^4 be the upper and lower half-sphere for the sphere S^4 .

Proposition 2 [12]. Let $n \geq 2$ denote the degree of homogeneity for the algebra A , let p be any integer, and let $\text{Prim } A \cong S^4$. The algebra A is C^* -isomorphic to one of the C^* -algebras $A_{n,p} = g_p(e_+^4 \coprod e_-^4, M_n(C))$ given as follows: if $f \in A_{n,p}$ and $(z, w) \in S^3$, then

$$f_+(z, w) = g_p(z, w) \cdot f_-(z, w) = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} & \cdots & 0 \\ w & \bar{z} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^p \cdot f_-(z, w) \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} & \cdots & 0 \\ -w & z & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^p.$$

Theorem 8. Suppose A is the n -homogeneous ($n > 2$) C^* -algebra such that $\text{Prim } A \cong S^4$. In this case, the algebra A can be generated by finite number of idempotents.

Proof. We will construct an idempotent $p \in A$ using proposition 2. Let $E_{n,m}$ be a $n \times n$ matrix of the form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

The matrix $E_{n,m}$ contains one one and $n^2 - 1$ zeros. The number 1 is on the intersection of n^{th} line and n^{th} row. Let the element p equal $E_{n,m}$ on the lower half of S^4 . One can see that the element $E_{n,m}$ does not change under

the transformation described in proposition 2. Therefore, p can be easily extended to the upper half-sphere. We can define the element p easily to be $E_{n,m}$ for all points x on the upper half-sphere. Therefore, the algebra A contains at least one non-trivial idempotent p ($p \neq 0, p \neq 1$). Using proposition 1, we can construct the idempotents $p_1, \dots, p_l$ such that the minimal Banach algebra containing $p_1, \dots, p_l$ coincides with A . The proof is finished.

Conclusions

Finally, the theory of Banach algebras generated by two idempotents is well known now. The theory of Banach algebras generated by three idempotents is still not formulated. One can see that complicated Banach algebras can be generated by three and more idempotents.

It is still an open question: can 2-homogeneous C^* -algebra ($\text{Prim } A \cong S^4$) be generated by finite number of idempotents?

Several authors considered other questions regarding operators and idempotents. For example, the next proposition exists.

Proposition 3 [13]. *Let H be a separable Hilbert space (finite- or countable-dimensional), let $L(H)$ be the space of bounded operators on H , and let I be the identity operator on H . In this case, for any $\lambda \in \mathbb{C}$ and for any operator $B \in L(H)$ there are idempotents $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in L(H)$ such that $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = \lambda I$.*

Also, in work [14] the numbers $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $P_1 + P_2 = \lambda I$, $P_1 + P_2 + P_3 = \lambda I$, $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \lambda I$ were described.

Works [15; 16] contain results for the two projections theory.

Библиографические ссылки

1. Halmos PR. Two subspaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1969;144:381–389. DOI: 10.1090/S0002-9947-1969-0251519-5.
2. Pedersen GK. Measure theory for C^* -algebras II. *Mathematica Scandinavica*. 1968;22:63–74. DOI: 10.7146/math.scand.a-10871.
3. Roch S, Silbermann B. Algebras generated by idempotents and the symbol calculus for singular integral operators. *Integral Equations and Operator Theory*. 1988;11(3):385–419. DOI: 10.1007/BF01202079.
4. Davis C. Generators of the ring of bounded operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1955;6(6):970–972. DOI: 10.1090/S0002-9939-1955-0073138-1.
5. Krupnik N. Minimal number of idempotent generators of matrix algebras over arbitrary field. *Communications in Algebra*. 1992;20(11):3251–3257. DOI: 10.1080/00927879208824513.
6. Fell JMG. The structure of algebras of operator fields. *Acta Mathematica*. 1961;106(3–4):233–280. DOI: 10.1007/BF02545788.
7. Tomiyama J, Takesaki M. Applications of fibre bundles to the certain class of C^* -algebras. *Tohoku Mathematical Journal*. 1961;13(3):498–522. DOI: 10.2748/tmj/1178244253.
8. Shchukin M. Non-trivial C^* -algebras generated by idempotents. In: *ICNODEA-2001. Proceedings of the International conference on nonlinear operators, differential equations and applications; 2001 September 12–15; Cluj-Napoca, Romania. Volume 3*. Cluj-Napoca: Babeş-Bolyai University; 2002. p. 353–359.
9. Shchukin MV. On n -homogeneous C^* -algebras over a two-dimensional compact oriented connected manifold. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2018;2:90–97.
10. Shchukin MV. N -homogeneous C^* -algebras generated by idempotents. *Russian Mathematics*. 2011;55(7):81–88. DOI: 10.3103/S1066369X11070103.
11. Böttcher A, Gohberg I, Karlovich Yu, Krupnik N, Roch S, Silbermann B, et al. Banach algebras generated by N idempotents and applications. In: Böttcher A, Gohberg I, editors. *Singular integral operators and related topics. Joint German – Israeli workshop; 1995 March 1–10; Tel Aviv, Israel*. Basel: Birkhäuser Verlag; 1996. p. 19–54 (Operator theory: advances and applications; volume 90). DOI: 10.1007/978-3-0348-9040-3_2.
12. Krauss F, Lawson TC. Examples of homogeneous C^* -algebras. *Memoirs of the American Mathematical Society*. 1974;148:153–164.
13. Percy C, Topping DM. Sums of small numbers of idempotents. *Michigan Mathematical Journal*. 1967;14(4):453–465. DOI: 10.1307/mmj/1028999848.
14. Rabanovich VI, Samoilenko YuS. When a sum of idempotents or projections is a multiple of the identity. *Functional Analysis and its Applications*. 2000;34(4):311–313. DOI: 10.1023/A:1004173827361.
15. Васи́левский НЛ, Спитковский ИМ. Об алгебре, порожденной двумя проекторами. *Доклады Академии наук Украинской ССР. Серия А, Физико-математические и технические науки*. 1981;8:10–13.
16. Krupnik N, Roch S, Silbermann B. On C^* -algebras generated by idempotents. *Journal of Functional Analysis*. 1996;137(2):303–319. DOI: 10.1006/jfan.1996.0048.

References

1. Halmos PR. Two subspaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1969;144:381–389. DOI: 10.1090/S0002-9947-1969-0251519-5.
2. Pedersen GK. Measure theory for C^* -algebras II. *Mathematica Scandinavica*. 1968;22:63–74. DOI: 10.7146/math.scand.a-10871.
3. Roch S, Silbermann B. Algebras generated by idempotents and the symbol calculus for singular integral operators. *Integral Equations and Operator Theory*. 1988;11(3):385–419. DOI: 10.1007/BF01202079.

4. Davis C. Generators of the ring of bounded operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1955;6(6):970–972. DOI: 10.1090/S0002-9939-1955-0073138-1.
5. Krupnik N. Minimal number of idempotent generators of matrix algebras over arbitrary field. *Communications in Algebra*. 1992;20(11):3251–3257. DOI: 10.1080/00927879208824513.
6. Fell JMG. The structure of algebras of operator fields. *Acta Mathematica*. 1961;106(3–4):233–280. DOI: 10.1007/BF02545788.
7. Tomiyama J, Takesaki M. Applications of fibre bundles to the certain class of C^* -algebras. *Tohoku Mathematical Journal*. 1961;13(3):498–522. DOI: 10.2748/tmj/1178244253.
8. Shchukin M. Non-trivial C^* -algebras generated by idempotents. In: *ICNODEA-2001. Proceedings of the International conference on nonlinear operators, differential equations and applications; 2001 September 12–15; Cluj-Napoca, Romania. Volume 3*. Cluj-Napoca: Babeş-Bolyai University; 2002. p. 353–359.
9. Shchukin MV. On n -homogeneous C^* -algebras over a two-dimensional compact oriented connected manifold. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2018;2:90–97.
10. Shchukin MV. N -homogeneous C^* -algebras generated by idempotents. *Russian Mathematics*. 2011;55(7):81–88. DOI: 10.3103/S1066369X11070103.
11. Böttcher A, Gohberg I, Karlovich Yu, Krupnik N, Roch S, Silbermann B, et al. Banach algebras generated by N idempotents and applications. In: Böttcher A, Gohberg I, editors. *Singular integral operators and related topics. Joint German – Israeli workshop; 1995 March 1–10; Tel Aviv, Israel*. Basel: Birkhäuser Verlag; 1996. p. 19–54 (Operator theory: advances and applications; volume 90). DOI: 10.1007/978-3-0348-9040-3_2.
12. Krauss F, Lawson TC. Examples of homogeneous C^* -algebras. *Memoirs of the American Mathematical Society*. 1974;148:153–164.
13. Percy C, Topping DM. Sums of small numbers of idempotents. *Michigan Mathematical Journal*. 1967;14(4):453–465. DOI: 10.1307/mmj/1028999848.
14. Rabanovich VI, Samoilenko YuS. When a sum of idempotents or projections is a multiple of the identity. *Functional Analysis and its Applications*. 2000;34(4):311–313. DOI: 10.1023/A:1004173827361.
15. Vasilevskii NL, Spitkovskii IM. [On the algebra generated by two projections]. *Doklady Akademii nauk Ukrainskoi SSR. Seriya A, Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*. 1981;8:10–13. Russian.
16. Krupnik N, Roch S, Silbermann B. On C^* -algebras generated by idempotents. *Journal of Functional Analysis*. 1996;137(2):303–319. DOI: 10.1006/jfan.1996.0048.

Received 26.07.2023 / revised 06.11.2023 / accepted 08.11.2023.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 004(075.8)

Велько О. А. **Современные информационные технологии** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0314-01 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 177 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 175–177. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/303125>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.10.2023, № 008410102023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Современные информационные технологии» предназначен для студентов специальности 6-05-0314-01 «Социология». В ЭУМК содержатся лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к зачету, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 51(075.8)+519.2(075.8)

Велько О. А. **Основы высшей математики и теории вероятностей** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0321-03 «Социальные коммуникации» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 244 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 241–244. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/303126>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.10.2023, № 008510102023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы высшей математики и теории вероятностей» предназначен для студентов специальности 6-05-0321-03 «Социальные коммуникации». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, тестовые задания, контрольные работы, задания эвристического типа, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004.925.8(075.8)

Шолтанюк С. В. **Математические методы компьютерной графики** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», профилизация «Информационные аналитические системы» : в 3 ч. Ч. 1. Математические основы компьютерной графики / С. В. Шолтанюк ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 240 с. : ил. Библиогр.: с. 237–240. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/303481>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 16.10.2023, № 008816102023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальности «прикладная информатика». Содержание ЭУМК предполагает изучение таких вопросов, как моделирование и визуализация простейших геометрических объектов (прямых, плоскостей, отрезков, полигонов и полиэдров), аффинные и проективные преобразования, а также некоторых других вопросов, связанных с компьютерной графикой и непосредственно опирающихся на математику. В настоящем ЭУМК подробно изложен теоретический материал, приведены примеры решения типовых задач с подробными пояснениями, предложены задачи для самостоятельного решения с ответами для самопроверки, а также примеры задач для контрольной работы. Кроме того, приведен вспомогательный материал, содержащий, в частности, ссылки на некоторые интерактивные ресурсы, которые могут использоваться при различных вычислениях в компьютерной графике.

УДК 51(075.8)+519.2(075.8)

Велько О. А. **Основы высшей математики и теории вероятностей** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0314-01 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 245 с. : ил. Библиогр.: с. 242–245. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/303891>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 30.10.2023, № 009230102023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы высшей математики и теории вероятностей» предназначен для студентов специальности 6-05-0314-01 «Социология». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, тестовые задания, контрольные работы, задания эвристического типа, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 517.95(075.8)

Козловская И. С. Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 04 «Информатика» / И. С. Козловская ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 149 с. : ил. Библиогр.: с. 148–149. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304443>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 10.11.2023, № 009710112023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 1-31 03 04 «Информатика». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 004(075.8)

Моисеева Н. А. Информационные технологии [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0311-03 «Мировая экономика» : в 2 ч. Ч. 1 / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 138 с. : ил. Библиогр.: с. 137–138. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304534>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 14.11.2023, № 010014112023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Информационные технологии» (часть 1) предназначен для студентов специальности 6-05-0311-03 «Мировая экономика». В ЭУМК содержатся лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к зачету, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004(075.8)

Моисеева Н. А. Информационные технологии [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0311-03 «Мировая экономика» : в 2 ч. Ч. 2 / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 122 с. : ил. Библиогр.: с. 121–122. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304537>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 14.11.2023, № 010114112023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Информационные технологии» (часть 2) предназначен для студентов специальности 6-05-0311-03 «Мировая экономика». В ЭУМК содержатся лекционный материал, тематика и планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 517.9(075.8)

Глецевич М. А. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03 «Физическая электроника», 1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии», 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 07-02 «Прикладная информатика (информационные технологии телекоммуникационных систем)», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», направление спец. 1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства)» / М. А. Глецевич, Н. К. Филиппова, А. П. Шилин ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 176 с. : ил. Библиогр.: с. 171–173. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304615>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 15.11.2023, № 010315112023.

В электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения» приводится краткий теоретический материал, необходимый для интегрирования и анализа основных типов дифференциальных уравнений; даны основы теории устойчивости, интегральных уравнений и вариационного исчисления; разобрано решение большого количества типовых задач; предложены задачи для самостоятельного решения. ЭУМК предназначен для студентов и преподавателей учреждений высшего образования.

СОДЕРЖАНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Корзюк В. И., Рудько Я. В., Колячко В. В.</i> Решения задач с разрывными условиями для волнового уравнения	6
<i>Громак Е. В., Громак В. И.</i> О мероморфных решениях уравнений, связанных с нестационарной иерархией второго уравнения Пенлеве.....	19

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

<i>Арзикулов Ф., Самсаков О.</i> Описание локальных операторов умножения на конечномерных ассоциативных алгебрах.....	32
---	----

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Старовойтов Э. И., Журавков М. А., Нестерович А. В.</i> Термосиловое нагружение упруго-пластической трехслойной пластины	42
---	----

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Волков В. М., Качаловская Е. И.</i> Итерационная реализация спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами	53
---	----

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

<i>Бурделёв А. В.</i> Восстановление аналитического задания пороговой k -значной функции в узле защиты информации при неполных данных.....	63
--	----

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Чжан Шуай, Гуангди Ма, Ян Вейчен, Фан Жу, Абламейко С. В.</i> Обнаружение автомобильных парковочных мест на изображениях с использованием модифицированной модели YOLOv5 с полуконтролируемым обучением	72
<i>Краснопрошин В. В., Образцов В. А.</i> Многоуровневые алгоритмы для задач принятия решений прецедентного типа	82

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Васьковский М. М., Задорожнюк А. О., Досова А. Д.</i> Оценки критических вероятностей перколяций на конечных квадратных решетках	92
<i>Щукин М. В.</i> О C^* -алгебрах, порожденных идемпотентами	98
Аннотации депонированных в БГУ работ	104

CONTENTS

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Korzyuk V. I., Rudzko J. V., Kolyachko V. V.</i> Solutions of problems with discontinuous conditions for the wave equation.....	6
<i>Gromak E. V., Gromak V. I.</i> On meromorphic solutions of the equations related to the non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation	19

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

<i>Arzikulov F., Samsagov O.</i> Description of local multipliers on finite-dimensional associative algebras	32
--	----

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

<i>Starovoitov E. I., Zhuravkov M. A., Nesterovich A. V.</i> Thermo force loading of an elastic-plastic a three-layer plate.....	42
--	----

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

<i>Volkov V. M., Kachalouskaya E. I.</i> An iterative Chebyshev spectral solver for two-dimensional elliptic equations with variable coefficients.....	53
--	----

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

<i>Burdeliov A. V.</i> Restoration of the analytical task of the threshold k -valued function in the information protection node with incomplete data.....	63
--	----

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Zhang Shuai, Guangdi Ma, Yang Weichen, Fang Zuo, Ablameyko S. V.</i> Car parking detection in images by using a semi-supervised modified YOLOv5 model.....	72
<i>Krasnoproshin V. V., Obraztsov V. A.</i> Multilevel algorithms for precedent-type decision-making problems.....	82

SHORT COMMUNICATIONS

<i>Vaskouski M. M., Zadorozhnyuk A. O., Dosova A. D.</i> Estimates of critical probabilities of percolation on finite square grids.....	92
<i>Shchukin M. V.</i> On C^* -algebras generated by idempotents	98
Indicative abstracts of the papers deposited in BSU.....	104

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, ПИИЦ, China National Knowledge Infrastructure.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 3. 2023**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Семенец, М. А. Подголина*
Технический редактор *В. В. Пишкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 30.11.2023.
Тираж 55 экз. Заказ 1216.

Республиканское унитарное предприятие
«СтройМедиаПроект».
ЛП № 02330/71 от 23.01.2014.
Ул. В. Хоружей, 13/61, 220123,
г. Минск, Республика Беларусь.

© БГУ, 2023

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 3. 2023**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Semenets, M. A. Podgolina*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 30.11.2023.
Edition 55 copies. Order number 1216.

Republic Unitary Enterprise
«StroiMediaProekt».
License for publishing No. 02330/71, 23 January, 2014.
13/61 V. Haruzhaj Str.,
Minsk 220123, Republic of Belarus.

© BSU, 2023