БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА
ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS
and
INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

2

2022

МИНСК
БГУ

EDITORIAL BOARD

УДК 517.518.126+519.216.71

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ ГУБИНЕЛЛИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ДУБА – МЕЙЕРА ДЛЯ ГРУБЫХ ТРАЕКТОРИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЁЛЬДЕРА

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследуются свойства производных Губинелли высших порядков от управляемых грубых траекторий, имеющих произвольный положительный показатель Гёльдера. Используется понятие (α, β)-грубого отображения, на основе которого даются достаточные условия, обеспечивающие единственность производных Губинелли высших порядков. С помощью теоремы о единственности производных Губинелли высших порядков доказывается аналог теоремы Дуба – Мейера для грубых траекторий с произвольным положительным показателем Гёльдера. В заключительной части показывается, что закон локального повторного логарифма для дробного броуновского движения обеспечивает применимость основных результатов настоящей статьи к интегрированию по многомерному дробному броуновскому движению с произвольным индексом Херста. Приводятся примеры, демонстрирующие связь грубых потраекторных интегралов с интегралами Ито и Стратоновича.

Ключевые слова: грубые траектории; производная Губинелли; разложение Дуба – Мейера; дробное броуновское движение.

Образец цитирования:
Васьковский ММ. Единственность производных Губинелли высших порядков и аналог теоремы Дуба – Мейера для грубых траекторий с произвольным положительным показателем Гёльдера. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:6–14.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-6-14

For citation:
Vaskouski MM. On the uniqueness of higher order Gubinelli derivatives and an analogue of the Doob – Meyer theorem for rough paths of the arbitrary positive Holder index. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:6–14. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-6-14

Автор:
Максим Михайлович Васьковский – доктор физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Author:
Maksim M. Vaskouski, doctor of science (physics and mathematics), docent; head of the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.
vaskovskii@bsu.by
https://orcid.org/0000-0001-5769-3678

ON THE UNIQUENESS OF HIGHER ORDER GUBINELLI DERIVATIVES AND AN ANALOGUE OF THE DOOB – MEYER THEOREM FOR ROUGH PATHS OF THE ARBITRARY POSITIVE HOLDER INDEX

M. M. VASKOUSKI [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

In this paper, we investigate the features of higher order Gubinelli derivatives of controlled rough paths having an arbitrary positive Holder index. There is used a notion of the (α, β)-rough map on the basis of which the sufficient conditions are given for the higher order Gubinelli derivatives uniqueness. Using the theorem on the uniqueness of higher order Gubinelli derivatives an analogue of the Doob – Meyer theorem for rough paths with an arbitrary positive Holder index is proved. In the final section of the paper, we prove that the law of the local iterated logarithm for fractional Brownian motion allows using all the main results of this paper for integration over the multidimensional fractional Brownian motions of the arbitrary Hurst index. The examples demonstrating the connection between the rough path integrals and the Ito and Stratonovich integrals are represented.

Keywords: rough paths; Gubinelli derivative; Doob – Meyer expansion; fractional Brownian motion.

Введение

В 1998 г. в работе Т. Лайонса [1] был предложен принципиально новый подход к интегрированию по отображениям, не имеющим конечной вариации. Данный подход основан на включении в интегральные суммы дополнительных членов, соответствующих тейлоровским разложениям высших порядков, а разработанная Т. Лайонсом теория впоследствии получила название теории грубых траекторий (*rough path theory*). Теория грубых траекторий вызывает большой интерес у математиков и физиков, поскольку имеет глубокие приложения в стохастическом анализе и квантовой теории поля [2]. В отличие от Т. Лайонса, который строил теорию грубых траекторий, опираясь на понятие абстрактных тейлоровских разложений в соответствующих тензорных алгебрах, М. Губинелли [3] предложил альтернативный подход, основанный на понятии управляемой грубой траектории. Функциональный вариант теории грубых траекторий, разработанный М. Губинелли, с одной стороны, позволил существенно упростить техническую часть теории грубых траекторий, а с другой стороны, дал возможность строить теорию интегрирования без привязки к соответствующим дифференциальным уравнениям. На основе теории грубых траекторий М. Хайрер построил теорию регулярностных структур, с помощью которой получил новые глубокие результаты в теории стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Следует отметить, что вклад и результаты М. Хайрера были удостоены премии Филдса в 2014 г.

Теория грубых траекторий имеет наиболее значительные применения в теории стохастических дифференциальных уравнений, в том числе для исследования стохастических дифференциальных уравнений, управляемых антиперсистентными дробными броуновскими движениями. Первые работы, посвященные таким приложениям теории грубых траекторий, принадлежат Л. Кутэн, Ж. Кьяну, Ф. Бадуэну [4; 5]. В дальнейшем эти результаты уточнялись и обобщались [6–10]. В частности, в статье [4] показано, что стохастические дифференциальные уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями с показателями Херста, меньшими $\frac{1}{4}$, не могут быть исследованы в рамках теорий грубых траекторий, разработанных Т. Лайонсом и М. Губинелли, так как кусочно-линейные аппроксимации для таких дробных броуновских движений не являются сходящимися по вероятности. В статьях [11; 12] была развита теория грубых траекторий Губинелли и с ее помощью исследованы стохастические дифференциальные уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями с произвольным положительным показателем Херста. При этом ключевую роль играют свойства производных Губинелли высших порядков. В сущности, производные Губинелли от функции Y относительно α-гёльдеровской функции X определяются не единственным образом. Отмеченная неединственность, как правило, не вносит неопределенности в случае, когда теория грубых траекторий применяется к исследованию проблем однозначной разрешимости, устойчивости дифференциальных уравнений, поскольку выбор производных Губинелли осуществляется в соответствии со стандартными правилами замен переменных в дифференциальных уравнениях [11]. Тем не менее в отрыве от теории дифференциальных уравнений неединственность производных Губинелли приводит к неоднозначности определения грубого потраекторного интеграла.

В настоящей статье исследуется проблема неединственности производных Губинелли высших порядков. Автором вводится понятие (α, β)-грубого отображения X (определение 1) и при определенных соотношениях между α и β устанавливается единственность производных Губинелли высших порядков от функции Y относительно отображения X (теорема 1). С помощью данного результата в статье получен аналог теоремы Дуба – Мейера для грубых траекторий произвольного положительного индекса Гёльдера (теорема 2). В заключительной части работы демонстрируется, что, в частности, представленные результаты применимы в случае, когда интегрирование происходит по многомерному дробному броуновскому движению, имеющему произвольный положительный показатель Херста.

Основные результаты

Определение грубых траекторий. Зафиксируем произвольные $T > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$. Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Через $C^{\alpha}([0, T], V)$ и $C_2^{\alpha}([0, T], V)$ обозначим множества функций $f : [0, T] \to V$ и $g : [0, T]^2 \to V$ соответственно, таких, что величины

$$\|f\|_{\alpha} := \sup_{s,\, t \in [0, T],\, s \neq t} \frac{|f_t - f_s|}{|t - s|^{\alpha}}, \quad \|g\|_{\alpha, 2} := \sup_{s,\, t \in [0, T],\, s \neq t} \frac{|g_{s, t}|}{|t - s|^{\alpha}}$$

являются конечными. Далее для функции двух переменных $g_{s, t}$ будем писать $\|g\|_{\alpha}$ вместо $\|g\|_{\alpha, 2}$, а для функции одной переменной f_t через $f_{s, t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Положим $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$. Через $\mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$ обозначим множество α-непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий, т. е. множество элементов $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0, T], V^{\otimes i})$ для любого $i = 1, \ldots, n$ и для всех $s, u, t \in [0, T]$ выполняется следующее тождество Чена: $\mathbf{X}_{s, t} = \mathbf{X}_{s, u} \odot \mathbf{X}_{u, t}$, где $(\mathbf{X}_{s, u} \odot \mathbf{X}_{u, t})^i = \sum_{j=0}^{i} \mathbf{X}_{s, u}^{j} \otimes \mathbf{X}_{u, t}^{i-j}$. Отметим, что операция $\odot$ задает умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus_{i=0}^{n} V^{\otimes i}$, где $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X} : [0, T]^2 \to T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0, t}$, $t \in [0, T]$, поскольку $\mathbf{X}_{s, t} = (\mathbf{X}_{0, s})^{-1} \odot \mathbf{X}_{0, t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0, t}$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$ является грубой траекторией над $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$, если $\mathbf{X}_{0, t}^1 = X_t$ для любого $t \in [0, T]$.

Замечание 1. В сущности, грубая траектория $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ над $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ определяется не единственным образом (см. [2, гл. 3]). Вопросы существования грубых траекторий над произвольной функцией $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ рассматривались в статье [13].

Определение слабоуправляемых грубых траекторий. Пусть $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X, а W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^{\alpha}([0, T], W)$ слабо управляется грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, если существуют функции $Y^{(1)} : [0, T] \to L(V, W), \ldots, Y^{(n-1)} : [0, T] \to L(V^{\otimes n-1}, W)$ такие, что

$$Y_{s, t} = Y_s^{(1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-1} + R_{s, t}^{Y, n},$$

$$Y_{s, t}^{(1)} = Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-2} + R_{s, t}^{Y, n-1}, \ldots,$$

$$Y_{s, t}^{(n-2)} = Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + R_{s, t}^{Y, 2},$$

$$Y_{s, t}^{(n-1)} = R_{s, t}^{Y, 1},$$

а для каждого из остаточных членов $R^{Y, i}$, $i = 1, \ldots, n$, величина $\|R^{Y, i}\|_{i\alpha}$ является конечной. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть производной Губинелли порядка i от Y.

Замечание 2. В сущности, производные Губинелли от $Y_t \in C^{\alpha}([0, T], W)$ относительно грубой траектории $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ определяются не единственным образом. Действительно, если положить $\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathbf{X}_t = \left(1, t, \frac{t^2}{2}\right)$, $Y_t \equiv 0$, то в качестве производной Губинелли $Y^{(1)}$ можно выбрать любую функцию из $C^{1/2}([0, T], \mathbb{R})$. Как будет показано далее (см. теорему 1), неединственность производных Губинелли является следствием избыточной гладкости отображения X. Для показателей Гёльдера $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ понятие управляемой грубой траектории впервые введено в статье [3]. Отметим, что любая управляемая грубая траектория в смысле работы [3] является слабоуправляемой грубой траекторией в смысле введенного выше определения, но не наоборот.

Так как пространство $C^{\alpha}([0, T], W)$ банахово, то множество

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}([0, T], W) = \left\{ \left(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}\right) : Y \in C^{\alpha}([0, T], W), \ \sum_{i=1}^{n} \left\| R^{Y, i} \right\|_{i\alpha} < \infty \right\}$$

также образует банахово пространство относительно нормы [11]

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}} := \sum_{i=0}^{n-1} \left| Y_0^{(i)} \right| + \left\| \left(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}\right) \right\|_{\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}},$$

где $Y_t^{(0)} = Y_t$, $\left\| \left(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}\right) \right\|_{\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}} = \sum_{i=1}^{n} \left\| R^{Y, i} \right\|_{i\alpha}$.

Определение интеграла по грубым траекториям. Пусть $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $Y \in C^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, $\left(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}([0, T], L(V, W))$, V, W – конечномерные евклидовы пространства. Возьмем некоторые $s, t \in [0, T]$, $s < t$, через P обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s, t]$. Грубым потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r$ будем называть следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s, t]$):

$$\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r := \lim_{\operatorname{diam}(P) \to 0} \sum_{[u, v] \in P} \sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u, v}^{i+1}.$$

Замечание 3. Неоднозначность определения грубой траектории над X приводит к неоднозначности определения грубого потраекторного интеграла. Если X_t – стандартный винеровский процесс, а $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, то в зависимости от способа выбора $\mathbf{X}$, в частности, можем получить интеграл Ито или интеграл Стратоновича [2, гл. 5]. Другой источник неоднозначности определения интеграла состоит в неединственности определения производных Губинелли от $Y \in C^{\alpha}([0, T], L(V, W))$ относительно фиксированной грубой траектории $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$. Как будет доказано далее (см. теорему 2), использование разных наборов производных Губинелли от Y приводит к различным значениям интеграла.

Предложение 1 [11]. *Пусть* $\alpha \in (0, 1]$, $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $\left(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}([0, T], L(V, W))$, *$V$, W – конечномерные евклидовы пространства. Тогда для любых* $s, t \in [0, T]$ *интеграл* $\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r$ *корректно определен и существует постоянная* $C = C(\alpha)$ *такая, что для любых* $s, t \in [0, T]$ *выполняется оценка*

$$\left| \int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r - \sum_{i=0}^{n-1} Y_s^{(i)} \mathbf{X}_{s, t}^{i+1} \right| \le C \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{X}^{n+1-i} \right\|_{(n+1-i)\alpha} \left\| R^{Y, i} \right\|_{i\alpha} |t - s|^{(n+1)\alpha}.$$

Определение 1. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1]$, $\alpha < \beta$, V – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что отображение $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ является (α, β)-грубым, если существует всюду плотное в $[0, T]$ множество S такое, что для любых $s \in S$, $v^* \in V^* \setminus \{0\}$ выполняется равенство

$$\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, X_{s,t} \right\rangle\right|}{|t-s|^{\beta}} = \infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$. *Предположим, что отображение* $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ *является* $(\alpha, 2\alpha)$*-грубым,* $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, $\left(\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \ldots, \tilde{Y}^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$. *Если* $Y_t = \tilde{Y}_t$ *для любого* $t \in [0, T]$, *то* $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$ *для всех* $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Существует всюду плотное в $[0, T]$ множество S такое, что для любых $s \in S$, $v^* \in V^* \setminus \{0\}$ выполняется равенство

$$\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, X_{s,t} \right\rangle\right|}{|t-s|^{2\alpha}} = \infty. \tag{1}$$

Покажем, что для всех $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, n-1$ выполняется равенство $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$. Докажем утверждение индукцией по i. Пусть $i = 1$. Зафиксируем произвольное $s \in S$. Так как

$$Y_{s,t} = Y_s^{(1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{Y,n} = Y_s^{(1)} X_{s,t} + O\left(|t-s|^{2\alpha}\right),$$

$$Y_{s,t} = \tilde{Y}_s^{(1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + \tilde{Y}_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{\tilde{Y},n} = \tilde{Y}_s^{(1)} X_{s,t} + O\left(|t-s|^{2\alpha}\right),$$

то из соотношения (1) вытекает, что $Y_s^{(1)} = \tilde{Y}_s^{(1)}$. Поскольку функции $Y_t^{(1)}, \tilde{Y}_t^{(1)}$ непрерывны на отрезке $[0, T]$, то из равенства $Y_s^{(1)} = \tilde{Y}_s^{(1)}$ для всех $s \in S$ следует, что $Y_t^{(1)} = \tilde{Y}_t^{(1)}$ для любого $t \in [0, T]$. Предположим, что $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$ для всех $t \in [0, T]$, $i \le k < n-1$. Докажем, что $Y_t^{(k+1)} = \tilde{Y}_t^{(k+1)}$ для любого $t \in [0, T]$. Зафиксируем произвольное $s \in S$. Так как

$$Y_{s,t}^{(k)} = Y_s^{(k+1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-k-1} + R_{s,t}^{Y,n-k} = Y_s^{(k+1)} X_{s,t} + O\left(|t-s|^{2\alpha}\right),$$

$$Y_{s,t}^{(k)} = \tilde{Y}_s^{(k+1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + \tilde{Y}_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-k-1} + R_{s,t}^{\tilde{Y},n-k} = \tilde{Y}_s^{(k+1)} X_{s,t} + O\left(|t-s|^{2\alpha}\right),$$

то из соотношения (1) вытекает, что $Y_s^{(k+1)} = \tilde{Y}_s^{(k+1)}$. Из непрерывности функций $Y_t^{(k+1)}, \tilde{Y}_t^{(k+1)}$ на отрезке $[0, T]$ следует, что $Y_t^{(k+1)} = \tilde{Y}_t^{(k+1)}$ для любого $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$. *Предположим, что отображение* $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ *является* $(\alpha, 2\alpha)$*-грубым,* $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, $\left(\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \ldots, \tilde{Y}^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, $Z, \tilde{Z} \in C([0, T], W)$. *Если для любого* $t \in [0, T]$ *выполняется равенство*

$$\int_0^t Y_r \, d\mathbf{X}_r + \int_0^t Z_r \, dr = \int_0^t \tilde{Y}_r \, d\mathbf{X}_r + \int_0^t \tilde{Z}_r \, dr,$$

то $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$, $Z_t = \tilde{Z}_t$ *для всех* $t \in [0, T]$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Доказательство. Пусть $\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$. Докажем, что и элемент $\left(\int_0^{\bullet} Y_r \, d\mathbf{X}_r, Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-2)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$.

Имеем

$$\left\| \left(\int_0^{\bullet} Y_r\, d\mathbf{X}_r,\, Y,\, Y^{(1)},\, \ldots,\, Y^{(n-2)} \right) \right\|_{\mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} = \sup_{s \neq t} \frac{\left| Y_{s,t}^{(n-2)} \right|}{|t-s|^{\alpha}} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{n} \sup_{s \neq t} |t-s|^{-(k-1)\alpha} \left| Y_{s,t}^{(n-k)} - \sum_{i=1}^{k-2} Y_s^{(n-k+i)} \mathbf{X}_{s,t}^{i} \right| + \sup_{s \neq t} |t-s|^{-n\alpha} \left| \int_s^t Y_r\, d\mathbf{X}_r - \sum_{i=0}^{n-2} Y_s^{(i)} \mathbf{X}_{s,t}^{i+1} \right|.$$

Так как $Y_{s,t}^{(n-k)} = \sum_{i=1}^{k-1} Y_s^{(n-k+i)} \mathbf{X}_{s,t}^{i} + R_{s,t}^{Y,k}$, то из предложения 1 вытекает, что

$$\left\| \left(\int_0^{\bullet} Y_r\, d\mathbf{X}_r,\, Y,\, Y^{(1)},\, \ldots,\, Y^{(n-2)} \right) \right\|_{\mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \sup_{s \neq t} \frac{\left| Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{k} + R_{s,t}^{Y,k+1} \right|}{|t-s|^{k\alpha}} +$$

$$+ \sup_{s \neq t} |t-s|^{-n\alpha} \left| \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{X}^{n+1-i} \right\|_{(n+1-i)\alpha} \left\| R^{Y,i} \right\|_{i\alpha} |t-s|^{(n+1)\alpha} + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n} \right| = O(1).$$

Аналогично получаем, что $\left(\int_0^{\bullet} \tilde{Y}_r\, d\mathbf{X}_r,\, \tilde{Y},\, \tilde{Y}^{(1)},\, \ldots,\, \tilde{Y}^{(n-2)} \right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}\big([0, T],\, L(V, W)\big)$.

Таким образом,

$$\left(I,\, I^{(1)},\, \ldots,\, I^{(n-1)} \right) = \left(\int_0^{\bullet} \left(Y_r - \tilde{Y}_r \right) d\mathbf{X}_r,\, Y - \tilde{Y},\, Y^{(1)} - \tilde{Y}^{(1)},\, \ldots,\, Y^{(n-2)} - \tilde{Y}^{(n-2)} \right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}\big([0, T],\, L(V, W)\big).$$

Возьмем произвольные $s, t \in [0, T]$. Имеем

$$\int_s^t Y_r\, d\mathbf{X}_r - \int_s^t \tilde{Y}_r\, d\mathbf{X}_r = \int_s^t \left(Y_r - \tilde{Y}_r \right) d\mathbf{X}_r = \int_s^t \left(Z_r - \tilde{Z}_r \right) dr = O\big(|t-s|\big) = O\left(|t-s|^{n\alpha}\right).$$

Так как $I_{s,t} = O\left(|t-s|^{n\alpha}\right)$, то $(I, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}\big([0, T],\, L(V, W)\big)$. В силу теоремы 1 получаем, что $I_t^{(1)} = 0$ для любого $t \in [0, T]$. Следовательно, $Y_t = \tilde{Y}_t$ для любого $t \in [0, T]$. Снова применяя теорему 1, заключаем, что $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$ для всех $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, n-1$. Значит, $\int_0^t Y_r\, d\mathbf{X}_r = \int_0^t \tilde{Y}_r\, d\mathbf{X}_r$ для любого $t \in [0, T]$. Таким образом, $\int_0^t Z_r\, dr = \int_0^t \tilde{Z}_r\, dr$. Из теоремы Барроу вытекает, что $Z_t = \tilde{Z}_t$ для любого $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть задано d-мерное дробное броуновское движение* B_t^H, $t \in [0, T]$, *с показателем Херста* $H \in (0, 1)$. *Тогда для любых* $\alpha \in (0, H)$, $\beta \geq H$ *почти все траектории процесса* B_t^H *являются* (α, β)*-грубыми.*

Доказательство. Согласно закону локального повторного логарифма для дробного броуновского движения [14, гл. 1] для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{\left| B_{t,t+h}^{H} \right|}{h^H \left(\ln \ln h^{-1} \right)^{1/2}} = c_H \right) = 1,$$

где c_H – положительная постоянная. Введем обозначение $\rho(h) = h^H \left(\ln \ln h^{-1} \right)^{1/2}$, $h > 0$.

Зафиксируем произвольные $\alpha \in (0, H)$, $\beta \geq H$. Согласно работе [14, гл. 1] почти все траектории процесса B_t^H принадлежат $C^{\alpha}\big([0, T], V\big)$, где $V = \mathbb{R}^d$.

Существует постоянная $\tilde{c}_H > 0$ такая, что для любых $v^* \in V^*$, $\|v^*\| = 1$, $s \in [0, T)$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B^H_{s,t} \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} \geq \tilde{c}_H \right) = 1. \tag{2}$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|B^H_{s,t}\right|}{\rho(t-s)} < \infty \right) = 1. \tag{3}$$

Пусть K – счетное всюду плотное множество в $U = \left\{v^* \in V^* : \|v^*\| = 1\right\}$. Тогда из равенства (2) получаем

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B^H_{s,t} \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} \geq \tilde{c}_H \ \ \forall v^* \in K \right) = 1. \tag{4}$$

Возьмем произвольное $v^* \in U$, существует последовательность $\left(v^*_n\right) \subset K$ такая, что $\left\|v^*_n - v^*\right\|_{V^*} \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Имеем

$$\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*_n, B^H_{s,t} \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} \leq \overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B^H_{s,t} \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} + \left\|v^*_n - v^*\right\|_{V^*} \overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|B^H_{s,t}\right|}{\rho(t-s)}. \tag{5}$$

Таким образом, из соотношений (3)–(5) следует, что

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B^H_{s,t} \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} \geq \tilde{c}_H \ \ \forall v^* \in U \right) = 1. \tag{6}$$

Из равенства (6) вытекает, что для почти всех ω существует последовательность $t_n = t_n(\omega) \underset{n \to \infty}{\downarrow} s$ такая, что для любого $v^* \in U$

$$\frac{\left|\left\langle v^*, B^H_{s,t_n} \right\rangle\right|}{\rho(t_n - s)} \geq \tilde{c}_H - \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\frac{\left|\left\langle v^*, B^H_{s,t_n} \right\rangle\right|}{|t_n - s|^{\beta}} \geq \left(\tilde{c}_H - \frac{1}{n}\right) |t_n - s|^{H - \beta} \left(\ln \ln |t_n - s|^{-1}\right)^{1/2} \underset{n \to \infty}{\to} \infty.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B^H_{s,t} \right\rangle\right|}{|t - s|^{\beta}} = \infty \ \forall v^* \in U, \ \ \forall s \in [0, T) \cap \mathbb{Q} \right) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4. Пусть $W_t = B^{1/2}_t$ – стандартный винеровский процесс. Положим $n = 2$, $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Согласно утверждению 1 почти все траектории процесса W_t являются $(\alpha, 2\alpha)$-грубыми. Положим $\mathbf{X} = \left(1, W, \mathbb{W}^{\mathrm{Ito}}\right)$, где $\mathbb{W}^{\mathrm{Ito}}_{s,t} = \int_s^t W_{s,r} \otimes dW_r$, а интегралы в правой части понимаются как интегралы Ито. Тогда $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^{\alpha}\left([0, T], V\right)$ [2, гл. 3], кроме того, интеграл $\int_0^t Y_r \, d\mathbf{X}_r$ почти наверное совпадает с интегралом Ито в предположении, что $\left(Y, Y^{(1)}\right) \in \mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}\left([0, T], L(V, W)\right)$ [2, гл. 5]. В таком случае теорема 2 превращается в известную теорему Дуба – Мейера для семимартингалов [15, гл. 1].

Замечание 5. В частном случае (когда $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$) результаты, аналогичные теоремам 1–3, ранее были доказаны в работе [2, гл. 6].

Замечание 6. Альтернативным способом исследования свойств грубых траекторий является дискретизация и изучение асимптотических свойств случайных блужданий на подходящих графах [16–18].

Библиографические ссылки

1. Lyons TJ. Differential equations driven by rough signals. *Revista Matemática Iberoamericana.* 1998;14(2):215–310. DOI: 10.4171/rmi/240.

2. Friz PK, Hairer M. *A course on rough paths: with an introduction to regularity structures.* Cham: Springer; 2014. XIV, 251 p. (Universitext). DOI: 10.1007/978-3-319-08332-2.

3. Gubinelli M. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis.* 2004;216(1):86–140. DOI: 10.1016/j.jfa.2004.01.002.

4. Coutin L, Qian Z. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probability Theory and Related Fields.* 2002;122(1):108–140. DOI: 10.1007/s004400100158.

5. Baudoin F, Coutin L. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions. *Stochastic Processes and their Applications.* 2007;117(5):550–574. DOI: 10.1016/J.SPA.2006.09.004.

6. Neuenkirch A, Nourdin I, Rößler A, Tindel S. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques.* 2009;45(1):157–174. DOI: 10.1214/07-aihp159.

7. Васьковский ММ, Качан ИВ. Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2018;62(4):398–405. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-4-398-405.

8. Vaskouski M, Kachan I. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3. *Stochastic Analysis and Applications.* 2018;36(6):909–931. DOI: 10.1080/07362994.2018.1483247.

9. Васьковский ММ. Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими 1/3. *Весцi Нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук.* 2020;56(1):36–50. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-1-36-50.

10. Леваков АА, Васьковский ММ. *Стохастические дифференциальные уравнения и включения.* Минск: БГУ; 2019. 495 с.

11. Васьковский ММ. Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера. *Дифференциальные уравнения.* 2021;57(10): 1305–1317. DOI: 10.31857/S0374064121100022.

12. Васьковский ММ. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера. *Дифференциальные уравнения.* 2021;57(11):1443–1449. DOI: 10.31857/S0374064121110017.

13. Lyons T, Victoir N. An extension theorem to rough paths. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire.* 2007; 24(5):835–847. DOI: 10.1016/j.anihpc.2006.07.004.

14. Biagini F, Hu Y, Øksendal B, Zhang T. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications.* London: Springer; 2008. XII, 330 p. (Probability and its applications). DOI: 10.1007/978-1-84628-797-8.

15. Ватанабэ С, Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* Кинкладзе ГН, переводчик; Ширяев АН, редактор. Москва: Наука; 1986. 448 с.

16. Vaskouski M, Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics.* 2017;227:121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044.

17. Васьковский ММ. О случайных блужданиях на графах Кэли групп комплексных отражений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;3:51–56. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-51-56.

18. Задорожнюк АО. Монотонность вероятностей состояний случайного блуждания на конечных решетках. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;1:38–45. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-38-45.

References

1. Lyons TJ. Differential equations driven by rough signals. *Revista Matemática Iberoamericana.* 1998;14(2):215–310. DOI: 10.4171/rmi/240.

2. Friz PK, Hairer M. *A course on rough paths: with an introduction to regularity structures.* Cham: Springer; 2014. XIV, 251 p. (Universitext). DOI: 10.1007/978-3-319-08332-2.

3. Gubinelli M. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis.* 2004;216(1):86–140. DOI: 10.1016/j.jfa.2004.01.002.

4. Coutin L, Qian Z. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probability Theory and Related Fields.* 2002;122(1):108–140. DOI: 10.1007/s004400100158.

5. Baudoin F, Coutin L. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions. *Stochastic Processes and their Applications.* 2007;117(5):550–574. DOI: 10.1016/J.SPA.2006.09.004.

6. Neuenkirch A, Nourdin I, Rößler A, Tindel S. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques.* 2009;45(1):157–174. DOI: 10.1214/07-aihp159.

7. Vaskouski MM, Kachan IV. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* 2018;62(4):398–405. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-4-398-405.

8. Vaskouski M, Kachan I. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3. *Stochastic Analysis and Applications.* 2018;36(6):909–931. DOI: 10.1080/07362994.2018.1483247.

9. Vas'kovskii MM. Mixed-type stochastic differential equations driven by standard and fractional Brownian motions with Hurst indices greater than 1/3. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2020;56(1): 36–50. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-1-36-50.

10. Levakov AA, Vaskouski MM. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i vklyucheniya* [Stochastic differential equations and inclusions]. Minsk: Belarusian State University; 2019. 495 p. Russian.

11. Vaskouski MM. [Existence and uniqueness of solutions of differential equations weakly controlled by rough paths of arbitrary positive Holder index]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2021;57(10):1305–1317. Russian. DOI: 10.31857/S0374064121100022.

12. Vaskouski MM. [Stability of solutions of stochastic differential equations weakly controlled by rough paths of arbitrary positive Holder index]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2021;57(11):1443–1449. Russian. DOI: 10.31857/S0374064121110017.

13. Lyons T, Victoir N. An extension theorem to rough paths. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire.* 2007; 24(5):835–847. DOI: 10.1016/j.anihpc.2006.07.004.

14. Biagini F, Hu Y, Øksendal B, Zhang T. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications.* London: Springer; 2008. XII, 330 p. (Probability and its applications). DOI: 10.1007/978-1-84628-797-8.

15. Watanabe S, Ikeda N. *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company; 1981. XIV, 464 p. (North-Holland mathematical library; volume 24). Co-published by the Kodansha Ltd.

Russian edition: Watanabe S, Ikeda N. Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i diffuzionnye protsessy. Kinkladze GN, translator; Shiryaev AN, editor. Moscow: Nauka; 1986. 448 p.

16. Vaskouski M, Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics.* 2017;227:121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044.

17. Vaskouski MM. Random walks on Cayley graphs of complex reflection groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;3:51–56. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-51-56.

18. Zadorozhnyuk AO. Monotonicity of random walks' states on finite grids. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;1:38–45. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-38-45.

Получена 21.11.2021 / исправлена 13.01.2022 / принята 16.06.2022.
Received 21.11.2021 / revised 13.01.2022 / accepted 16.06.2022.

УДК 517.925.7

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРВЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

Е. В. ГРОМАК[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрена обобщенная иерархия первого уравнения Пенлеве, которая представляет собой последовательность полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру, определяемую оператором $\tilde{L}_n$. Первый член этой иерархии при $n = 2$ есть первое уравнение Пенлеве, а последующие уравнения порядка $2n - 2$ содержат произвольные параметры. Их называют высшими аналогами первого уравнения Пенлеве порядка $2n - 2$. Исследованы аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии первого уравнения Пенлеве и связанных с ними линейных уравнений. Установлено, что каждое уравнение иерархии имеет один доминирующий член, а произвольное мероморфное решение любого уравнения иерархии не может иметь конечное число полюсов. Определен характер подвижных полюсов мероморфных решений. С использованием метода Фробениуса получены достаточные условия мероморфности общего решения линейных уравнений второго порядка с линейным потенциалом, определяемым мероморфными решениями первых трех уравнений иерархии.

Ключевые слова: первое уравнение Пенлеве; иерархии уравнений Пенлеве; мероморфные решения.

Образец цитирования:
Громак ЕВ. О мероморфных решениях уравнений, связанных с первым уравнением Пенлеве. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:15–22.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-15-22

For citation:
Gromak EV. On meromorphic solutions of the equations related to the first Painlevé equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:15–22. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-15-22

Автор:
Елена Валерьевна Громак – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Author:
Elena V. Gromak, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of theory of functions, faculty of mechanics and mathematics.
lenagromak@tut.by
https://orcid.org/0000-0003-3646-6227

ON MEROMORPHIC SOLUTIONS OF THE EQUATIONS RELATED TO THE FIRST PAINLEVÉ EQUATION

E. V. GROMAK [a]

[a] *Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

In this paper, we consider the generalised hierarchy of the first Painlevé equation which is a sequence of polynomial ordinary differential equations of even order that have a uniform differential-algebraic structure determined by the operator $\tilde{L}_n$. The first member of this hierarchy for $n = 2$ is the first Painlevé equation, and the subsequent equations of order $2n - 2$ contain arbitrary parameters. They are named as higher analogues of the first Painlevé equation of $2n - 2$ order. The article considers the analytical properties of solutions to the equations of the generalised hierarchy of the first Painlevé equation and the related linear equations. It is established that each hierarchy equation has one dominant term, and an arbitrary meromorphic solution of any hierarchy equation cannot have a finite number of poles. The character of the mobile poles of meromorphic solutions is determined. Using the Frobenius method, sufficient conditions are obtained for the meromorphicity of the general solution of the second-order linear equations with a linear potential defined by meromorphic solutions of the first three equations of the hierarchy.

Keywords: the first Painlevé equation; hierarchies of Painlevé equations; meromorphic solutions.

Введение

Рассмотрим иерархию первого уравнения Пенлеве [1]

$$\tilde{P}_1^{[2n-2]} : \tilde{L}_n[q] - \frac{z}{2} = 0,\ n = 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

где обобщенный оператор $\tilde{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\tilde{L}_{n+1}[u] = \left(\frac{d^3}{dz^3} + (4u + \beta_n)\frac{d}{dz} + 2u_z\right)\tilde{L}_n[u],\ \tilde{L}_1[u] = u,\ u = u(z),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

β_n – параметр. Если в операторе $\tilde{L}_N$ параметр $\beta = 0$, то $\tilde{L}_N = L_N$. Здесь и далее $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})$. При этом относительно оператора $\tilde{L}_N$ справедливо представление (лемма 1 из работы [1])

$$\tilde{L}_n[u] = \sum_{j=0}^{n-1} s_j L_{n-j}[u], \tag{3}$$

где $s_0 = 1$; s_j, $j = 1, \ldots, n-1$, – основные симметрические полиномы параметров $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$.

Из формул (1) и (2) для $n = 2, 3, 4$ последовательно находим

$$\tilde{P}_1^{[2]} : q'' + 3q^2 + \beta_1 q = \frac{z}{2}, \tag{4}$$

$$\tilde{P}_1^{[4]} : q^{(4)} + 10q^3 + 5(q')^2 + 10qq'' + (\beta_1 + \beta_2)(3q^2 + q'') + \beta_1\beta_2 q = \frac{z}{2}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\tilde{P}_1^{[6]} : q^{(6)} + 35q^4 + 10q^3 s_1 + 3q^2 s_2 + s_3 q + 5(14q + s_1)(q')^2 + \\ + (70q^2 + 10qs_1 + s_2)q'' + 21(q'')^2 + 28q'q^{(3)} + (14q + s_1)q^{(4)} = \frac{z}{2}, \\ s_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,\ s_2 = \beta_2\beta_3 + \beta_1(\beta_2 + \beta_3),\ s_3 = \beta_1\beta_2\beta_3.\end{gathered} \tag{6}$$

Иерархию (1) называют обобщенной иерархией первого уравнения Пенлеве (см. [2–4]), поскольку первое уравнение этой иерархии с точностью до калибровочного преобразования, так же как и первый член иерархии $P_1^{[2n-2]}$, есть первое уравнение Пенлеве, а последующие уравнения обобщают соответствующие уравнения иерархии $P_1^{[2n-2]}$. При этом иерархия $P_1^{[2n-2]}$ может быть получена из иерархии $\tilde{P}_1^{[2n-2]}$ при $\beta = 0$. Заметим, что уравнение $\tilde{P}_1^{[2n-2]}$ имеет порядок $2n - 2$, где n определяет номер оператора $\tilde{L}_n$ и номер уравнения иерархии. Аналитические свойства решений первого уравнения Пенлеве, т. е. случай $n = 2$, рассмотрены, например, в работах [5–7]. Заметим также [1; 2], что уравнения иерархии (1) в соответствии с заменой $q = w' - w^2$ относительно $w(z)$ определяют $(2n - 3)$-параметрические семейства решений соответствующих уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве при $\alpha = \frac{1}{2}$, задаваемой соотношением

$$\tilde{P}_2^{[2n]}: \left(\frac{d}{dz} + 2w\right)\tilde{L}_n\left[w' - w^2\right] - zw - \alpha = 0,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Локальные свойства решений

Уравнение $P_1^{[2n-2]}$, которое образовано оператором L_n, имеет структуру с одним доминирующим членом [7]. Аналогичное свойство справедливо и для уравнения $\tilde{P}_1^{[2n-2]}$. Для уравнений (4)–(6) это члены $3q^2$, $10q^3$, $35q^4$ соответственно.

В общем случае справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Уравнение (1) имеет структуру*

$$q^{(2n)} + \gamma_n q^{n+1} + P_n\left(\beta, q, q', \ldots, q^{(2n-2)}\right) = \frac{z}{2},\ n > 1, \tag{7}$$

где степень одночленов полинома P_n относительно $q, q', \ldots, q^{(2n-2)}$ не превосходит n.

Доказательство леммы можно провести методом индукции, как это сделано для уравнения $P_1^{[2n-2]}$ [7]. Однако, поскольку структура (7) определяется доминирующим членом оператора $\tilde{L}_n$, который в силу представления (3) совпадает с доминирующим членом оператора L_n, справедливость леммы непосредственно следует из доказательства аналогичного утверждения для уравнения $P_1^{[2n-2]}$. При этом относительно коэффициента γ_n доминирующего члена имеем рекуррентное соотношение $(n+1)\gamma_{n+1} = (4n+2)\gamma_n$ или в явной форме $\gamma_n = \dfrac{2^{2n-1}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}$, где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Лемма 2. *Произвольное мероморфное решение уравнения (1) не может иметь конечное число полюсов.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что, как и в случае первого уравнения Пенлеве, уравнение (1) не имеет рациональных решений, поскольку для существования рационального решения необходимо, чтобы точка $z = \infty$ для решения $q(z)$ была полюсом или точкой голоморфности. Однако произвольное уравнение из иерархии (1) не допускает даже формального полярного или голоморфного разложения в окрестности $z = \infty$. Следовательно, уравнения иерархии (1) не имеют рациональных решений. Пусть $q(z)$ – мероморфное решение. Оно не может содержать конечное число полюсов, так как уравнения иерархии (1) имеют только один доминирующий член. В противном случае, следуя доказательству аналогичного утверждения для первого уравнения Пенлеве [8, с. 118; 9, с. 56], т. е. допуская существование у мероморфного решения $q(z)$ конечного числа полюсов и сделав замену $v(z) = P(z)q(z)$ с подходящим полиномом $P(z)$, получаем, что целая трансцендентная функция $v(z)$ удовлетворяет полиномиальному дифференциальному уравнению с одним доминирующим членом, что невозможно [8, с. 118].

Заметим также, что из совпадения доминирующих членов уравнений (1) и уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и, по сути, из структуры (7) следует, что решение $q^{[n]}(z)$ n-го уравнения (1), так же как и решение уравнения $P_1^{[2n-2]}$, может иметь только двукратные полюсы с нулевым вычетом и главной частью

$$q^{[n]}(z) \sim c_{-2}(z - z_0)^{-2},\ c_{-2} = -k(k+1),\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Разложение решения уравнения (4) в окрестности подвижного полюса z_0 имеет вид

$$q^{[2]}(z) = \frac{-2}{t^2} - \frac{\beta_1}{6} - \left(6z_0 + \beta_1^2\right)\frac{t^2}{120} - \frac{t^3}{12} + ht^4 - \left(6z_0 + \beta_1^2\right)^2\frac{t^6}{86\,400} + \sum_{j=7}^{\infty} c_j t^j, \tag{8}$$

где $t = z - z_0$, h – произвольная постоянная, а коэффициенты c_j, $j > 6$, однозначно определяются через z_0, h и параметр β_1.

Для определения индексов Фукса r уравнений (5) и (6), т. е. степеней $\left(z - z_0\right)^r$ в полярных разложениях решений, для которых c_j остаются произвольными, положим

$$q = c_{-2}\left(z - z_0\right)^{-2} + \delta\left(z - z_0\right)^{r-2}.$$

Тогда для уравнения (5) в первом порядке по δ имеем $c_{-2} = -2$ и $c_{-2} = -6$. При $c_{-2} = -2$ индексы Фукса принимают значения $r_1 = -3$, $r_2 = 0$, $r_3 = 3$, $r_4 = 6$. Неотрицательные индексы Фукса влекут произвольность коэффициентов c_0, c_3, c_6. В этом случае разложение решения уравнения (5) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ имеет вид

$$\begin{gathered} q^{[3]}(z) = -2t^{-2} + h_1 + \left(30h_1^2 + 6h_1s_1 + s_2\right)\frac{t^2}{20} + h_2t^3 - \\ - \left(z_0 + 280h_1^3 + 84h_1^2s_1 + s_1s_2 + 6h_1s_1^2 + 8h_1s_2\right)\frac{t^4}{112} - \\ - \left(1 + 12s_1h_2 + 120h_1h_2\right)\frac{t^5}{160} + h_3t^6 + \sum_{j=7}^{\infty} c_j t^j, \end{gathered} \tag{9}$$

где $t = z - z_0$, h_1, h_2, h_3 – произвольные постоянные, а коэффициенты c_j, $j > 6$, однозначно определяются через z_0, h_1, h_2, h_3 и параметры $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$. По сути, разложение (9) в случае сходимости представляет собой разложение общего решения уравнения (5) в окрестности $z = z_0$.

При $c_{-2} = -6$ индексы Фукса $r_j \in \{-5, -3, 6, 8\}$ и разложение решения уравнения (5) имеет вид

$$\begin{gathered} q^{[3]}(z) = -6t^{-2} - \frac{s_1}{10} + \left(10s_2 - 3s_1^2\right)\frac{t^2}{1400} + \\ + \left(25z_0 - s_1^3 + 5s_1s_2\right)\frac{t^4}{25\,200} + \frac{t^5}{480} + h_1t^6 + h_2t^8 + \sum_{j=9}^{\infty} c_j t^j, \end{gathered} \tag{10}$$

где $t = z - z_0$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а коэффициенты c_j, $j > 8$, однозначно определяются через z_0, h_1, h_2 и параметры $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$.

Для уравнения (6) возможны три случая: $c_{-2} \in \{-2, -6, -12\}$. Решение уравнения (6) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ имеет:

а) либо разложение

$$\begin{gathered} q^{[4]}(z) = -2t^{-2} + h_1 + h_2t^2 + h_3t^3 + \frac{t^4}{112}\left(s_3 + 6s_2h_1 + 10h_1^2\left(3s_1 + 14h_1\right) - 20\left(s_1 + 14h_1\right)h_2\right) + \\ + h_4t^5 + \frac{t^6}{2592}\Big(-z_0 - 6h_1\left(2s_3 + 13s_2h_1 + 315h_1^3\right) - s_1\left(s_3 + 6h_1\left(s_2 + 90h_1^2 - 60h_2\right)\right) - \\ - 20\left(s_2 - 126h_1^2\right)h_2 + 168h_2^2 + s_1^2\left(20h_2 - 30h_1^2\right)\Big) + \frac{t^7}{5600}\Big(-1 - 12s_2h_3 - 840h_1^2h_3 - \\ - 560h_2h_3 - 2240h_1h_4 - 40s_1\left(3h_1h_3 + 4h_4\right)\Big) + h_5t^8 + \sum_{j=9}^{\infty} c_j t^j, \end{gathered} \tag{11}$$

где $t = z - z_0$, коэффициенты c_0, c_2, c_3, c_5, c_8 остаются произвольными, а остальные коэффициенты c_j, $j > 8$, однозначно определяются через свободные коэффициенты, z_0 и параметры s_1, s_2, s_3;

б) либо разложение

$$\begin{gathered} q^{[4]}(z) = -6t^{-2} + h_1 + \left(s_2 + 10h_1\left(s_1 + 7h_1\right)\right)\frac{t^2}{140} + \\ + \left(-s_3 + 10s_1^2h_1 + 8s_2h_1 + 840h_1^3 + s_1\left(s_2 + 180h_1^2\right)\right)\frac{t^4}{1008} + h_2t^5 + \sum_{j=9}^{\infty} c_j t^j, \end{gathered} \tag{12}$$

где коэффициенты c_0, c_5, c_8, c_{10} остаются произвольными, а остальные коэффициенты c_j однозначно определяются через свободные коэффициенты, z_0 и параметры s_1, s_2, s_3;

в) либо разложение

$$q^{[4]}(z) = -12t^{-2} - \frac{s_1}{14} + \left(14s_2 - 5s_1^2\right)\frac{t^2}{5880} +$$
$$+ \left(21s_1s_2 - 5s_1^3 - 49s_3\right)\frac{t^4}{543\,312} + \sum_{j=5}^{\infty} c_j t^j, \tag{13}$$

где коэффициенты c_8, c_{10}, c_{12} остаются произвольными, а остальные коэффициенты c_j однозначно определяются через свободные коэффициенты, z_0 и параметры s_1, s_2, s_3.

Доказательство сходимости построенных разложений можно свести к построению эквивалентных исходным уравнениям систем Брио и Буке, как это сделано для уравнений $P_1^{[2n-2]}$ [6; 7]. Действительно, для уравнения (6) положим

$$u_{j+1} = t^{j+2}q^{(j)} - (-1)^j (j+1)!c_{-2},\ z = z_0 - t,\ j = 1, \dots, 6. \tag{14}$$

Тогда для функций $u_j(t)$ имеем эквивалентную уравнению (6) систему

$$tu_j' = (j+1)u_j + u_{j+1},\ \ j = 1, 2, \dots, 5,$$
$$tu_6' = P_3(s_1, s_2, s_3, u_1, u_2, u_3, u_4) \tag{15}$$

с полиномиальной правой частью, которая при $c_{-2} \in \{-2, -6, -12\}$ является системой Брио и Буке, причем в силу замены (14) и разложений (11)–(13) с формальным голоморфным решением $u_j \to 0$ при $t \to 0$. Ряды, представляющие эти решения, являются сходящимися согласно теореме A12 из работы [5] и, следовательно, с учетом замены (14) порождают полярные решения уравнения (6) с разложениями (11)–(13). Заметим также, что собственные значения матрицы линейной части системы (15) совпадают с индексами Фукса.

Уравнение (1) и линейное уравнение второго порядка

Известно, что общее решение линейного уравнения

$$u'' + (\lambda q(z) + \mu)u = 0, \tag{16}$$

где $q(z)$ – двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ с периодами ω, ω' и двукратными полюсами в точках $m\omega + m'\omega'$, m', $m \in \mathbb{Z}$, μ – произвольная постоянная, а $\lambda = -n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ (уравнение Ламе), представляет собой мероморфную функцию. Действительно, в этом случае уравнение (16) – линейное уравнение с регулярными особыми точками в полюсах мероморфной функции $\wp(z)$. При этом определяющее уравнение в данных особых точках имеет целые корни $\rho_1 = n + 1$, $\rho_2 = -n$. Следовательно, первое решение, соответствующее старшему показателю $\rho_1 = n + 1$, голоморфное, а второе решение, линейно независимое от первого, полярное в окрестности особых точек, при этом оно не имеет логарифмического члена, что является достаточным для мероморфности общего решения [10, с. 150].

Рассмотрим уравнение (16), где $q(z)$ – фиксированное мероморфное решение уравнений (4)–(6). Ясно, что в этом случае уравнение (16) – уравнение с конечными регулярными особыми точками в полюсах функции $q(z)$, и для построения фундаментальной системы решений можно использовать метод Фробениуса. Заметим, что для уравнения (4) в стандартной форме это уравнение рассматривалось ранее (см., например, [11]), а в работе [12] для уравнения Шази третьего порядка из статьи [11] построены решения, выражающиеся через эллиптическую функцию $\wp(z)$.

Пусть $q^{[2]}(z)$ – решение уравнения (4) с разложением (8) в окрестности подвижного полюса z_0. Тогда из определяющего уравнения $\rho(\rho - 1) - 2\lambda = 0$ с условием $\lambda = \frac{m(m+1)}{2}$, $m \in \mathbb{N}$, имеем целые показатели $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Для старшего показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем голоморфное решение

$$u_1^{[2]}(z) = (z - z_0)^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j,\ a_0 = 1, \tag{17}$$

где

$$a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = \frac{m\beta_1(1+m) - 12\mu}{24(3+2m)},\ a_5 = \frac{m^2+m}{240(3+m)},$$

$$a_4 = \frac{\left(m+m^2\right)\left(36(3+2m)z_0 + \left(18 + \left(17m + 5m^2\right)\right)\beta_1^2\right) - 120\left(m+m^2\right)\beta_1\mu + 720\mu^2}{5760(3+2m)(5+2m)}, \ldots .$$

Второе решение $u_2^{[2]}(z)$, полярное и линейно независимое от $u_1^{[2]}(z)$, можно построить по формуле

$$u_2^{[2]}(z) = u_1^{[2]}(z)\int\left(u_1^{[2]}(z)\right)^{-2}dz.$$

При этом условием отсутствия логарифма в $u_2^{[2]}(z)$ является $R_m^{[2]}(m) := \operatorname*{res}_{z=z_0}\left[\left(u_1^{[2]}(z)\right)^{-2}\right] = 0$, где $R_m^{[2]}(m)$ – вычет функции $\left(u_1^{[2]}(z)\right)^{-2}$ в полюсе z_0. В данном случае находим $R_m^{[2]}(1) = 0$, $R_m^{[2]}(2) = -\frac{1}{100}$, $R_m^{[2]}(3) = \frac{\beta_1 - \mu}{490}$. Следовательно, при $\lambda = 1$ или $\lambda = 6$ с дополнительным условием на параметры $\beta_1 - \mu = 0$ фундаментальная система решений уравнения (16) мероморфна.

Пусть $q^{[3]}(z)$ – решение уравнения (5). Здесь возможны два случая: $c_{-2} = -2$ и $c_{-2} = -6$ с разложениями (9) и (10) в окрестности подвижного полюса z_0 соответственно, где принимаем $\beta_1 + \beta_2 = s_1$, $\beta_1\beta_2 = s_2$.

В случае $c_{-2} = -2$, как и выше, имеем решение $u_1^{[3]}(z)$ вида (17), где

$$a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = -\frac{\left(m^2+m\right)h_1 + 2m}{12+8m},\ a_5 = -\frac{\left(m^2+m\right)h_2}{20(3+2m)},$$

$$a_4 = \frac{20\mu^2 + \left(m+m^2\right)\left(-(3+2m)s_2 + h_1\left((-18-12m)s_1 + 20\mu + 5\left(-18 + (-11+m)m\right)h_1\right)\right)}{160(3+2m)(5+2m)}, \ldots .$$

При этом находим $R_m^{[3]}(1) = 0$, $R_m^{[3]}(2) = \frac{3h_2}{25}$, $R_m^{[3]}(3) = \frac{3\left(-5 + 160\mu h_2 - 96h_2s_1\right)}{19\,600}$.

В случае $c_{-2} = -6$ положим $\lambda = \frac{p(p+1)}{6}$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда корни $\rho_1 = p+1$, $\rho_2 = -p$ определяющего уравнения являются целыми, и, следовательно, имеем голоморфное в окрестности z_0 решение вида (17), где

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0,\ a_2 = \frac{ps_1 + p^2s_1 - 60\mu}{120(3+2p)},$$

$$a_4 = \frac{25\,200\mu^2 + \left(p+p^2\right)\left(-840\mu s_1 + \left(54 + 43p + 7p^2\right)s_1^2 - 60(3+2p)s_2\right)}{201\,600(3+2p)(5+2p)}, \ldots .$$

Если обозначить вычет $R_p^{[3]}(p) := \operatorname*{res}_{z=z_0}\left[\left(u_1^{[3]}(z)\right)^{-2}\right] = 0$, то находим $R_p^{[3]}(1) = R_p^{[3]}(2) = 0$, $R_p^{[3]}(3) = \frac{1}{11\,760}$. Следовательно, в случае решения $q^{[3]}(z)$ уравнения (5) и $\lambda = 1$ ($m = 1$, $p = 2$) фундаментальная система решений уравнения (16) мероморфна как в окрестности полюсов с разложением (9), так и в окрестности полюсов с разложением (10).

Пусть $q^{[4]}(z)$ – решение уравнения (6). Здесь возможны три случая: $c_{-2} \in \{-2,\ -6,\ -12\}$ с разложениями (11), (12) и (13) в окрестности подвижного полюса z_0 соответственно.

В случае $c_{-2} = -2$, как и выше, имеем решение $u_1^{[4]}(z)$ вида (17), где

$$a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = -\frac{2\mu + \left(m + m^2\right)h_1}{12 + 8m},\ a_5 = -\frac{\left(m^2 + m\right)h_3}{20(3 + m)},$$

$$a_4 = \frac{\left(2\mu + \left(m + m^2\right)h_1\right)^2 - 4\left(m + m^2\right)(3 + 2m)h_2}{32(3 + 2m)(5 + 2m)}, \ \ldots .$$

При этом находим $R_m^{[3]}(1) = 0,\ R_m^{[3]}(2) = \dfrac{3h_3}{25},\ \ R_m^{[3]}(3) = \dfrac{6\left(\mu h_3 + 6h_1h_3 + 5h_4\right)}{245}.$

В случае $c_{-2} = -6$ положим $\lambda = \dfrac{p(p+1)}{6},\ p \in \mathbb{N}$. Тогда корни $\rho_1 = p + 1,\ \rho_2 = -p$ определяющего уравнения являются целыми, и, следовательно, имеем голоморфное в окрестности z_0 решение вида (17), где $c_0 = h_1$,

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0,\ a_2 = -\frac{6\mu + ph_1 + p^2h_1}{12(3 + 2p)},$$

$$a_4 = \frac{-3\left(p + p^2\right)(3 + 2p)s_2 + 1260\mu^2 + 5h_1\left(p + p^2\right)\left(-6(3 + 2p)s_1 + 84\mu + 7\left(-18 + \left(p^2 - 11p\right)\right)h_1\right)}{10\,080(3 + 2p)(5 + 2p)}, \ \ldots .$$

При этом находим $R_p^{[3]}(1) = R_p^{[3]}(2) = 0,\ R_p^{[3]}(3) = \dfrac{2h_2}{49}.$

В случае $c_{-2} = -12$ положим $\lambda = \dfrac{l(l+1)}{12},\ l \in \mathbb{N}$. Тогда корни $\rho_1 = l + 1,\ \rho_2 = -l$ определяющего уравнения являются целыми, и, следовательно, имеем голоморфное в окрестности z_0 решение вида (17), где

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0,\ a_2 = \frac{ls_1 + l^2s_1 - 168\mu}{336(2l + 3)},$$

$$a_4 = \frac{141\,120\mu^2 - 1680\left(l + l^2\right)\mu s_1 + \left(l + l^2\right)\left(s_1^2\left(60 + 45l + 5l^2\right) - 56(3 + 2l)s_2\right)}{1\,128\,960(3 + 2l)(5 + 2l)}, \ \ldots .$$

Если при этом обозначить вычет $R_l^{[4]}(l) := \operatorname*{res}_{z = z_0}\left[\left(u_1^{[4]}(z)\right)^{-2}\right]$, то находим $R_l^{[4]}(1) = R_l^{[4]}(2) = R_p^{[3]}(3) = 0$, $R_p^{[3]}(4) = -\dfrac{1}{2\,449\,440}$. Следовательно, в случае уравнения (6) и $\lambda = 1$ ($m = 1$, $p = 2$, $l = 3$) фундаментальная система решений уравнения (16) мероморфна в окрестности полярной особой точки с разложениями (11)–(13). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (16) выполнено одно из условий:*

1) $q(z)$ есть произвольное решение уравнения (4) и $\lambda = 1$ либо $\lambda = 6$ с дополнительным условием $\mu = \beta_1$;

2) $q(z)$ есть произвольное мероморфное решение уравнения (5) или уравнения (6) и $\lambda = 1$.

Тогда общее решение уравнения (16) мероморфно.

Заметим, что частично теорема 1 была анонсирована в публикации [13].

Библиографические ссылки

1. Громак ВИ. Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференциальные уравнения.* 2020;56(8):1017–1033.

2. Кудряшов НА. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.* 2-е издание. Москва: Институт компьютерных исследований; 2004. 359 с.

3. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2009; 42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.

4. Айнс ЭЛ. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Эфрос АМ, редактор. Харьков: Научно-техническое издательство Украины; 1939. 719 с.

5. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane.* Berlin: Walter de Gruyter & Co.; 2002. VIII, 303 p. (de Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.

6. Gromak VI. The Bäcklund transformations of the higher order Painlevé equations. In: Coley A, Levi D, Milson R, Rogers C, Winternitz P, editors. *Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons. AARMS – CRM workshop; 1999 June 4–9; Halifax, Canada.* Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 3–28 (CRM proceedings and lecture notes; volume 29).

7. Грицук ЕВ. О локальных свойствах решений уравнений ${}_{2n}P_1$. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2011;2:113–118.

8. Виттих ГВ. *Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.* Гольдберг АА, переводчик; Волковыский ЛИ, редактор. Москва: Физматгиз; 1960. 319 с.

9. Еругин НП. *Проблема Римана.* Минск: Наука и техника; 1982. 336 с.

10. Гурса Э. *Курс математического анализа. Том 3. Часть 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление.* Шестопал МГ, переводчик; Степанов ВВ, редактор. Москва: Государственное технико-теоретическое издательство; 1934. 320 с.

11. Chazy J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Acta Mathematica.* 1911;34:317–385. DOI: 10.1007/BF02393131.

12. Атрохов КГ, Громак ЕВ. О решениях уравнения Шази. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;2:51–59. На англ. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-2-51-59.

13. Громак ЕВ. О мероморфных решениях линейных уравнений со специальным инвариантом. В: *Институт математики НАН Беларуси. Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Материалы 10-го Международного научного семинара; 13–17 сентября 2021 г.; Минск, Беларусь = Analytical methods of analysis and differential equations. Materials of the 10th International workshop; 2021 September 13–17; Minsk, Belarus.* Минск: ИВЦ Минфина; 2021. с. 30.

References

1. Gromak VI. [Analytic properties of solutions to the equations in the generalised hierarchy of the second Painlevé equation]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2020;56(8):1017–1033. Russian.

2. Kudryashov NA. *Analiticheskaya teoriya nelineinykh differentsial'nykh uravnenii* [Analytic theory of non-linear differential equations]. 2nd edition. Moscow: Institute of Computer Science; 2004. 359 p. Russian.

3. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2009; 42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.

4. Ince EL. *Ordinary differential equations.* New York: Dover Publications; 1956. VIII, 558 p.

Russian edition: Ince EL. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Efros AM, editor. Kharkiv: Nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo Ukrainy; 1939. 719 p.

5. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane.* Berlin: Walter de Gruyter & Co.; 2002. VIII, 303 p. (de Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.

6. Gromak VI. The Bäcklund transformations of the higher order Painlevé equations. In: Coley A, Levi D, Milson R, Rogers C, Winternitz P, editors. *Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons. AARMS – CRM workshop; 1999 June 4–9; Halifax, Canada.* Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 3–28 (CRM proceedings and lecture notes; volume 29).

7. Gritsuk EV. [On local properties of solutions to the equations ${}_{2n}P_1$]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2011;2:113–118. Russian.

8. Wittich H. *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen.* Berlin: Springer-Verlag; 1955. IV, 163 S. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge; Heft 8).

Russian edition: Wittich HV. *Noveishie issledovaniya po odnoznachnym analiticheskim funktsiyam.* Gol'dberg AA, translator; Volkovyskii LI, editor. Moscow: Fizmatgiz; 1960. 319 p.

9. Erugin NP. *Problema Rimana* [The Riemann problem]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1982. 336 p. Russian.

10. Goursat E. *Cours d'analyse mathématique. Tome 3. Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles du second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations.* 5me édition. Paris: Gauthier-Villars; 1927. 712 p.

Russian edition: Goursat E. *Kurs matematicheskogo analiza. Tom 3. Chast' 2. Integral'nye uravneniya. Variatsionnoe ischislenie.* Shestopal MG, translator; Stepanov VV, editor. Moscow: Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatel'stvo; 1934. 320 p.

11. Chazy J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Acta Mathematica.* 1911;34:317–385. DOI: 10.1007/BF02393131.

12. Atrokhau KG, Gromak EV. On solutions of the Chazy equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;2:51–59. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-2-51-59.

13. Gromak EV. [On meromorphic solutions of linear equations with a special invariant]. In: *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus. Analytical methods of analysis and differential equations. Materials of the 10th International workshop; 2021 September 13–17; Minsk, Belarus.* Minsk: Information and Computing Center of the Ministry of Finance of the Republic of Belarus; 2021. p. 30. Russian.

Получена 31.01.2022 / исправлена 16.06.2022 / принята 16.06.2022.
Received 31.01.2022 / revised 16.06.2022 / accepted 16.06.2022.

УДК 517.977

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

***А. И. КАЛИНИН*[1], *Л. И. ЛАВРИНОВИЧ*[1], *Д. Ю. ПРУДНИКОВА*[1]**

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается задача оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе (содержит малый параметр при нелинейностях) с критерием качества, представляющим собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса. Предлагается алгоритм построения асимптотических приближений заданного порядка к решению этой задачи. Суть данного алгоритма заключается в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных и длительности процесса – конечномерных элементов, по которым легко восстанавливается решение задачи. Вычислительная процедура алгоритма сводится к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной динамической системе, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем. Также показывается, как можно использовать полученные асимптотические приближения для построения оптимального управления в рассматриваемой задаче при заданном значении малого параметра.

Ключевые слова: малый параметр; квазилинейная система; оптимальное управление; асимптотические приближения.

THE SMALL PARAMETER METHOD IN THE OPTIMISATION OF A QUASI-LINEAR DYNAMICAL SYSTEM PROBLEM

***A. I. KALININ*[a], *L. I. LAVRINOVICH*[a], *D. Y. PRUDNIKOVA*[a]**

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: L. I. Lavrinovich (lavrinovich@bsu.by)

We consider an optimisation problem for the transient process in a quasi-linear dynamical system (contains a small parameter at non-linearities) with a performance index that is a linear combination of energy costs and the duration of the process. An algorithm for constructing asymptotic approximations of a given order to the solution of this problem

Образец цитирования:
Калинин АИ, Лавринович ЛИ, Прудникова ДЮ. Метод малого параметра в задаче оптимизации квазилинейной динамической системы. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:23–33.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-23-33

For citation:
Kalinin AI, Lavrinovich LI, Prudnikova DY. The small parameter method in the optimisation of a quasi-linear dynamical system problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:23–33. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-23-33

Авторы:
Анатолий Иосифович Калинин – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.
Леонид Иванович Лавринович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.
Дарья Юрьевна Прудникова – студентка факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Л. И. Лавринович.

Authors:
Anatoly I. Kalinin, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of optimal control methods, faculty of applied mathematics and computer science.
kalininai@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-3223-2338
Leonid I. Lavrinovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of optimal control methods, faculty of applied mathematics and computer science.
lavrinovich@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-7698-0207
Darya Y. Prudnikova, student at the faculty of applied mathematics and computer science.
fpm.prudnikoDY@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-8645-4972

is proposed. The algorithm is based on the asymptotic decomposition by integer powers of a small parameter of the initial values of adjoint variables and the duration of the process that are finite-dimensional elements, according to which the solution of the problem is easily restored. The computational procedure of the algorithm includes solving the problem of optimising the transient process in a linear dynamical system, integrating systems of linear differential equations, and finding the roots of non-degenerate linear algebraic systems. We also show how the constructed asymptotic approximations can be used to construct optimal control in the problem under consideration for a given value of a small parameter.

Keywords: small parameter; quasi-linear system; optimal control; asymptotic approximations.

Введение

Многие прикладные задачи оптимизации динамических систем в своих математических моделях содержат малые параметры, причем зачастую модели существенно упрощаются, если эти параметры положить равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых состоит в том, что при их применении исходные задачи, которые принято называть возмущенными, сводятся к сравнительно несложной коррекции решений более простых задач оптимального управления. В частности, это относится к задачам оптимизации квазилинейных систем, содержащих малые параметры при нелинейностях. Такие задачи в различных постановках исследовались многими авторами (см., например, [1–8]).

В настоящей статье рассматривается задача оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе с критерием качества, который представляет собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса. Заметим, что если при нефиксированном времени перехода учесть только энергетические затраты, то, как правило, задача не будет иметь решения, а на минимизирующей последовательности длительность процесса будет стремиться к бесконечности. Цель исследования – построение асимптотических приближений к решению рассматриваемой задачи. Применяемый подход к исследованию является модификацией методики, изложенной в работах [5; 9]. Суть модификации состоит в построении асимптотических разложений по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных и длительности процесса управления.

Постановка задачи

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t),\ t \in [t_*,\ t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,\ t) + B(t)u,\ \ x(t_*) = x_* \neq 0, \tag{1}$$

$$x(t_1) = 0,\ J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t_1}\left(1 + x^{\mathrm{T}}Q(t)x + u^{\mathrm{T}}P(t)u\right)dt \to \min, \tag{2}$$

где x – n-вектор; μ – малый (по модулю) параметр; $f(x,\ t),\ x \in R^n,\ t \geq t_*$, – нелинейная вектор-функция; $t_*,\ x_*$ – заданные начальный момент времени и начальное состояние динамической системы; t_1 – нефиксированный конечный момент времени ($t_1 \geq t_*$); $Q(t)$ – неотрицательно определенная симметрическая матрица, а $P(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \geq t_*$.

Предположение 1. Элементы матриц $A(t),\ B(t),\ Q(t),\ P(t),\ \dfrac{\partial f(x,\ t)}{\partial x},\ x \in R^n,\ t \geq t_*$, принадлежат классу $C^p,\ p \geq 1$.

Управление $u(t,\ \mu),\ t \in [t_*,\ t_1(\mu)]$, с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым, если для порожденной им траектории $x(t,\ \mu),\ t \in [t_*,\ t_1(\mu)]$, системы (1) выполняется условие $x(t_1(\mu),\ \mu) = 0$. Допустимое управление, минимизирующее функционал $J(u)$, называют оптимальным. Наряду с этими общеупотребительными понятиями определим то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассматриваемой задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\ \mu),\ t \in \left[t_*,\ t_1^{(N)}(\mu)\right]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) в задаче (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O\left(\mu^{N+1}\right)$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (x_*, t_*) имеет место

$$u^{(N)}(x_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in \left[t_*, t_1^{(N)}(\mu)\right]$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1), (2).

В статье предлагается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N ($N < p$) можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче. Данный алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании при сделанных далее предположениях гладкого оптимального управления и его асимптотических свойствах. Суть алгоритма состоит в построении полиномов Тейлора определяющих элементов оптимального управления, по которым оно легко восстанавливается. Определяющими элементами в рассматриваемой задаче являются начальные значения (в момент времени t_*) сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума [10] соответствуют оптимальному управлению, а также длительность процесса. Эти определяющие элементы, как функции малого параметра, принадлежат классу C^p.

Базовая задача

Вычисления при построении асимптотических приближений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной задачи при $\mu = 0$ и, в отличие от нее, является задачей оптимизации линейной системы.

Предположение 2. Динамическая система в базовой задаче вполне управляема (см. [1]).

Это предположение выполняется тогда и только тогда (см., например, [11]), когда при некотором $t_1 > t_*$ и любом ненулевом n-векторе l имеет место

$$l^{\mathrm{T}} F_0(t) B(t) \not\equiv 0, \; t_* \le t \le t_1,$$

где $F_0(t)$ – $(n \times n)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0 A(t), \; F_0(t_1) = E_n,$$

с единичной матрицей E_n. Это условие, которое называют неявным критерием управляемости, для стационарной динамической системы эквивалентно требованию $\operatorname{rank}\left(B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right) = n$.

При выполнении предположения 2 в базовой задаче существуют допустимые управления, и тогда эта задача имеет единственное решение (см. [12]), которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [10] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T^0 = \left[t_*, t_1^0\right]$ – оптимальные управление и траектория в базовой задаче, тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^{\mathrm{T}}(t)\psi + Q(t)x^0(t)$, что выполняются условия

$$\psi^{0\mathrm{T}}(t) B^{\mathrm{T}}(t) u^0(t) - \frac{1}{2} u^{0\mathrm{T}}(t) P(t) u^0(t) = \max_{u \in R^r} \left(\psi^{0\mathrm{T}}(t) B^{\mathrm{T}}(t) u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} P(t) u \right), \; t \in T^0, \tag{3}$$

$$2\psi^{0\mathrm{T}}(t_1^0) B(t_1^0) u^0(t_1^0) - u^{0\mathrm{T}}(t_1^0) P(t_1^0) u^0(t_1^0) = 1. \tag{4}$$

Из условия (3) непосредственно следует

$$u^0(t) = P^{-1}(t) B^{\mathrm{T}}(t) \psi^0(t), \; t \in T^0. \tag{5}$$

Условие (4) с учетом формулы (5) может быть записано в виде

$$\psi^{0\mathrm{T}}(t_1^0) B(t_1^0) P^{-1}(t_1^0) B^{\mathrm{T}}(t_1^0) \psi^0(t_1^0) = 1.$$

Пусть $\nu_0 = \psi^0(t_*)$, тогда $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, есть решение следующей начальной задачи:

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t), \; x(t_*) = x_*, \\ \dot{\psi} = Q(t)x(t) - A^{\mathrm{T}}(t)\psi, \; \psi(t_*) = \nu_0. \end{gathered} \tag{6}$$

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $F(t)$, $t \geq t_*$, системы (6) как решение начальной задачи $\dot{F} = \overline{A}(t)F,\ F(t_*) = E_{2n}$, в которой

$$\overline{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \\ Q(t) & -A^{\mathrm{T}}(t) \end{pmatrix}.$$

Разобьем матрицу F на блоки размера $n \times n$:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}.$$

После решения базовой задачи сформируем матрицу

$$I_0 = \begin{pmatrix} F_{12}(t_1^0) & \dot{x}^0(t_1^0) \\ 2\left(F_{22}(t_1^0)B(t_1^0)u^0(t_1^0)\right)^{\mathrm{T}} & \dfrac{d}{dt_1}\left(u^{0\mathrm{T}}(t_1^0)P(t_1^0)u^0(t_1^0)\right) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Предположение 3. Выполнено условие $\det I_0 \neq 0$.

Из результатов, полученных в работе [13], следует, что $\det F_{12}(t_1^0) \neq 0$.

Асимптотический анализ решения исходной задачи

Говорить об асимптотически субоптимальных управлениях можно лишь в том случае, когда исходная задача имеет решение. Убедимся, что при сделанных предположениях в задаче (1), (2) с достаточно малым по модулю μ существует оптимальное управление. Доказательство будет конструктивным и предопределит дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений.

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \mu f(x, t) + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi,\ x(t_*) = x_*, \\ \dot{\psi} = Q(t)x - \left(A(t) + \mu\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right)^{\mathrm{T}}\psi,\ \psi(t_*) = \nu. \end{gathered} \tag{8}$$

В силу теоремы о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам существуют такие положительные числа ε_0, μ_0, что задача (8) имеет единственное решение $x(t, \nu, \mu)$, $\psi(t, \nu, \mu)$, принадлежащее классу C^p, продолжимое на любой конечный промежуток $[t_*, t_1]$, если только $\|\nu - \nu_0\| < \varepsilon_0$, $|\mu| < \mu_0$.

Теорема. *При выполнении предположений 1–3 в задаче (1), (2) с достаточно малым по модулю* μ *существует единственное оптимальное управление, которое представимо в виде*

$$u^0(t, \mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t, \nu(\mu), \mu),\ t \in [t_*, t_1(\mu)]. \tag{9}$$

Оптимальный конечный момент времени $t_1(\mu)$ и начальное значение (в момент времени t_0) вектора сопряженных переменных $\nu(\mu)$ удовлетворяют системе уравнений

$$x(t_1, \nu, \mu) = 0,\ \psi^{\mathrm{T}}(t_1, \nu, \mu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi(t_1, \nu, \mu) + 2\mu\psi^{\mathrm{T}}(t_1, \nu, \mu)f(0, t_1) - 1 = 0, \tag{10}$$

причем $t_1(\mu) \in C^p,\ t_1(0) = t_1^0,\ \nu(\mu) \in C^p,\ \nu(0) = \nu_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для сокращения записи введем в рассмотрение векторы $\eta = (\nu, t_1)$, $\eta_0 = (\nu_0, t_1^0)$ и вектор-функцию

$$R(\eta, \mu) = \begin{pmatrix} x(\eta, \mu) \\ \psi^{\mathrm{T}}(\eta, \mu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi(\eta, \mu) + 2\mu\psi^{\mathrm{T}}(\eta, \mu)f(0, t_1) - 1 \end{pmatrix},$$

что позволяет записать систему (10) в виде

$$R(\eta, \mu) = 0. \tag{11}$$

С помощью теоремы о неявной функции убедимся, что эта система уравнений однозначно разрешима относительно η при достаточно малых по модулю μ. Прежде всего заметим, что вектор-функция $R(\eta, \mu)$, определенная в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, $|\mu| < \mu_0$, принадлежит классу C^p. Поскольку $x(t, \nu_0, 0) = x^0(t)$, $\psi(t, \nu_0, 0) = \psi^0(t)$, $t \in T^0$, то

$$R(\eta_0, 0) = \begin{pmatrix} x^0(t_1^0) \\ \psi^{0\mathrm{T}}(t_1^0)B(t_1^0)P^{-1}(t_1^0)B^{\mathrm{T}}(t_1^0)\psi^0(t_1^0) - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Матрица Якоби системы (11) имеет вид

$$\frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta, 0) = \begin{pmatrix} F_{12}(t_1^0) & \dot{x}^0(t_1^0) \\ 2\left(F_{22}(t_1^0)B(t_1^0)u^0(t_1^0)\right)^{\mathrm{T}} & \dfrac{d}{dt_1}\left(u^{0\mathrm{T}}(t_1^0)P(t_1^0)u^0(t_1^0)\right) \end{pmatrix} = I_0$$

и в силу предположения 3 является невырожденной. Таким образом, для системы (10) или, что то же самое, системы (11) выполнены все условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме в некоторой окрестности нуля $|\mu| < \mu_1$ однозначно определена вектор-функция $\eta(\mu)$ из класса C^p, удовлетворяющая системе уравнений (11) и условию $\eta(0) = \eta_0$.

Рассмотрим управление (9). Оно будет допустимым в исходной задаче, поскольку для порожденной им траектории $x^0(t, \mu) = x(t, \nu(\mu), \mu)$, $t \in [t_*, t_1(\mu)]$, системы (1) выполняется условие $x^0(t_1(\mu), \mu) = 0$. Вместе с тем это управление удовлетворяет принципу максимума [10] с вектором сопряженных переменных $\psi^0(t, \mu) = \psi(t, \nu(\mu), \mu)$, $t \in [t_*, t_1(\mu)]$.

Покажем, что экстремаль $u^0(t, \mu)$, $t \in [t_*, t_1(\mu)]$, будет единственным оптимальным управлением в задаче (1), (2), если μ достаточно мало по модулю. Предположим противное, тогда существует такая последовательность $\mu_k \to 0$, что либо управление $u^0(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, t_1(\mu_k)]$, $k = 1, 2, \ldots$, не является оптимальным в исходной задаче с $\mu = \mu_k$, либо существует другое оптимальное управление. Поскольку установлено, что в задаче (1), (2) с достаточно малым по модулю μ существует допустимое управление, то эта задача имеет решение в классе измеримых функций [12]. Решение исходной задачи с $\mu = \mu_k$, отличное от $u^0(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, t_1(\mu_k)]$, обозначим через $\bar{u}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$, и пусть $\bar{x}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$, – соответствующая оптимальная траектория. Тогда

$$J(\bar{u}(\cdot, \mu_k)) - J(u^0(\cdot, \mu_k)) \le 0, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Опираясь на эти неравенства, можно убедиться в том, что $\bar{t}_1(\mu_k) \to t_1^0$ при $k \to \infty$, и последовательность измеримых вектор-функций $\bar{u}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, t^*]$, с любым моментом времени $t^* < t_1^0$ содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к $u^0(t)$, $t \in [t_*, t^*]$. Рассуждения, которые приводят к такому выводу, аналогичны рассуждениям, использованным при доказательстве теорем в работах [14; 15]. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сходится сама последовательность.

Поскольку управление $\bar{u}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$, является оптимальным, то для него выполняется принцип максимума, т. е. существуют постоянная $\lambda(\mu_k) \ge 0$ и решение $\bar{\psi}(t, \mu_k)$, $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\left(A(t) + \mu_k \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t, \mu_k), t)\right)^{\mathrm{T}} \psi + \lambda(\mu_k)Q(t)\bar{x}(t, \mu_k) \tag{12}$$

такие, что $\lambda(\mu_k) + \|\bar{\psi}(\cdot, \mu_k)\| \ne 0$ и почти всюду на $t \in [t_*, \bar{t}_1(\mu_k)]$ выполняются условия

$$\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t, \mu_k)B(t)\bar{u}(t, \mu_k) - \lambda(\mu_k)\frac{1}{2}\bar{u}^{\mathrm{T}}(t, \mu_k)P(t)\bar{u}(t, \mu_k) =$$
$$= \max_{u \in R^r}\left(\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t, \mu_k)B(t)u - \lambda(\mu_k)\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right), \tag{13}$$

$$\left(2-\lambda(\mu_k)\right)\bar{\psi}^{\mathrm{T}}\left(\bar{t}_1(\mu_k),\, \mu_k\right)B\left(\bar{t}_1(\mu_k)\right)P^{-1}\left(\bar{t}_1(\mu_k)\right)B^{\mathrm{T}}\left(\bar{t}_1(\mu_k)\right)\bar{\psi}\left(\bar{t}_1(\mu_k),\, \mu_k\right)+ \\ +2\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}}\left(\bar{t}_1(\mu_k),\, \mu_k\right)f\left(0,\, \bar{t}_1(\mu_k)\right)-1=0. \tag{14}$$

Пусть $\bar{\nu}(\mu_k)=\bar{\psi}(t_*,\, \mu_k)$, $k=1, 2, \ldots$. Поскольку вектор $\left(\bar{\nu}(\mu_k),\, \lambda(\mu_k)\right)$ определен с точностью до положительного множителя, то без ограничения общности можно считать, что $\left\|\left(\bar{\nu}(\mu_k),\, \lambda(\mu_k)\right)\right\|=\left\|(\nu_0, 1)\right\|$, $k=1, 2, \ldots$. Из ограниченной последовательности векторов $\left(\bar{\nu}(\mu_k),\, \lambda(\mu_k)\right)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сходится сама последовательность, и обозначим ее предел через $(\bar{\nu},\, \lambda)$. Тогда последовательность $\bar{\psi}(t,\, \mu_k)$, $t\in\left[t_*,\, \bar{t}_1(\mu_k)\right]$, как видно из системы (12), будет равномерно сходиться к решению $\bar{\psi}(t)$, $t\in\left[t_*,\, t_1^0\right]$, начальной задачи

$$\dot{\psi}=-A^{\mathrm{T}}(t)\psi+\lambda Q(t)x^0(t),\ \psi(t_*)=\bar{\nu},$$

на любом промежутке $\left[t_*,\, t^*\right]$, $t^*<t_1^0$.

Переходя к пределу в соотношении (13) при $k\to\infty$, получаем, что почти всюду на $\left[t_0,\, t_1^0\right]$

$$\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t)B(t)u^0(t)-\frac{\lambda}{2}u^{0\mathrm{T}}(t)P(t)u^0(t)=\max_{u\in R^r}\left(\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(t)B(t)u-\frac{\lambda}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right). \tag{15}$$

Понятно, что $\lambda\geq 0$, $\left\|(\bar{\nu},\, \lambda)\right\|=\left\|(\nu_0, 1)\right\|$. Из соотношений (3), (15), используя неявный критерий управляемости, получаем, что $\lambda=1$, $\bar{\nu}=\nu_0$, $\bar{\psi}(t)=\psi_0(t)$, $t\in\left[t_*,\, t_1^0\right]$. Поскольку $\lambda(\mu_k)>0$ для достаточно больших k, то из соотношения (13) следует, что почти всюду на $\left[t_*,\, \bar{t}_1(\mu_k)\right]$

$$\bar{u}(t,\, \mu_k)=\frac{P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}(t,\, \mu_k)}{\lambda(\mu_k)}.$$

Отсюда и из формул (1), (8), (12) видно, что $\bar{x}(t,\, \mu_k)=x\left(t,\, \dfrac{\bar{\nu}(\mu_k)}{\lambda(\mu_k)},\, \mu_k\right)$, $t\in\left[t_*,\, \bar{t}_1(\mu_k)\right]$, а так как $\bar{x}\left(\bar{t}_1(\mu_k),\, \mu_k\right)=0$, то с учетом равенства (14) вектор $\dfrac{\bar{\nu}(\mu_k)}{\lambda(\mu_k)}$, а также момент времени $\bar{t}_1(\mu_k)$ являются решением системы (10) при $\mu=\mu_k$. В силу однозначной разрешимости этой системы в окрестности точки $\left(\nu_0,\, t_1^0,\, 0\right)$ имеем $\nu(\mu_k)=\dfrac{\bar{\nu}(\mu_k)}{\lambda(\mu_k)}$, $\bar{t}_1(\mu_k)=t_1(\mu_k)$ для достаточно больших k и, соответственно, $\bar{u}(t,\, \mu_k)=u^0(t,\, \mu_k)$ почти всюду на $\left[t_*,\, t_1(\mu_k)\right]$. Поскольку получено противоречие, теорема доказана.

Построение асимптотически субоптимальных управлений

Продолжим изложение алгоритма построения асимптотических приближений к решению задачи (1), (2), опираясь на утверждения теоремы. Пусть задано натуральное число N, $N<p$. Поскольку вектор $\eta(\mu)=\left(\nu(\mu),\, t_1(\mu)\right)$ принадлежит классу C^p и $\eta(0)=\left(\nu_0,\, t_1^0\right)$, то имеет место асимптотическое равенство $\eta(\mu)=\eta^{(N)}(\mu)+O\left(\mu^{N+1}\right)$, где

$$\eta^{(N)}=\left(\nu^{(N)}(\mu),\, t_1^{(N)}(\mu)\right),\ \nu^{(N)}(\mu)=\nu_0+\sum_{k=1}^{N}\mu^k\nu_k,\ t_1^{(N)}(\mu)=t_1^0+\sum_{k=1}^{N}\mu^k t_{1k} \tag{16}$$

есть полиномы Тейлора N-й степени. Вектор-функция

$$u^{(N)}(t,\, \mu)=P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi\left(t,\, \nu^{(N)}(\mu),\, \mu\right),\ t\in\left[t_*,\, t_1^{(N)}(\mu)\right], \tag{17}$$

будет асимптотическим субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. Для ее построения нужно найти коэффициенты ν_k, t_{1k}, $k=\overline{1,\, N}$, полиномов (16), что можно сделать с помощью методики, изложенной в работе [5]. Согласно этой методике прежде всего нужно разложить левую часть уравнения (11) по степеням малого параметра, применяя классическую технику Пуанкаре к системе (8). Вектор-функции $x(t,\nu,\mu)$, $\psi(t,\nu,\mu)$ в каждой точке области определения имеют частные производные по μ до порядка p включительно, поэтому они представимы в виде

$$x(t,\nu,\mu)=\sum_{k=0}^{N}\mu^k x_k(t,\nu)+O\left(\mu^{N+1}\right),\ \psi(t,\nu,\mu)=\sum_{k=0}^{N}\mu^k\psi_k(t,\nu)+O\left(\mu^{N+1}\right). \tag{18}$$

С помощью формализма Пуанкаре составим дифференциальные уравнения для функций $x_k(t,\nu)$, $\psi_k(t,\nu)$, $k=\overline{0,\,N}$, при фиксированном ν:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_0=A(t)x_0+B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_0,\ x_0(t_*)=x_*,\\
\dot{\psi}_0=Q(t)x_0-A^{\mathrm{T}}(t)\psi_0,\ \psi_0(t_*)=\nu,\\
\dot{x}_1=A(t)x_1+B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1+f\left(x_0(t),\,t\right),\ x_1(t_*)=0,\\
\dot{\psi}_1=Q(t)x_1-A^{\mathrm{T}}(t)\psi_1-\frac{\partial h}{\partial x}\left(x_0(t),\,\psi_0(t),\,t\right),\ \psi_1(t_*)=0,\\
\dot{x}_2=A(t)x_2+B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_2+\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0(t),\,t\right)x_1(t),\ x_2(t_*)=0,\\
\dot{\psi}_2=Q(t)x_2-A^{\mathrm{T}}(t)\psi_2-\frac{\partial h}{\partial x}\left(x_0(t),\,\psi_1(t),\,t\right)-\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x}\left(x_0(t),\,\psi_0(t),\,t\right)x_1(t),\ \psi_2(t_*)=0,\ \ldots,
\end{gathered} \tag{19}$$

где $h(x,\psi,t)=\psi^{\mathrm{T}}f(x,t)$. Как видно из уравнений (19), нахождение коэффициентов представлений (18) при заданном ν сводится к последовательному решению начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений.

В силу представлений (18) левая часть уравнения (11) допускает асимптотическое представление

$$R(\eta,\mu)=\sum_{k=0}^{N}\mu^k R_k(\eta)+O\left(\mu^{N+1}\right),$$

в котором

$$\begin{gathered}
R_0(\eta)=\begin{pmatrix} x_0(t_1,\nu)\\ \psi_0^{\mathrm{T}}(t_1,\nu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi_0(t_1,\nu)-1\end{pmatrix},\\
R_k(\eta)=\begin{pmatrix} x_k(t_1,\nu)\\ \sum\limits_{i=0}^{k}\left(\psi_i^{\mathrm{T}}(t_1,\nu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi_{k-i}(t_1,\nu)\right)+2\psi_{k-1}(t_1,\nu)f(0,t_1)\end{pmatrix},\ k=\overline{1,\,N}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Составим системы линейных уравнений для векторов $\eta_k=\left(\nu_k,\,t_{1k}\right)$, $k=\overline{1,\,N}$. В соответствии со схемой, приведенной в работе [5], применим для этого метод неопределенных коэффициентов, а именно разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию

$$\sum_{k=0}^{N}\mu^k R_k\left(\eta^{(N)}(\mu)\right)$$

по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения (начиная с коэффициента при μ) к нулю. В результате получим следующие невырожденные системы линейных уравнений для последовательного нахождения векторов η_k, $k=\overline{1,\,N}$:

$$I_0\eta_1=-R_1(\eta_0),\ I_0\eta_2=-R_2(\eta_0)-\frac{\partial R_1}{\partial\eta}(\eta_0)\eta_1-\frac{1}{2}\eta_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 R_0(\eta_0)}{\partial\eta^2}\eta_1,\ \ldots. \tag{21}$$

Как видно из формулы (20), чтобы сформировать правые части этих систем, необходимо знать значения функций $x_k(t, \nu)$, $\psi_k(t, \nu)$ и их частных производных по компонентам вектора η в точке η_0. Значения функций находятся посредством интегрирования уравнений (19). Формальным дифференцированием этих уравнений получаем начальные задачи для производных. Например:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_0}{\partial \nu} = A(t)\frac{\partial x_0}{\partial \nu} + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu},\ \frac{\partial x_0}{\partial \nu}(t_*) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} = Q(t)\frac{\partial x_0}{\partial \nu} - A^{\mathrm{T}}(t)\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu},\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}(t_*) = E_n.$$

При вычислении правых частей систем (21) следует учитывать, что $x_0(t, \nu_0) = x^0(t)$, $\psi_0(t, \nu_0) = \psi^0(t)$, $t \in T^0$. Тогда, как видно из формул (19), (20),

$$R_1(\eta) = \begin{pmatrix} x_1^0(t_1^0) \\ 2\psi_0^{\mathrm{T}}(t_1^0)B(t_1^0)P^{-1}(t_1^0)B^{\mathrm{T}}(t_1^0)\psi_1^0(t_1^0) + 2\psi_0^{\mathrm{T}}(t_1^0)f(0, t_1^0) \end{pmatrix},$$

а вектор-функция $x_1^0(t)$, $t \geq t_*$, вместе с $\psi_1^0(t)$, $t \geq t_*$, является решением начальной задачи

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1 + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 + f(x_0(t), t),\ x_1(t_*) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1 = Q(t)x_1 - A^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0(t), \psi_0(t), t),\ \psi_1(t_*) = 0.$$

Последовательно решая системы (21), находим векторы η_k, $k = \overline{1, N}$, и составляем полином (16). Управление (17), как уже отмечалось, является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. Для его построения необходимо решить начальную задачу (8) при $\nu = \nu^{(N)}(\mu)$. Вместе с тем $\psi\left(t, \nu^{(N)}(\mu), \mu\right) = \bar{\psi}^{(N)}(t, \mu) + O\left(\mu^{N+1}\right)$, где

$$\bar{\psi}^{(N)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^k \bar{\psi}_k(t),\ t \geq t_*,$$

а $\bar{\psi}_k(t)$ находятся в результате последовательного решения задач Коши, отличающихся от уравнений (19) только начальными условиями для ψ_k: $\bar{\psi}_k(t_*) = \nu_k$, $k = \overline{0, N}$. Управление

$$\bar{u}^{(N)}(t, \mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^{(N)}(t, \mu),\ t \in \left[t_*, t_1^{(N)}(\mu)\right],$$

наряду с уравнением (17) является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1), (2).

Заметим, что $\bar{\psi}^{(0)}(t, \mu) = \psi^0(t)$, $t \in T^0$, и, соответственно, $\bar{u}^{(0)}(t, \mu) = u^0(t)$, $t \in T^0$, т. е. решение базовой задачи является асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Также обратим внимание на то, что при построении асимптотически субоптимального управления первого порядка можно ограничиться решением начальной задачи (21), поскольку это управление представимо в виде

$$\bar{u}^{(1)}(t, \mu) = u^0(t) + \mu u^1(t),\ t \in \left[t_*, t_1^{(1)}(\mu)\right],$$

где

$$u^1(t) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\left(\psi_1^0(t) + F_{22}(t)\nu_1\right).$$

Построенные асимптотические приближения корней системы уравнений (11) можно использовать для решения этой системы, а значит, и рассмотренной задачи при заданном значении μ. Для этого нужно применить процедуру доводки [16], т. е. найти с помощью метода Ньютона корни системы уравнений (11), взяв в качестве начального приближения $\eta^{(N)}(\mu)$.

Пример. В классе управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, $t \geq t_*$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x}_1 = \mu x_2 x_3 + u_1,\ \dot{x}_2 = \mu x_1 x_3 + u_2,\ \dot{x}_3 = -2\mu x_1 x_2 + u_3,$$

$$x_i(t_*) = \omega_i,\ x_i(t_1) = 0,\ i = \overline{1, 3},$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t_1}\left(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4u_1^2 + 4u_2^2 + 4u_3^2\right)dt \to \min,$$

которая, в частности, моделирует процесс торможения вращений твердого тела, близкого к сферически симметричному [4]. В ней $0 < \mu \ll 1$. Построим асимптотически субоптимальные управления нулевого и первого порядков в этой задаче.

Предположение 2 в базовой задаче выполнено. Матрица (7) в данном случае имеет вид

$$I_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{sh}\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right) & 0 & 0 & \dfrac{\omega_1}{2\mathrm{sh}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)} \\ 0 & \frac{1}{2}\mathrm{sh}\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right) & 0 & \dfrac{\omega_2}{2\mathrm{sh}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{sh}\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right) & \dfrac{\omega_3}{2\mathrm{sh}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)} \\ \omega_1\mathrm{cth}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right) & \omega_2\mathrm{cth}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right) & \omega_3\mathrm{cth}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right) & \dfrac{4\mathrm{ch}\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)\omega^2}{\mathrm{sh}^3\left(\left(t_* - t_1^0\right)/2\right)} \end{pmatrix},$$

где $t_1^0 = t_1^0(\omega, t_*) = t_* - 2\ln\left(\sqrt{\omega^2 + 1} - \sqrt{\omega^2}\right)$, $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$, и является невырожденной. Таким образом, выполняется предположение 3.

Решением базовой задачи является управление

$$u_i^0(t) = -\frac{\mathrm{ch}\left(\left(t_1^0 - t\right)/2\right)}{2\mathrm{sh}\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right)}\omega_i,\ i = \overline{1, 3},\ t \in \left[t_*, t_1^0\right], \tag{22}$$

которое представляет собой асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в исходной задаче.

Поскольку в данном случае $t_{11} = 0$, то программное асимптотически субоптимальное управление первого порядка представимо в виде

$$\overline{u}_i^{(1)}(t, \mu) = u_i^0(t, \mu) + \mu u_i^1(t),\ i = \overline{1, 3},\ t \in \left[t_*, t_1^0\right],$$

где

$$u^1(t) = \left(\frac{\mathrm{ch}\left(\left(t + t_* - 2t_1^0\right)/2\right) + \mathrm{ch}\left(\left(t - t_*\right)/2\right) - \mathrm{ch}\left(t_1^0 - t\right) - 1}{2\mathrm{sh}^2\left(\left(t_1^0 - t_*\right)/2\right)}\right)\begin{pmatrix}\omega_2\omega_3 \\ \omega_1\omega_3 \\ \omega_1\omega_2\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Из формул (22), (23) следует, что асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка имеет вид

$$u_i^{(0)}(x, t) = -\frac{1}{2}\mathrm{cth}\left(\left(t_1^0(x, t) - t\right)/2\right)x_i,\ i = \overline{1, 3},$$

где $t_1^0(x, t) = t - \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$, а асимптотически субоптимальная обратная связь первого порядка совпадает с асимптотически субоптимальной обратной связью нулевого порядка.

Для оценки точности построенных асимптотических приближений были найдены состояния, в которые динамическую систему переводят программные асимптотически субоптимальные управления нулевого и первого порядков при $t_* = 0$, $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 1$ и конкретных значениях малого параметра. Результаты вычислений приведены в таблице (с точностью до 10^{-6}).

Результаты вычислений

Calculation results

Субоптимальные управления	$\mu = 0{,}1$			$\mu = 0{,}01$		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
Управление нулевого порядка	0,361 197	0,060 407	0,338 947	0,027 447	0,008 893	0,050 527
Управление первого порядка	0,058 040	0,003 344	0,120 750	0,000 801	0,000 126	0,001 001

Заключение

В статье предложены и обоснованы алгоритмы построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи. Суть применяемого подхода к исследованию состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума соответствуют оптимальному управлению, и длительности процесса. Основное достоинство предлагаемых алгоритмов прежде всего состоит в том, что вместо исходной, по существу, нелинейной задачи решается задача оптимизации линейной системы. Кроме того, вычислительная процедура алгоритмов включает в себя решение начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Библиографические ссылки

1. Красовский НН. *Теория управления движением: линейные системы.* Москва: Наука; 1968. 476 с.
2. Киселев ЮН. Асимптотическое решение задачи оптимального быстродействия для систем управления, близких к линейным. *Доклады Академии наук СССР.* 1968;182(1):31–34.
3. Falb PL, de Jong JL. *Some successive approximation methods in control and oscillation theory.* New York: Academic Press; 1969. VIII, 240 p. (Mathematics in science and engineering; volume 59).
4. Черноусько ФЛ, Акуленко ЛД, Соколов БН. *Управление колебаниями.* Москва: Наука; 1980. 383 с. (Теоретические основы технической кибернетики).
5. Калинин АИ. *Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем.* Минск: Экоперспектива; 2000. 187 с.
6. Акуленко ЛД. Оптимальное управление движениями бифилярного маятника. *Прикладная математика и механика.* 2004;68(5):793–806.
7. Калинин АИ, Лавринович ЛИ. Асимптотика решения задачи минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления.* 2019;5:32–43. DOI: 10.1134/S0002338819050056.
8. Габасов Р, Калинин АИ, Кириллова ФМ, Лавринович ЛИ. К асимптотическим методам оптимизации квазилинейных систем управления. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2019;25(3):62–72. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-62-72.
9. Калинин АИ. Асимптотическая оптимизация возмущенных динамических систем. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2016;3:143–147.
10. Понтрягин ЛС, Болтянский ВГ, Гамкрелидзе РВ, Мищенко ЕФ. *Математическая теория оптимальных процессов.* 4-е издание. Москва: Наука; 1983. 392 с.
11. Габасов Р, Кириллова ФМ. *Оптимизация линейных систем: методы функционального анализа.* Минск: Издательство БГУ; 1973. 246 с.
12. Мордухович БШ. Существование оптимальных управлений. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.* 1976;6:207–271.
13. Калинин АИ. О проблеме синтеза оптимальных систем управления. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2018;58(3):397–402. DOI: 10.7868/S0044466918030079.
14. Калинин АИ. Метод возмущений для асимптотического решения квазилинейной задачи оптимального быстродействия. *Дифференциальные уравнения.* 1990;26(4):585–594.
15. Калинин АИ. Оптимизация квазилинейных систем управления. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1988;28(3):325–334.
16. Габасов Р, Кириллова ФМ. *Конструктивные методы оптимизации. Часть 2. Задачи управления.* Минск: Университетское; 1984. 207 с.

References

1. Krasovskii NN. *Teoriya upravleniya dvizheniem: lineinye sistemy* [Theory of control of motion: linear systems]. Moscow: Nauka; 1968. 476 p. Russian.
2. Kiselev YuN. [Asymptotic solution of time-optimal problem for near-linear control systems]. *Doklady Akademii nauk SSSR.* 1968;182(1):31–34. Russian.

3. Falb PL, de Jong JL. *Some successive approximation methods in control and oscillation theory.* New York: Academic Press; 1969. VIII, 240 p. (Mathematics in science and engineering; volume 59).

4. Chernous'ko FL, Akulenko LD, Sokolov BN. *Upravlenie kolebaniyami* [Control of oscillations]. Moscow: Nauka; 1980. 383 p. (Teoreticheskie osnovy tekhnicheskoi kibernetiki). Russian.

5. Kalinin AI. *Asimptoticheskie metody optimizatsii vozmushchennykh dinamicheskikh sistem* [Asymptotic methods for optimisation of disturbed dynamical systems]. Minsk: Ekoperspektiva; 2000. 187 p. Russian.

6. Akulenko LD. [Optimal control of motions of a bifilar pendulum]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 2004;68(5):793–806. Russian.

7. Kalinin AI, Lavrinovich LI. [Asymptotics of the solution to the minimisation problem of the integral quadratic performance index on trajectories of a quasi-linear system]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya.* 2019;5:32–43. Russian. DOI: 10.1134/S0002338819050056.

8. Gabasov R, Kalinin AI, Kirillova FM, Lavrinovich LI. On asymptotic optimization methods for quasilinear control systems. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN.* 2019;25(3):62–72. Russian. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-62-72.

9. Kalinin AI. Asymptotic optimization of perturbed dynamical systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2016;3:143–147. Russian.

10. Pontryagin LS, Boltyanskii VG, Gamkrelidze RV, Mishchenko EF. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. 4th edition. Moscow: Nauka; 1983. 392 p. Russian.

11. Gabasov R, Kirillova FM. *Optimizatsiya lineinykh sistem: metody funktsional'nogo analiza* [Optimisation of linear systems: functional analysis methods]. Minsk: Publishing House of the Belarusian State University; 1973. 246 p. Russian.

12. Mordukhovich BSh. [Existence of optimal controls]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki.* 1976;6:207–271. Russian.

13. Kalinin AI. [To the synthesis of optimal control systems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki.* 2018; 58(3):397–402. Russian. DOI: 10.7868/S0044466918030079.

14. Kalinin AI. [An algorithm for the asymptotic solution of a singularly perturbed non-linear time-optimality problem]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1990;26(4):585–594. Russian.

15. Kalinin AI. [Optimisation of quasi-linear control systems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki.* 1988; 28(3):325–334. Russian.

16. Gabasov R, Kirillova FM. *Konstruktivnye metody optimizatsii. Chast' 2. Zadachi upravleniya* [Constructive optimisation methods. Part 2. Control problems]. Minsk: Universitetskoe; 1984. 207 p. Russian.

Получена 29.03.2022 / исправлена 02.06.2022 / принята 02.06.2022.
Received 29.03.2022 / revised 02.06.2022 / accepted 02.06.2022.

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022;2:34–46
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022;2:34–46

УДК 517.956.3

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБ АБСОЛЮТНО НЕУПРУГОМ УДАРЕ ПО ДЛИННОМУ УПРУГОМУ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМУ СТЕРЖНЮ С ЛИНЕЙНЫМ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ НА КОНЦЕ

В. И. КОРЗЮК[1), 2)], ***Я. В. РУДЬКО***[2), 3)]

[1)]*Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[3)]*Открытые информационные системы, ул. Великий Гостинец, 143б, 222310, г. Молодечно, Беларусь*

Изучается классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости для одномерного волнового уравнения, которая моделирует распространение волн смещений при продольном ударе по стержню, когда груз остается в соприкосновении со стержнем и стержень имеет линейный упругий элемент на конце. На нижнем основании задаются условия Коши, причем второе из них имеет разрыв первого рода в точке. На боковой границе задается граничное условие, содержащее неизвестную функцию и ее частные производные первого и второго порядков. Решение строится методом характеристик в явном аналитическом виде. Доказывается его единственность и устанавливаются условия, при которых существует кусочно-гладкое решение. Рассматривается задача с условиями сопряжения.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение; неоднородное уравнение; смешанная задача; негладкие краевые условия; продольный удар; метод характеристик.

CLASSICAL SOLUTION OF ONE PROBLEM OF A PERFECTLY INELASTIC IMPACT ON A LONG ELASTIC SEMI-INFINITE BAR WITH A LINEAR ELASTIC ELEMENT AT THE END

V. I. KORZYUK[a, b], ***J. V. RUDZKO***[b, c]

[a]*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surhanava Street, Minsk 220072, Belarus*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[c]*Otkrytye informatsionnye sistemy, 143b Vialiki Hasciniec Street, Maladziečna 222310, Belarus*

Corresponding author: J. V. Rudzko (janycz@yahoo.com)

In this article, we study the classical solution of the mixed problem in a quarter of a plane for a one-dimensional wave equation. This mixed problem models the propagation of displacement waves during a longitudinal impact on a bar, when the load remains in contact with the bar and the bar has a linear elastic element at the end. On the lower boundary, the

Образец цитирования:
Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню с линейным упругим элементом на конце. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:34–46.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-34-46

For citation:
Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of one problem of a perfectly inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar with a linear elastic element at the end. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:34–46. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-34-46

Авторы:
Виктор Иванович Корзюк – академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник отдела математической физики[1)], профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета[2)].
Ян Вячеславович Рудько – математик-программист[3)].

Authors:
Viktor I. Korzyuk, academician of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher at the department of mathematical physics[a] and professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics[b].
korzyuk@bsu.by
Jan V. Rudzko, mathematician-programmer[c].
janycz@yahoo.com
https://orcid.org/0000-0002-1482-9106

Cauchy conditions are specified, and the second of them has a discontinuity of the first kind at one point. The boundary condition, including the unknown function and its first and second order partial derivatives, is set at the side boundary. The solution is built using the method of characteristics in an explicit analytical form. The uniqueness is proven and the conditions are established under which a piecewise-smooth solution exists. The problem with matching conditions is considered.

Keywords: one-dimensional wave equation; inhomogeneous equation; mixed problem; non-smooth boundary conditions; longitudinal impact; method of characteristics.

Введение

Основное явление в теории механического удара – это распространение волн смещений в твердых телах. Экспериментальное изучение почти всех явлений удара весьма затруднительно. При аналитическом изучении вызванных ударом колебаний интерес представляют задачи, где рассматриваются и описываются колебательные процессы, при которых груз после удара остается в соприкосновении с ударяемым телом [1; 2]. Как правило, математические модели подобных явлений представляют собой смешанные задачи для уравнений с частными производными с граничными условиями в начальный момент времени рассматриваемого процесса колебаний, которые отличны от нуля на множестве нулевой меры [3–6].

Настоящая работа посвящена построению и исследованию свойств решения одномерной смешанной задачи, содержащей в граничном условии функцию и ее производные первого и второго порядков, для неоднородного волнового уравнения с заданными разрывными условиями. Указанная задача исследуется методом характеристик [7; 8].

Близкими к данной работе являются статьи [6; 9–13].

Постановка задачи

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ упругий полубесконечный однородный стержень постоянного поперечного сечения, конец которого $x = 0$ имеет упругое закрепление, подвергся продольному удару некоторым грузом по концу $x = 0$, причем в дальнейшем груз остался в соприкосновении со стержнем (т. е. удар был абсолютно неупругим). Кроме того, полагаем, что на стержень действует внешняя объемная сила, а смещения точек стержня и скорость их изменения в начальный момент времени не равны нулю. Тогда, пренебрегая весом стержня как силой и его возможными вертикальными отклонениями, для определения смещений u находим решение волнового уравнения в области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$

$$\left(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2\right)u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(0, x) = \varphi(x),\ x \in [0, \infty),\ \partial_t u(0, x) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1,\ x = 0, \\ \psi_2(x),\ x \in (0, \infty), \end{cases} \tag{2}$$

и граничному условию

$$\left(\partial_t^2 + b^2\partial_x + c^2\right)u(t, 0) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_1,\ t = 0, \\ \mu_2(t),\ t \in (0, \infty). \end{cases} \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, $b^2 = \dfrac{SE}{M}$, $c^2 = \dfrac{k}{M}$, где $E > 0$ – модуль упругости стержня; $\rho > 0$ – плотность материала стержня; $S > 0$ – площадь поперечного сечения стержня; $M > 0$ – масса ударившего груза; $k > 0$ – коэффициент жесткости линейного упругого элемента, к которому прикреплен конец $x = 0$ стержня. Величина $\psi_2(0+) - \psi_1$ имеет физический смысл скорости ударяющего груза, а величина $\mu(t)$ – воздействующей на конец стержня внешней силы, деленной на массу ударившего груза, причем величина μ_1 не задается произвольно [14], а зависит от функций f, φ, ψ и будет определена далее.

Будем полагать, что функции f, φ, ψ_2, μ_2 достаточно гладкие, а именно $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\mu_2 \in C^1([0, \infty))$, и для определенности $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Построение решения

Для построения решения задачи (1)–(3) рассмотрим вспомогательную задачу для волнового уравнения (1) на замыкании $\bar{Q}$ области Q. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0, x) = \varphi(x),\ x \in [0, \infty),\ \partial_t u(0, x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x),\ x \in \left[0, x^*\right),\ x^* > 0, \\ \tilde{\psi}_2(x),\ x \in \left(x^*, \infty\right), \end{cases} \tag{4}$$

и граничное условие

$$\left(\partial_t^2 + b^2\partial_x + c^2\right)u(t, 0) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \tilde{\mu}_1(t),\ t \in \left(0, \dfrac{x^*}{a}\right), \\ \tilde{\mu}_2(t),\ t \in \left(\dfrac{x^*}{a}, \infty\right). \end{cases} \tag{5}$$

При этом полагаем, что $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0, x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*, \infty\right)\right)$, $\tilde{\psi}_2(x) = \psi_2(x)$ для $x \in \left(x^*, \infty\right)$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0, \dfrac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\dfrac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$, $\tilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t)$ для $t \in \left(\dfrac{x^*}{a}, \infty\right)$, $\tilde{\mu}_1(0) = \mu_1$.

Как известно, общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [7]. Пусть $w : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным условиям Коши $w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0$ и $\partial_t^2 w(0, x) = f(0, x)$. Такое решение w существует [7; 8; 15], и оно имеет вид [15]

$$w(t, x) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f\left(\tau, |\lambda|\right) d\lambda. \tag{6}$$

Если $f \in C^1\left(\bar{Q}\right)$, то $w \in C^2\left(\bar{Q}\right)$.

Тогда общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(t, x) = w(t, x) + g^{(1)}(x - at) + g^{(2)}(x + at), \tag{7}$$

где $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ – некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции. Для построения решения разделим область Q на шесть подобластей (см. рисунок):

$$Q^{(1)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at < x^*,\ x - at < x^*,\ x - at > 0\right\},$$

$$Q^{(2)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at > x^*,\ x - at > x^*,\ x - at > 0\right\},$$

$$Q^{(3)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at > x^*,\ x - at < x^*,\ x - at > 0\right\},$$

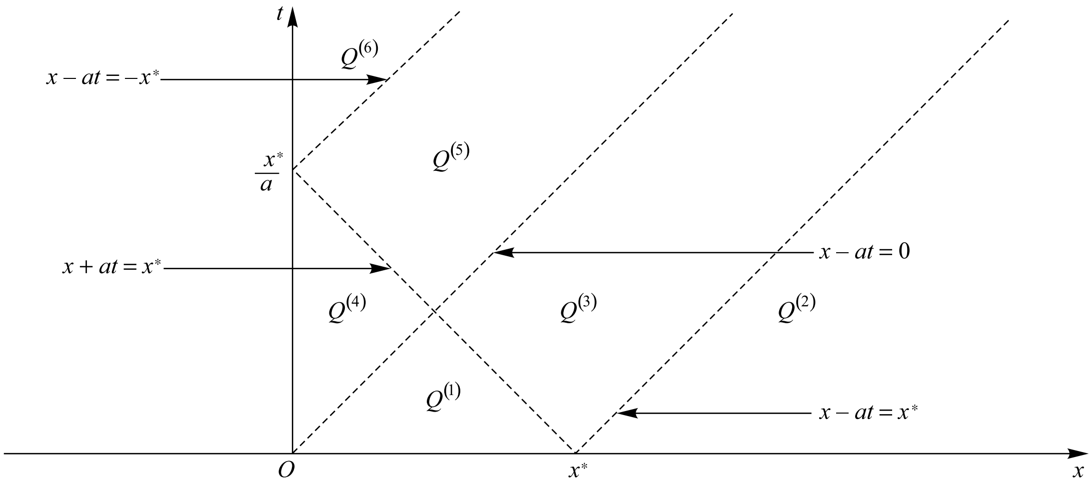
$$Q^{(4)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at < x^*,\ x - at < x^*,\ x - at < 0\right\},$$

$$Q^{(5)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x + at > x^*,\ x - at > -x^*,\ x - at < 0\right\},$$

$$Q^{(6)} = Q \cap \left\{(t, x) \,\middle|\, x - at < -x^*\right\}.$$

Определим функции $u^{(i)}$ как локальные решения задачи (1), (4), (5) в подобластях $Q^{(i)}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть

$$u(t, x) = u^{(i)}(t, x),\ \ i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \ (t, x) \in Q^{(i)}. \tag{8}$$



Разделение области Q характеристиками $x - at = 0$, $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ на шесть подобластей ($Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ и $Q^{(6)}$)
Division of the domain Q by the characteristics $x - at = 0$, $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ and $x - at = -x^*$ into six subdomains ($Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ and $Q^{(6)}$)

В силу разрыва во втором из начальных условий задача (1), (4), (5) не имеет классического решения, определенного на всем множестве $\bar{Q}$. Но тем не менее можно определить классическое решение задачи (1), (4), (5) на меньшем множестве $\bar{Q}\backslash\Gamma$ так, чтобы функция u удовлетворяла начальным и граничным условиям, принадлежала классу $C^2\left(\bar{Q}\backslash\Gamma\right)$ и на Γ задавались дополнительные условия согласования.

Определение 1. Функцию u, определяемую формулой (8), назовем классическим решением задачи (1), (4), (5), если $u^{(j)} \in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$ для каждого $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, функция $u^{(j)}$ удовлетворяет уравнению (1) в подобластях $Q^{(j)}$, функция u – первому из условий Коши (4), функция $u^{(1)}$ – второму из условий Коши (4) на полуоткрытом отрезке $\left[0, x^*\right)$, функция $u^{(2)}$ – этому же условию на полупрямой $\left(x^*, \infty\right)$, а функции $u^{(4)}$ и $u^{(6)}$ – граничному условию (5) на множествах $\left[0, \frac{x^*}{a}\right)$ и $\left(\frac{x^*}{a}, \infty\right)$ соответственно. Кроме того, функция u должна принадлежать классу $C\left(\bar{Q}\right)$, а ее частные производные первого порядка должны удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$\left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right](t, at) = \left[\left(\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_x u\right)^-\right](t, at) =$$
$$= \left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t, at - x^*\right) = \left[\left(\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_x u\right)^-\right]\left(t, at - x^*\right) = 0.$$

Здесь использованы обозначения $(\ )^\pm$ – предельные значения функции u и ее производных ∂_t, ∂_t^2 с разных сторон на характеристиках вида $x = r(t)$, т. е. $\left(\partial_t^p u\right)^\pm\left(t, r(t)\right) = \lim\limits_{\Delta t \to 0+} \partial_t^p u\left(t, r(t) \pm \Delta t\right)$, где $p = 1, 2$ и r – функция действительного переменного.

Определение 2. Функцию u из класса

$$C\left(\bar{Q}\right) \cap C^2\left(\bar{Q} \cap \left\{(t, x) \middle| x - at > 0\right\}\right) \cap C^2\left(\bar{Q} \cap \left\{(t, x) \middle| x - at < 0\right\}\right)$$

назовем классическим решением задачи (1)–(3), если она и ее частные производные первого и второго порядков (там, где существуют) являются поточечным пределом классических решений задачи (1), (4), (5) и их частных производных первого и второго порядков соответственно при $x^* \to 0$.

В силу представления (7) имеем

$$u^{(i)}(t, x) = w(t, x) + g^{(1, i)}(x - at) + g^{(2, i)}(x + at), \ i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ (t, x) \in Q^{(i)}, \tag{9}$$

где $g^{(1, i)}$ и $g^{(2, i)}$ – некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Удовлетворяя условия Коши в подобластях $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$, получаем формулы

$$\begin{aligned} g^{(1,1)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + C^{(1)},\ x \in \left(0, x^*\right), \\ g^{(2,1)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi - C^{(1)},\ x \in \left(0, x^*\right), \\ g^{(1,2)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + C^{(2)},\ x \in \left(x^*, \infty\right), \\ g^{(2,2)}(x) &= \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi - C^{(2)},\ x \in \left(x^*, \infty\right), \end{aligned} \tag{10}$$

где $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ – произвольные постоянные из множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Тогда функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ примут вид

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, x) &= w(t, x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi,\ (t, x) \in Q^{(1)}, \\ u^{(2)}(t, x) &= w(t, x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi,\ (t, x) \in Q^{(2)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Из формул (11) видно, что функции $u^{(j)}$ принадлежат классу дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$, $j = 1, 2$, если, например, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0, x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*, \infty\right]\right)$, $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, где $\overline{Q^{(j)}}$ и $\overline{Q}$ – замыкания подобластей $Q^{(j)}$ и области Q соответственно. Кроме того, функция $u^{(1,2)}(t, x) = u^{(j)}(t, x)$, $(t, x) \in \overline{Q^{(j)}}$, является непрерывной на части границы $\gamma^{(1,3)} \cup \gamma^{(2,3)}$ подобласти $Q^{(3)}$, где $\gamma^{(j,3)} = \overline{Q^{(j)}} \cap \overline{Q^{(3)}}$, $j = 1, 2$. Учитывая данный факт, функцию $u^{(3)}$ определяем как решение в подобласти $Q^{(3)}$ с условиями на характеристиках.

Согласно представлению (9) и формулам (11) имеем равенства

$$\begin{aligned} g^{(1,3)}\left(x^*\right) + g^{(2,3)}\left(x^* + 2at\right) &= \frac{1}{2}\left(\varphi\left(x^* + 2at\right) + \varphi\left(x^*\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x^*+2at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + C^{(1)} - C^{(2)},\ t \in [0, \infty), \\ g^{(1,3)}\left(x^* - 2at\right) + g^{(2,3)}\left(x^*\right) &= \frac{1}{2}\left(\varphi\left(x^* - 2at\right) + \varphi\left(x^*\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{x^*-2at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + C^{(1)} - C^{(2)},\ t \in [0, \infty). \end{aligned} \tag{12}$$

Соотношение (9) для $i = 3$ и равенства (12) в совокупности определяют функцию $u^{(3)}$:

$$\begin{aligned} u^{(3)}(t, x) &= w(t, x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + C^{(1)} - C^{(2)},\ (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}. \end{aligned} \tag{13}$$

В подобласти $Q^{(4)}$ находим решение $u^{(4)}$ уравнения (1). Согласно представлению (8) и граничному условию (5)

$$\left(\partial_t^2 + b^2\partial_x + c^2\right)u(t,\,0) = b^2\left(\partial_x w(t,\,0) + Dg^{(1,\,4)}(-at) + Dg^{(2,\,4)}(at)\right) + \partial_t^2 w(t,\,0) +$$

$$+ c^2\left(w(t,\,0) + g^{(1,\,4)}(-at) + g^{(2,\,4)}(at)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1,\,4)}(-at) + D^2 g^{(2,\,4)}(at)\right) = \tilde{\mu}_1(t),\ t \in \left(0,\,\frac{x^*}{a}\right).$$

Отсюда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $g^{(1,\,4)}$

$$c^2\left(w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) + g^{(1,\,4)}(z) + g^{(2,\,4)}(-z)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1,\,4)}(z) + a^2 D^2 g^{(2,\,4)}(-z)\right) +$$

$$+ b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) + Dg^{(1,\,4)}(z) + Dg^{(2,\,4)}(-z)\right) = \tilde{\mu}_1\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},\,0\right),\ z \in \left(-x^*,\,0\right). \tag{14}$$

В представлении решения (7) функция $g^{(2)}$ должна быть определена для всех положительных значений аргумента. Она определена уже согласно формулам (10). Поэтому для $z \in \left(-x^*,\,0\right)$ в выражении (14) полагаем $g^{(2,\,4)}(-z) = g^{(2,\,1)}(-z)$. Таким образом, уравнение (14) рассматриваем как дифференциальное уравнение относительно функции $g^{(1,\,4)}$ на отрезке $z \in \left[-x^*,\,0\right]$. С помощью формул (10) через значения функций $g^{(1,\,1)}$ и $g^{(1,\,2)}$ функция $g^{(1)}$ представления (7) определена для положительных значений аргумента. Учитывая непрерывность функции $g^{(1)}$ в целом, должны выполняться условия

$$\begin{aligned} g^{(1,\,4)}(0) &= \varphi^{(0)} = g^{(1,\,1)}(0) = C^{(1)} + \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)\,d\xi, \\ Dg^{(1,\,4)}(0) &= \varphi^{(0)} = Dg^{(1,\,1)}(0) = \frac{1}{2}D\varphi(0) - \frac{1}{2a}\tilde{\psi}_1(0). \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнение (14) относительно функции $g^{(1,\,4)}$ вместе с условиями (15) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Решая эту задачу, получаем

$$g^{(1,\,4)}(z) = \exp\left(-\frac{b^2 z}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\mathrm{ch}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{b^2\varphi^{(0)} + 2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$

$$+ \int_0^z \frac{2\mathcal{M}_4(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\exp\left(\frac{b^2(\xi - z)}{2a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(z - \xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)d\xi, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{M}_4(z) = \tilde{\mu}_1\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) - b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) + Dg^{(2,\,4)}(-z)\right) -$$

$$- c^2\left(w\left(-\frac{z}{a},\,0\right) + g^{(2,\,4)}(-z)\right) - a^2 D^2 g^{(2,\,4)}(-z),\ z \in \left(-x^*,\,0\right).$$

В результате имеем

$$u^{(4)}(t,\,x) = \int_0^{x - at}\frac{2\mathcal{M}_4(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\exp\left(\frac{b^2\left(\xi - (x - at)\right)}{2a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(x - at - \xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)d\xi +$$

$$+ \exp\left(-\frac{b^2(x - at)}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\,\mathrm{ch}\left(\frac{(x - at)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{b^2\varphi^{(0)} + 2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{(x - at)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{\varphi(x + at)}{2} + w(t,\,x) + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x + at}\tilde{\psi}_1(\xi)\,d\xi - C^{(1)},\ (t,\,x) \in Q^{(4)}. \tag{17}$$

Поскольку области определения по внешнему аргументу функций $g^{(1,5)}$ и $g^{(1,4)}$ совпадают, то в представлении (9) для $i = 5$ полагаем $g^{(1,5)}(x - at) = g^{(1,4)}(x - at)$ для $(t, x) \in Q^{(5)}$. По этой же причине полагаем $g^{(2,5)}(x + at) = g^{(2,2)}(x + at)$ для $(t, x) \in Q^{(5)}$. В силу формул (9), (10) и (16) получаем решение $u^{(5)}$ в подобласти $Q^{(5)}$ в виде

$$u^{(5)}(t, x) = \int\limits_0^{x-at} \frac{2\mathcal{M}_4(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \exp\left(\frac{b^2(\xi - (x - at))}{2a^2}\right) \mathrm{sh}\left(\frac{(x - at - \xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) d\xi +$$
$$+ \exp\left(-\frac{b^2(x - at)}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\mathrm{ch}\left(\frac{(x - at)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{b^2\varphi^{(0)} + 2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{(x - at)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$
$$+ \frac{\varphi(x + at)}{2} + w(t, x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x+at} \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi - C^{(2)}, \ (t, x) \in Q^{(5)}. \quad (18)$$

В подобласти $Q^{(6)}$ решение $u^{(6)}$ построим так, чтобы оно было непрерывно дифференцируемым при переходе через характеристику $x - at = -x^*$. Это можно сделать следующим образом. Согласно представлению (9) функция $u^{(6)}$ определяется через значения функций $g^{(1,6)}$ и $g^{(2,6)}$. Заметим, что для $(t, x) \in Q^{(6)}$ справедливы соотношения $x - at \in (-\infty, -x^*)$, $x + at \in (x^*, \infty)$. Согласно формулам (10) функция $g^{(2)}$ частично определена через $g^{(2,2)}$ для $x + at \in (x^*, \infty)$. Поэтому $g^{(2,6)}(x + at) = g^{(2,2)}(x + at)$ для всех $(t, x) \in Q^{(6)}$. Осталось определить $g^{(1,6)}(x - at)$ для $(t, x) \in Q^{(6)}$, т. е. $g^{(1,6)}(z)$ для $z \in (-\infty, -x^*)$. Это можно сделать исходя из требований, в соответствии с которыми функция $u^{(6)}$ должна удовлетворять условию (5), а функция

$$u^{(5,6)}(t, x) = \begin{cases} u^{(5)}(t, x), \ (t, x) \in \overline{Q^{(5)}}, \\ u^{(6)}(t, x), \ (t, x) \in \overline{Q^{(6)}}, \end{cases}$$

должна принадлежать классу $C^1\left(\overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\right)$, предполагая при этом, что $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0, x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*, \infty])$, $f \in C^1(\overline{Q})$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0, \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$. Удовлетворяя условие (3), для определения функции $g^{(1,6)}$ получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$c^2\left(w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + g^{(1,6)}(z) + g^{(2,6)}(-z)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1,6)}(z) + a^2 D^2 g^{(2,6)}(-z)\right) +$$
$$+ b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + Dg^{(1,6)}(z) + Dg^{(2,6)}(-z)\right) = \tilde{\mu}_2\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a}, 0\right), \ z \in (-\infty, -x^*). \quad (19)$$

Из требования $u^{(5,6)} \in C^1\left(\overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\right)$ имеем условия

$$g^{(1,6)}(-x^*) = g^{(1,4)}(-x^*), \ Dg^{(1,6)}(-x^*) = Dg^{(1,4)}(-x^*). \quad (20)$$

Решая задачу Коши (19), (20) относительно функции $g^{(1,6)}$, получаем

$$g^{(1,6)}(z) = \exp\left(-\frac{b^2 z}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\mathrm{ch}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{b^2\varphi^{(0)} + 2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$
$$+ \int\limits_0^z \frac{2\mathcal{M}_6(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \exp\left(\frac{b^2(\xi - z)}{2a^2}\right) \mathrm{sh}\left(\frac{(z - \xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) d\xi, \quad (21)$$

где

$$\mathcal{M}_6(z)=\begin{cases}\tilde{\mu}_1\left(-\frac{z}{a}\right)-\partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)-a^2D^2g^{(2,\,4)}(-z)-b^2Dg^{(2,\,4)}(-z)-\\ -b^2\partial_x w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)-c^2\left(w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)+g^{(2,\,4)}(-z)\right),\; z\in\left(-x^*,\,0\right),\\ \tilde{\mu}_2\left(-\frac{z}{a}\right)-\partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)-a^2D^2g^{(2,\,6)}(-z)-b^2Dg^{(2,\,6)}(-z)-\\ -b^2\partial_x w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)-c^2\left(w\left(-\frac{z}{a},\,0\right)+g^{(2,\,6)}(-z)\right),\; z\in\left(-\infty,\,-x^*\right).\end{cases}$$

В соотношении (21) полагаем $g^{(2,\,6)}(-z)=g^{(2,\,2)}(-z)$. В результате получаем

$$u^{(6)}(t,\,x)=\int\limits_0^{x-at}\frac{2\mathcal{M}_6(\xi)}{\sqrt{b^4-4a^2c^2}}\exp\left(\frac{b^2\left(\xi-(x-at)\right)}{2a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(x-at-\xi)\sqrt{b^4-4a^2c^2}}{2a^2}\right)d\xi+$$

$$+\exp\left(-\frac{b^2(x-at)}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\mathrm{ch}\left(\frac{(x-at)\sqrt{b^4-4a^2c^2}}{2a^2}\right)+\frac{b^2\varphi^{(0)}+2a^2\psi^{(0)}}{\sqrt{b^4-4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{(x-at)\sqrt{b^4-4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{\varphi(x+at)}{2}+w(t,\,x)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi-C^{(2)},\;(t,\,x)\in Q^{(6)}. \tag{22}$$

Выясним, что представляет собой разность $C^{(1)}-C^{(2)}$ в формуле (12). Для этого воспользуемся начальными условиями в точке $x=x^*$. Возьмем точку $(t,\,x)\in Q^{(3)}$ и будем устремлять ее к точке $\left(0,\,x^*\right)$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x^*}}u^{(3)}(t,\,x)=\varphi\left(x^*\right)+C^{(1)}-C^{(2)}=\varphi\left(x^*\right). \tag{23}$$

Из формулы (23) имеем, что $C^{(1)}-C^{(2)}=0$, следовательно, $C^{(1)}=C^{(2)}$.

Покажем, что функции $u^{(4)}$, $u^{(5)}$ и $u^{(6)}$, определенные формулами (17), (18) и (22), не зависят от выбора констант интегрирования $C^{(1)}$ и $C^{(2)}=C^{(1)}$. Из представлений (17), (18) и (22) следует, что функции $u^{(4)}$, $u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ являются непрерывно дифференцируемыми, если рассматривать их как функции от констант $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$. Теперь, подставляя $C^{(2)}=C^{(1)}$ в формулы (17), (18) и (22), получаем

$$\frac{\partial\left(u^{(4)}\Big|_{C^{(2)}=C^{(1)}}\right)}{\partial C^{(1)}}=\frac{\partial\left(u^{(5)}\Big|_{C^{(2)}=C^{(1)}}\right)}{\partial C^{(1)}}=\frac{\partial\left(u^{(6)}\Big|_{C^{(2)}=C^{(1)}}\right)}{\partial C^{(1)}}=0.$$

Действительно, функции $u^{(4)}$, $u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ не зависят от выбора константы $C^{(1)}$. Здесь было использовано обозначение $\tilde{v}=v\big|_{X=\beta}$ – применение функции к части аргументов, которое преобразует функцию $v:X\times Y\ni(x,\,y)\mapsto z\in Z$ в функцию $\tilde{v}:Y\ni y\mapsto z\in Z$ по формуле $\tilde{v}(y)=v(\beta,\,y)$.

Гладкость решения

Если $f\in C^1\left(\bar{Q}\right),\varphi\in C^2\left([0,\,\infty)\right),\tilde{\psi}_1\in C^1\left(\left[0,\,x^*\right]\right),\tilde{\psi}_2\in C^1\left(\left[x^*,\,\infty\right]\right),\tilde{\mu}_1\in C^1\left(\left[0,\,\frac{x^*}{a}\right]\right),\tilde{\mu}_2\in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\,\infty\right)\right)$, то из формул (11), (13), (17), (18) и (22) следует, что $u^{(j)}\in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$, $j=1,\,2,\,\ldots,\,6$.

Теорема 1. *Если выполняются условия гладкости* $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0, x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*, \infty])$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0, \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$ *для заданных функций, то существует единственное классическое решение задачи (1), (4), (5) в смысле определения 1, и оно представляется формулами (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22).*

Доказательство следует из формул (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции удовлетворяют уравнению (1), условиям (4), (5) и определению 1. Единственность доказывается методом от противного. Предположим, что существуют два решения. Тогда для их разности получаем однородное уравнение (1) и однородные условия (4), (5), из которых следует нулевое решение согласно формулам (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22).

Исследуем разрыв частных производных первого и второго порядков на границах подобластей $Q^{(i)}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Частные производные решения u задачи (1), (4), (5) имеют разрывы на характеристиках $x - at = 0$, $x \pm at = x^*$ и $x - at = -x^*$, которые определяются через значения заданных функций $u^{(j)}$, $j = 1, \ldots, 6$, следующим образом:

1) частные производные первого порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t u^{(2)} - \partial_t u^{(3)}\right)\left(t, x = x^* + at\right) = \frac{\delta\psi}{2}, \ \left(\partial_t u^{(3)} - \partial_t u^{(1)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2},$$

$$\left(\partial_t u^{(5)} - \partial_t u^{(4)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2}, \ \left(\partial_t u^{(5)} - \partial_t u^{(6)}\right)\left(t, x = at - x^*\right) = 0,$$

$$\left(\partial_x u^{(2)} - \partial_x u^{(3)}\right)\left(t, x = x^* + at\right) = -\frac{\delta\psi}{2a}, \ \left(\partial_x u^{(3)} - \partial_x u^{(1)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2a},$$

$$\left(\partial_x u^{(5)} - \partial_x u^{(4)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2a}, \ \left(\partial_x u^{(5)} - \partial_x u^{(6)}\right)\left(t, x = at - x^*\right) = 0$$

на характеристиках $x \pm at = x^*$ и $x - at = -x^*$;

2) частные производные второго порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t^2 u^{(2)} - \partial_t^2 u^{(3)}\right)\left(t, x = x^* + at\right) = -\frac{a\delta\psi^{(1)}}{2}, \ \left(\partial_t^2 u^{(3)} - \partial_t^2 u^{(1)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{a\delta\psi^{(1)}}{2},$$

$$\left(\partial_t^2 u^{(5)} - \partial_t^2 u^{(4)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{a\delta\psi^{(1)}}{2}, \ \left(\partial_t^2 u^{(5)} - \partial_t^2 u^{(6)}\right)\left(t, x = at - x^*\right) = \frac{b^2\delta\psi}{2a} + \frac{a\delta\psi^{(1)}}{2} - \delta\mu,$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(2)} - \partial_x^2 u^{(3)}\right)\left(t, x = x^* + at\right) = -\frac{\delta\psi^{(1)}}{2a}, \ \left(\partial_x^2 u^{(3)} - \partial_x^2 u^{(1)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi}{2a},$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(5)} - \partial_x^2 u^{(4)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi^{(1)}}{2a}, \ \left(\partial_x^2 u^{(5)} - \partial_x^2 u^{(6)}\right)\left(t, x = at - x^*\right) = \frac{b^2\delta\psi}{2a^3} + \frac{\delta\psi^{(1)}}{2a} - \frac{\delta\mu}{a^3},$$

$$\left(\partial_t\partial_x u^{(2)} - \partial_t\partial_x u^{(3)}\right)\left(t, x = x^* + at\right) = \frac{\delta\psi^{(1)}}{2}, \ \left(\partial_t\partial_x u^{(3)} - \partial_t\partial_x u^{(1)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi^{(1)}}{2},$$

$$\left(\partial_t\partial_x u^{(5)} - \partial_t\partial_x u^{(4)}\right)\left(t, x = x^* - at\right) = \frac{\delta\psi^{(1)}}{2}, \ \left(\partial_t\partial_x u^{(5)} - \partial_t\partial_x u^{(6)}\right)\left(t, x = at - x^*\right) = \frac{\delta\mu}{2a} - \frac{b^2\delta\psi}{2a^2} - \frac{\delta\psi^{(1)}}{2}$$

на характеристиках $x \pm at = x^*$ и $x - at = -x^*$;

3) частные производные первого порядка не имеют разрыва на характеристике $x - at = 0$;

4) частные производные второго порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t^2 u^{(1)} - \partial_t^2 u^{(4)}\right)\left(t, x = at\right) = \left(\partial_t^2 u^{(3)} - \partial_t^2 u^{(5)}\right)\left(t, x = at\right) =$$

$$= f(0, 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2 D^2\varphi(0) + b^2 D\varphi(0),$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(1)} - \partial_x^2 u^{(4)}\right)(t,\ x = at) = \left(\partial_x^2 u^{(3)} - \partial_x^2 u^{(5)}\right)(t,\ x = at) =$$
$$= \frac{f(0,\ 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2 D^2\varphi(0) + b^2 D\varphi(0)}{a^2},$$

$$\left(\partial_t \partial_x u^{(1)} - \partial_t \partial_x u^{(4)}\right)(t,\ x = at) = \left(\partial_t \partial_x u^{(3)} - \partial_t \partial_x u^{(5)}\right)(t,\ x = at) =$$
$$= \frac{\tilde{\mu}_1(0) - f(0,\ 0) - c^2\varphi(0) - a^2 D^2\varphi(0) - b^2 D\varphi(0)}{a}$$

на характеристике $x - at = 0$.
Здесь использованы обозначения

$$\delta\psi = \tilde{\psi}_2\left(x^*\right) - \tilde{\psi}_1\left(x^*\right),\ \delta\psi^{(1)} = D\tilde{\psi}_2\left(x^*\right) - D\tilde{\psi}_1\left(x^*\right),\ \delta\mu = \tilde{\mu}_2\left(\frac{x^*}{a}\right) - \tilde{\mu}_1\left(\frac{x^*}{a}\right).$$

Соотношения утверждения 1 доказываются непосредственной проверкой.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C^1\left(\bar{Q}\right)$, $\varphi \in C^2\left([0,\ \infty)\right)$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0,\ x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*,\ \infty\right]\right)$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0,\ \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\ \infty\right)\right)$ *для заданных функций. Решение задачи (1), (4), (5) в смысле определения 1, представленное формулами (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22), принадлежит классу* $C^1\left(\bar{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}_1\left(x^*\right) = \tilde{\psi}_2\left(x^*\right)$.

Доказательство. Поскольку $u^{(j)} \in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$ для каждого $j \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, то, для того чтобы решение принадлежало классу $C^1\left(\bar{Q}\right)$, должны быть выполнены однородные условия сопряжения на характеристиках $x + at = 0$, $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ для решения и его производных первого порядка. Из утверждения 1 следует, что они выполняются тогда и только тогда, когда $\tilde{\psi}_1\left(x^*\right) = \tilde{\psi}_2\left(x^*\right)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C^1\left(\bar{Q}\right)$, $\varphi \in C^2\left([0,\ \infty)\right)$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0,\ x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*,\ \infty\right]\right)$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0,\ \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\ \infty\right)\right)$ *для заданных функций. Решение задачи (1), (4), (5) в смысле определения 1, представленное формулами (6), (8), (11), (13), (17), (18) и (22), принадлежит классам* $C^2\left(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}}\right)$ *и* $C^2\left(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\mu}_1\left(\frac{x^*}{a}\right) = \tilde{\mu}_2\left(\frac{x^*}{a}\right)$, $D\tilde{\psi}_1\left(x^*\right) = D\tilde{\psi}_2\left(x^*\right)$ *и* $\tilde{\psi}_1\left(x^*\right) = \tilde{\psi}_2\left(x^*\right)$.

Доказательство. Поскольку $u^{(j)} \in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$ для каждого $j \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, то, для того чтобы решение принадлежало классам $C^2\left(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}}\right)$ и $C^2\left(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}}\right)$, должны быть выполнены однородные условия сопряжения на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ для решения и его производных первого и второго порядков. Из утверждения 1 следует, что они выполняются тогда и только тогда, когда $\tilde{\mu}_1\left(\frac{x^*}{a}\right) = \tilde{\mu}_2\left(\frac{x^*}{a}\right)$, $D\tilde{\psi}_1\left(x^*\right) = D\tilde{\psi}_2\left(x^*\right)$ и $\tilde{\psi}_1\left(x^*\right) = \tilde{\psi}_2\left(x^*\right)$.

Задача с условиями сопряжения

Рассмотрим задачу, когда хотя бы один из разрывов, указанных в утверждении 1, не равен нулю. В этом случае можно рассматривать задачу с условиями сопряжения, которые задаются на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$, $x - at = 0$ и $x - at = -x^*$. Сформулируем такую задачу.

Постановка задачи с условиями сопряжения. Требуется найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (4), граничному условию (5) и следующим условиям сопряжения:

$$\left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t,\ at - x^*\right) = 0,$$

$$\left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t,\ x^* - at\right) = \left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t,\ x^* + at\right) = \frac{\delta\psi}{2},$$

$$\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right]\left(t,\ at - x^*\right) = \frac{b^2\delta\psi + a^2\delta\psi^{(1)}}{2a} - \delta\mu,$$

$$\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right]\left(t,\ x^* - at\right) = \left[\left(\partial_t^2 u\right)^- - \left(\partial_t^2 u\right)^+\right]\left(t,\ x^* + at\right) = \frac{a\delta\psi^{(1)}}{2},$$

$$\left[u^+ - u^-\right]\left(t,\ at\right) = \left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right]\left(t,\ at\right) = 0,$$

$$\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right]\left(t,\ at\right) = f(0,\ 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0).$$

Предельный переход

Возвращаемся к исходной задаче (1)–(3). Ее классическое решение будем понимать как предел классических решений задачи (1), (4), (5) при $x^* \to 0$. Устремив x^* к нулю, получим, что подобласти $Q^{(1)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(5)}$ уменьшаются и в пределе становятся множествами нулевой меры. Но их значения будут влиять на значения решения задачи (1)–(3) на характеристике $x - at = 0$, поскольку в пределе замыкание множеств $Q^{(3)}$ и $Q^{(5)}$ станет характеристикой $x - at = 0$, а замыкание множеств $Q^{(1)}$ и $Q^{(4)}$ – точкой $(0,\ 0)$. В то же время подобласти $Q^{(2)}$ и $Q^{(6)}$ останутся, и решение будет иметь вид

$$u(t,\ x) = \begin{cases} u^{(2)}(t,\ x),\ x - at > 0, \\ \left[u^{(1)} \text{ или } u^{(4)}\right](t,\ x),\ t = x = 0, \\ \left[u^{(3)} \text{ или } u^{(5)}\right](t,\ x),\ x - at = 0,\ t > 0,\ x > 0, \\ u^{(6)}(t,\ x),\ x - at < 0, \end{cases} \tag{24}$$

где функции $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}, u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ определены формулами (11), (13), (17), (18) и (22) при $x^* = 0$.

Для корректности предельного перехода необходимо, чтобы кусочно-заданная функция u была дважды непрерывно дифференцируемой в подобластях $Q^{(i)}$ для каждого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Это будет выполняться при выполнении условий гладкости $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0,\ x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*,\ \infty\right]\right)$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0,\ \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\ \infty\right)\right)$. Для единственности решения необходимы попарные равенства функций $u^{(3)}$ и $u^{(5)}$, $u^{(1)}$ и $u^{(4)}$, а также их частных производных до второго порядка включительно на характеристике $x - at = 0$, что будет выполнено при выполнении условия $f(0,\ 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0) = 0$.

В точке $(0,\ 0)$ можно положить u равным $\varphi(0)$. Такой же результат получается непосредственно из формулы (24) предельным переходом, так как непрерывность u на множестве $\bar{Q}$ сохраняется. Останутся в силе и некоторые другие свойства решения, относящиеся к непрерывности. Так, например, если выполнены условия $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi_2 \in C^1([0, \infty])$, $\mu_2 \in C^1([0, \infty))$, то решение будет принадлежать классам $C(\bar{Q})$, $C^2(Q_-)$ и $C^2(Q_+)$, где

$$Q_- = \left\{(t,\ x) \middle| \ t \ge 0,\ x \ge 0,\ x - at > 0\right\},$$

$$Q_+ = \left\{(t,\ x) \middle| \ t \ge 0,\ x \ge 0,\ x - at < 0\right\}.$$

Для решения задачи (1)–(3) можно указать условия сопряжения для производных первого и второго порядков в явном виде на характеристике $x - at = 0$:

$$\left[\left(\partial_t u\right)^+ - \left(\partial_t u\right)^-\right](t,\ at) = \frac{\psi_2(0+) - \psi_1}{2},$$

$$\left[\left(\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_x u\right)^-\right](t,\ at) = \frac{\psi_1 - \psi_2(0+)}{2a},$$

$$\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right](t,\ at) = f(0,\ 0) - \mu_2(0+) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + \frac{b^2\left(\psi_2(0+) - \psi_1 + 2aD\varphi(0)\right)}{2a}, \quad (25)$$

$$\left[\left(\partial_x^2 u\right)^+ - \left(\partial_x^2 u\right)^-\right](t,\ at) = \frac{b^2\left(\psi_2(0+) - \psi_1\right)}{2a^3} + D^2\varphi(0) + \frac{f(0,\ 0) - \mu_2(0+) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0)}{a^2},$$

$$\left[\left(\partial_t\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_t\partial_x u\right)^-\right](t,\ at) = \frac{b^2\left(\psi_1 - \psi_2(0+)\right)}{2a^2} - \frac{a^2D^2\varphi(0) + c^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0) + f(0,\ 0) - \mu_2(0+)}{a}.$$

Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, $\varphi \in C^2\left([0,\ \infty)\right)$, $\psi_2 \in C^1\left([0,\ \infty]\right)$, $\mu_2 \in C^1\left([0,\ \infty)\right)$ *для заданных функций. Решение задачи (1)–(3) в смысле определения 2, представленное формулой (24), является единственным тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования* $\mu_1 = f(0,\ 0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0)$. *Кроме того, оно принадлежит классу* $C\left(\overline{Q}\right) \cap$ $\cap\ C^2\left(Q_-\right) \cap C^2\left(Q_+\right)$ *и удовлетворяет условиям сопряжения (25).*

Доказательство следует из приведенных выше рассуждений.

Заключение

В статье сформулированы условия согласования, при выполнении которых существует классическое решение задачи в случае достаточной гладкости заданных функций. Построено классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости двух независимых переменных, показана его зависимость от гладкости заданных функций. Также сформулирована задача с условиями сопряжения и доказана корректность ее постановки. Одним из важнейших результатов статьи является рассмотрение задачи, когда одна функция из условий Коши задается на множестве нулевой меры Жордана. В этом случае не только получены условия существования решения, но и доказаны необходимые и достаточные условия для единственности решения.

Библиографические ссылки

1. Лазарян ВА. О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей. *Труды Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта.* 1950;20:3–32.

2. Маврин АИ. К теории ударного погружения свай. *Известия вузов. Строительство и архитектура.* 1967;8:24–28.

3. Boussinesq J. Du choc longitudinal d’une barre prismatique, fixée à un bout et heurtée à l’autre. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences.* 1883;97(2):154–157.

4. Гайдук СИ. О некоторых задачах, связанных с теорией поперечного удара по стержням. *Дифференциальные уравнения.* 1977;13(7):1233–1243.

5. Гайдук СИ. Математическое рассмотрение некоторых задач, связанных с теорией продольного удара по конечным стержням. *Дифференциальные уравнения.* 1977;13(11):2009–2025.

6. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2021;57(4):417–427. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427.

7. Корзюк ВИ. *Уравнения математической физики.* 2-е издание. Москва: URSS; 2021. 480 с.

8. Корзюк ВИ, Козловская ИС. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Часть 2.* Минск: БГУ; 2017. 48 с.

9. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2021;57(1):23–32. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32.

10. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2020;64(6):657–662. DOI: 10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662.

11. Ломовцев ФЕ, Новиков ЕН. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2012;1:83–86.

12. Шлапакова ТС, Юрчук НИ. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2013;2:84–90.

13. Шлапакова ТС, Юрчук НИ. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с производной в краевом условии, направленной не по характеристике. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2013;1:64–69.

14. Гайдук СИ. Математическое рассмотрение одной задачи о продольном ударе по релаксирующему стержню. *Дифференциальные уравнения.* 1976;12(4):668–685.

15. Юрчук НИ, Новиков ЕН. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2016;4:116–120.

References

1. Lazaryan VA. [On dynamic forces in harness devices of homogeneous trains with resistance to relative movements of carriages]. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta.* 1950;20:3–32. Russian.

2. Mavrin AI. [To the theory of shock piling]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura.* 1967;8:24–28. Russian.

3. Boussinesq J. Du choc longitudinal d'une barre prismatique, fixée à un bout et heurtée à l'autre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 1883;97(2):154–157.

4. Gaiduk SI. [Certain problems that are connected with the theory of a transversal shock along rods]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1977;13(7):1233–1243. Russian.

5. Gaiduk SI. [A mathematical discussion of some problems connected with the theory of longitudinal shock along finite rods]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1977;13(11):2009–2025. Russian.

6. Korzyuk VI, Rudzko JV. The classical solution of one problem of an absolutely inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2021;57(4):417–427. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427.

7. Korzyuk VI. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. 2nd edition. Moscow: URSS; 2021. 480 p. Russian.

8. Korzyuk VI, Kozlovskaya IS. *Klassicheskie resheniya zadach dlya giperbolicheskikh uravnenii. Chast' 2* [Classical problem solutions for hyperbolic equations. Part 2]. Minsk: Belarusian State University; 2017. 48 p. Russian.

9. Korzyuk VI, Rudzko JV. The classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2021;57(1):23–32. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32.

10. Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* 2020;64(6):657–662. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662.

11. Lomovtsev FE, Novikov EN. [Duhamel's method for solving an inhomogeneous equation of vibrations of a semibounded string with an oblique derivative in a nonstationary boundary condition]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2012;1:83–86. Russian.

12. Shlapakova TS, Yurchuk NI. [The mixed problem for an equation of oscillation of a bounded string with a time-dependent derivative in a boundary condition directed along the characteristic]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2013;2:84–90. Russian.

13. Shlapakova TS, Yurchuk NI. [The mixed problem for an equation of oscillation of a bounded string with a derivative in a boundary condition not directed along the characteristic]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2013;1:64–69. Russian.

14. Gaiduk SI. [A mathematical treatment of a certain problem of a longitudinal shock along a relaxing rod]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1976;12(4):668–685. Russian.

15. Yurchuk NI, Novikov EN. Necessary conditions for existence of classical solutions to the equation of semi-bounded string vibration. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2016;4:116–120. Russian.

Получена 20.04.2022 / исправлена 31.05.2022 / принята 15.06.2022.
Received 20.04.2022 / revised 31.05.2022 / accepted 15.06.2022.

УДК 519.872

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ МАРКОВСКИМ ПОТОКОМ И МЕНЯЮЩИМИСЯ ПРИОРИТЕТАМИ

В. И. КЛИМЕНОК[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с конечным буфером и групповым марковским потоком. Запросы, принятые в буфер, могут иметь низший или высший приоритет. Сразу после поступления каждому из запросов назначается низший приоритет и для него устанавливается таймер, который задается случайной величиной, распределенной по фазовому закону и имеющей два поглощающих состояния. После попадания таймера в одно из поглощающих состояний запрос может уйти из системы навсегда (потеряться) или изменить свой приоритет на высший. При попадании таймера в другое поглощающее состояние запрос с некоторой вероятностью теряется и с дополнительной вероятностью таймер устанавливается заново. Если запрос поступает в полностью заполненную систему, он теряется. Такого типа системы могут служить математическими моделями многих реальных систем оказания медицинской помощи, контакт-центров, систем хранения скоропортящихся продуктов и т. д. Функционирование системы описывается в терминах многомерной цепи Маркова, вычисляется стационарное распределение и ряд важных характеристик производительности системы. Отличие данной работы от имеющихся литературных источников заключается в формулировке модели, в более общем и реалистичном

Образец цитирования:
Клименок ВИ. Система массового обслуживания с групповым марковским потоком и меняющимися приоритетами. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:47–56.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-47-56

For citation:
Klimenok VI. A queueing system with a batch Markovian arrival process and varying priorities. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:47–56.
Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-47-56

Автор:
Валентина Ивановна Клименок – доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики.

Author:
Valentina I. Klimenok, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher at the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
klimenok@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-3903-6444

характере распределений, описывающих происходящие в системе процессы, а также в исчерпывающих результатах, включающих формулы и алгоритмы для вычисления стационарного распределения и характеристик производительности системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания; конечный буфер; групповой марковский поток; меняющиеся приоритеты; стационарное распределение; характеристики производительности.

A QUEUEING SYSTEM WITH A BATCH MARKOVIAN ARRIVAL PROCESS AND VARYING PRIORITIES

V. I. KLIMENOK [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

We consider herein a single-server queueing system with a finite buffer and a batch Markovian arrival process. Customers staying in the buffer may have a lower or higher priority. Immediately after arrival each of the customer is assigned the lowest priority and a timer is set for it, which is defined as a random variable distributed according to the phase law and having two absorbing states. After the timer enters one of the absorbing states, the customer may leave the system forever (get lost) or change its priority to the highest. When the timer enters another absorbing state, the customer is lost with some probability and the timer is set again with an additional probability. If a customer enters a completely full system, it is lost. Systems of this type can serve as mathematical models of many real-life medical care systems, contact centers, perishable food storage systems, etc. The operation of the system is described in terms of a multidimensional Markov chain, the stationary distribution and a number of performance characteristics of the system are calculated.

Keywords: queueing system; finite buffer; batch Markovian arrival process; changing priorities; stationary distribution; performance characteristics.

Введение

Важная ветвь теории массового обслуживания – исследование приоритетных систем с потоком запросов, приоритеты которых могут меняться в процессе ожидания обслуживания. Существует обширная классификация приоритетов, согласно которой выделяются классы относительных, абсолютных, статических, динамических и ряда других приоритетов. Сравнивая статические и динамические приоритеты, можно заметить, что динамические приоритеты, смена которых зависит от длины очереди, эффективнее статических, однако имеют более узкую область применения, поскольку иногда длины очередей не полностью наблюдаемы, а управление приоритетами обходится дорого. Поэтому статические приоритеты по-прежнему популярны во многих реальных системах. Основным недостатком классических статических приоритетов являются их негибкость и возможная несправедливость по отношению к низкоприоритетным клиентам. Для преодоления этой несправедливости могут быть предложены различные улучшения статических приоритетов, например ограничение слишком быстрого доступа приоритетных запросов или обязательное обслуживание неприоритетного запроса после обслуживания фиксированного числа приоритетных запросов. Еще одно популярное улучшение состоит в возможности повысить приоритет запроса во время его нахождения в очереди. Есть работы (см., например, [1–5]), где запрос за время пребывания в системе накапливает приоритет от начального значения, зависящего от приоритета запроса, в соответствии с некоторой линейной или нелинейной функцией. Другая группа работ предполагает, что повышение приоритета происходит не детерминированно, а через случайное время. Поскольку в настоящей статье делается аналогичное предположение, чтобы прояснить новизну представленных в ней модели и результатов, кратко опишем соответствующие результаты, имеющиеся в литературе.

В публикациях [6; 7] рассматриваются несколько приоритетных классов запросов, поступающих в маркированном марковском потоке. Времена обслуживания имеют распределения фазового типа, времена до повышения приоритета распределены по закону Кокса. В результате получено условие эргодичности цепи Маркова, описывающей функционирование системы. Более полно система с маркированным марковским потоком и двумя приоритетами исследована в статье [8]. Для этой системы вычислены стационарное распределение и характеристики производительности, включая распределение времени обслуживания приоритетных запросов. В остальных известных автору работах [9–13] предполагаются стационарный пуассоновский поток и экспоненциальное распределение времени обслуживания, а также времени до повышения приоритета. Результатом этих исследований в зависимости от статьи являются условия эргодичности, численная оптимизация и анализ асимптотического поведения соответствующих систем.

В данной работе рассматривается однолинейная система с групповым марковским потоком (*batch Markovian arrival process*, BMAP). Времена обслуживания, как и времена до повышения приоритета, распределены по фазовому закону (*phase type distribution*, PH). Процесс обслуживания имеет одно поглощающее состояние, переход в которое означает окончание обслуживания, а время до повышения приоритета имеет два поглощающих состояния, переход в которые влечет за собой изменение приоритета запроса на высший либо уход необслуженного запроса из системы. В статье построена и исследована многомерная цепь Маркова, которая описывает функционирование системы, и получено ее стационарное распределение. Таким образом, преимущество настоящей работы заключается в более общем и реалистичном характере распределений, описывающих происходящие в системе процессы, а также в исчерпывающих результатах, включающих формулы и алгоритмы для вычисления стационарного распределения и характеристик производительности системы. Стоит отметить, что выбор более реалистичных, чем экспоненциальное, распределений, описывающих процессы поступления и обслуживания запросов и смену приоритетов, очень важен для потенциальных реальных приложений. Одним из наиболее популярных приложений такого рода моделей является здравоохранение (упоминается практически во всех цитируемых выше публикациях). Например, рассматриваемая система массового обслуживания подходит для описания работы отделения неотложной помощи в больнице, имеющей операционную и бригаду необходимых врачей и медсестер. В эту больницу доставляют пациентов, пострадавших в результате несчастного случая. В процессе сортировки и предварительной обработки пациент может быть выписан в удовлетворительном состоянии, либо оставлен для дальнейшей обработки, либо отправлен на срочное лечение (в этом случае он становится высокоприоритетным пациентом). Понятно, что групповое поступление больных характерно для ситуаций, связанных с дорожными или другими инцидентами (см. [14]), а распределение фазового типа намного лучше, чем экспоненциальное распределение, подходит для описания времени, пока пациент не покинет больницу (например, уйдет удовлетворенный предварительной обработкой, или переведется в другую больницу, или умрет), либо пока будет продолжена его предварительная обработка, либо пока он станет приоритетным пациентом.

Рассмотренная в данной статье модель также может быть использована для описания работы контакт-центра. Как отмечается в литературе, телефонные звонки имеют высокий приоритет, в то время как запросы, отправленные по электронной почте или через мессенджер, имеют низкий приоритет, но клиент, который воспользовался мессенджером для получения информации, может сделать телефонный звонок, если он слишком долго ждет ответа. Заметим, что в работе [15] поясняется, что экспоненциальные допущения могут быть совершенно неадекватными, и для моделирования контакт-центра следует использовать более общие распределения или потоки, как это сделано в настоящей статье.

Описание системы

Рассматривается система массового обслуживания с конечным буфером размера N и BMAP-потоком запросов. В этом потоке группы запросов случайного размера поступают под управлением неприводимой цепи Маркова с непрерывным временем ν_t, $t \geq 0$, которая принимает значения в множестве $\{0, 1, 2, \ldots, W\}$ и называется управляющим процессом BMAP. Процесс ν_t пребывает в состоянии ν в течение экспоненциально распределенного времени с параметром λ_ν, $\nu = \overline{0, W}$, после чего с вероятностью $p_k(\nu, \nu')$ переходит в состояние ν' с генерацией группы запросов размера k, $k \geq 1$, или с вероятностью $p_0(\nu, \nu')$ цепь переходит в состояние ν' без генерации запросов, причем $p_0(\nu, \nu) = 0$. Для указанных вероятностей выполняются естественные ограничения $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu'=0}^{W} p_k(\nu, \nu') = 1$, $\nu, \nu' = \overline{0, W}$. Всю информацию о BMAP удобно хранить в виде набора матриц D_k, $k \geq 0$, порядка $(W+1) \times (W+1)$, элементы которых определяются как

$$\left(D_k\right)_{\nu, \nu'} = \lambda_\nu p_k(\nu, \nu'), \ \nu, \nu' = \overline{0, W}, \ k \geq 1, \ \left(D_0\right)_{\nu, \nu'} = \begin{cases} \lambda_\nu p_0(\nu, \nu'), \ \nu \neq \nu', \ \nu, \nu' = \overline{0, W}, \\ -\lambda_\nu, \ \nu = \nu' = \overline{0, W}. \end{cases}$$

Из формул видно, что элементами матриц D_k, $k \geq 1$, являются интенсивности переходов процесса ν_t, сопровождающихся генерацией группы запросов размера k. Аналогичный смысл имеют недиагональные элементы матрицы D_0, а диагональные элементы этой матрицы есть взятые с противоположным знаком интенсивности выхода процесса ν_t из своих состояний. Матрицы D_k, $k \geq 0$, можно задавать их матричной производящей функцией $D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k$, $|z| < 1$. Значение этой функции в точке $z = 1$ является инфинитезимальным генератором управляющего процесса ν_t, $t \geq 0$. Стационарное распределение данного процесса, представленное в виде вектор-строки $\boldsymbol{\theta}$, определяется как решение системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{\theta} D(1) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{e} = 1$. Здесь и далее $\mathbf{0}$ – вектор-строка, состоящая из нулей, $\boldsymbol{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц. Средняя интенсивность поступления запросов в BMAP-потоке задается формулой $\lambda = \boldsymbol{\theta} \sum_{k=1}^{\infty} k D_k \boldsymbol{e}$. Более подробное описание BMAP, включающее формулы для дисперсии длин интервалов между моментами поступления групп запросов и коэффициентов корреляции длин двух соседних интервалов между моментами поступления групп запросов, можно найти, например, в работах [16; 17].

Времена обслуживания запросов имеют PH-распределение с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}, S)$ и управляющим процессом (цепью Маркова) m_t, $t \geq 0$, принимающим значения в множестве $\{1, \ldots, M, M+1\}$, где состояние $M+1$ является поглощающим. Первоначальное состояние процесса m_t определяется в множестве несущественных состояний $\{1, \ldots, M\}$ в соответствии со стохастической вектор-строкой $\boldsymbol{\beta}$. Интенсивности переходов в множестве несущественных состояний задаются $(M \times M)$-матрицей S, интенсивности переходов в поглощающее состояние определяются вектор-столбцом $\boldsymbol{S}_0 = -S\boldsymbol{e}$. Более подробную информацию о PH-распределении и его свойствах можно найти, например, в работах [17; 18].

Предполагается, что новый запрос, поступивший в систему, обладает низшим приоритетом. Для каждого такого запроса устанавливается таймер, который задается PH-распределением с управляющим процессом (цепью Маркова) r_t, $t \geq 0$, имеющим множество несущественных состояний $\{1, 2, \ldots, R\}$ и два поглощающих состояния – состояние * и состояние **. Интенсивности переходов управляющего процесса в множестве несущественных состояний задаются $(R \times R)$-матрицей Γ. Интенсивности переходов в поглощающие состояния определяются вектор-столбцом $\boldsymbol{\Gamma}_0 = -\Gamma\boldsymbol{e}$. Интенсивности переходов в поглощающее состояние * и поглощающее состояние ** задаются вектор-столбцами $\boldsymbol{\Gamma}_0^{(*)} = æ\boldsymbol{\Gamma}_0$ и $\boldsymbol{\Gamma}_0^{(**)} = (1 - æ)\boldsymbol{\Gamma}_0$, где $0 < æ < 1$. Когда таймер достигает состояния *, запрос с вероятностью p уходит из системы необслуженным и с дополнительной вероятностью $\bar{p} = 1 - p$ остается в очереди неприоритетных запросов. В последнем случае таймер для него устанавливается заново. Когда таймер достигает состояния **, запрос с вероятностью q уходит из системы необслуженным и с дополнительной вероятностью $\bar{q} = 1 - q$ приобретает высший приоритет. Во втором случае таймер сворачивается и запрос становится впереди всех неприоритетных запросов и в конце очереди приоритетных запросов.

Цепь Маркова, описывающая процесс функционирования системы

Положим в момент времени t:
- i_t – число заявок в очереди, $i_t = \overline{0, N}$;
- j_t – число неприоритетных заявок в очереди, $j_t = \overline{0, i_t}$;
- $n_t = 0$, если прибор свободен, и $n_t = 1$, если прибор обслуживает запрос;
- m_t – состояние управляющего процесса PH-обслуживания на приборе, $m_t = \overline{1, M}$;
- $r_t^{(n)}$ – состояние управляющего процесса PH-таймера для n-й неприоритетной заявки, стоящей в очереди, $r^{(n)} = \overline{1, R}$, $n = \overline{1, j}$;
- ν_t – состояние управляющего процесса BMAP-потока, $\nu_t = \overline{0, W}$.

Процесс функционирования системы описывается неприводимой цепью Маркова ξ_t, $t \geq 0$, с пространством состояний

$$\left\{(0, n, \nu),\ i = 0,\ n = 0, 1;\ \nu = \overline{0, W}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\left(i,\ j, \nu, m, r^{(1)}, \ldots, r^{(j)}\right),\ i = \overline{0, N},\ j = \overline{0, i},\ \nu = \overline{0, W},\ m = \overline{1, M},\ r^{(n)} = \overline{1, R}, n = \overline{1, j}\right\}.$$

Упорядочим состояния цепи при каждом фиксированном значении компоненты i_t в лексикографическом порядке и образуем матрицы $Q_{i,\, l}$ интенсивностей переходов из множества состояний, соответствующих значению $i_t = i$, в состояния, соответствующие значению $i_t = l$. Тогда инфинитезимальный генератор Q рассматриваемой цепи формируется как $Q = \left(Q_{i,l}\right)_{i,l=\overline{0,N}}$.

Введем обозначения:

• $\bar{W} = W + 1$;

• O – матрица, состоящая из нулей, I – тождественная матрица (при необходимости порядок матрицы определяется нижним индексом);

• $\otimes$ ($\oplus$) – символ кронекерова произведения (кронекеровой суммы) матриц (см., например, [19]);

• $\mathrm{diag}\left\{a_1, a_2, \dots, a_n\right\}$ – диагональная блочная матрица, у которой диагональные блоки равны элементам, перечисленным в скобках, а остальные блоки являются нулевыми;

• $\mathrm{diag}^-\left\{a_1, a_2, \dots, a_n\right\}$ – квадратная блочная матрица, у которой поддиагональные блоки равны элементам, перечисленным в скобках, а остальные блоки являются нулевыми.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Инфинитезимальный генератор цепи Маркова* ξ_t, $t \geq 0$, *имеет блочную структуру*

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & Q_{0,2} & Q_{0,3} & Q_{0,4} & \cdots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & \cdots \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} & \cdots \\ O & O & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix},$$

где ненулевые блоки описываются следующим образом:

$$Q_{0,0} = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 \otimes \boldsymbol{\beta} \\ I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0 & D_0 \oplus S \end{pmatrix},$$

$$Q_{0,k} = \begin{pmatrix} O_{\bar{W}M\frac{1-R^k}{1-R}} & D_{k+1} \otimes \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\gamma}^{\otimes k} \\ O & D_k \otimes \boldsymbol{\gamma}^{\otimes k} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$Q_{0,N} = \begin{pmatrix} O_{\bar{W}M\frac{1-R^N}{1-R}} & \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} D_k \otimes \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\gamma}^{\otimes N} \\ O & \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} D_k \otimes \boldsymbol{\gamma}^{\otimes k} \end{pmatrix},$$

$$Q_{1,0} = \begin{pmatrix} I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} & O_{\bar{W}M} \\ I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{e}_R + I_{\bar{W}M} \otimes \left(p\boldsymbol{\Gamma}_0^{(*)} + q\boldsymbol{\Gamma}_0^{(**)}\right) & O \end{pmatrix},$$

$$Q_{i,i-1} = \begin{pmatrix} I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} & O & O & \cdots & O & O \\ O & I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} \otimes I_R & O & \cdots & O & O \\ O & O & I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} \otimes I_{R^2} & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & O & I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} \otimes I_{R^{i-1}} \\ O & O & O & \cdots & O & I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{e}_R \otimes I_{R^{i-1}} \end{pmatrix} +$$

$$+ \mathrm{diag}^-\left\{I_{\bar{W}M} \otimes \left[p\left(\boldsymbol{\Gamma}_0^{(*)}\right)^{\oplus j} + q\left(\boldsymbol{\Gamma}_0^{(**)}\right)^{\oplus j}\right], \; j = \overline{1, i}\right\}, \quad i = \overline{2, N},$$

$$Q_{i,\,i} = \begin{pmatrix} \tilde{D} \oplus S & O & \dots & O & O \\ I_{\overline{W}M} \otimes \overline{q}\left(\mathbf{\Gamma}_0^{(**)}\right)^{\oplus 1} & \left(\tilde{D} \oplus S\right) \otimes I_R & \dots & O & O \\ O & I_{\overline{W}M} \otimes \overline{q}\left(\mathbf{\Gamma}_0^{(**)}\right)^{\oplus 2} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & \left(\tilde{D} \oplus S\right) \otimes I_{R^{i-1}} & O \\ O & O & \dots & I_{\overline{W}M} \otimes \overline{q}\left(\mathbf{\Gamma}_0^{(**)}\right)^{\oplus i} & \left(\tilde{D} \oplus S\right) \otimes I_{R^i} \end{pmatrix} +$$

$$+\ \mathrm{diag}\left\{ I_{\overline{W}M} \otimes \left[\Gamma^{\oplus j} + \overline{p}\left(\mathbf{\Gamma}_0^{(*)}\gamma\right)^{\oplus j} \right],\ j = \overline{0,\, i} \right\},\ i = \overline{1,\, N},$$

здесь $\tilde{D} = D_0$, *если* $i = \overline{1,\, N-1}$, *и* $\tilde{D} = D(1)$, *если* $i = N$,

$$Q_{i,\,i+k} = \left(O_{\overline{W}M\frac{1-R^{i+1}}{1-R} \times \overline{W}M\frac{1-R^k}{1-R}} \middle| \mathrm{diag}\left\{ D^{(k,\,j)},\ j = \overline{0,\, i} \right\} \right),\ i = \overline{1,\, N-1},\ k = \overline{1,\, N-i},$$

здесь $D^{(k,\,j)} = D_k \otimes I_M \otimes I_{R^j} \otimes \boldsymbol{\gamma}^{\oplus k}$, *если* $k = \overline{1,\, N-i-1}$, *и* $D^{(N-i,\,j)} = \sum\limits_{l=N-i}^{\infty} D_l \otimes I_M \otimes I_{R^j} \otimes \boldsymbol{\gamma}^{\oplus N-i}$, *если* $k = N - i$.

Доказательство леммы проводится путем анализа поведения цепи Маркова ξ_t, $t \geq 0$, на бесконечно малом интервале времени. Опишем кратко вероятностный смысл ненулевых блоков генератора. Блок $Q_{i,\,i-1}$, $i \geq 1$, состоит из интенсивностей переходов рассматриваемой цепи Маркова, в результате которых число запросов в буфере уменьшается с i до $i-1$. Если в буфере находится j неприоритетных запросов, то такие переходы могут быть вызваны либо окончанием текущего обслуживания и занятием прибора приоритетным запросом (соответствующие интенсивности задаются матрицей $I_{\overline{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} \otimes I_{R^j}$), либо окончанием обслуживания и занятием прибора неприоритетным запросом, если в буфере нет приоритетных запросов (матрица $I_{\overline{W}} \otimes \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{e}_R \otimes I_{R^{i-1}}$), либо уходом из системы одного из неприоритетных запросов вследствие попадания установленного для него таймера в одно из поглощающих состояний (матрица $I_{\overline{W}M} \otimes \left[p\left(\mathbf{\Gamma}_0^{(*)}\right)^{\oplus j} + q\left(\mathbf{\Gamma}_0^{(**)}\right)^{\oplus j} \right]$).

Блок $Q_{i,\,i+k}$, $i \geq 0$, $k \geq 1$, состоит из интенсивностей переходов, сопровождающихся поступлением группы запросов. Если размер группы не превышает числа $N - i$ свободных мест в буфере, то вся группа принимается в буфер (соответствующие интенсивности задаются матрицами $D_k \otimes I_M \otimes I_{R^j} \otimes \boldsymbol{\gamma}^{\oplus k}$). В противном случае в буфер принимается только $N - i$ запросов группы, а остальные запросы теряются (матрица $D^{(N-i,\,j)} = \sum\limits_{l=N-i}^{\infty} D_l \otimes I_M \otimes I_{R^j} \otimes \boldsymbol{\gamma}^{\oplus N-i}$).

Блок $Q_{i,\,i}$ состоит из интенсивностей переходов, не влекущих за собой изменения числа i запросов в буфере. Поддиагональные блоки $I_{\overline{W}M} \otimes \overline{q}\left(\mathbf{\Gamma}_0^{(**)}\right)^{\oplus j}$ описывают интенсивности переходов таймера какого-то из j неприоритетных запросов в поглощающее состояние $**$, в результате которых этот запрос становится приоритетным. Недиагональные элементы диагональных блоков матрицы $Q_{i,\,i}$ описывают интенсивности переходов управляющих процессов BMAP, таймеров и времени обслуживания, не влекущих изменения числа запросов в системе (матрицы $\left(\tilde{D} \oplus S\right) \otimes I_{R^j} + I_{\overline{W}M} \otimes \Gamma^{\oplus j}$), либо переход таймера какого-то из j неприоритетных запросов в буфере в поглощающее состояние $*$ (матрицы $\overline{p}\left(\mathbf{\Gamma}_0^{(*)}\gamma\right)^{\oplus j}$), после которого запрос не меняет приоритет, а таймер на нем устанавливается заново. Диагональные элементы диагональных блоков матрицы $Q_{i,\,i}$ есть взятые с противоположным знаком интенсивности выхода рассматриваемой цепи Маркова ξ_t, $t \geq 0$, из состояний, соответствующих i запросам в буфере.

Стационарное распределение

Поскольку исследуемая цепь Маркова ξ_t, $t \geq 0$, является неприводимой непериодической цепью с конечным пространством состояний, то она имеет эргодическое распределение, совпадающее с единственным стационарным распределением. Пусть $\boldsymbol{p}_i$ – вектор-строка стационарных вероятностей состояний, имеющих значение i первой компоненты, $i = \overline{0, N}$. Элементы вектора $\boldsymbol{p}_0$ дают стационарные вероятности того, что буфер пуст, прибор простаивает или занят, управляющий процесс BMAP находится в любом из $W + 1$ состояний и, если прибор занят, время обслуживания находится в одной из M фаз. Заметим, что j-й подвектор вектора $\boldsymbol{p}_i$, $i = \overline{1, N}$, дает стационарные вероятности того, что в буфере есть i запросов, из них j неприоритетных, управляющий процесс BMAP находится в любом из $W + 1$ состояний, время обслуживания – в одной из M фаз, а процесс таймеров, установленных для неприоритетных запросов, стоящих в буфере, – в любом из R^j состояний.

Сформируем из этих векторов вектор $\boldsymbol{p} = \left(\boldsymbol{p}_0,\ \boldsymbol{p}_i,\ \ldots,\ \boldsymbol{p}_N\right)$ стационарных вероятностей рассматриваемой цепи. Хорошо известно, что этот вектор является единственным решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{p}Q = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{p}\boldsymbol{e} = 1. \qquad (1)$$

В случае малой размерности система (1) может быть решена на компьютере стандартными методами. Однако при более или менее больших значениях N, R порядок этой системы становится настолько большим, что решить ее напрямую (например, методом обратной матрицы) невозможно. В таком случае используется алгоритм, который был разработан в статье [20]. Алгоритм устойчив, учитывает верхнюю хессенбергову структуру генератора Q и работает с блоками генератора $Q_{i,\,l}$. Размеры этих блоков определяются значениями $N_0 = \bar{W}\left(1 + M\right)$ при $i = 0$ и $N_i = \bar{W}M\sum_{j=0}^{i} R^i$ при $i = \overline{1, N}$, а размер всей системы (1) равен $\sum_{i=0}^{N} N_i$. Для удобства читателя приведем принципиальные шаги алгоритма.

Шаг 1. Находим матрицы $G_{N-1}, G_{N-2}, \ldots, G_0$ из уравнения обратной рекурсии

$$G_i = \left(-Q_{i+1,\,i+1} - Q_{i+1,\,i+2}G_{i+1}\right)^{-1} Q_{i+1,\,i},\ \ i = N-2,\ N-1, \ldots, 0,$$

где полагаем, что $G_{N-1} = \left(-Q_{N,\,N}\right)^{-1} Q_{N,\,N-1}$.

Шаг 2. Вычисляем матрицы $\bar{Q}_{i,\,i}$, $\bar{Q}_{i,\,i+1}$ по формулам

$$\bar{Q}_{N,\,N} = Q_{N,\,N},\ \bar{Q}_{i,\,i} = Q_{i,\,i} + Q_{i,\,i+1}G_i,\ \ i = \overline{0, N-1},\ \ \bar{Q}_{i,\,i+1} = Q_{i,\,i+1},\ \ i = \overline{0, N-1}.$$

Шаг 3. Находим матрицы F_i из рекуррентных соотношений

$$F_0 = I,\ F_i = F_{i-1}\,\bar{Q}_{i-1,\,i}\left(-\bar{Q}_{i,\,i}\right)^{-1},\ \ i = \overline{1, N}.$$

Шаг 4. Вычисляем вектор $\boldsymbol{p}_0$ как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{p}_0\left(-\bar{Q}_{0,\,0}\right) = 0,\ \boldsymbol{p}_0\sum_{i=0}^{\infty} F_i\boldsymbol{e} = 1.$$

Шаг 5. Вычисляем векторы $\boldsymbol{p}_i$ по формуле $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_0 F_i$, $i = \overline{1, N}$.

Стационарные характеристики производительности

Вычислив векторы стационарных вероятностей $\boldsymbol{p}_i$, $i = \overline{0, N}$, можем вычислить ряд представляющих интерес характеристик производительности системы. Ниже приведены выражения для наиболее важных характеристик вместе с краткими пояснениями к нетривиальным формулам.

1. Вероятность того, что система свободна,

$$p_0 = \boldsymbol{p}_0\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_{\bar{W}}\\ \boldsymbol{0}^T_{\bar{W}M}\end{pmatrix}.$$

2. Вероятность того, что в системе один запрос (обслуживается на приборе),

$$p_1 = \boldsymbol{p}_0\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^T_{\bar{W}}\\ \boldsymbol{e}_{\bar{W}M}\end{pmatrix}.$$

3. Вероятность того, что в буфере находится i запросов,

$$p_i = \sum_{j=0}^{i} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{e},\ i = \overline{0,\ N}.$$

4. Вероятность того, что в буфере находится i запросов, из них j неприоритетных,

$$p_{i,\ j} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T_{\sum\limits_{n=0}^{j-1} \bar{W}M\frac{R^{n+1}-1}{R-1}} \\ \boldsymbol{e}_{\bar{W}M\frac{R^{j+1}-1}{R-1}} \\ \mathbf{0}^T_{\sum\limits_{n=j+1}^{i} \bar{W}M\frac{R^{n+1}-1}{R-1}} \end{pmatrix},\ j = \overline{0,\ i},\ \ i = \overline{1,\ N}.$$

5. Среднее число запросов в буфере

$$L = \sum_{i=1}^{N} i\boldsymbol{p}_i \boldsymbol{e}.$$

6. Среднее число неприоритетных запросов в буфере

$$L^{(\text{non-prior})} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} j p_{i,\ j}.$$

7. Среднее число приоритетных запросов в буфере

$$L^{(\text{prior})} = L - L^{(\text{non-prior})}.$$

8. Вероятность того, что произвольный запрос будет потерян либо из-за недостатка мест в буфере, либо из-за попадания таймера в поглощающее состояние (далее будем говорить «вследствие нетерпеливости»),

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{1}{\lambda}\left[\boldsymbol{p}_0 \begin{pmatrix} O_{\bar{W}\times M} \\ \boldsymbol{e}_{\bar{W}} \otimes I_M \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i H_i \right]\boldsymbol{S}_0, \tag{2}$$

где

$$H_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{\bar{W}} \otimes I_M \\ \boldsymbol{e}_{\bar{W}} \otimes I_M \otimes \boldsymbol{e}_R \\ \boldsymbol{e}_{\bar{W}} \otimes I_M \otimes \boldsymbol{e}_{R^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{\bar{W}} \otimes I_M \otimes \boldsymbol{e}_{R^i} \end{pmatrix}.$$

Краткое пояснение к формуле (2) состоит в следующем. Выражение $\left[\boldsymbol{p}_0 \begin{pmatrix} O_{\bar{W}\times M} \\ \boldsymbol{e}_{\bar{W}} \otimes I_M \end{pmatrix} + \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i H_i \right]\boldsymbol{S}_0$ есть интенсивность выходящего потока, а λ – интенсивность входящего потока обслуженных запросов. Тогда отношение этих интенсивностей дает вероятность того, что произвольный запрос будет принят в буфер и обслужен, а дополнительная вероятность дает искомую вероятность P_{loss}.

9. Вероятность того, что произвольный запрос будет потерян из-за недостатка мест в буфере,

$$P_{\text{loss}}^{(\text{buff})} = 1 - \lambda^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{p}_i \hat{H}_i \sum_{k=0}^{N-1} (k + i - N) D_k \boldsymbol{e}, \tag{3}$$

где

$$\hat{H}_i = \begin{pmatrix} I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{e}_M \\ I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{e}_{MR} \\ I_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{e}_{MR^2} \\ \vdots \\ {}_{\bar{W}} \otimes \boldsymbol{e}_{MR^i} \end{pmatrix}.$$

Приведем краткий вывод формулы (3). Согласно формуле полной вероятности $P_{\text{loss}}^{(\text{buff})}$ вычисляется как

$$P_{\text{loss}}^{(\text{buff})} = 1 - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\infty} P_k P_i^{(k)} R^{(i,k)}, \tag{4}$$

где P_k – вероятность того, что произвольный запрос поступает в группе размера k; $P_i^{(k)}$ – вероятность того, что в момент поступления группы размера k в буфере находится i запросов; $R^{(i,k)}$ – вероятность того, что произвольный запрос будет потерян из-за недостатка мест в буфере при условии, что он поступит в составе группы размера k, которая застанет i запросов в буфере.

Нетрудно видеть, что

$$P_i^{(k)} = \frac{\boldsymbol{p}_i \hat{H}_i D_k \boldsymbol{e}}{\theta D_k \boldsymbol{e}}, \ i = \overline{0, N-1}, \ k \geq 1, \tag{5}$$

$$P_k = \frac{k\theta D_k \boldsymbol{e}}{\theta \sum\limits_{l=1}^{\infty} l D_l \boldsymbol{e}} = k\frac{\theta D_k \boldsymbol{e}}{\lambda}, \ k \geq 1, \tag{6}$$

$$R^{(i,k)} \begin{cases} 1, \ k \leq N-1, \\ \dfrac{N-i}{k}, \ k > N-i, \ i = \overline{0, N-1}. \end{cases} \tag{7}$$

Подставляя формулы (5)–(7) в выражение (4), после некоторых алгебраических преобразований, учитывающих, что $\sum\limits_{k=N-i+1}^{\infty} D_k \boldsymbol{e} = -\sum\limits_{k=0}^{N-i} D_k \boldsymbol{e}$, получаем формулу (3).

10. Вероятность того, что произвольный неприоритетный запрос будет потерян вследствие нетерпеливости,

$$P_{\text{loss}}^{(\text{imp})} = P_{\text{loss}} - P_{\text{loss}}^{(\text{buff})}.$$

11. Вероятность того, что произвольный неприоритетный запрос, принятый в буфер, будет потерян вследствие нетерпеливости,

$$\bar{P}_{\text{loss}}^{(\text{imp})} = \frac{P_{\text{loss}}^{(\text{imp})}}{1 - P_{\text{loss}}^{(\text{buff})}}.$$

Заключение

В статье исследовано стационарное поведение однолинейной системы массового обслуживания с BMAP-потоком, конечным буфером и меняющимся приоритетом. Запрос с низким приоритетом может стать запросом с высоким приоритетом после случайного времени нахождения в буфере, имеющего PH-распределение. Данная система массового обслуживания может быть полезна для моделирования работы отделения неотложной помощи в больнице, контакт-центра, а также для моделирования инвентаризации скоропортящихся продуктов и т. п. Анализ системы осуществляется при более реалистичных, чем в большинстве существующих литературных источников, предположениях о характере входного потока, распределениях времени обслуживания и времени до смены приоритета. Приведены алгоритм для вычисления стационарного распределения и формулы для характеристик производительности системы, в том числе таких важных для приложений, как вероятности потерь запросов из-за отсутствия свободных мест в буфере и вследствие нетерпеливости.

Библиографические ссылки / References

1. Bilodeau B, Stanford DA. Average waiting times in the two-class *M*/*G*/1 delayed accumulating priority queue. arXiv:2001.06054v1 [Preprint]. 2020 [cited 2022 March 10]: [19 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/2001.06054v1.

2. Fajardo VA, Drekic S. Waiting time distributions in the preemptive accumulating priority queue. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 2017;19:255–284. DOI: 10.1007/s11009-015-9476-1.

3. Mojalal M, Stanford DA, Caron RJ. The lower-class waiting time distribution in the delayed accumulating priority queue. *INFOR: Information Systems and Operational Research*. 2020;58(1):60–86. DOI: 10.1080/03155986.2019.1624473.

4. Sharma KC, Sharma GC. A delay dependent queue without pre-emption with general linearly increasing priority function. *Journal of the Operational Research Society*. 1994;45(8):948–953. DOI: 10.1057/jors.1994.147.
5. Stanford DA, Taylor P, Ziedins I. Waiting time distributions in the accumulating priority queue. *Queueing Systems*. 2014;77:297–330. DOI: 10.1007/s11134-013-9382-6.
6. Qi-Ming He, Jingui Xie, Xiaobo Zhao. Stability conditions of a preemptive repeat priority *MMAP[N]*/*PH[N]*/*S* queue with customer transfers (short version). In: *Proceedings of the 13th International conference advanced stochastic models and data analysis (ASMDA-2009); 2009 June 30 – July 3; Vilnius, Lithuania*. p. 463–467.
7. Qi-Ming He, Jingui Xie, Xiaobo Zhao. Priority queue with customer upgrades. *Naval Research Logistics*. 2012;59(5):362–375. DOI: 10.1002/nav.21494.
8. Klimenok V, Dudin A, Dudina O, Kochetkova I. Queuing system with two types of customers and dynamic change of a priority. *Mathematics*. 2020;8(5):824. DOI: 10.3390/math8050824.
9. Jingui Xie, Qi-Ming He, Xiaobo Zhao. On the stationary distribution of queue lengths in a multi-class priority queueing system with customer transfers. *Queueing Systems*. 2009;62:255–277. DOI: 10.1007/s11134-009-9130-0.
10. Jingui Xie, Ping Cao, Boray Huang, Marcus Eng Hock Ong. Determining the conditions for reverse triage in emergency medical services using queuing theory. *International Journal of Production Research*. 2016;54(11):3347–3364.
11. Jingui Xie, Taozeng Zhu, An-Kuo Chao, Shuaian Wang. Performance analysis of service systems with priority upgrades. *Annals of Operations Research*. 2017;253:683–705. DOI: 10.1007/s10479-016-2370-6.
12. Ping Cao, Jingui Xie. Optimal control of a multiclass queueing system when customers can change types. *Queueing Systems*. 2016;82:285–313. DOI: 10.1007/s11134-015-9466-6.
13. Jingui Xie, Qi-Ming He, Xiaobo Zhao. Stability of a priority queueing system with customer transfers. *Operations Research Letters*. 2008;36:705–709. DOI: 10.1016/j.orl.2008.06.007.
14. Cildoz M, Ibarra A, Mallor F. Accumulating priority queues versus pure priority queues for managing patients in emergency departments. *Operations Research for Health Care*. 2019;23:100224. DOI: 10.1016/j.orhc.2019.100224.
15. Brown L, Gans N, Mandelbaum A, Sakov A, Shen H, Zeltyn S, et al. Statistical analysis of a telephone call center: a queueing-science perspective. *Journal of the American Statistical Association*. 2005;100:36–50. DOI: 10.2307/27590517.
16. Lucantoni DM. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics. Stochastic Models.* 1991;7(1):1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174.
17. Dudin AN, Klimenok VI, Vishnevsky VM. *The theory of queuing systems with correlated flows.* Berlin: Springer Nature; 2019. 410 p. DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0.
18. Neuts MF. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press; 1981. 348 p.
19. Graham A. *Kronecker products and matrix calculus with applications*. Cichester: Ellis Horwood; 1981. 130 p.
20. Klimenok VI, Kim CS, Orlovsky DS, Dudin AN. Lack of invariant property of Erlang loss model in case of *MAP* input. *Queueing Systems*. 2005;49:187–213. DOI: 10.1007/s11134-005-6481-z.

Получена 18.04.2022 / исправлена 05.05.2022 / принята 22.06.2022.
Received 18.04.2022 / revised 05.05.2022 / accepted 22.06.2022.

УДК 539.3

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

***Э. И. СТАРОВОЙТОВ*[1]*, А. В. НЕСТЕРОВИЧ*[1]**

[1]*Белорусский государственный университет транспорта,*
ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь

Приведена постановка краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием неосесимметричной нагрузки. Материалы тонких несущих слоев подчиняются гипотезам теории малых упругопластических деформаций. Относительно толстый заполнитель является физически нелинейно-упругим. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в частных производных. Предложена общая методика решения задачи в перемещениях, основанная на методе Фурье и методе упругих решений Ильюшина. Рассмотрен случай внешней косинусоидальной нагрузки. Получено итерационное решение краевой задачи для физически нелинейной пластины. Соответствующее решение упругой задачи выписано в конечном виде. Проведена численная апробация полученного решения.

Ключевые слова: круговая трехслойная пластина; неосесимметричная нагрузка; перемещения; пластичность.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т20Р-047).

Образец цитирования:
Старовойтов ЭИ, Нестерович АВ. Неосесимметричное нагружение упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:57–69.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-57-69

For citation:
Starovoitov EI, Nesterovich AV. The non-axisymmetric loading of an elastoplastic three-layer plate in its plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022; 2:57–69. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-57-69

Авторы:
Эдуард Иванович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой строительной механики факультета промышленного и гражданского строительства.
Алина Викторовна Нестерович – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры строительной механики факультета промышленного и гражданского строительства.

Authors:
Eduard I. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of structural mechanics, faculty of industrial and civil engineering.
edstar0@yandex.by
Alina V. Nesterovich, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of structural mechanics, faculty of industrial and civil engineering.
alina_nest92@bk.ru

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022;2:57–69
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022;2:57–69

THE NON-AXISYMMETRIC LOADING OF AN ELASTOPLASTIC THREE-LAYER PLATE IN ITS PLANE

E. I. STAROVOITOV [a]***, A. V. NESTEROVICH*** [a]

[a]*Belarusian State University of Transport, 34 Kirava Street, Homieĺ 246653, Belarus*
Corresponding author: E. I. Starovoitov (edstar0@yandex.by)

The statement of the boundary value problem on the deformation of a circular three-layer plate in its plane under the action of a non-axisymmetric load is herein presented. The materials of thin carrier layers obey the hypotheses of the theory of small elastoplastic deformations. The relatively thick filler is physically non-linearly elastic. A system of non-linear differential equilibrium equations in partial derivatives is obtained. A general technique for solving the problem in displacements based on the Fourier method and Ilyushin's method of elastic solutions is proposed. The case of an external cosine load is considered. An iterative solution of a boundary value problem for a physically non-linear plate is obtained. The corresponding solution of the elastic problem is written out in the final form. The obtained solution is numerically tested.

Keywords: circular three-layer plate; non-axisymmetric load; movement; plastic.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project T20R-047).

Введение

В настоящее время композиты широко используются в технике и строительстве, что обусловливает спрос на слоистые, в том числе трехслойные, элементы конструкций. В связи с этим возникла необходимость разработки механико-математических моделей и методов расчета трехслойных элементов конструкций на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно отличающимися физико-механическими свойствами. Несущие слои изготавливаются из материалов с высокими прочностью и жесткостью и служат для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, необходимые для образования монолитной конструкции, предназначены для перераспределения усилий между несущими слоями. Такое сочетание обеспечивает надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды (высокая температура, радиация) и позволяет создавать конструкции, сочетающие высокие прочность и жесткость с относительно малой массой.

Разработка общей теории деформирования трехслойных элементов конструкций, в частности пластин, еще не завершена и активно продолжается. Этой теме посвящен ряд работ, в том числе монографии [1–3], где приведены постановки краевых и начально-краевых задач и методы их решения.

Колебания трехслойных пластин и оболочек рассмотрены в статьях [4–6]. Для вязкоупругопластических цилиндрических оболочек использованы наследственные соотношения теории малых упругопластических деформаций. Решения получены в виде разложения в ряд по собственным ортонормированным функциям. В статьях [7; 8] рассмотрены резонансные колебания круговых трехслойных пластин с учетом воздействия упругого основания. Оценка динамических характеристик тонких цилиндрических сэндвич-панелей с магнитореологическим заполнителем проведена в исследовании [9]. Свободные и резонансные колебания упругих слоистых балок, пластин и цилиндрических оболочек рассмотрены в работах [10–12]. Статьи [13; 14] посвящены математическому моделированию гидроупругих колебаний круглой пластины, опирающейся на основания Винклера и Пастернака. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических и сферических оболочек исследован в работах [15; 16]. В публикациях [17–19] рассмотрено статическое и моногармоническое акустическое воздействие на многослойную пластину, исследован динамический резонансный отклик пластины, армированной углеродным волокном, при резонансных колебаниях с учетом внутреннего трения в материале и внешнего аэродинамического демпфирования. Отклик многослойных композитных плит на косой удар описан в статье [20]. Работа [21] посвящена сверхзвуковому флаттеру многослойных композитных пластин.

Деформирование трехслойных упругопластических стержней и пластин с нелинейно-упругим заполнителем исследовано в статьях [22–25]. Анализ деформирования и устойчивости асимметричных многослойных балок проведен в работах [26; 27]. Несущая способность круглых многослойных плит при большом прогибе исследована в статье [28]. Аналитический анализ изгиба круглой многослойной пластины и сравнение изгибных свойств сэндвич-панелей с ячеистым заполнителем выполнены в работах [29; 30].

Неосесимметричное нагружение упругой круговой трехслойной пластины в своей плоскости исследовано в статье [31]. Осесимметричное деформирование круговой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости рассмотрено в работе [32]. В настоящей статье для подобной упругопластической пластины приведены постановка и решение краевой задачи при неосесимметричном нагружении, получены аналитические и численные результаты.

Постановка краевой задачи

Рассматривается симметричная по толщине круговая физически нелинейная трехслойная пластина радиусом r_0, состоящая из двух тонких несущих слоев толщиной $h_1 = h_2$ и толстого несжимаемого заполнителя толщиной $h_3 = 2c$. Постановка задачи приводится в полярной системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1).

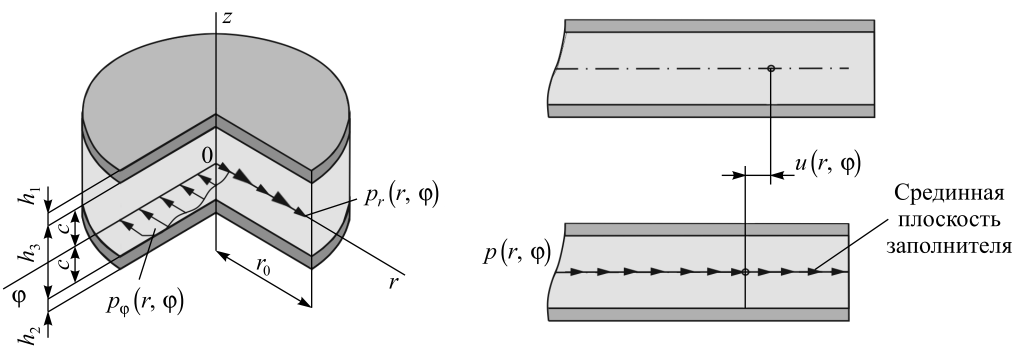


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

Fig. 1. Calculation scheme of a three-layer plate

Результирующая внешняя распределенная нагрузка приложена в срединной плоскости заполнителя. Ее проекции на оси координат – $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$. За счет симметричности пластины при подобной нагрузке отсутствует изгибное деформирование. Искомые радиальные и тангенциальные перемещения обозначаются через $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$. Принимается, что материалы несущих слоев могут проявлять упругопластические свойства, а заполнитель является нелинейно-упругим.

Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций [1]:

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k\left(1 - \omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)}\right)\right)э_{\alpha\beta}^{(k)},$$
$$\sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \ (\alpha, \beta = r, \varphi;\ k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где $s_{\alpha\beta}^{(k)}$ и $э_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторные части тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}$ и $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций; G_k и K_k – модули сдвига и объемной деформации материала k-го слоя; $\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)}\right)$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев, которые следует положить равными нулю при $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_y^{(k)}$; $\omega_3\left(\varepsilon_u^{(3)}\right)$ – универсальная функция физической нелинейности материала заполнителя ($\omega_3\left(\varepsilon_u^{(3)}\right) = 0$ при $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_s^{(k)}$); $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев; $\varepsilon_s^{(k)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций, выражаемая формулой

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}\right)^2 + \left(\varepsilon_{rr}^{(k)}\right)^2 - \varepsilon_{rr}^{(k)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 3\left(\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}\right)^2}.$$

С помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ вводятся обобщенные внутренние силы в пластине [23]:

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}dz = \sum_{k=1}^{3}\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}h_k \ \ (\alpha, \beta = r, \varphi). \tag{2}$$

После проведения необходимых преобразований из вариационного принципа Лагранжа получаем систему дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных усилиях:

$$T_{rr'r} + \frac{1}{r}\left(T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}\right) = -p_r,$$
$$T_{r\varphi'r} + \frac{1}{r}\left(T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}\right) = -p_\varphi, \tag{3}$$

где штрих в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ним координате.

Выделим линейную (индекс e) и нелинейную (индекс ω) составляющие в компонентах тензора напряжений:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)},\ \ \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)}\ \ (\alpha,\ \beta = r,\ \varphi;\ \ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{4}$$

где слагаемые напряжений выражаются через деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$, при этом

$$\sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} = \left(K_k + \frac{4}{3}G_k\right)\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + \left(K_k - \frac{2}{3}G_k\right)\varepsilon_{\beta\beta}^{(k)},\ \ \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)}\right)\left(\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}\right),$$

$$\sigma_{r\varphi e}^{(k)} = s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k\varepsilon_{r\varphi}^{(k)},\ \ \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)}\right)\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}.$$

Внутренние усилия в пластине (2) с помощью напряжений (4) представим в виде суммы линейной и нелинейной частей:

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} = T_{\alpha\beta e} - T_{\alpha\beta\omega} = \sum_{k=1}^{3}\sigma_{\alpha\beta e}^{(k)}h_k - \sum_{k=1}^{3}\sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)}h_k. \tag{5}$$

Подставив усилия (5) в уравнения (3), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях для рассматриваемой пластины при неосесимметричном деформировании:

$$\begin{cases} T_{rre'r} + \dfrac{1}{r}\left(T_{r\varphi e'\varphi} + T_{rre} - T_{\varphi\varphi e}\right) = -p_r + p_{r\omega}, \\ T_{r\varphi e'r} + \dfrac{1}{r}\left(T_{\varphi\varphi e'\varphi} + 2T_{r\varphi e}\right) = -p_\varphi + p_{\varphi\omega}. \end{cases} \tag{6}$$

В левой части уравнений (6), которая содержит линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, нижний индекс e в дальнейшем опустим для удобства. Переходя к безразмерной радиальной координате $x = \dfrac{r}{r_0}$, систему (6) перепишем в виде

$$\begin{cases} T_{rr'x} + \dfrac{1}{x}\left(T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}\right) = \left(-p_r + p_{r\omega}\right)r_0, \\ T_{r\varphi'x} + \dfrac{1}{x}\left(T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}\right) = \left(-p_\varphi + p_{\varphi\omega}\right)r_0. \end{cases} \tag{7}$$

Нелинейные добавки (индекс ω) здесь вынесены вправо:

$$p_{r\omega} = \frac{1}{r_0}\left(T_{rr\omega'x} + \frac{1}{x}\left(T_{r\varphi\omega'\varphi} + T_{rr\omega} - T_{\varphi\varphi\omega}\right)\right),$$
$$p_{\varphi\omega} = \frac{1}{r_0}\left(T_{r\varphi\omega'x} + \frac{1}{x}\left(T_{\varphi\varphi\omega'\varphi} + 2T_{r\varphi\omega}\right)\right). \tag{8}$$

Подставив во внутренние усилия в системе (7) напряжения (1) и выразив в них деформации через перемещения $u_r(r)$, $u_\varphi(r)$, после некоторых преобразований получим систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$L_2\left(u_r\right) + \frac{a_3}{a_1x^2}u_{r'\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{a_1x}u_{\varphi'\varphi x} - \frac{a_1 + a_3}{a_1x^2}u_{\varphi'\varphi} = \frac{r_0^2}{a_1}\left(-p_r + p_{r\omega}\right),$$
$$L_2\left(u_\varphi\right) + \frac{a_2 + a_3}{a_3x}u_{r'x\varphi} + \frac{a_1}{a_3x^2}u_{\varphi'\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{a_3x^2}u_{r'\varphi} = \frac{r_0^2}{a_3}\left(-p_\varphi + p_{\varphi\omega}\right), \tag{9}$$

где a_i – коэффициенты, причем

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \left(K_k + \frac{4}{3} G_k \right) dz = \sum_{k=1}^{3} \left(K_k + \frac{4}{3} G_k \right) h_k, \;\; a_2 = \sum_{k=1}^{3} \left(K_k - \frac{2}{3} G_k \right) h_k, \;\; a_3 = \sum_{k=1}^{3} G_k h_k;$$

L_2 – линейный дифференциальный оператор второго порядка, выражаемый формулой

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{x} (xg)_{,x} \right)_{,x} \equiv g_{,xx} + \frac{g_{,x}}{x} - \frac{g}{x^2}.$$

Краевая задача о деформировании круговой трехслойной пластины с физически нелинейными слоями неосесимметричной нагрузкой замыкается добавлением к уравнениям равновесия (9) граничных условий на контуре ($x = r_0$) и в центре пластины ($x = 0$).

Общее решение краевой задачи

Получить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (9) в конечном виде не представляется возможным. Поэтому применим метод последовательных приближений, базирующийся на методе упругих решений Ильюшина. Это позволит на каждом шаге итерации рассматриваемую нелинейную краевую задачу сводить к решению соответствующей задачи теории упругости с дополнительными фиктивными «внешними» нагрузками.

Систему (9) согласно указанному методу переписываем в итерационном виде:

$$\begin{gathered} L_2\left(u_r^{(n)}\right) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u^{(n)}_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u^{(n)}_{\varphi,\varphi x} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u^{(n)}_{\varphi,\varphi} = \frac{r_0^2}{a_1}\left(-p_r + p_{r\omega}^{(n-1)}\right), \\ L_2\left(u_\varphi^{(n)}\right) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u^{(n)}_{r,x\varphi} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u^{(n)}_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u^{(n)}_{r,\varphi} = \frac{r_0^2}{a_3}\left(-p_\varphi + p_{\varphi\omega}^{(n-1)}\right), \end{gathered} \tag{10}$$

где n – номер приближения.

Дополнительные нагрузки $p_{r\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ на первом шаге итерации принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения с помощью формул типа (8):

$$\begin{gathered} p_{r\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{r_0}\left[T^{(n-1)}_{rr\omega,x} + \frac{1}{x}\left(T^{(n-1)}_{r\varphi\omega,\varphi} + T^{(n-1)}_{rr\omega} - T^{(n-1)}_{\varphi\varphi\omega} \right) \right], \\ p_{\varphi\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{r_0}\left[T^{(n-1)}_{r\varphi\omega,x} + \frac{1}{x}\left(T^{(n-1)}_{\varphi\varphi\omega,\varphi} + 2T^{(n-1)}_{r\varphi\omega} \right) \right], \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$T^{(n-1)}_{\alpha\beta\omega} \equiv \sum_{k=1}^{3} T^{(k)(n-1)}_{\alpha\beta\omega} = \sum_{k=1}^{3} \sigma^{(k)(n-1)}_{\alpha\beta\omega} h_k = 2\sum_{k=1}^{3} G_k \omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}\right) \text{э}^{(k)(n-1)}_{\alpha\beta} h_k \quad (\alpha, \beta = r, \varphi).$$

Следовательно, на каждом шаге итерации имеем линейную задачу теории упругости с дополнительными нагрузками $p_{r\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ (11), вычисляемыми по результатам предыдущего приближения.

Для решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (10) искомые перемещения, внешние и дополнительные нагрузки раскладываем в тригонометрические ряды Фурье

$$\begin{gathered} u_r^{(n)}(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[u_{rm}^{(1)(n)}(x)\cos(m\varphi) + u_{rm}^{(2)(n)}(x)\sin(m\varphi) \right], \\ u_\varphi^{(n)}(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x)\cos(m\varphi) + u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x)\sin(m\varphi) \right], \\ p_r(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{rm}^{(1)}(x)\cos(m\varphi) + p_{rm}^{(2)}(x)\sin(m\varphi) \right], \\ p_\varphi(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{\varphi m}^{(1)}(x)\cos(m\varphi) + p_{\varphi m}^{(2)}(x)\sin(m\varphi) \right], \end{gathered} \tag{12}$$

$$p_{r\omega}^{(n-1)}(x,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[p_{r\omega m}^{(1)(n-1)}(x)\cos(m\varphi)+p_{r\omega m}^{(2)(n-1)}(x)\sin(m\varphi)\right],$$

$$p_{\varphi\omega}^{(n-1)}(x,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[p_{\varphi\omega m}^{(1)(n-1)}(x)\cos(m\varphi)+p_{\varphi\omega m}^{(2)(n-1)}(x)\sin(m\varphi)\right],$$

где $u_r^{(n)}(x,\varphi)$ и $u_\varphi^{(n)}(x,\varphi)$ – искомые радиальные и окружные перемещения на n-м шаге приближения; $u_{rm}^{(1)(n)}(x)$, $u_{rm}^{(2)(n)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x)$ – искомые радиальные составляющие перемещений; $p_{rm}^{(1)}(x)$, $p_{rm}^{(2)}(x)$, $p_{\varphi m}^{(1)}(x)$, $p_{\varphi m}^{(2)}(x)$ – радиальные составляющие внешних нагрузок; $p_{r\omega m}^{(1)(n-1)}(x)$, $p_{r\omega m}^{(2)(n-1)}(x)$, $p_{\varphi\omega m}^{(1)(n-1)}(x)$, $p_{\varphi\omega m}^{(2)(n-1)}(x)$ – радиальные составляющие дополнительных нагрузок; m – номер члена ряда.

Следует отметить, что члены ряда в разложении (12) при $m=0$ представляют собой осесимметричные составляющие перемещений и нагрузок. Так как нас интересует неосесимметричная нагрузка, в дальнейшем принимаем $m\geq 1$.

Подставим перемещения и нагрузки (12) в уравнения (10). В силу независимости систем функций $\sin(m\varphi)$, $\cos(m\varphi)$ для выполнения уравнений (10) при любых значениях аргумента φ суммарные коэффициенты при одинаковых гармониках должны обращаться в нуль. Исходя из этого и проведя необходимые преобразования, получим систему четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $u_{rm}^{(1)(n)}(x)$, $u_{rm}^{(2)(n)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x)$ на n-м шаге приближения:

$$\begin{gathered}
L_2\left(u_{rm}^{(1)(n)}(x)\right)-\frac{a_3m^2}{a_1x^2}u_{rm}^{(1)(n)}(x)+\frac{(a_2+a_3)m}{a_1x}u_{\varphi m'x}^{(2)(n)}(x)-\frac{(a_1+a_3)m}{a_1x^2}u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x)=\\
=\frac{r_0^2}{a_1}\left(-p_{rm}^{(1)}(x)+p_{r\omega m}^{(1)(n-1)}(x)\right),\\
L_2\left(u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x)\right)-\frac{a_1m^2}{a_3x^2}u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x)-\frac{(a_2+a_3)m}{a_3x}u_{rm'x}^{(1)(n)}(x)-\frac{(a_1+a_3)m}{a_3x^2}u_{rm}^{(1)(n)}(x)=\\
=\frac{r_0^2}{a_3}\left(-p_{\varphi m}^{(2)}(x)+p_{\varphi\omega m}^{(2)(n-1)}(x)\right),\\
L_2\left(u_{rm}^{(2)(n)}(x)\right)-\frac{a_3m^2}{a_1x^2}u_{rm}^{(2)(n)}(x)-\frac{(a_2+a_3)m}{a_1x}u_{\varphi m'x}^{(1)(n)}(x)+\frac{(a_1+a_3)m}{a_1x^2}u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x)=\\
=\frac{r_0^2}{a_1}\left(-p_{rm}^{(2)}(x)+p_{r\omega m}^{(2)(n-1)}(x)\right),\\
L_2\left(u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x)\right)-\frac{a_1m^2}{a_3x^2}u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x)+\frac{(a_2+a_3)m}{a_3x}u_{rm'x}^{(2)(n)}(x)+\frac{(a_1+a_3)m}{a_3x^2}u_{rm}^{(2)(n)}(x)=\\
=\frac{r_0^2}{a_3}\left(-p_{\varphi m}^{(1)}(x)+p_{\varphi\omega m}^{(1)(n-1)}(x)\right).
\end{gathered}\tag{13}$$

Общее решение системы (13) представим в виде суммы общего решения соответствующей ей однородной системы и некоторого частного решения $u_{rn}^{(1)*}$, $u_{\varphi n}^{(1)*}$, $u_{rn}^{(2)*}$, $u_{\varphi n}^{(2)*}$. Общее решение однородной системы уравнений, соответствующей системе (13), получено с помощью программного пакета *Maple* в виде

$$\begin{gathered}
u_{rm}^{(1)(n)}=-C_{m1}^{(n)}x^{m-1}+C_{m2}^{(n)}h_{m1}x^{-m+1}+C_{m3}^{(n)}x^{-m-1}+C_{m4}^{(n)}h_{m2}x^{m+1},\\
u_{\varphi m}^{(2)(n)}=C_{m1}^{(n)}x^{m-1}+C_{m2}^{(n)}x^{-m+1}+C_{m3}^{(n)}x^{-m-1}+C_{m4}^{(n)}x^{m+1},
\end{gathered}\tag{14}$$

$$u_{rm}^{(2)(n)} = C_{m5}^{(n)} x^{m-1} - C_{m6}^{(n)} h_{m1} x^{-m+1} - C_{m7}^{(n)} x^{-m-1} - C_{m8}^{(n)} h_{m2} x^{m+1},$$

$$u_{\varphi m}^{(1)(n)} = C_{m5}^{(n)} x^{m-1} + C_{m6}^{(n)} x^{-m+1} + C_{m7}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m8}^{(n)} x^{m+1},$$

где x^{m-1}, x^{-m+1}, x^{-m-1}, x^{m+1} – фундаментальные решения системы (13).

Искомые асимметричные составляющие коэффициентов при m-х гармониках на n-м шаге приближения получим, добавив к решению (14) частные решения $u_{rm}^{(1)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)*}$, $u_{rm}^{(2)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)*}$ неоднородной системы:

$$\begin{aligned} u_{rm}^{(1)(n)} &= -C_{m1}^{(n)} x^{m-1} + C_{m2}^{(n)} h_{m1} x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)} h_{m2} x^{m+1} + u_{rm}^{(1)(n)*}, \\ u_{\varphi m}^{(2)(n)} &= C_{m1}^{(n)} x^{m-1} + C_{m2}^{(n)} x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)} x^{m+1} + u_{\varphi m}^{(2)(n)*}, \\ u_{rm}^{(2)(n)} &= C_{m5}^{(n)} x^{m-1} - C_{m6}^{(n)} h_{m1} x^{-m+1} - C_{m7}^{(n)} x^{-m-1} - C_{m8}^{(n)} h_{m2} x^{m+1} + u_{rm}^{(2)(n)*}, \\ u_{\varphi m}^{(1)(n)} &= C_{m5}^{(n)} x^{m-1} + C_{m6}^{(n)} x^{-m+1} + C_{m7}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m8}^{(n)} x^{m+1} + u_{\varphi m}^{(1)(n)*}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $C_{m1}^{(n)}, \ldots, C_{m8}^{(n)}$ – константы интегрирования, определяемые на каждом шаге итерации; h_{m1}, h_{m2} – коэффициенты, причем

$$h_{m1} = \frac{(a_1 + a_2)m + 2(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_2)m - 4a_1}, \quad h_{m2} = -\frac{(a_1 + a_2)m - 2(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_2)m + 4a_1}.$$

Частные решения $u_{rm}^{(1)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)*}$, $u_{rm}^{(2)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)*}$ в формулах (15) зависят от вида коэффициентов разложения внешних и дополнительных нагрузок в ряды Фурье.

Деформирование пластины косинусоидальной нагрузкой

Исследуем неосесимметричное деформирование рассматриваемой трехслойной пластины, закрепленной по внешнему контуру, под действием неосесимметричной косинусоидальной радиальной нагрузки

$$p_r(x, \varphi) = p_{r1} \cos\varphi, \quad p_\varphi = 0 \quad (p_{r1} = \mathrm{const}). \tag{16}$$

Коэффициенты разложения нагрузки (16) в ряд (12) с учетом свойств ортогональности применяемых систем тригонометрических функций будут иметь вид

$$p_{rm}^{(1)}(x) = \frac{p_{r1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos(m\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq 1, \\ p_{r1}, & m = 1, \end{cases}$$

поэтому

$$p_{r1}^{(1)}(x) = p_{r1}, \quad p_{rm}^{(1)}(x) = 0 \ \text{при } m > 1, \quad p_{rm}^{(2)}(x) = p_{\varphi m}^{(1)}(x) = p_{\varphi m}^{(2)}(x) = 0. \tag{17}$$

При $m = 1$ система уравнений (13) с учетом соотношений (17) сводится к виду

$$\begin{aligned} & L_2\left(u_{r1}^{(1,n)}(x)\right) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(1,n)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi 1'x}^{(2,n)}(x) - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi 1}^{(2,n)}(x) = \frac{r_0^2}{a_1}\left(-p_{r1} + p_{r\omega 1}^{(1,n-1)}(x)\right), \\ & L_2\left(u_{\varphi 1}^{(2,n)}(x)\right) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi 1}^{(2,n)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1'x}^{(1,n)}(x) - \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(1,n)}(x) = \frac{r_0^2}{a_3} p_{\varphi\omega 1}^{(2,n-1)}(x), \\ & L_2\left(u_{r1}^{(2,n)}(x)\right) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(2,n)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi 1'x}^{(1,n)}(x) + \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi 1}^{(1,n)}(x) = \frac{r_0^2}{a_1} p_{r\omega 1}^{(2,n-1)}(x), \\ & L_2\left(u_{\varphi 1}^{(1,n)}(x)\right) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi 1}^{(1,n)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1'x}^{(2,n)}(x) + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(2,n)}(x) = \frac{r_0^2}{a_3} p_{\varphi\omega 1}^{(1,n-1)}(x). \end{aligned} \tag{18}$$

В методе упругих решений функции нелинейности $\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)}\right)$ и, следовательно, дополнительные нагрузки на первом шаге итерации принимаются равными нулю, что сводит рассматриваемую задачу к задаче линейной упругости. При последующих итерациях функции нелинейности вычисляются по результатам предыдущих приближений.

На первом шаге итерации третье и четвертое уравнения в системе (18) образуют однородную систему, которая при нулевых граничных условиях дает тривиальное решение

$$u_{r1}^{(2,1)} \equiv u_{\varphi 1}^{(1,1)} \equiv 0. \tag{19}$$

Первое и второе уравнения в системе (18) образуют неоднородную систему, решение которой имеет вид

$$u_{r1}^{(1,1)} = -C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}\left(\frac{a_1 + a_2}{3a_1 - a_2} - \ln x\right) + C_{13}^{(1)} x^{-2} + C_{14}^{(1)} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2 -$$

$$-\left[51a_1^2 + 14a_1a_2 + 11a_2^2 + 4\left(a_1 - 3a_2\right)\left(5a_1 + a_2\right)\ln x\right]\frac{p_{r1}r_0^2x^2}{64a_1\left(a_1 - a_2\right)\left(5a_1 + a_2\right)}, \tag{20}$$

$$u_{\varphi 1}^{(2,1)} = C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}\ln x + C_{13}^{(1)}x^{-2} + C_{14}^{(1)}x^2 + \frac{5a_1 + a_2}{64a_1\left(a_1 - a_2\right)}\left(5 - 4\ln x\right)p_{r1}r_0^2x^2,$$

где $C_{11}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)}$, $C_{13}^{(1)}$, $C_{14}^{(1)}$ – константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Здесь и далее первый верхний индекс у составляющих перемещений и дополнительных нагрузок является номером функции в разложении (12), а второй верхний индекс соответствует номеру приближения.

Исходя из условия ограниченности перемещений в центре пластины, в решении (20) необходимо положить константы интегрирования $C_{12}^{(1)} = C_{13}^{(1)} = 0$. Систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования $C_{11}^{(1)}$ и $C_{14}^{(1)}$ получим, удовлетворяя условия равенства нулю перемещений на контуре, с помощью решения (20):

$$C_{11} = -\frac{19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2}{32a_1\left(a_1 - a_2\right)\left(3a_1 - a_2\right)}p_{r1}r_0^2,\ C_{14} = -\frac{37a_1^2 + 18a_1a_2 - 3a_2^2}{64a_1\left(a_1 - a_2\right)\left(3a_1 - a_2\right)}p_{r1}r_0^2. \tag{21}$$

Искомые радиальное и тангенциальное перемещения при отсутствии осесимметричной составляющей в соответствии с формулами (12), (19)–(21) на первом шаге итерации имеют вид

$$\begin{aligned} u_r^{(1,1)}(x,\varphi) &= \left[\frac{19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2}{2\left(3a_1 - a_2\right)}\left(1 - x^2\right) - \left(a_1 - 3a_2\right)x^2\ln x\right]\frac{p_{r1}r_0^2\cos\varphi}{16a_1\left(a_1 - a_2\right)}, \\ u_\varphi^{(1,1)}(x,\varphi) &= -\left[\frac{19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2}{2\left(3a_1 - a_2\right)}\left(1 - x^2\right) + \left(5a_1 + a_2\right)x^2\ln x\right]\frac{p_{r1}r_0^2\sin\varphi}{16a_1\left(a_1 - a_2\right)}. \end{aligned} \tag{22}$$

Следует отметить, что решение (22) является решением задачи теории упругости и представляет самостоятельный интерес. На втором шаге итерации дополнительные нагрузки $p_{r\omega m}^{(2,1)}(x)$, $p_{\varphi\omega m}^{(1,1)}(x)$ также будут нулевыми за счет равенства нулю соответствующих составляющих деформаций на первом шаге в системе (18). В результате получаем составляющие перемещений $u_{r1}^{(2,2)}(x) \equiv 0$, $u_{\varphi 1}^{(1,2)}(x) \equiv 0$.

В дальнейшем подобная картина наблюдается на каждом шаге итерации, поэтому имеем $u_{r1}^{(2,n)}(x) \equiv 0$, $u_{\varphi 1}^{(1,n)}(x) \equiv 0$. Остальные перемещения на n-м шаге приближения следуют из системы (18) в конечном виде:

$$u_r^{(n)}(x,\varphi)=\left[\frac{\left(19a_1^2-14a_1a_2-a_2^2\right)\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}\right)-\left(13a_1^2-18a_1a_2+a_2^2\right)\left(-p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}\right)}{2\left(3a_1-a_2\right)}\left(1-x^2\right)-\right.$$

$$\left.-\left(a_1-3a_2\right)\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}-p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}\right)x^2\ln x\right]\frac{r_0^2}{16a_1\left(a_1-a_2\right)}\cos\varphi,$$

$$u_\varphi^{(n)}(x,\varphi)=\left[-\frac{\left(19a_1^2-14a_1a_2-a_2^2\right)\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}\right)+\left(13a_1^2-18a_1a_2+a_2^2\right)p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}}{2\left(3a_1-a_2\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-x^2\right)-\left(5a_1+a_2\right)\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}-p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}\right)x^2\ln x\right]\frac{r_0^2}{16a_1\left(a_1-a_2\right)}\sin\varphi. \tag{23}$$

С помощью перемещений (23) и соотношений Коши получим деформации

$$\varepsilon_{rr}^{(n)}=-\left[\frac{\left(11a_1-a_2\right)\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}\right)+\left(5a_1+a_2\right)p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}}{3a_1-a_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_1-3a_2}{a_1-a_2}\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}-p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}\right)\ln x\right]\frac{xr_0}{8a_1}\cos\varphi,$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)}=-\frac{3a_1-a_2}{8a_1\left(a_1-a_2\right)}\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}-p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}\right)r_0x\ln x\cos\varphi, \tag{24}$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^{(n)}=\left[\frac{\left(a_1-3a_2\right)\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}\right)+\left(7a_1-5a_2\right)p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}}{3a_1-a_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{a_1+a_2}{a_1}\left(p_{r1}-p_{r\omega1}^{(1,\,n-1)}-p_{\varphi\omega1}^{(2,\,n-1)}\right)\ln x\right]\frac{xr_0}{8\left(a_1-a_2\right)}\sin\varphi.$$

Используя деформации (24) на n-м шаге приближения, определяем интенсивность деформаций $\varepsilon_u^{(n)}$ по формуле, приведенной в пояснении к соотношениям (1). Затем в слоях пластины вычисляем функции нелинейности [1]

$$\omega_k^{(n)}\equiv\omega_k\left(\varepsilon_u^{(n)}\right)=\begin{cases}0,\ \varepsilon_u^{(k)}\le\varepsilon_y^{(k)},\\ A_k\left(1-\dfrac{\varepsilon_y^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)}}\right)^{\alpha_k},\ \varepsilon_u^{(k)}>\varepsilon_y^{(k)},\end{cases} \tag{25}$$

где A_k, α_k – константы материала, получаемые экспериментально.

После определения функций нелинейности (25) по формулам (11) вычисляются внутренние усилия и дополнительные фиктивные нагрузки для последующего шага.

Численные результаты

Численный анализ полученного решения (23) проведен для круговой трехслойной пластины единичного радиуса (r_0 = 1 м) при неосесимметричном нагружении в срединной плоскости заполнителя распределенной нагрузкой с постоянной интенсивностью p_{r1} = 300 МПа, достаточной для проявления нелинейных свойств материалов слоев в полной мере. Внешние несущие слои выполнены из дюралюминия Д16Т, срединный слой есть фторопласт-4. Толщины слоев $h_1 = h_2$ = 0,02 м, h_3 = 0,4 м. Упругие и физически нелинейные характеристики материалов заимствованы из работы [33].

На рис. 2 проиллюстрирована практическая сходимость итерационного метода при $\varphi = 0$, т. е. в направлении максимальной величины радиальных перемещений. Здесь номер кривой совпадает с номером приближения. За искомое решение принято шестое приближение, которое отличается от предыдущего на 0,9 %. За счет физически нелинейных свойств материалов слоев расчетное перемещение увеличивается на 29 % (см. рис. 2, кривая *6*) по сравнению с перемещениями упругой пластины (см. рис. 2, кривая *1*). Окружные перемещения в рассматриваемом направлении отсутствуют.

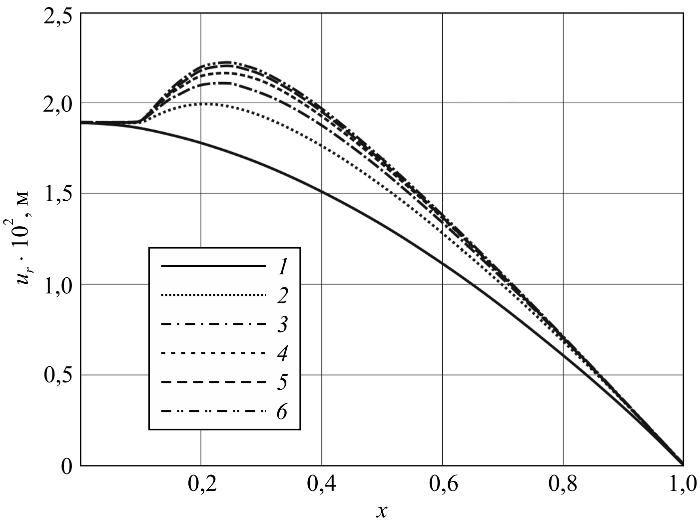


Рис. 2. Сходимость итерационного метода при $\varphi = 0$, $T = 293$ К:
1, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* – номер итерации

Fig. 2. Convergence of the iterative method at $\varphi = 0$, $T = 293$ K:
1, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* – iteration number

На рис. 3 изображены графики изменения интенсивности деформаций ε_u вдоль радиуса пластины при $\varphi = 0$. За счет физической нелинейности материалов пластины расчетная интенсивность деформаций увеличивается примерно на 18 %. Горизонтальная линия соответствует деформационному пределу упругости материала Д16Т ($\varepsilon_y = 0{,}735$ %). Следовательно, в центре пластины до координаты $x = 0{,}08$ в несущих слоях остается зона упругих деформаций. Область $0{,}08 \le x \le 1$ деформируется пластически. Заполнитель в рассматриваемом случае остается упругим, так как предел физической нелинейности фторопласта-4 ($\varepsilon_s = 3{,}3$ %) не достигается.

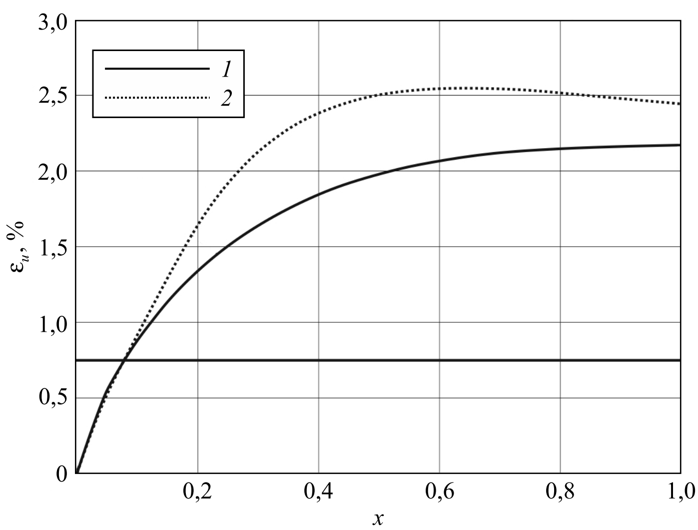


Рис. 3. Интенсивность деформаций ε_u при $\varphi = 0$:
1 – упругая пластина; *2* – упругопластическая пластина

Fig. 3. Deformation intensity ε_u at $\varphi = 0$:
1 – elastic plate; *2* – elastoplastic plate

На рис. 4 отображено распределение областей физической нелинейности в несущих слоях исследуемой пластины в зависимости от окружной координаты φ при $T = 293$ К. Область упругих деформаций в центре пластины близка к эллипсу с длинами полуосей 0,08 и 0,14. При $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ материалы несущих слоев переходят в упругопластическое состояние после координаты $x = 0{,}1$.

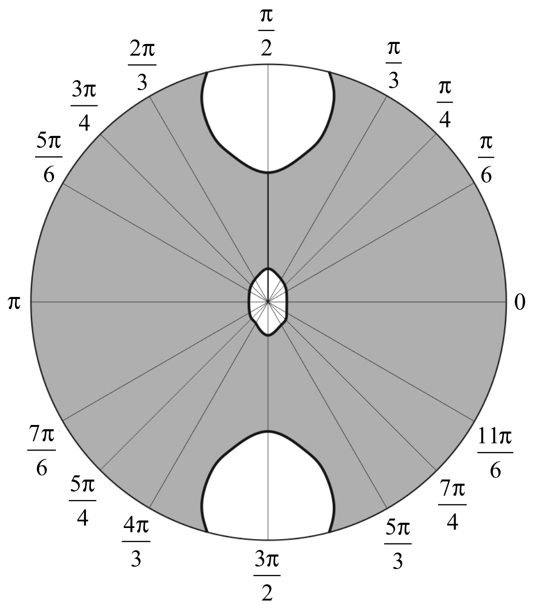


Рис. 4. Распределение областей пластичности и физической нелинейности (серый цвет) в зависимости от окружной координаты

Fig. 4. Distribution of areas of plasticity and physical non-linearity (grey colour) depending on the circumferential coordinate

Заключение

Учет физической нелинейности материалов слоев приводит к существенному уточнению напряженно-деформированного состояния круговой трехслойной пластины при неосесимметричном деформировании в своей плоскости. Приведенные решения могут быть использованы при расчетах строительных конструкций, деформируемых в своей плоскости.

Библиографические ссылки

1. Starovoitov EI, Nagiyev FB. *Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity.* Toronto: Apple Academic Press; 2012. XVII, 346 p.

2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells.* Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific Publishing; 2015. XV, 360 p.

3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells. Computational modelling and applications.* Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.

4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics.* 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.

5. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads. *Strength of Materials.* 2003;35(4):346–352. DOI: 10.1023/A:1025834123302.

6. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Circular sandwich plates under local impulsive loads. *International Applied Mechanics.* 2003;39(8):945–952. DOI: 10.1023/A:1027464715958.

7. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics.* 2003;39(12):1458–1463. DOI: 10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a.

8. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials.* 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.

9. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures.* 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.

10. Mikhasev GI, Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures.* Cham: Springer; 2019. p. 157–198 (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.

11. Bakulin VN, Volkov EN, Simonov AI. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Russian Aeronautics.* 2017;60(4):508–513. DOI: 10.3103/S1068799817040055.

12. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AYa. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials.* 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.

13. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series.* 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.

14. Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA, Christoforova AV. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series.* 2018;944:012081. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012081.

15. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.

16. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.

17. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials.* 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.

18. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials.* 2017;53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.

19. Paimushin VN. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials.* 2017;53(1):1–16. DOI: 10.1007/s11029-017-9636-1.

20. Ivañez I, Moure MM, Garcia-Castillo SK, Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures.* 2015;133:1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035.

21. Grover N, Singh BN, Maiti DK. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology.* 2016;52:41–51. DOI: 10.1016/j.ast.2016.02.017.

22. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids.* 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.

23. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics.* 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.

24. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials.* 2018;54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.

25. Kudin A, Al-Omari MAV, Al-Athamneh BGM, Al-Athamneh HKM. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology.* 2015;3(8):1487–1493.

26. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica.* 2014;225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.

27. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica.* 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.

28. Zhihua Wang, Guoxing Lu, Feng Zhu, Longmao Zhao. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics.* 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.

29. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering.* 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.

30. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications.* 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.

31. Нестерович АВ. Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости. *Проблемы физики, математики и техники.* 2020;1:85–90.

32. Нестерович АВ. Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости. *Проблемы физики, математики и техники.* 2021;3:24–29. DOI: 10.54341/20778708_2021_3_48_24.

33. Starovoitov EI. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials.* 1988;20(4):426–431. DOI: 10.1007/BF01530849.

References

1. Starovoitov EI, Nagiyev FB. *Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity.* Toronto: Apple Academic Press; 2012. XVII, 346 p.

2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells.* Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific Publishing; 2015. XV, 360 p.

3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells. Computational modelling and applications.* Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.

4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics.* 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.

5. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads. *Strength of Materials.* 2003;35(4):346–352. DOI: 10.1023/A:1025834123302.

6. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Circular sandwich plates under local impulsive loads. *International Applied Mechanics.* 2003;39(8):945–952. DOI: 10.1023/A:1027464715958.

7. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics.* 2003;39(12):1458–1463. DOI: 10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a.

8. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials.* 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.

9. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures.* 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.

10. Mikhasev GI, Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures.* Cham: Springer; 2019. p. 157–198 (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.

11. Bakulin VN, Volkov EN, Simonov AI. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Russian Aeronautics.* 2017;60(4):508–513. DOI: 10.3103/S1068799817040055.

12. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AYa. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials.* 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.

13. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series.* 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.

14. Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA, Christoforova AV. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series.* 2018;944:012081. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012081.

15. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.

16. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.

17. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials.* 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.

18. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials.* 2017;53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.

19. Paimushin VN. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials.* 2017;53(1):1–16. DOI: 10.1007/s11029-017-9636-1.

20. Ivañez I, Moure MM, Garcia-Castillo SK, Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures.* 2015;133:1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035.

21. Grover N, Singh BN, Maiti DK. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology.* 2016;52:41–51. DOI: 10.1016/j.ast.2016.02.017.

22. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids.* 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.

23. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics.* 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.

24. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials.* 2018;54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.

25. Kudin A, Al-Omari MAV, Al-Athamneh BGM, Al-Athamneh HKM. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology.* 2015;3(8):1487–1493.

26. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica.* 2014;225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.

27. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica.* 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.

28. Zhihua Wang, Guoxing Lu, Feng Zhu, Longmao Zhao. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics.* 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.

29. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering.* 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.

30. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications.* 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.

31. Nestsiarovich AV. Deformation of a three-layer circular plate under cosine loading in its plane. *Problems of Physics, Mathematics and Technics.* 2020;1:85–90. Russian.

32. Nestsiarovich AV. Axisymmetric loading of a circular physically nonlinear three-layer plate in its plane. *Problems of Physics, Mathematics and Technics.* 2021;3:24–29. Russian. DOI: 10.54341/20778708_2021_3_48_24.

33. Starovoitov EI. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials.* 1988;20(4):426–431. DOI: 10.1007/BF01530849.

Получена 03.04.2022 / исправлена 10.05.2022 / принята 02.06.2022.
Received 03.04.2022 / revised 10.05.2022 / accepted 02.06.2022.

УДК 303.732.4+514.84+515.1+530.1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ИОНОВ СОЛИ В ТРЕХМЕРНОМ КАНАЛЕ ОБЕССОЛИВАНИЯ ЭЛЕКТРОДИАЛИЗНОГО АППАРАТА

А. В. КОВАЛЕНКО[1], ***А. В. ОВСЯННИКОВА***[2]

[1]*Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, 350040, г. Краснодар, Россия*
[2]*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,*
пр. Ленинградский, 49/2, 125167, г. Москва, Россия

Представлена и исследована новая 3D-модель переноса ионов соли 1 : 1 в канале обессоливания электродиализного аппарата. Впервые предложена трехмерная математическая модель переноса ионов соли в канале обессоливания с учетом электроконвекции на основе системы уравнений Нернста – Планка, Пуассона и Навье – Стокса с электрической силой и естественными краевыми условиями. Для решения краевой задачи использован метод конечных элементов в среде кросс-платформенного программного обеспечения для численного анализа *COMSOL Multiphysics* в сочетании с методом последовательных приближений, когда на текущем слое поочередно методом Ньютона решаются электрохимическая и гидродинамическая части задачи. В результате численного анализа впервые установлены фундаментальные закономерности переноса ионов соли в трехмерном канале, возникновения и развития электроконвективных вихрей, в том числе обнаружены их новые трехмерные спиралевидные формы. Показано, что электроконвективные вихри существуют в виде кластеров, внутри которых могут происходить бифуркации вихрей. Таким образом, уточнено и развито современное упрощенное представление о строении электроконвективных вихрей.

Образец цитирования:
Коваленко АВ, Овсянникова АВ. Математическое моделирование переноса ионов соли в трехмерном канале обессоливания электродиализного аппарата. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:70–81.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-70-81

For citation:
Kovalenko AV, Ovsyannikova AV. Mathematical modelling of salt ion transfer in the three-dimensional desalting channel of an electrodialysis apparatus. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:70–81. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-70-81

Авторы:
Анна Владимировна Коваленко – доктор технических наук, доцент; заведующий кафедрой анализа данных и искусственного интеллекта факультета компьютерных технологий и прикладной математики.
Анна Вячеславовна Овсянникова – кандидат педагогических наук, доцент; доцент Департамента математики.

Authors:
Anna V. Kovalenko, doctor of science (engineering), docent; head of the department of data analysis and artificial intelligence, faculty of computer technology and applied mathematics.
savanna-05@mail.ru
http://orcid.org/0000-0002-3991-3953
Anna V. Ovsyannikova, PhD (pedagogy), docent; associate professor at the Department of Mathematics.
anna_ovsyannikov@bk.ru
http://orcid.org/0000-0002-1716-3100

Ключевые слова: 3D-математическая модель переноса; 3D-модель; трехмерная модель; мембранные системы; ионообменная мембрана; математическое моделирование; электроконвективные вихри; прямое численное моделирование.

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта 20-58-12018 ННИО_а «Исследование влияния электроконвекции, диссоциации воды и геометрии спейсеров на электродиализное обессоливание в интенсивных токовых режимах».

MATHEMATICAL MODELLING OF SALT ION TRANSFER IN THE THREE-DIMENSIONAL DESALTING CHANNEL OF AN ELECTRODIALYSIS APPARATUS

A. V. KOVALENKO[a]***, A. V. OVSYANNIKOVA***[b]

[a]*Kuban State University, 149 Stavropol'skaya Street, Krasnodar 350040, Russia*
[b]*Financial University under the Government of the Russian Federation,*
49/2 Leningradskii Avenue, Moscow 125167, Russia

Corresponding author: A. V. Kovalenko (savanna-05@mail.ru)

A new 3D model of 1 : 1 salt ion transfer in the desalting channel of an electrodialysis apparatus is presented and investigated in this paper. For the first time a three-dimensional mathematical model of salt ion transfer in the desalting channel taking into account the electroconvection based on the system of Nernst – Planck, Poisson and Navier – Stokes equations with the electric force and the natural boundary conditions is proposed. To solve the boundary value problem, the finite element method is used in the cross-platform numerical analysis software *COMSOL Multiphysics* in combination with the method of successive approximations, when the electrochemical and hydrodynamic parts of the problem are solved one by one on the current layer. In turn, the electrochemical and hydrodynamic parts of the problem are solved by Newton's method. As a result of numerical analysis, the fundamental regularities of salt ion transfer in a three-dimensional channel, the emergence and development of electroconvective vortices, including the discovery of new three-dimensional spiral forms of salt ions, are established for the first time. It is shown that electroconvective vortices exist in the form of clusters, within which vortex bifurcations can occur. Thus, the currently existing simplified view of the structure of electroconvective vortices is clarified and developed.

Keywords: 3D mathematical model of transport; 3D model; three-dimensional model; membrane systems; ion exchange membrane; mathematical modelling; electroconvective vortices; direct numerical simulation.

Acknowledgements. The research was performed with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research within the framework of scientific project 20-58-12018 NNIO_a «Study of influence of electroconvection, water dissociation and spacer geometry on electrodialysis desalination in intensive current regimes».

Введение

Пресная вода составляет только 3 % от общего объема воды на Земле, и если она будет постоянно загрязняться, то в ближайшем будущем водный кризис превратится в серьезную проблему.

Первостепенное значение приобретают вопросы водоочистки и водоподготовки, а также охраны водных ресурсов от загрязнения сточными водами. Из-за большого разнообразия сточных вод существуют различные способы их очистки: ультрафильтрационный, реагентный, электродиализный, флотационный, обратноосмотический и др. Одним из самых эффективных методов очистки является электродиализ – процесс изменения концентрации электролита в растворе под действием электрического тока. К дополнительным преимуществам электродиализа относятся низкое энергопотребление и экологическая безопасность процесса.

Используемые при электродиализе мембранные технологии позволяют производить эффективную, экологичную и малозатратную водоочистку, обогащение, разделение, обессоливание и концентрирование газовых и жидких смесей [1]. Данные технологии широко применяются при переработке пищевых продуктов (соки, вина, молочные продукты) и в других сферах промышленной деятельности человека, включая химическое, фармацевтическое и пищевое производство [2], а также в микрофлюидных насосах, биомедицинских лабораторных устройствах на чипе и аналитических датчиках. Все эти устройства используют внешние электрические поля для управления процессом переноса ионов в растворах водных электролитов.

На практике в электромембранных системах применяется режим работы, при котором токи превышают предельный диффузионный ток. Это приводит к сопряженным эффектам концентрационной поляризации, например к появлению и развитию электроконвекции, что, в свою очередь, влияет на структуру диффузионного слоя мембраны и, как следствие, на эффективность работы электромембранных систем.

В статье [3] описано первое лабораторное исследование трехмерной электроконвекции у селективной поверхности. Авторами предложены три способа классификации 3D-электроконвекции в зависимости от чисел Рейнольдса, Рэлея и Шмидта: полигональные, поперечные и продольные 3D-вихри. Экспериментально установлено, что если число Рейнольдса увеличивается или число Рэлея уменьшается, то имеют место только продольные 3D-вихри. Поперечные 3D-вихри формируются между продольными 3D-вихрями, затем эти вихри трансформируются в полигональные 3D-вихри при более высоких значениях числа Рэлея или более низких значениях числа Рейнольдса. При этом число Шмидта определяет критическое электрическое число Рэлея для каждого вихря.

В работе [4] впервые проведено и проанализировано прямое численное моделирование трехмерной электрокинетической неустойчивости вблизи селективной поверхности – мембраны, электрода либо системы микро- или наноканалов. Для дискретизации авторами использован специальный метод конечных разностей, а для интегрирования по времени – полунеявная схема Рунге – Кутты. Продолжением и обобщением этой работы является статья [5], в которой обобщены численные результаты анализа линейной устойчивости, уточнены механизмы неустойчивости, проведен всесторонний нелинейный анализ на основе численного моделирования в двумерном и трехмерном случаях, исследованы двумерные и трехмерные структуры, возникающие в режиме термоэлектроконвекции, и изучено влияние этих структур на вольт-амперную характеристику.

Однако полноценной трехмерной математической модели переноса ионов соли 1 : 1 в канале обессоливания электродиализного аппарата, основанной только на самых общих фундаментальных законах сохранения материи, заряда и количества движения без всяких подгоночных параметров, до настоящего времени не было. В данной статье впервые предложена такая модель, приведено ее описание, представлены результаты численного анализа и сопоставления разработанной модели с двумерной моделью [6; 7].

Математическая модель

Трехмерная математическая модель переноса ионов соли 1 : 1 в канале обессоливания электродиализного аппарата была построена на основании самых общих фундаментальных законов сохранения материи, заряда и количества движения без химических реакций и любых других подгоночных параметров. Схема трехмерного канала обессоливания электродиализного аппарата с электродами (катодом и анодом) представлена на рис. 1.

Схема канала обессоливания. На рис. 1 при $x = 0$ расположена анионообменная мембрана, при $x = H$ – катионообменная мембрана, при $z = 0$ находится вход в канал, при $z = L$ – выход из канала. Таким образом, x – переменная по ширине канала, z – переменная по длине канала (раньше было y), тогда как $y = 0$ – это условный низ канала, на котором он лежит, а $y = 2{,}5H$ – высота канала. Поэтому ионообменные мембраны канала расположены перпендикулярно плоскости стола, на котором стоит электродиализный аппарат. Исследуемый канал обессоливания обозначим через

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 0{,}4;\ 0 \le y \le 1;\ 0 \le z \le 2\}.$$

Система уравнений. Приведенная ниже система уравнений для бинарного электролита (1)–(7) является полносвязной системой дифференциальных уравнений в частных производных с учетом пространственной силы, описывающей массоперенос с учетом электроконвекции в электромембранных системах [6–11]:

$$\vec{j}_i = -\frac{F}{RT} z_i D_i C_i \vec{E} - D_i \nabla C_i + C_i \vec{V},\ i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\vec{j}_i\right),\ i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\varepsilon_r \Delta\varphi = -F\left(z_1 C_1 + z_2 C_2\right), \quad (3)$$

$$\vec{I} = F\left(z_1 \vec{j}_1 + z_2 \vec{j}_2\right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} + \frac{1}{\rho_0}\vec{f}, \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{V}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E}, \tag{7}$$

где j_i – поток ионов натрия и хлора; F – число Фарадея; R – универсальная газовая постоянная; $\vec{E} = -\nabla\varphi$ – напряженность электрического поля; D_i – коэффициент диффузии натрия и хлора; C_i – концентрация ионов натрия и хлора; φ – потенциал; $\vec{V}$ – скорость течения раствора в канале обессоливания электродиализного аппарата; ε_r – диэлектрическая проницаемость раствора электролита; $\vec{I}$ – плотность тока, определяемая потоком ионов; ρ_0 – плотность раствора; ν – кинематическая вязкость; $\vec{f}$ – электрическая сила; $\rho = F\left(z_1C_1 + z_2C_2\right)$ – плотность распределения пространственного заряда.

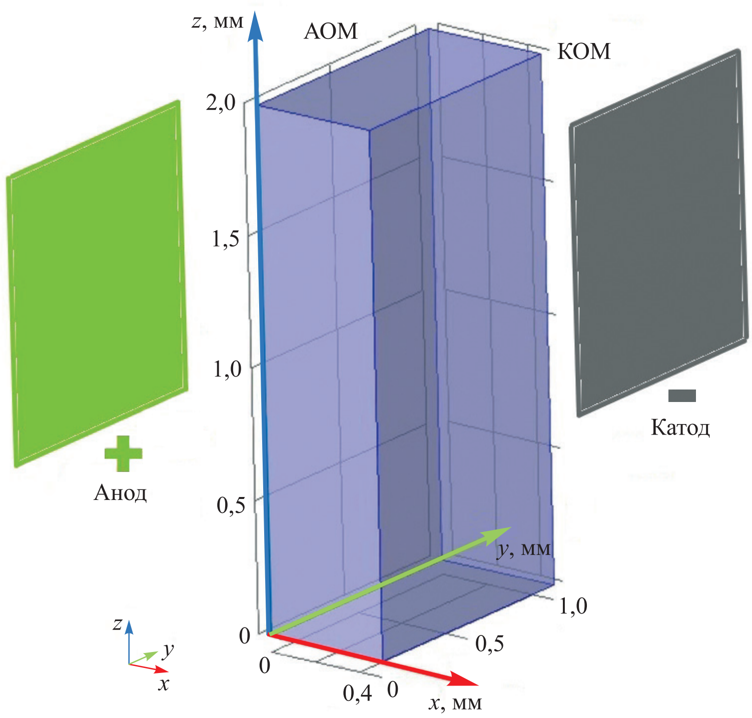


Рис. 1. Схема трехмерного канала обессоливания электродиализного аппарата
(АОМ – анионообменная мембрана; КОМ – катионообменная мембрана)

Fig. 1. Schematic diagram of the three-dimensional desalting channel of the electrodialysis unit
(AOM – anion-exchange membrane; KOM – cation-exchange membrane)

Уравнение Нернста – Планка (1) и уравнение материального баланса (2) описывают поток ионов натрия ($i = 1 \leftrightarrow Na^+$) и хлора ($i = 2 \leftrightarrow Cl^-$), обусловленный электрическим полем, диффузией и конвекцией (зарядовое число катионов $z_1 = 1$, зарядовое число анионов $z_2 = -1$), уравнения (3), (4) – электрический потенциал и ток в электролите, а система уравнений Навье – Стокса (5), (6) для течения несжимаемой жидкости – поле скоростей, формируемое под воздействием электрических сил.

Краевые условия для системы (1)–(7) с учетом результатов исследований [6–11] будут сформулированы ниже.

Краевые условия. Как правило, электродиализные аппараты используют в двух разных режимах работы – потенциодинамическом (задается падение потенциала в цепи) и гальванодинамическом (задается плотность тока в цепи). Далее изучается потенциодинамический режим, причем поверхности ионообменных мембран считаются эквипотенциальными, т. е. предполагается выполнение условия

$$\varphi\left(t, H, y, z\right) - \varphi\left(t, 0, y, z\right) = \alpha t, \tag{8}$$

где α – скорость развертки скачка потенциала.

Наряду с условием (8) будем использовать следующие краевые условия.

Условие на анионообменной мембране (x = 0). Полагаем

$$C_2(t,\ 0,\ y,\ z) = C_{2m},$$

$$-\vec{n} \cdot \vec{j}_1(t,\ 0,\ y,\ z) = 0,$$

$$\varphi(t,\ 0,\ y,\ z) = \alpha t,$$

$$-\vec{n} \cdot \vec{V}(t,\ 0,\ y,\ z) = 0.$$

Условие на катионообменной мембране (x = H). Полагаем

$$C_1(t,\ H,\ y,\ z) = C_{1m},$$

$$-\vec{n} \cdot \vec{j}_2(t,\ H,\ y,\ z) = 0,$$

$$\varphi(t,\ H,\ y,\ z) = 0,$$

$$-\vec{n} \cdot \vec{V}(t,\ H,\ y,\ z) = 0.$$

Условие на входе в канал (z = 0). Считаем заданными концентрации ионов, так чтобы на входе выполнялось условие электронейтральности, т. е.

$$C_i(t,\ x,\ y,\ 0) = C_{i,\,0},\ i = 1,\ 2,$$

$$-n\nabla\varphi(t,\ x,\ y,\ 0) = 0,$$

$$\vec{V}(0,\ x,\ y,\ z) = \left(0,\ 0,\ 6V_0\frac{x}{H}\left(1 - \frac{x}{H}\right)\right).$$

Условие на выходе из канала (z = L). Для концентрации будем использовать условие на поток ионов, предполагающее, что ионы соли выносятся из канала обессоливания электродиализного аппарата только за счет течения раствора:

$$-\vec{n} \cdot \vec{j}_i(t,\ x,\ y,\ L) = -V_z(t,\ x,\ y,\ L)C_i(t,\ x,\ y,\ L),\ i = 1,\ 2.$$

Для скачка потенциала ставится условие

$$-n\nabla\varphi(t,\ x,\ y,\ L) = 0.$$

Начальные условия. Начальные условия возьмем согласованными с граничными условиями:

$$C_i(0,\ x,\ y,\ z) = C_{i,\,0},\ i = 1,\ 2,$$

$$\varphi(0,\ x,\ y,\ z) = 0,$$

$$\vec{V}(0,\ x,\ y,\ z) = \left(0,\ 0,\ 6V_0\frac{x}{H}\left(1 - \frac{x}{H}\right)\right).$$

Результаты численного исследования

Параметры задачи. Численное решение получено методом конечных элементов. Был разработан специальный метод распараллеливания (расщепления), при котором на каждом слое по времени сначала решалась электрохимическая часть задачи, а затем гидродинамическая. Ниже приведены расчеты только для следующих значений параметров: $2{,}5H = 1$ мм, $L = 2$ мм, $V_0 = 0{,}1$ мм/с, $C_0 = 0{,}01$ моль/м^3, $\alpha = 0{,}005$ В/с. В результате прямого численного моделирования удалось получить трехмерную модель и сравнить результаты моделирования с двумерной моделью.

Рассмотрим образование и развитие электроконвективных вихрей в трехмерной модели в разные моменты времени (рис. 2). На рис. 2, *a*, где представлены линии тока жидкости в сечениях $y = 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 мм для трехмерной модели в момент времени 108 с, спиралевидная вихревая структура четко прослеживается во всех сечениях в правом нижнем углу канала у катионообменной мембраны ($x = 0{,}4$ мм). Причем заметно, как эта спираль сворачивается в сечениях $y = 0{,}3$; 0,6; 0,9 мм и разворачивается в сечениях $y = 0{,}4$; 0,7 мм.

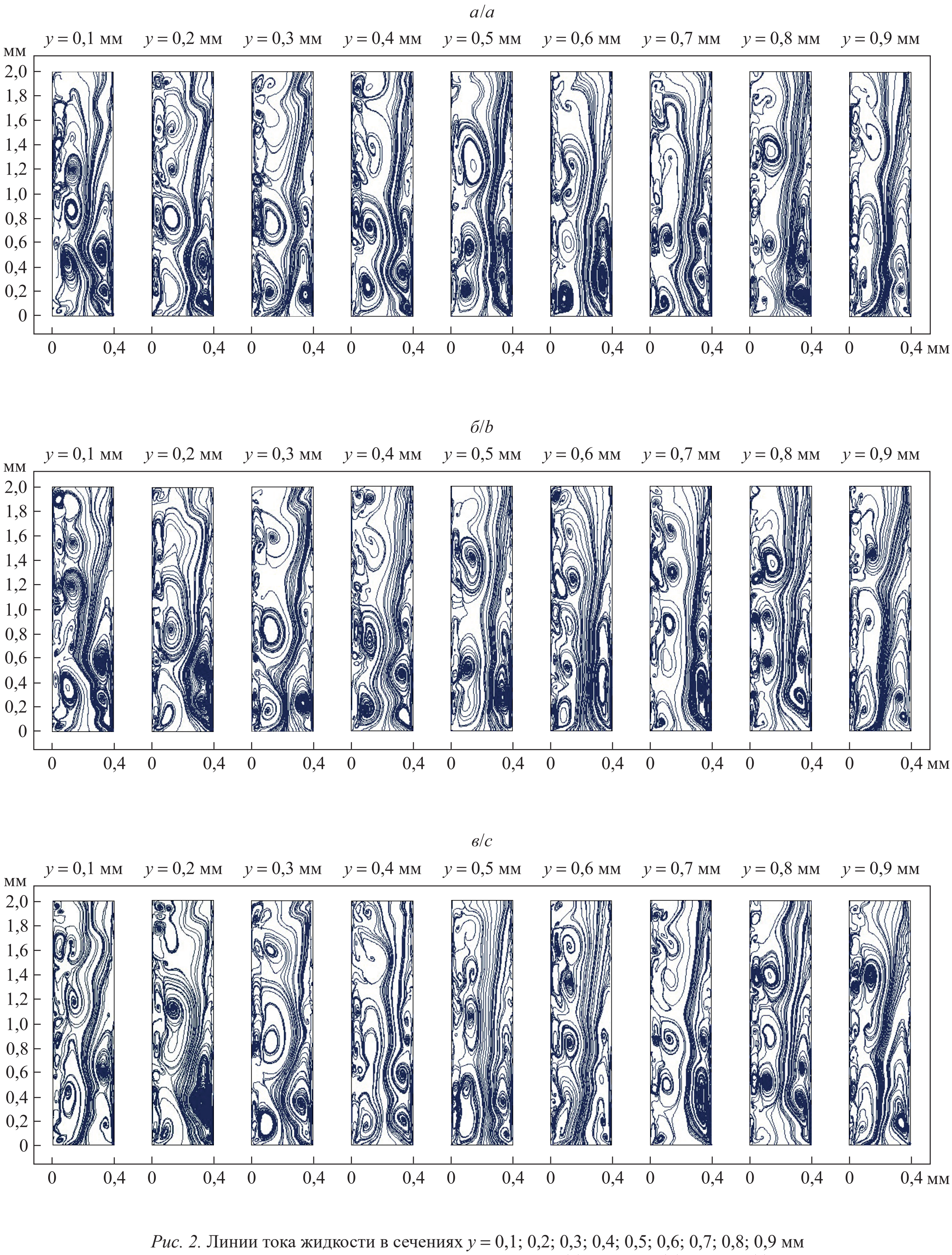


Рис. 2. Линии тока жидкости в сечениях $y = 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 мм для трехмерной модели в момент времени 108 с (*а*), 108,25 с (*б*), 108,5 с (*в*)

Fig. 2. Fluid current lines in the cross-sections $y = 0.1$; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9 mm for three-dimensional model at time 108 s (*a*), 108.25 s (*b*), 108.5 s (*c*)

Аналогичная ситуация со спиралевидными формами электроконвективных вихрей отмечена и у анионообменной мембраны ($x = 0$ мм) (см. рис. 2, *а*), однако здесь можно наблюдать еще одно интересное явление – образование слоистых электроконвективных вихревых конструкций, которые невозможно обнаружить в двумерных моделях (рис. 3). То есть образованный и хорошо развитый у анионообменной мембраны слой спиралевидных электроконвективных вихрей начинает отодвигаться в глубь канала новым «молодым» слоем маленьких спиралевидных электроконвективных вихрей. Причем между ними осуществляется довольно длительное взаимодействие, которое можно назвать борьбой (см. рис. 2, *а* – *в*): малые спиралевидные электроконвективные вихри пытаются развиться, а уже существующий хорошо развитый слой спиралевидных электроконвективных вихрей пытается их подавить. Однако со временем он все же оттесняется в глубь канала и начинает взаимодействовать со спиралевидными электроконвективными вихрями, образованными у катионообменной мембраны (см. рис. 2, *в*).

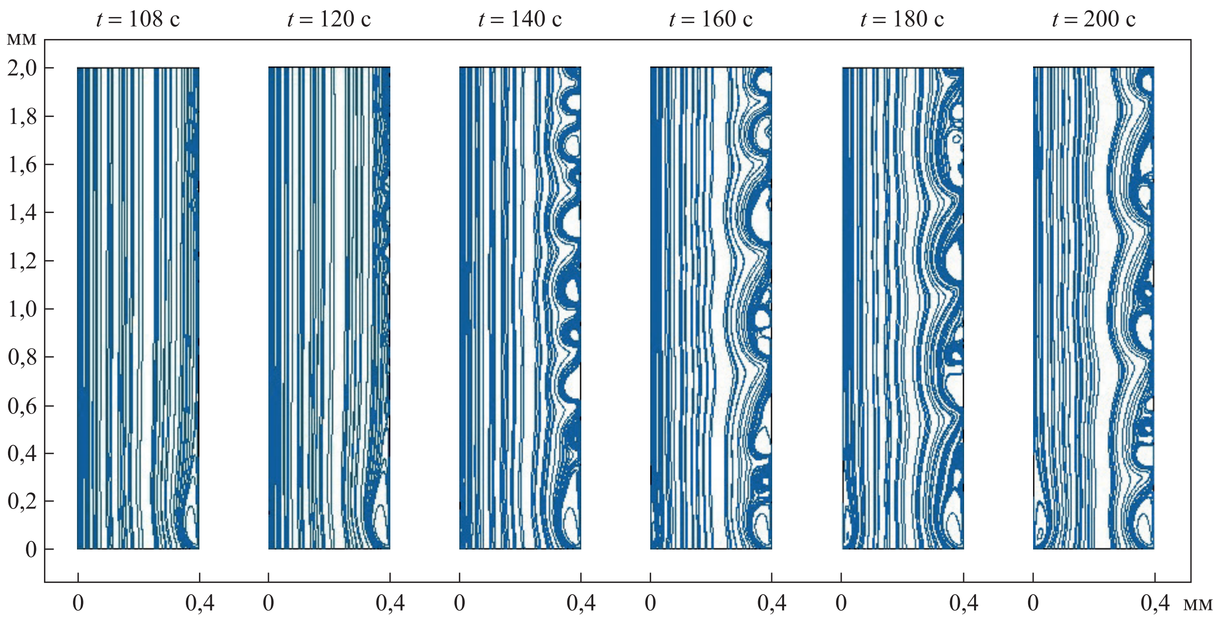


Рис. 3. Линии тока жидкости для двумерной модели в момент времени 108; 120; 140; 160; 180; 200 с

Fig. 3. Fluid current lines for two-dimensional model at time 108; 120; 140; 160; 180; 200 s

На рис. 4 представлены трехмерные поверхности концентрации катионов C_1 в сечении $y = 0{,}5$ мм для трехмерной модели в разные моменты времени. Отметим явное сходство поведения концентраций для двумерного (рис. 5) и трехмерного (см. рис. 4) случаев.

На рис. 6 представлены вольт-амперные кривые для трехмерной и двумерной моделей, а также проведены касательные к вольт-амперным кривым для трехмерной модели.

Формула для расчета вольт-амперных характеристик

$$I_{\text{av}}(t) \approx \frac{1}{HLM} \int_0^H \int_0^L \int_0^M I_x(t,\ x,\ y,\ z)\, dz\, dy\, dx$$

выведена и подробно описана в работе [12]. Для обезразмеривания плотности тока мы использовали предельный диффузионный ток по Левеку

$$I_{\text{lim}}(t) \approx \frac{FDC_c}{H(T_1 - t_1)} \left[1{,}47 \left(\frac{H^2 V_0}{LD} \right)^{1/3} - 0{,}2 \right],$$

где D – коэффициент диффузии электролита; T_1 и t_1 – числа переноса ионов соли в мембране и в растворе [13; 14].

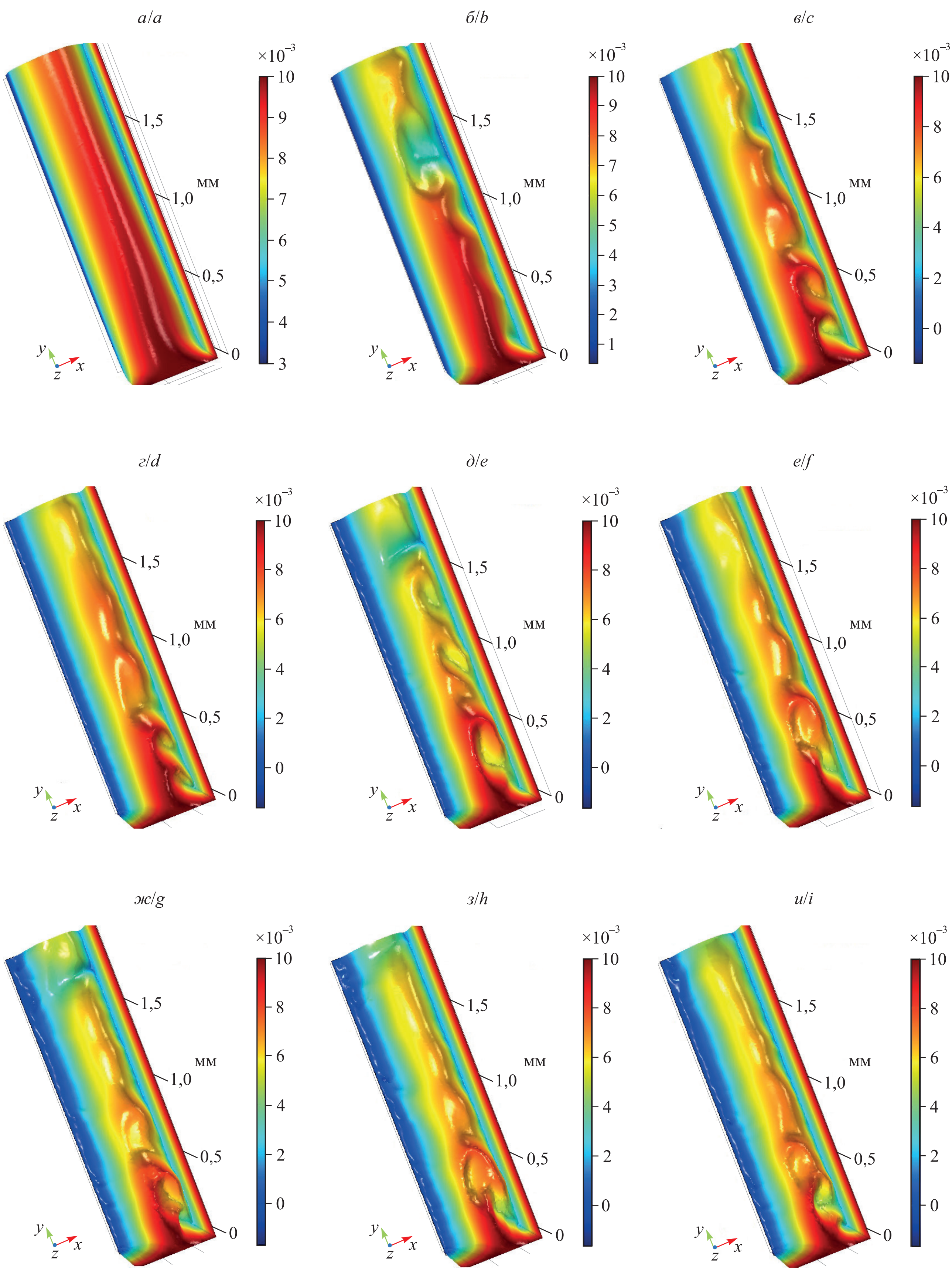


Рис. 4. Поверхности концентрации катионов C_1 в сечении $y = 0{,}5$ мм для трехмерной модели в момент времени 20 с (*а*), 40 с (*б*), 60 с (*в*), 80 с (*г*), 90 с (*д*), 100 с (*е*), 106,5 с (*ж*), 107,5 с (*з*), 108,5 с (*и*)

Fig. 4. Surfaces of C_1 cation concentration in the cross-section $y = 0.5$ mm for three-dimensional model at time 20 s (*a*), 40 s (*b*), 60 s (*c*), 80 s (*d*), 90 s (*e*), 100 s (*f*), 106.5 s (*g*), 107.5 s (*h*), 108.5 s (*i*)

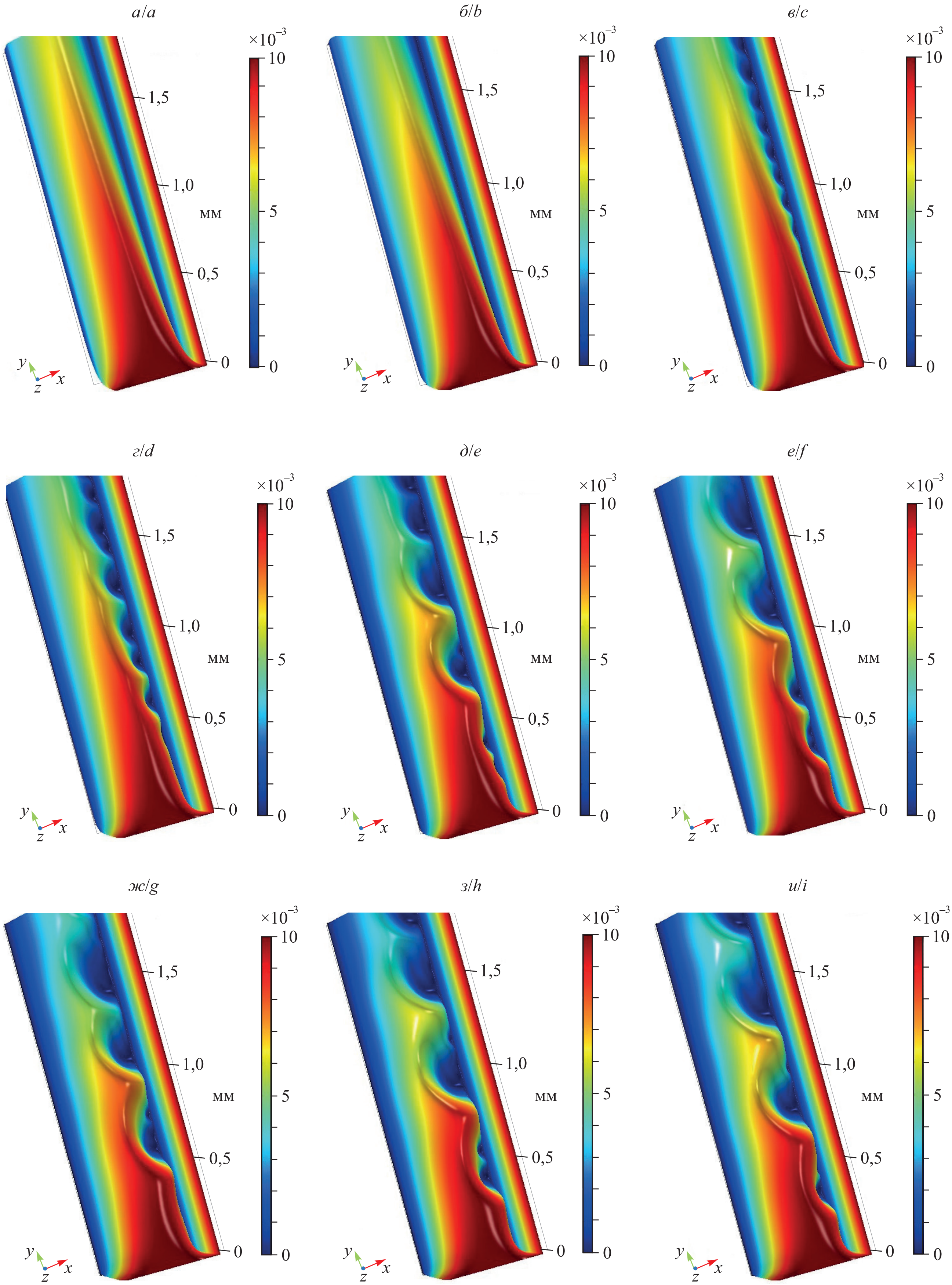


Рис. 5. Поверхности концентрации катионов C_1 для двумерной модели в момент времени 40 с (*а*), 108 с (*б*), 130 с (*в*), 140 с (*г*), 160 с (*д*), 170 с (*е*), 180 с (*ж*), 190 с (*з*), 200 с (*и*)

Fig. 5. Surfaces of C_1 cation concentration for two-dimensional model at time 40 s (*a*), 108 s (*b*), 130 s (*c*), 140 s (*d*), 160 s (*e*), 170 s (*f*), 180 s (*g*), 190 s (*h*), 200 s (*i*)

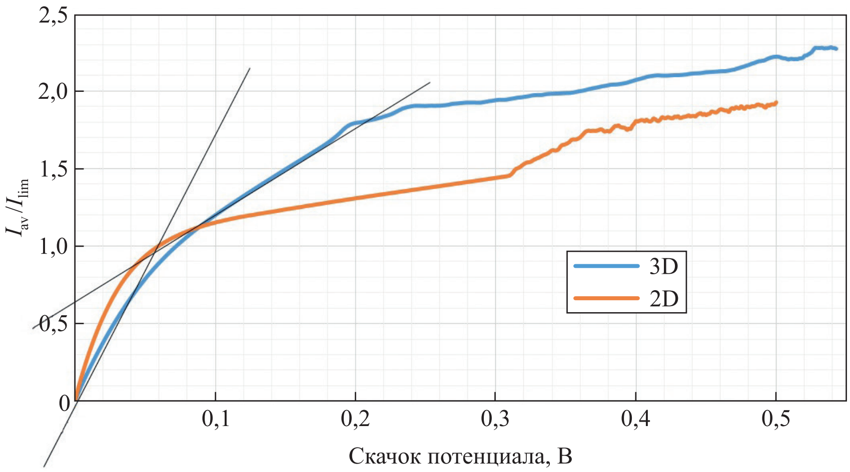


Рис. 6. Вольт-амперные кривые для трехмерной и двумерной моделей

Fig. 6. Current-voltage curves for three-dimensional and two-dimensional models

Отметим, что плато вольт-амперных кривых трехмерных моделей является наклонным и полностью соответствует вольт-амперным характеристикам реальных электродиализных аппаратов [15]. Кроме того, необходимо отметить, что образование и развитие электроконвективных вихрей в трехмерных моделях происходит намного раньше, чем в двумерных. Это объясняется трехмерными спиралевидными формами электроконвективных вихрей (рис. 7) [16], которые невозможно обнаружить в двумерных моделях [6; 7; 15; 17; 18], поскольку в них мы наблюдаем исключительно срез, или сечение, или проекцию на одну плоскость трехмерных электроконвективных вихрей (см. рис. 3).

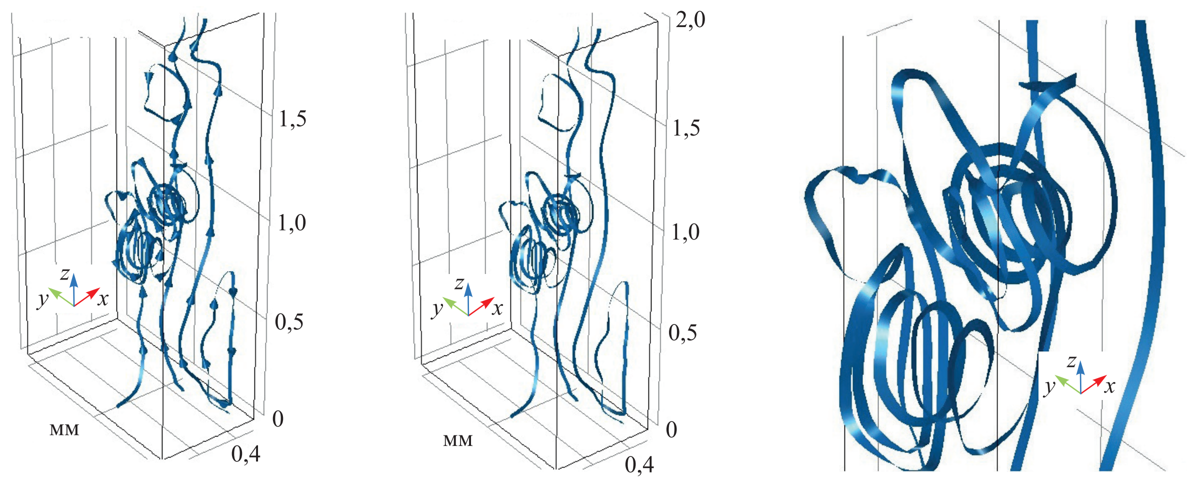


Рис. 7. Трехмерные спиралевидные формы электроконвективных вихрей и линии тока жидкости в сечении $y = 0{,}2$ мм, полученные с помощью трехмерной модели в момент времени 108,5 с

Fig. 7. Three-dimensional spiral shapes of electroconvective vortices and fluid current lines in the cross-section $y = 0.2$ mm, obtained with three-dimensional model at time 108.5 s

Еще одной причиной, обусловливающей более быстрое начало электроконвекции, является взаимодействие расположенных рядом друг с другом вдоль мембран электроконвективных вихрей.

Ранее предполагалось, что за счет градиента концентрации электроконвективные вихри появляются ниже по течению и развиваются вверх против течения. Причем сначала они возникают у катионообменной, затем у анионообменной мембраны, а после начинают взаимодействовать, что непосредственно отражается на вольт-амперной характеристике для двумерных моделей (см. рис. 6).

Заключение

В работе предложена и численно проанализирована новая трехмерная математическая модель переноса ионов соли в канале обессоливания с учетом электроконвекции на основе системы уравнений Нернста – Планка, Пуассона и Навье – Стокса с электрической силой и естественными краевыми условиями.

Результаты численных экспериментов показывают, что возникновение и развитие электроконвективных вихрей в трехмерном канале обессоливания происходит намного раньше, чем в двумерном, причем они имеют форму комплексов, содержащих внутри спиралевидные вихри. Взаимодействие этих вихрей, образовавшихся у катионообменной и анионообменной мембран, в трехмерном случае начинается раньше, чем в двумерном, что приводит к более быстрому развитию других электроконвективных структур (см. рис. 7).

Библиографические ссылки

1. Carolin CF, Kumar PS, Saravanan A, Joshiba GJ, Naushad M. Efficient techniques for the removal of toxic heavy metals from aquatic environment: a review. *Journal of Environmental Chemical Engineering.* 2017;5(3):2782–2799. DOI: 10.1016/j.jece.2017.05.029.

2. Druzgalski C, Mani A. Statistical analysis of electroconvection near an ion-selective membrane in the highly chaotic regime. *Physical Review Fluids.* 2016;1(7):073601. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.1.073601.

3. Kang S, Kwak R. Pattern formation of three-dimensional electroconvection on a charge selective surface. *Physical Review Letters.* 2020;124(15):154502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.154502.

4. Demekhin EA, Nikitin NV, Shelistov VS. Three-dimensional coherent structures of electrokinetic instability. *Physical Review E.* 2014;90(1):013031. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.013031.

5. Kalaydin EN, Ganchenko NYu, Ganchenko GS, Nikitin NV, Demekhin EA. Thermoelectrokinetic instability and salt superconcentration near permselective electric membranes. *Physical Review Fluids.* 2017;2(11):114201. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.2.114201.

6. Nikonenko VV, Kovalenko AV, Urtenov MKh, Pismenskaya ND, Han J, Sistat Ph, et al. Desalination at overlimiting currents: state-of-the-art and perspectives. *Desalination.* 2014;342:85–106. DOI: 10.1016/j.desal.2014.01.008.

7. Urtenov MKh, Uzdenova AM, Kovalenko AV, Nikonenko VV, Pismenskaya ND, Vasil'eva VI, et al. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electrodialysis membrane cells. *Journal of Membrane Science.* 2013;447:190–202. DOI: 10.1016/j.memsci.2013.07.033.

8. Узденова АМ, Коваленко АВ, Уртенов МХ. *Математические модели электроконвекции в электромембранных системах.* Карачаевск: Издательство Карачаево-Черкесского государственного университета; 2011. 156 с.

9. Pismensky AV, Urtenov MKh, Nikonenko VV, Sistat Ph, Pismenskaya ND, Kovalenko AV. Model and experimental studies of gravitational convection in an electromembrane cell. *Russian Journal of Electrochemistry.* 2012;48(7):756–766. DOI: 10.1134/S1023193512070075.

10. Коваленко АВ, Уртенов МХ, Чубырь НО, Узденова АМ, Гудза ВА. Математическое моделирование влияния основных температурных эффектов на стационарный перенос ионов соли в диффузионном слое. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 2018;15(3):78–86. DOI: 10.31429/vestnik-15-3-78-86.

11. Чубырь НО, Коваленко АВ, Уртенов МХ. *Двумерные математические модели переноса бинарного электролита в мембранных системах (численный и асимптотический анализ).* Краснодар: Кубанский государственный технологический университет; 2012. 131 с.

12. Коваленко АВ, Гудза ИВ, Чубырь НО, Уртенов МХ, Хромых АА. Формула для расчета теоретической вольт-амперной характеристики 3D-канала обессоливания ЭДА. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(4):1–19. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.35.4.026.

13. Коваленко АВ, Гудза ИВ, Письменский АВ, Чубырь НО, Уртенов МХ. Теоретический анализ вольт-амперной характеристики нестационарного переноса 1 : 1 электролита в мембранных системах с учетом электроконвекции и реакции диссоциации/рекомбинации воды. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(3):1–16. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.011.

14. Urtenov MKh, Kovalenko AV, Sukhinov AI, Chubyr NO, Gudza VA. Model and numerical experiment for calculating the theoretical current-voltage characteristic in electromembrane systems. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2019;680:012030. DOI: 10.1088/1757-899X/680/1/012030.

15. Никоненко ВВ, Мареев СА, Письменская НД, Узденова АМ, Коваленко АВ, Уртенов МХ и др. Эффект электроконвекции и его использование для интенсификации массопереноса в электродиализе (обзор). *Электрохимия.* 2017;53(10):1266–1289. DOI: 10.7868/S0424857017100061.

16. Коваленко АВ, Узденова АМ, Уртенов МХ, Никоненко ВВ. *Математическое моделирование физико-химических процессов в среде COMSOL Multiphysics 5.2.* Санкт-Петербург: Лань; 2022. 228 с.

17. Казаковцева ЕВ, Коваленко АВ, Евдоченко ЕН. 3D-математическая модель переноса ионов 1 : 1 соли. В: Кубанский государственный технологический университет. *Research. Engineering. Extreme. 2021. Материалы Международной научно-практической конференции; 3 июня 2021 г.; Краснодар, Россия.* Краснодар: Издательский дом – Юг; 2021. с. 70–78.

18. Kovalenko AV, Wessling M, Nikonenko VV, Mareev SA, Moroz IA, Evdochenko E, et al. Space-charge breakdown phenomenon and spatio-temporal ion concentration and fluid flow patterns in overlimiting current electrodialysis. *Journal of Membrane Science.* 2021;636:119583. DOI: 10.1016/j.memsci.2021.119583.

References

1. Carolin CF, Kumar PS, Saravanan A, Joshiba GJ, Naushad M. Efficient techniques for the removal of toxic heavy metals from aquatic environment: a review. *Journal of Environmental Chemical Engineering.* 2017;5(3):2782–2799. DOI: 10.1016/j.jece.2017.05.029.

2. Druzgalski C, Mani A. Statistical analysis of electroconvection near an ion-selective membrane in the highly chaotic regime. *Physical Review Fluids.* 2016;1(7):073601. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.1.073601.

3. Kang S, Kwak R. Pattern formation of three-dimensional electroconvection on a charge selective surface. *Physical Review Letters.* 2020;124(15):154502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.154502.

4. Demekhin EA, Nikitin NV, Shelistov VS. Three-dimensional coherent structures of electrokinetic instability. *Physical Review E.* 2014;90(1):013031. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.013031.

5. Kalaydin EN, Ganchenko NYu, Ganchenko GS, Nikitin NV, Demekhin EA. Thermoelectrokinetic instability and salt superconcentration near permselective electric membranes. *Physical Review Fluids.* 2017;2(11):114201. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.2.114201.

6. Nikonenko VV, Kovalenko AV, Urtenov MKh, Pismenskaya ND, Han J, Sistat Ph, et al. Desalination at overlimiting currents: state-of-the-art and perspectives. *Desalination.* 2014;342:85–106. DOI: 10.1016/j.desal.2014.01.008.

7. Urtenov MKh, Uzdenova AM, Kovalenko AV, Nikonenko VV, Pismenskaya ND, Vasil'eva VI, et al. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electrodialysis membrane cells. *Journal of Membrane Science.* 2013;447:190–202. DOI: 10.1016/j.memsci.2013.07.033.

8. Uzdenova AM, Kovalenko AV, Urtenov MKh. *Matematicheskie modeli elektrokonvektsii v elektromembrannykh sistemakh* [Mathematical models of electroconvection in electromembrane systems]. Karachaevsk: Publishing House of the Karachay-Cherkess State University; 2011. 156 p. Russian.

9. Pismensky AV, Urtenov MKh, Nikonenko VV, Sistat Ph, Pismenskaya ND, Kovalenko AV. Model and experimental studies of gravitational convection in an electromembrane cell. *Russian Journal of Electrochemistry.* 2012;48(7):756–766. DOI: 10.1134/S1023193512070075.

10. Kovalenko AV, Urtenov MKh, Chubyr NO, Uzdenova AM, Gudza VA. Mathematical modeling of the influence of the main temperature effects in stationary transport of ions of salt in the diffusion. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation.* 2018;15(3):78–86. Russian. DOI: 10.31429/vestnik-15-3-78-86.

11. Chubyr NO, Kovalenko AV, Urtenov MKh. *Dvumernye matematicheskie modeli perenosa binarnogo elektrolita v membrannykh sistemakh (chislennyi i asimptoticheskii analiz)* [Two-dimensional mathematical models of binary electrolyte transfer in membrane systems (numerical and asymptotic analysis)]. Krasnodar: Kuban State Technological University; 2012. 131 p. Russian.

12. Kovalenko AV, Gudza IV, Chubyr NO, Urtenov MKh, Khromykh AA. Formula for calculating the theoretical current-voltage characteristic of the 3D desalination channel EDA. *Modeling, Optimization and Information Technology.* 2021;9(4):1–19. Russian. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.35.4.026.

13. Kovalenko AV, Gudza IV, Pismenskiy AV, Chubyr NO, Urtenov MKh. Theoretical analysis of the current-voltage characteristic of the unsteady 1 : 1 electrolyte transfer in membrane systems in terms of electroconvection and the dissociation/recombination reaction of water. *Modeling, Optimization and Information Technology.* 2021;9(3):1–16. Russian. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.011.

14. Urtenov MKh, Kovalenko AV, Sukhinov AI, Chubyr NO, Gudza VA. Model and numerical experiment for calculating the theoretical current-voltage characteristic in electromembrane systems. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2019; 680:012030. DOI: 10.1088/1757-899X/680/1/012030.

15. Nikonenko VV, Mareev SA, Pismenskaya ND, Uzdenova AM, Kovalenko AV, Urtenov MKh, et al. [Effect of electroconvection and its use for the intensification of mass transfer in electrodialysis (review)]. *Elektrokhimiya.* 2017;53(10):1266–1289. Russian. DOI: 10.7868/S0424857017100061.

16. Kovalenko AV, Uzdenova AM, Urtenov MKh, Nikonenko VV. *Matematicheskoe modelirovanie fiziko-khimicheskikh protsessov v srede COMSOL Multiphysics 5.2* [Mathematical modelling of physical and chemical processes in the COMSOL Multiphysics 5.2 environment]. Saint Petersburg: Lan'; 2022. 228 p. Russian.

17. Kazakovtseva EV, Kovalenko AV, Evdochenko EN. [3D mathematical model of 1 : 1 salt ion transfer]. In: Kuban State Technological University. *Research. Engineering. Extreme. 2021. Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii; 3 iyunya 2021 g.; Krasnodar, Rossiya* [Research. Engineering. Extreme. 2021. Proceedings of the International scientific and practical conference; 2021 June 3; Krasnodar, Russia]. Krasnodar: Publishing House – South; 2021. p. 70–78. Russian.

18. Kovalenko AV, Wessling M, Nikonenko VV, Mareev SA, Moroz IA, Evdochenko E, et al. Space-charge breakdown phenomenon and spatio-temporal ion concentration and fluid flow patterns in overlimiting current electrodialysis. *Journal of Membrane Science.* 2021;636:119583. DOI: 10.1016/j.memsci.2021.119583.

Получена 24.01.2022 / исправлена 15.06.2022 / принята 15.06.2022.
Received 24.01.2022 / revised 15.06.2022 / accepted 15.06.2022.

Теоретические основы информатики

Theoretical foundations of computer science

УДК 004.94,519.63

ИНСТРУМЕНТАРИЙ АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НИЗОВЫХ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ

Д. В. БАРОВИК[1]***, В. Б. ТАРАНЧУК***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрена задача компьютерного моделирования распространения низовых лесных пожаров в двумерной постановке. Приведена формулировка начально-краевой задачи в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными в принятом приближении соответствующих физико-химических процессов с уточнениями взаимосогласованных определяющих функций и коэффициентов, включаемых в уравнения. Для разработки компьютерной модели, проведения расчетов и формирования базы данных с результатами вычислений использована система компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*. Представлены данные вычислительных экспериментов по изучению возможных сценариев распространения зоны горения вблизи противопожарных разрывов в тылу, на флангах

Образец цитирования:
Баровик ДВ, Таранчук ВБ. Инструментарий анализа и визуализации распределений и векторных полей при моделировании низовых лесных пожаров. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:82–93 (на англ.).
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-82-93

For citation:
Barovik DV, Taranchuk VB. Tools for the analysis and visualisation of distributions and vector fields in surface forest fires modelling. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:82–93.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-82-93

Авторы:
Дмитрий Валентинович Баровик – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики.
Валерий Борисович Таранчук – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики.

Authors:
Dmitry V. Barovik, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of computer technologies and systems, faculty of applied mathematics and computer science.
barovikd@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6300-2976
Valery B. Taranchuk, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of computer technologies and systems, faculty of applied mathematics and computer science.
taranchuk@bsu.by
https://orcid.org/0000-0003-2210-652X

и фронте пожара. С помощью многомерной графики проиллюстрированы несколько качественных особенностей структуры температурного фронта и его эволюции, векторных полей градиента концентрации кислорода по площади лесного массива при наличии имеющих различные формы и размеры участков с низким содержанием горючего материала и продемонстрировано влияние равновесной скорости ветра в пологе леса. На примерах показаны возможные варианты динамики фронта пожара в направлениях по ветру и против него.

Ключевые слова: низовой лесной пожар; математическая модель; программный комплекс; динамика фронта пожара; градиент концентрации кислорода; неоднородность напочвенного покрова; скорость ветра.

TOOLS FOR THE ANALYSIS AND VISUALISATION OF DISTRIBUTIONS AND VECTOR FIELDS IN SURFACE FOREST FIRES MODELLING

***D. V. BAROVIK*[a], *V. B. TARANCHUK*[a]**

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: V. B. Taranchuk (taranchuk@bsu.by)

The problem of computer modelling of the spread of surface forest fires in a two-dimensional formulation is herein considered. We describe the initial-boundary value problem in the form of a system of partial differential equations in the accepted approximation of the corresponding physical and chemical processes with refinements of the mutually agreed defining functions and the coefficients included in the equations. The *Wolfram Mathematica* computer algebra system is used as a platform for developing the computer model, performing calculations, and creating a database with the outcomes of computations. The results of numerical experiments investigating possible scenarios of how a fire zone spreads in different directions and its behaviour near the fuelbreaks are presented. Several qualitative features of the structure, the evolution of the temperature front, and the vector fields of the oxygen concentration gradient over the forest area are identified and illustrated with multidimensional graphics in the presence of areas of the low content of combustible materials of various shapes and sizes, including the demonstration of the influence of the equilibrium wind speed in the forest canopy. Possible variants of the fire front movement in the direction of the wind velocity and against it are identified and explained using representative examples.

Keywords: surface forest fire; mathematical model; software; fire front dynamics; oxygen concentration gradient; distribution of forest fuel; wind speed; wildfire.

Introduction

The influence of forest fires on the ecology and the environment, in particular, on air pollution, is well known. It manifests itself on a global scale, and has negative social and economic consequences [1–4]. In the territories of many regions, emergency situations caused by forest fires occur at regular intervals, and at the same time, the success in their prevention and extinguishing does not increase. Therefore, it is important to search for new solutions, technologies to prevent and reduce the intensity and duration of fires. The development of mathematical, computer models of forest fires began in the middle of the last century in the United States and continues throughout the world nowadays. A review of scientific publications indicates both successes and unresolved issues [5–9]. In particular, there is no convincing proof for the kinetics of physicochemical transformations and reactions used in the models [10; 11]. There are different, sometimes contradictory, models of turbulence processes in the gas phase [12; 13]. The available field experiments do not fully meet the real conditions; therefore, they cannot be considered representative. Until now, no balance has been found between mathematical models. Some models use too many simplifications, which lead to results that do not correspond to reality; other models, on the contrary, take into account many theoretically justified descriptions, for the verification of which there is insufficient experimental field data.

In most of the computer models given in the literature, the process of forest fire propagation is described and analysed only for homogeneous environments. However, in reality, a homogeneous distribution of forest fuel (mosses, litter, grasses, shrubs, trees, etc.) is extremely rare [5]. It is known that some observed effects of forest fires are caused precisely by heterogeneity. For example, the accelerated spread of fire along clearings, or the formation of a fire front in the form of «fingers» (fire fingering pattern [14]).

According to the existing reviews [15–19], mathematical (computer) models of forest fires are usually classified as physical, semi-empirical (including statistical), and simulation. In the presented research, the theoretical model of professor A. M. Grishin [20] is used. It is considered to be the most complete mathematical description of the spread of fires in forests and peat bogs. After the publication of the mentioned monograph, many researchers [9; 21–23], including the authors of this work, use Grishin's descriptions as a basis and modify them [24] for practical use [25], ensuring that the specific conditions of the territories and climate are taken into account.

Until recently [26; 27], the mathematical model of surface forest fires was used by the authors mostly in a one-dimensional formulation. This paper presents the results of modelling in a two-dimensional formulation, when spatially distributed processes are analysed in numerical experiments. Calculations of possible scenarios of forest fires spread are outlined, discussed, and illustrated; interrelated features in distributions of temperature and of oxygen concentration gradients caused by inhomogeneities in the density of combustible vegetation on the area are identified, interpreted, and visualised; the influence of wind direction and velocity is also taken into account.

In order not to refer readers to previous publications, we provide and explain the main formulas of the model and additions to them.

The mathematical model of forest fires spread

To obtain the results of this study, the problem is considered in a two-dimensional approximation (averaging over the height of forest fuel). The adopted mathematical model of forest fire spread takes into account the main processes of energy and mass transfer: heat supply caused by convection, thermal conductivity, and radiation; evaporation of water from forest fuel due to heating; decomposition of the dry organic matter of forest fuel into components, combustion of gaseous and afterburning of solid pyrolysis products [24–29]. The corresponding mathematical description implies the need to calculate the area distributions and the dynamics of the following values: T is the temperature of the continuous multiphase reacting medium measured in Kelvins; φ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) are volume fractions of the components of the forest fuel material, where φ_1 denotes the dry organic matter of forest fuel, φ_2 is water contained in vegetation in bound and free forms, φ_3 is the condensed pyrolysis product, φ_4 is the non-combustible mineral part (ash) of forest fuel; c_ν ($\nu = 1, 2, 3$) are the relative mass concentrations of the components of a gaseous phase, where c_1 corresponds to oxygen, c_2 corresponds to the combustible gases arising in the process of thermal decomposition, c_3 is used for a mixture of other non-combustible gases, including water vapour resulting from drying, the carbon dioxide released during the afterburning of coke and the oxidation of combustible gases, inert components of the air mixture, and the products of pyrolysis and combustion reactions.

The functions T, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, c_1, c_2, c_3 depend on both time t and spatial coordinates x and y. The surface forest fire model is formulated as an initial-boundary value problem in the form of a system of partial differential equations (1)–(11):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \Phi_{\varphi_1}, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \Phi_{\varphi_2}, \ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \Phi_{\varphi_3}, \ \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \left(V,\ \mathrm{grad} c_1\right) - \frac{1}{\rho_5}\mathrm{div}\left(\rho_5 D_T \mathrm{grad} c_1\right) = \Phi_{c_1}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + \left(V,\ \mathrm{grad} c_2\right) - \frac{1}{\rho_5}\mathrm{div}\left(\rho_5 D_T \mathrm{grad} c_2\right) = \Phi_{c_2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho_5 c_{p_5}\left(V,\ \mathrm{grad} T\right) - \mathrm{div}\left(\lambda_T \mathrm{grad} T\right)}{\rho_5 c_{p_5} + \sum\limits_{j=1}^{4} \rho_j \varphi_j c_{p_j}} = \Phi_T. \tag{4}$$

Let us note that the right-hand sides of differential equations (1)–(4) represent functions depending on the calculated variables. In particular, Φ_{φ_1} depends on φ_1 and T, the function Φ_{φ_2} depends on φ_2 and T, and Φ_{φ_3} depends on φ_1, φ_3, c_1, c_2, and T. These functions are expressed by the following formulas:

$$\Phi_{\varphi_1} = -\frac{R_1}{\rho_1}, \ \Phi_{\varphi_2} = -\frac{R_2}{\rho_2}, \ \Phi_{\varphi_3} = \frac{\alpha_c R_1}{\rho_3} - \frac{M_C}{M_1}\frac{R_3}{\rho_3}, \tag{5}$$

$$\Phi_{c_1} = \frac{1}{\rho_5}\left(R_{51} - c_1 Q - \frac{\alpha}{c_{p_5}\Delta h}\left(c_1 - c_{1\infty}\right)\right), \tag{6}$$

$$\Phi_{c_2} = \frac{1}{\rho_5}\left(R_{52} - c_2 Q - \frac{\alpha}{c_{p_5}\Delta h}\left(c_2 - c_{2\infty}\right)\right), \tag{7}$$

$$\Phi_T = \frac{-q_2 R_2 + q_3 R_3 + q_5 R_5 - \dfrac{\alpha}{\Delta h}\left(T - T_\infty\right) - 4\kappa_R \sigma T^4}{\rho_5 c_{p_5} + \sum\limits_{j=1}^{4} \rho_j \varphi_j c_{p_j}}, \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} c_\nu = 1,\ \rho_5 = \frac{\rho_\infty T_\infty}{M_\infty T}\left(\sum_{\nu=1}^{3}\frac{c_\nu}{M_\nu}\right)^{-1},\ Q = \left(1 - \alpha_c\right) R_1 + R_2 + \frac{M_C}{M_1} R_3, \tag{9}$$

$$R_1 = k_{01}\rho_1\varphi_1 \exp\left(-\frac{E_1}{RT}\right),\ R_2 = k_{02} T^{-1/2}\rho_2\varphi_2 \exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right),\ R_3 = k_{03} s_\sigma \varphi_3 \rho_5 c_1 \exp\left(-\frac{E_3}{RT}\right), \tag{10}$$

$$R_{51} = -R_3 - \frac{R_5 M_1}{2M_2},\ R_{52} = \left(1 - \alpha_c\right)\nu_\Gamma R_1 - R_5,\ R_5 = \rho_5 \min\left(c_2, \frac{M_2}{2M_1} c_2\right) k_{CO} \exp\left(-\frac{E_{CO}}{RT}\right). \tag{11}$$

Here t is time; T_∞ corresponds to the unperturbed ambient temperature; V is an equilibrium wind speed; Δh is the height of the forest fuel layer; ρ_j (j = 1, 2, 3, 4) is the true (particle) density of the φ_j component; ρ_5 is the density of a gas phase (a mix of gases); ρ_∞ is the unperturbed density of a mix of gases (air density); λ_T and D_T are the turbulent thermal conductivity and the diffusion coefficient [20]; α is the heat exchange between the atmosphere and the forest fuel layer; κ_R is the integral (absorption and scattering) attenuation coefficient; σ is the Stefan – Boltzmann constant; q_2, q_3, and q_5 are the heat effects of evaporation, of charcoal burning, and of gaseous combustible pyrolysis products burning; k_{01}, k_{02}, k_{03} and E_1, E_2, E_3 are the pre-exponential (frequency) factors and energy activations of reactions R_1, R_2, R_3. The universal gas constant is denoted by the symbol R; $c_{1\infty}$ and $c_{2\infty}$ are the relative mass concentrations in the unperturbed atmosphere of oxygen and of combustible gases; M_1, M_2, M_3, and M_C are the molecular masses of the gas phase components and of the condensed pyrolysis product; M_∞ is the molecular mass of air; c_{p_j} (j = 1, 2, 3, 4) are specific heat capacities of the φ_j component; c_{p_5} is the specific heat capacity of a gas phase. Here R_1, R_2, R_3 correspond to reactions of dry forest fuel pyrolysis (chemical decomposition of a substance by heating with an allocation of combustible gases), moisture evaporation from the forest fuel (drying), and condensed pyrolysis products burning; R_{51}, R_{52}, R_5 are the mass rates of oxygen disappearance, combustible gases generation, and combustible gases burning accordingly.

The mathematical model is focused on solving a very wide range of problems, on the possibility of reproducing many qualitative features. Below we discuss the results of calculations when specific values and expressions of coefficients and functions are used to characterise the composition and geometry of the distribution of the forest fuel, the rates of drying, pyrolysis, combustion, and others. The appropriate selection of values for the model supply was made so that there were no contradictions with the reasoned data given in the literature, in particular, with experimental studies [20; 23].

Let us list the values of the coefficients and the determining parameters of the model used in this work. They are selected based on the results of computational experiments in such a way as to demonstrate the features of forest fire processes: the starting temperature of the environment T_∞ = 304 K, the parameters of the layer of combustible vegetation (height Δh = 0.1 m, bulk density ρ_0 = 5 kg/m^3, moisture content W = 10 %, coke number α_c = 0.1); the turbulent processes in the gas phase (D_T = 1.5 m^2/s, λ_T = 1000 J/(m · s · K)); the energy and mass transfer coefficients (κ_R = 1.5 m^{-1}, α = 100 W/(m^2 · K)). The values for the densities of the forest fuel components, molecular masses, heat capacities, coefficients of physicochemical reactions, and several other values are given in [26].

The initial and boundary conditions are given in [25–29].

Software for calculating the forest fire dynamics

Approximate solutions of the reduced system of differential equations are calculated using explicit finite-difference schemes. The spatial grid is locally uniform and adapted in real-time by taking into account the resulting distributions. The time step is determined by the stability conditions [28; 29], taking into account the peculiarities and intensity of physicochemical processes at each time layer [30]. The current calculation results at the specified time points of the process are recorded in the database and separately visualised during processing and analysis. The creation of such a database of numerical experiments allows for the intelligent processing of the results. Computer algebra system *Wolfram Mathematica* is used as the basis of a software platform [31; 32].

The results presented below were preceded by methodological calculations, in which the steps of the spatial grid were selected based on the Runge rule. Special attention was paid to the issues of adequate correct visualisation, in particular, when constructing density maps and vector fields.

Below, we present and discuss the results of calculations of how the distributions of the main characteristics of fire are changed over time in a quadratic forest area with a side of 20 m. The process of fire development is studied in a forest when a fire occurs in the centre of the region (taken as the origin of coordinates) and the combustion begins to spread. It is considered that the wind in the forest canopy is directed along the *Ox* axis (from left to right). At the same time, on one of the flanks, there are areas with the absence of combustible vegetation (glades) [33].

The fig. 1–11 below show the volume density of the forest fuel; the green colour shows areas where the forest is in its initial state, the brown colour shows areas with no combustible material (fuelbreaks), the already burned forest areas are shown in dark blue. Also, the position and shape of the temperature of the current combustion front are synthesised in the same figures using gradient colours (from blue through white and yellow to red) as a distribution density map. The «drops» markers show the directions of the gradients of the oxygen mass concentration; the size of the «drops» is scaled by intensity.

Fire front propagation through fuelbreaks of various sizes

The examples below consider the options for the development of fires on areas of a forest with the uniform density of the forest fuel with inclusions in which there is no forest combustible material – round glades of various sizes (schematically shown in fig. 1). Small glades have an area of 2.25 m^2, the medium size is 4.5 m^2 (twice as large), and the large is 18 m^2, i. e., four times the area of the middle glade.

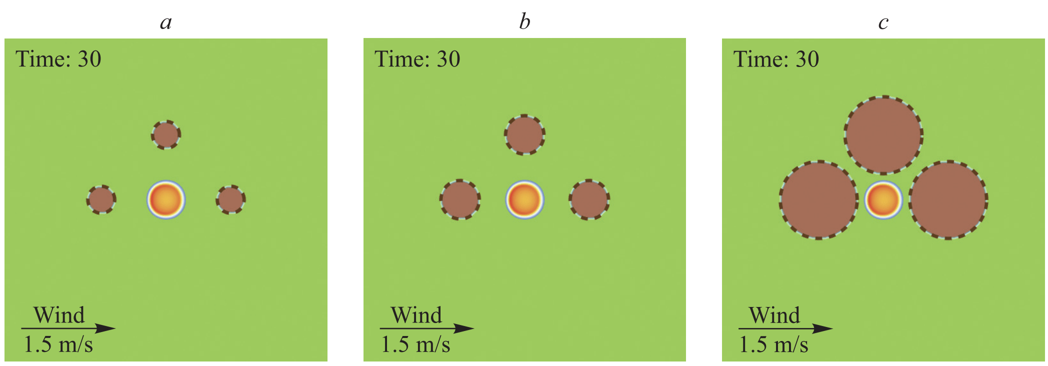


Fig. 1. Circular fuelbreaks of various sizes: 2.25 m^2 (*a*), 4.5 m^2 (*b*) and 18 m^2 (*c*) respectively (time point is 30)

Figures 2–4 show the results of calculations at an equilibrium wind speed at the middle of the flame height V = 1.5 m/s for three different sizes of fuelbreaks. The geometry differs only in the area of the clearings. The contour of the boundaries of the fuelbreaks and the positions of their centres relative to the combustion centre are the same for all three options. The distributions are rendered at the same points in time.

The illustrations can be interpreted as follows. During the first stage, the line of the fire contour breaks after meeting the glades. In the second stage, the fire «goes around» the glades. The fire propagation stops in the direction opposite to the direction of the wind. In the direction of the wind and across (perpendicular) to the direction of the wind, independent flanks meet together and the fire continues to spread as a united front. There is an evident difference in the front configurations after overcoming fields of different sizes [27].

In fig. 2–4 «drops» illustrate the directions and magnitude of the oxygen concentration gradient. The markers are shown only in the fire zone; in the areas not affected by the fire, the values of the simulated gas concentrations and temperatures are constant, the gradient is zero.

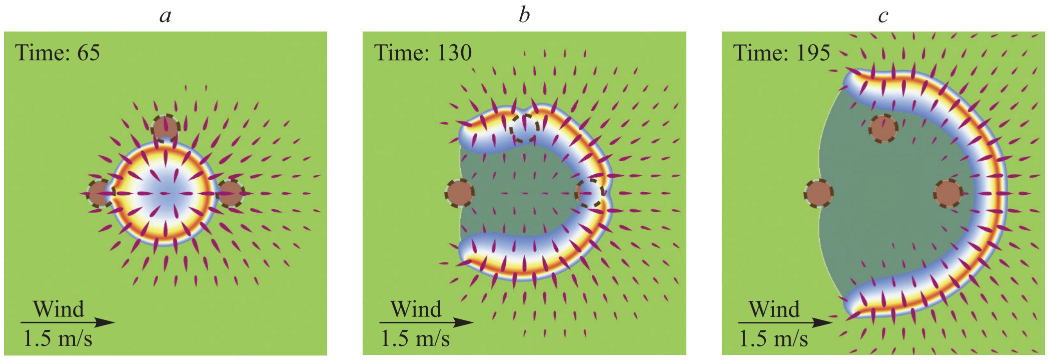


Fig. 2. Fire spread in the case of three fuelbreaks with 2.25 m^2 each at the following time points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

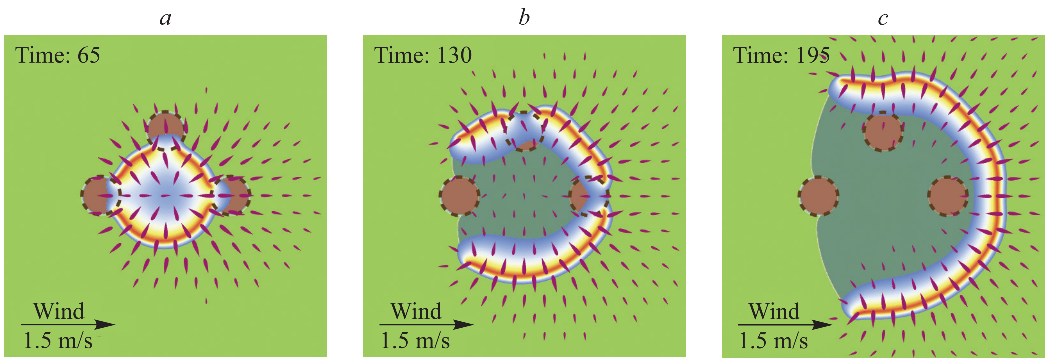


Fig. 3. Fire spread in the case of three fuelbreaks with 4.5 m^2 each at the following time points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

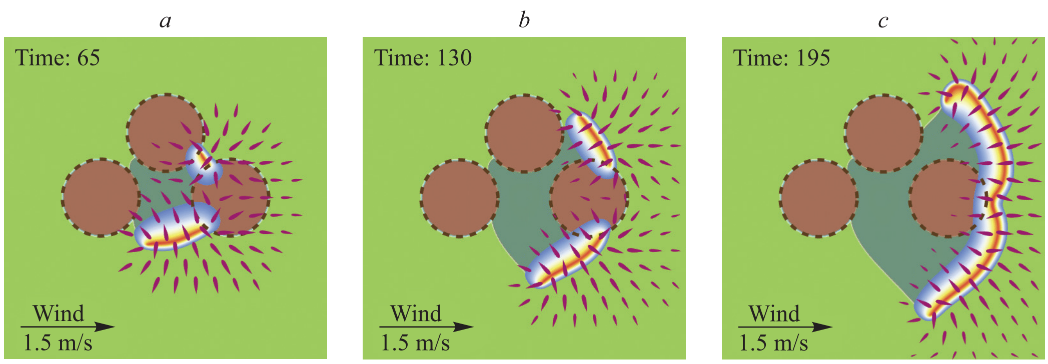


Fig. 4. Fire spread in the case of three fuelbreaks with 18 m^2 each at the following time points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

Let us point out a general pattern. Because combustion (increase in temperature) is a process inextricably linked with a decrease in the oxygen concentration, then near the combustion fronts [6], the oxygen concentration gradients are collinear with the directions of movement of the edges of the fire.

Modelling the influence of fuelbreak forms on forest fire processes

The next series of computational experiments are intended to demonstrate the difference in the behaviour of a forest fire depending on the shape (see fig. 5) of the glades encountered in the path of the fire: rectangles (see fig. 6), squares (see fig. 7), and circles (see fig. 8). Please note that the difference is in the shapes of fuelbreaks, but the areas are the same. The time points shown in the illustrations also coincide. The calculations were carried out at an equilibrium wind speed at the middle of the flame height $V = 1.5$ m/s.

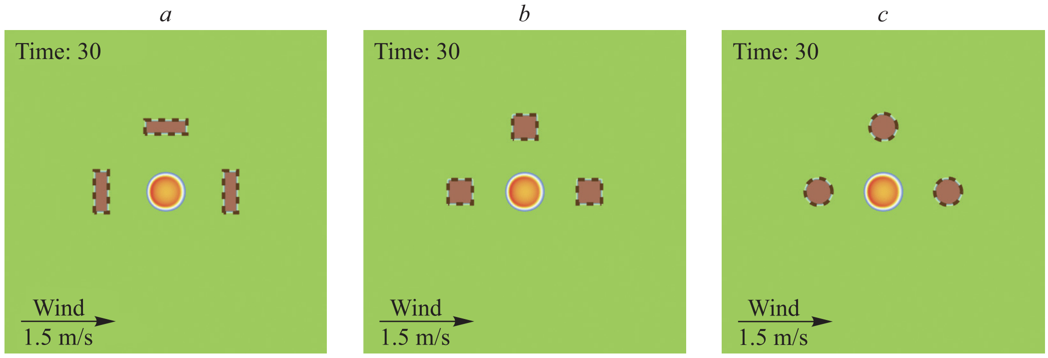


Fig. 5. Three variants of fuelbreak shapes at the moment of fire ignition (time point is 30): rectangular (*a*), quadratic (*b*) and circular (*c*) fuelbreak geometry

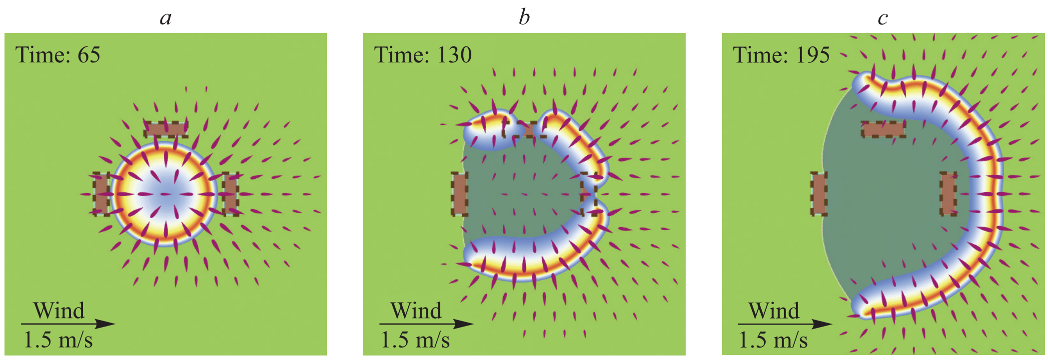


Fig. 6. Fire dynamics for the rectangular fuelbreak geometry at the following time points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

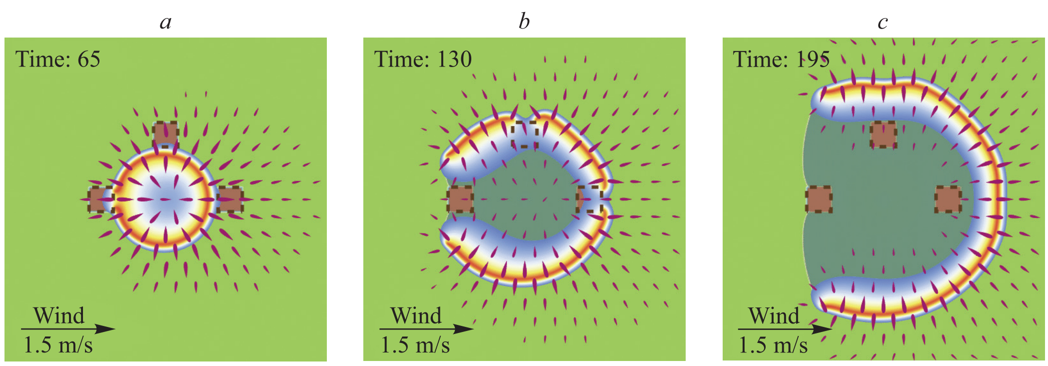


Fig. 7. Fire dynamics for the quadratic fuelbreak geometry at the following time points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

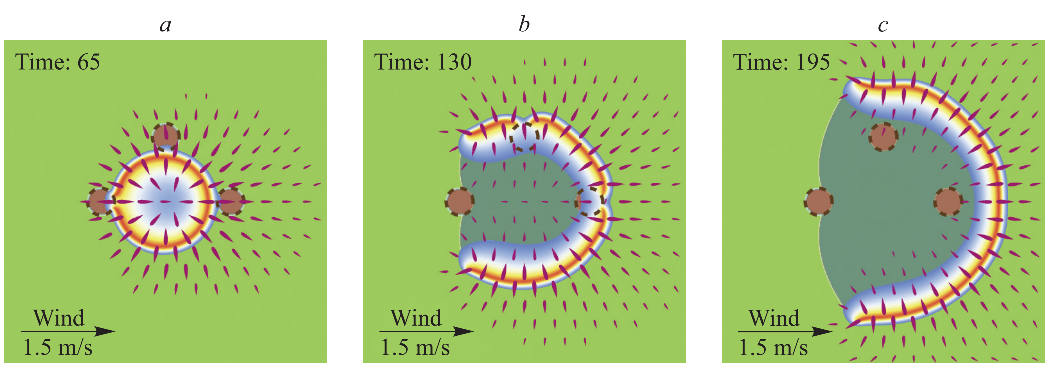


Fig. 8. Fire dynamics for the circular fuelbreak geometry at the following time points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

The following interpretation of the results seems to be justified. While passing the glades, the fire front breaks into independent parts, which go around them. In the direction opposite to the wind speed the propagation stops. Along the wind direction and «perpendicularly» to it, the autonomous parts of the fire front close again, and the fire spreads as a united front. There is a noticeable difference in the resulting configuration of the front isotherms after overcoming different forms of glades. The question whether these differences will grow in time, or whether the fronts will take the same configuration, requires a separate study.

Taking into account the influence of the wind speed

The influence of the wind speed on the nature of the forest fire spread is illustrated in fig. 9–11. In the given computational experiments, in terms of geometry, the case of circular fuelbreaks of a «small» size is considered. Figure 10 (the same as fig. 2) shows the calculation for the wind speed $V = 1.5$ m/s; fig. 9 and 11 show the results of two additional series of calculations, which differ from the version in fig. 10 only by the wind speeds V, which are equal to 1 and 2 m/s respectively.

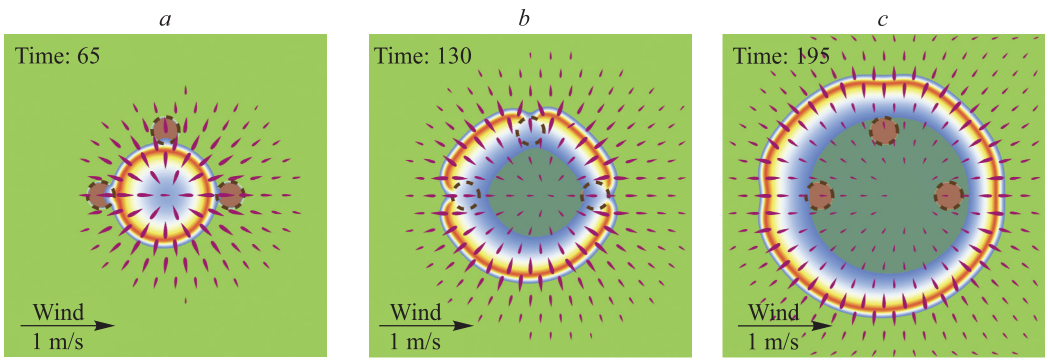


Fig. 9. Fire dynamics for the circular fuelbreaks at 1 m/s wind velocity at the following points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

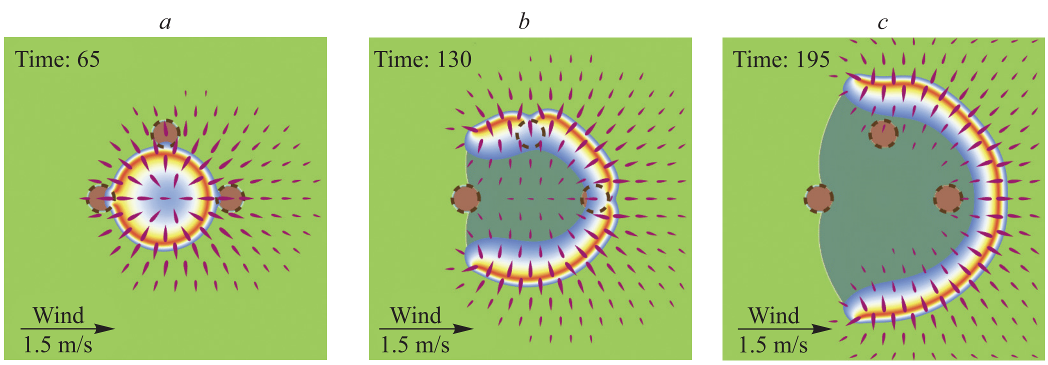


Fig. 10. Fire dynamics for the circular fuelbreaks at 1.5 m/s wind velocity at the following points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

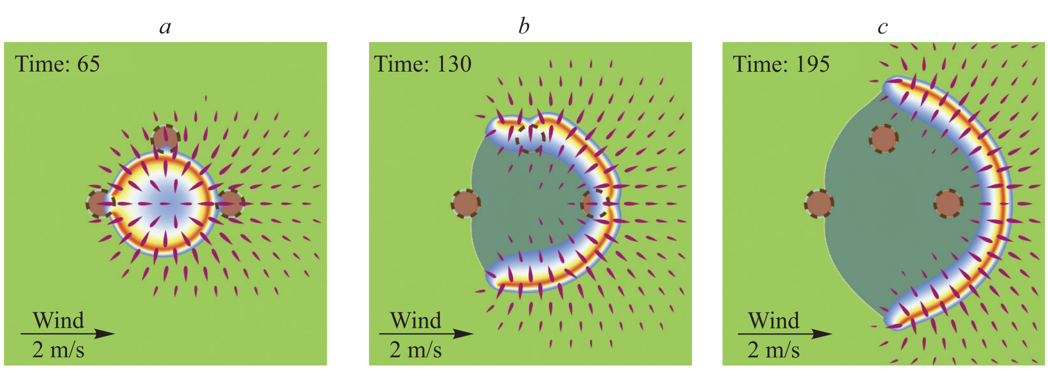


Fig. 11. Fire dynamics for the circular fuelbreaks at 2 m/s wind velocity at the following points: 65 (*a*), 130 (*b*), 195 (*c*)

Figure 9 is of particular interest. At low wind speeds, fire fronts overcome the glades in all directions, including the direction against the wind. It should also be noted that the width of the burning line in the direction of the wind is narrower than on the flanks, and in the rear this width is maximum. In fig. 9 at time 195 it is noticeable that the point of the minimum oxygen concentration is shifted to the right (to the direction of the wind), relative to the centre of the initial fire occurrence. The most likely reason is the influence of the convective transport due to the wind force.

Concluding the discussion of the results and illustrations of the distributions of temperature and bulk density of combustible forest materials, let us note that the developed software package can also calculate and save to a database [35] the distributions of the released water vapour [34], polluting gases, coal and ash. The corresponding spatial distributions and integral characteristics at control points in time can be visualised with maps, tables, and graphs of changes.

Conclusion

The article discusses the results of numerical experiments; the qualitative differences in the evolution and configuration of the fire front, the directions and intensities of the oxygen concentration gradients during the surface forest fire spread are identified and noted. Situations are considered when there are fuelbreaks of different shapes and sizes on the path of the fire front, moreover, for several typical variants of the wind speed in the forest canopy. Possible specific features of the controlled distributions of the process characteristics are shown.

Separately, we note the features of conducting computational experiments. In terms of the software performance, it should be noted that calculations are very time-consuming, each option is calculated on a «regular» laptop for several tens of hours, but at this stage optimisation and performance improvement, including *Wolfram Mathematica* tools for parallelising calculations, were not implemented. The possibilities of such technical solutions are obvious, because explicit approximations are used, the grid solution of each equation of the system can be calculated on a separate computing core. The current state of performance of the software complex suits the goals of its use, the main of which is filling collections of typical process scenarios for basic fragments of territories for typical environmental conditions and forests. The positive aspects of the developed software package are the ability to interrupt calculations at any time, visualise and analyse the intermediate results, change the model parameters and continue calculations from any saved time layer.

The authors have accumulated a large volume of results of calculations of the dynamics of forest fires varying in a wide range of parameters and initial conditions included in the model. We developed methodological and technical solutions for the use of artificial neural networks for geodata processing [32; 36; 37]. Based on the generated database of calculation results, we plan to make it possible to predict the dynamics of forest fires in real time using semi-empirical models [38] by extending them with intelligent data processing tools. The main part of such work will be the inclusion of neural networks in the complex: a) creation of test cases for training a neural network based on the database of numerical results of forest fires propagation; b) after training, the neural network would predict in real-time the propagation velocity of the fire contour depending on the categories of territories, climatic conditions, density of distribution of forest vegetation.

Библиографические ссылки

1. Чешко ИД, Парийская АЮ, Принцева МЮ, Петрова НВ, Лобова СФ, Плотников ВГ и др. *Экспертное исследование природных пожаров.* Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России; 2019. 252 с.

2. Dvornik AA, Dvornik AM, Korol RA, Shamal NV, Gaponenko SO, Bardyukova AV. Potential threat to human health during forest fires in the Belarusian exclusion zone. *Aerosol Science and Technology*. 2018;52(8):923–932. DOI: 10.1080/02786826.2018.1482408.

3. Волокитина АВ, Софронова ТМ, Корец МА. *Управление пожарами растительности на особо охраняемых природных территориях.* Новосибирск: Сибирское отделение Российской академии наук; 2020. 201 с.

4. Усеня ВВ. Послепожарное состояние и восстановление лесных фитоценозов на территории Республики Беларусь. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя біялагічных навук.* 2018;63(3):316–327. DOI: 10.29235/1029-8940-2018-63-3-316-327.

5. Волокитина АВ, Софронова ТМ, Корец МА. Прогнозирование поведения пожаров растительности. *Известия высших учебных заведений. Лесной журнал.* 2020;1:9–25. DOI: 10.37482/0536-1036-2020-1-9-25.

6. Frangieh N, Accary G, Morvan D, Meradji S, Bessonov O. Wildfires front dynamics: 3D structures and intensity at small and large scales. *Combustion and Flame*. 2020;211:54–67. DOI: 10.1016/j.combustflame.2019.09.017.

7. Гладской ИБ, Павлова АВ, Рубцов СЕ. К моделированию распространения природных пожаров с использованием ГИС-технологий. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 2019;16(4):13–21. DOI: 10.31429/vestnik-16-4-13-21.

8. Antonov D, Osipov K, Khasanov I. Experimental and numerical studies of suppression of forest combustible material pyrolysis under influence of steam-water curtain. *MATEC Web Conferences.* 2018;194:01003. DOI: 10.1051/matecconf/201819401003.

9. Perminov V, Goudov A. Mathematical modeling of forest fires initiation, spread and impact on environment. *International Journal of GEOMATE*. 2017;13(35):93–99. DOI: 10.21660/2017.35.6704.

10. Барановский НВ, Захаревич АВ. Физическое моделирование процессов зажигания еловой хвои углеродистой нагретой до высоких температур частицей. *Вопросы лесной науки.* 2019;2(1):1–15. DOI: 10.31509/2658-607x-2019-2-1-1-15.

11. Ласута ГФ, Гоман ПН. Моделирование процессов возникновения и распространения лесного низового пожара с оценкой уровня тепловой нагрузки от фронта пламени. *Вестник Университета гражданской защиты МЧС Беларуси.* 2019;3(2):138–154. DOI: 10.33408/2519-237X.2019.3-2.138.

12. Kuznetsov GV, Syrodoy SV, Kostoreva AA, Kostoreva ZhA, Nigay NA. Effect of concentration and relative position of wood and coal particles on the characteristics of the mixture ignition process. *Fuel*. 2020;274:117843. DOI: 10.1016/j.fuel.2020.117843.

13. Ghaderi M, Ghodrat M, Sharples JJ. LES simulation of wind-driven wildfire interaction with idealized structures in the wildland-urban interface. *Atmosphere.* 2021;12(1):21. DOI: 10.3390/atmos12010021.

14. Matsuoka T, Yoshimasa A, Masuda M, Nakamura Y. Study on fingering pattern of spreading flame over non-charring solid in a narrow space. *Fire Technology.* 2020;56(1):271–286. DOI: 10.1007/s10694-019-00865-1.

15. Pastor E, Zarate L, Planas E, Arnaldos J. Mathematical models and calculation systems for the study of wildland fire behaviour. *Progress in Energy and Combustion Science*. 2003;29(2):139–153. DOI: 10.1016/S0360-1285(03)00017-0.

16. Баровик ДВ, Таранчук ВБ. Состояние проблемы и результаты компьютерного прогнозирования распространения лесных пожаров. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2011;3:78–84.

17. Sullivan AL. Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 1: physical and quasi-physical models. *International Journal of Wildland Fire*. 2009;18(4):349–368. DOI: 10.1071/WF06143.

18. Sullivan AL. Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 2: empirical and quasi-empirical models. *International Journal of Wildland Fire*. 2009;18(4):369–386. DOI: 10.1071/WF06142.

19. Sullivan AL. Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 3: simulation and mathematical analogue models. *International Journal of Wildland Fire*. 2009;18(4):387–403. DOI: 10.1071/WF06144.

20. Гришин АМ. *Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними.* Новосибирск: Наука; 1992. 408 с.

21. Kuleshov AA, Myshetskaya EE, Yakush SE. Numerical simulation of forest fire propagation based on modified two-dimensional model. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2017;9(4):437–447. DOI: 10.1134/S207004821704007X.

22. Кулешов АА, Мышецкая ЕЕ. Результаты расчетов распространения фронта лесных пожаров по двумерной трехфазной модели. *Препринты ИПМ имени М. В. Келдыша.* 2019;115:1–9. DOI: 10.20948/prepr-2019-115.

23. Kuznetsov GV, Voytkov IS, Kralinova SS, Atroshenko YK. Heat transfer and phase transformations in the localization of forest fuel combustion. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2019;7(2):167–195. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031564.

24. Баровик ДВ, Таранчук ВБ. Об особенностях адаптации математических моделей вершинных верховых лесных пожаров. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2010;1:138–143.

25. Barovik D, Taranchuk V. Mathematical modelling of running crown forest fires. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2010; 15(2):161–174. DOI: 10.3846/1392-6292.2010.15.161-174.

26. Таранчук ВБ, Баровик ДВ. Компьютерная модель, примеры анализа влияния ландшафтно-метеорологических факторов на динамику низовых лесных пожаров. *Экономика. Информатика.* 2020;47(3):610–622. DOI: 10.18413/2687-0932-2020-43-3-610-622.

27. Баровик ДВ, Таранчук ВБ. Компьютерная модель, примеры анализа распространения низовых лесных пожаров. *Проблемы физики, математики и техники.* 2020;4:113–120.

28. Баровик ДВ, Корзюк ВИ, Таранчук ВБ. К обоснованию математических моделей низовых лесных пожаров. *Труды Института математики.* 2013;21(1):3–14.

29. Баровик ДВ, Корзюк ВИ, Таранчук ВБ. О корректности одной математической модели низовых лесных пожаров. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2013;57(4):5–9.

30. Bürger R, Gavilan E, Inzunza D, Mulet P, Villada LM. Implicit-explicit methods for a convection-diffusion-reaction model of the propagation of forest fires. *Mathematics*. 2020;8(6):1034. DOI: 10.3390/math8061034.

31. Hastings C, Mischo K, Morrison M. *Hands-on start to Wolfram Mathematica and programming with the Wolfram language*. 3rd edition. [USA]: Wolfram Media; 2020. 562 p.

32. Taranchuk V. Tools and examples of intelligent processing, visualization and interpretation of GEODATA. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1425:012160. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012160.

33. Марзаева ВИ. Математическое моделирование распространения верховых лесных пожаров при наличии противопожарных разрывов и заслонов. *Журнал технической физики.* 2019;89(8):1141–1149. DOI: 10.21883/JTF.2019.08.47883.392-18.

34. Antonov D, Kuznetsov G, Zhdanova A. Numerical investigation of localization and suppression of thermal decomposition of forest combustible materials using specialized water supply. *MATEC Web of Conferences.* 2018;194:01033. DOI: 10.1051/matecconf/201819401033.

35. Баровик ДВ, Таранчук ВБ, Школьников ЛВ. Структура и функционал модуля «оперативно-аналитический блок» программного комплекса регистрации и обработки сообщений о чрезвычайных ситуациях. *Чрезвычайные ситуации: предупреждение и ликвидация.* 2013;2:84–94.

36. Таранчук ВБ. Средства и примеры интеллектуальной обработки данных для геологических моделей. *Проблемы физики, математики и техники.* 2019;3:117–122.

37. Wu Z, Wang B, Li M, Tian Y, Quan Y, Liu J. Simulation of forest fire spread based on artificial intelligence. *Ecological Indicators*. 2022;136:108653. DOI: 10.1016/j.ecolind.2022.108653.

38. Баровик ДВ, Таранчук ВБ. Адаптация модели Ротермела для реализации в программном комплексе прогноза распространения лесных пожаров. *Технологии техносферной безопасности.* 2011;6:6.

References

1. Cheshko ID, Pariiskaya AYu, Printseva MYu, Petrova NV, Lobova SF, Plotnikov VG, et al. *Ekspertnoe issledovanie prirodnykh pozharov* [Expert study of wildfires]. Saint Petersburg: Saint Petersburg University of State Fire Service of Emercom of Russia; 2019. 252 p. Russian.

2. Dvornik AA, Dvornik AM, Korol RA, Shamal NV, Gaponenko SO, Bardyukova AV. Potential threat to human health during forest fires in the Belarusian exclusion zone. *Aerosol Science and Technology*. 2018;52(8):923–932. DOI: 10.1080/02786826.2018.1482408.

3. Volokitina AV, Sofronova TM, Korets MA. *Upravlenie pozharami rastitel'nosti na osobo okhranyaemykh prirodnykh territoriyakh* [Management of vegetation fires in specially protected natural areas]. Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 2020. 201 p. Russian.

4. Usenya VV. Postfire condition and renewal of forest phytocenoses on the territory of the Republic of Belarus. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Biological Series*. 2018;63(3):316–327. Russian. DOI: 10.29235/1029-8940-2018-63-3-316-327.

5. Volokitina AV, Sofronova TM, Korets MA. Vegetation fire behavior prediction. *Bulletin of Higher Educational Institutions. Forestry Journal*. 2020;1:9–25. Russian. DOI: 10.37482/0536-1036-2020-1-9-25.

6. Frangieh N, Accary G, Morvan D, Meradji S, Bessonov O. Wildfires front dynamics: 3D structures and intensity at small and large scales. *Combustion and Flame*. 2020;211:54–67. DOI: 10.1016/j.combustflame.2019.09.017.

7. Gladskoy IB, Pavlova AV, Rubtsov SE. To modeling the spread of forest fires using GIS technologies. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2019;16(4):13–21. Russian. DOI: 10.31429/vestnik-16-4-13-21.

8. Antonov D, Osipov K, Khasanov I. Experimental and numerical studies of suppression of forest combustible material pyrolysis under influence of steam-water curtain. *MATEC Web Conferences.* 2018;194:01003. DOI: 10.1051/matecconf/201819401003.

9. Perminov V, Goudov A. Mathematical modeling of forest fires initiation, spread and impact on environment. *International Journal of GEOMATE*. 2017;13(35):93–99. DOI: 10.21660/2017.35.6704.

10. Baranovskiy NV, Zakharevich AV. Experimental modelling of spruce needles ignition by the carbonaceous heated up to high temperatures particle. *Voprosy lesnoi nauki*. 2019;2(1):1–15. Russian. DOI: 10.31509/2658-607x-2019-2-1-1-15.

11. Lasuta GF, Goman PN. Modeling of the processes of the occurrence and spread of forest groundfire with the estimation of the level of flame front heat load. *Journal of Civil Protection*. 2019;3(2):138–154. Russian. DOI: 10.33408/2519-237X.2019.3-2.138.

12. Kuznetsov GV, Syrodoy SV, Kostoreva AA, Kostoreva ZhA, Nigay NA. Effect of concentration and relative position of wood and coal particles on the characteristics of the mixture ignition process. *Fuel*. 2020;274:117843. DOI: 10.1016/j.fuel.2020.117843.

13. Ghaderi M, Ghodrat M, Sharples JJ. LES simulation of wind-driven wildfire interaction with idealized structures in the wildland-urban interface. *Atmosphere.* 2021;12(1):21. DOI: 10.3390/atmos12010021.

14. Matsuoka T, Yoshimasa A, Masuda M, Nakamura Y. Study on fingering pattern of spreading flame over non-charring solid in a narrow space. *Fire Technology.* 2020;56(1):271–286. DOI: 10.1007/s10694-019-00865-1.

15. Pastor E, Zarate L, Planas E, Arnaldos J. Mathematical models and calculation systems for the study of wildland fire behaviour. *Progress in Energy and Combustion Science*. 2003;29(2):139–153. DOI: 10.1016/S0360-1285(03)00017-0.

16. Barovik DV, Taranchuk VB. Current state of the problem and the results of computer prediction of forest fire spread. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2011;3:78–84. Russian.

17. Sullivan AL. Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 1: physical and quasi-physical models. *International Journal of Wildland Fire*. 2009;18(4):349–368. DOI: 10.1071/WF06143.

18. Sullivan AL. Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 2: empirical and quasi-empirical models. *International Journal of Wildland Fire*. 2009;18(4):369–386. DOI: 10.1071/WF06142.

19. Sullivan AL. Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 3: simulation and mathematical analogue models. *International Journal of Wildland Fire*. 2009;18(4):387–403. DOI: 10.1071/WF06144.

20. Grishin AM. *Matematicheskoe modelirovanie lesnykh pozharov i novye sposoby bor'by s nimi* [Mathematical modeling of forest fires and new methods of fighting them]. Novosibirsk: Nauka; 1992. 408 p.

21. Kuleshov AA, Myshetskaya EE, Yakush SE. Numerical simulation of forest fire propagation based on modified two-dimensional model. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2017;9(4):437–447. DOI: 10.1134/S207004821704007X.

22. Kuleshov AA, Myshetskaya EE. Results of computation of the forest fires front propagation based on a two-dimensional three-phase model. *Keldysh Institute Preprints*. 2019;115:1–9. Russian. DOI: 10.20948/prepr-2019-115.

23. Kuznetsov GV, Voytkov IS, Kralinova SS, Atroshenko YK. Heat transfer and phase transformations in the localization of forest fuel combustion. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2019;7(2):167–195. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031564.

24. Barovik DV, Taranchuk VB. Peculiarities of adaptation of running crown forest fire mathematical models. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2010;1:138–143. Russian.

25. Barovik D, Taranchuk V. Mathematical modelling of running crown forest fires. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2010; 15(2):161–174. DOI: 10.3846/1392-6292.2010.15.161-174.

26. Taranchuk VB, Barovik DV. Computer model, examples of analysis of landscape and meteorological factors affecting the dynamics of surface forest fires. *Economics. Information Technologies*. 2020;47(3):610–622. Russian. DOI: 10.18413/2687-0932-2020-43-3-610-622.

27. Barovik DV, Taranchuk VB. Computer model, examples of analysis of the spread of ground forest fires. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*. 2020;4:113–120. Russian.

28. Barovik DV, Korzyuk VI, Taranchuk VB. Methods of forest fires computer modelling. *Trudy Instituta matematiki* [Proceedings of the Institute of Mathematics]. 2013;21(1):3–14. Russian.

29. Barovik DV, Korzyuk VI, Taranchuk VB. On the correctness of a mathematical model of ground forest fires. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2013;57(4):5–9. Russian.

30. Bürger R, Gavilan E, Inzunza D, Mulet P, Villada LM. Implicit-explicit methods for a convection-diffusion-reaction model of the propagation of forest fires. *Mathematics*. 2020;8(6):1034. DOI: 10.3390/math8061034.

31. Hastings C, Mischo K, Morrison M. *Hands-on start to Wolfram Mathematica and programming with the Wolfram language*. 3rd edition. [USA]: Wolfram Media; 2020. 562 p.

32. Taranchuk V. Tools and examples of intelligent processing, visualization and interpretation of GEODATA. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1425:012160. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012160.

33. Marzaeva VI. Mathematical modeling of canopy forest fire spread in the presence of fire breaks and barriers. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2019;89(8):1141–1149. DOI: 10.21883/JTF.2019.08.47883.392-18.

34. Antonov D, Kuznetsov G, Zhdanova A. Numerical investigation of localization and suppression of thermal decomposition of forest combustible materials using specialized water supply. *MATEC Web of Conferences.* 2018;194:01033. DOI: 10.1051/matecconf/201819401033.

35. Barovik DV, Taranchuk VB, Shkolnikov LV. [Specification and functionality of module «operational and analytical unit» of software complex for registration and processing of emergency situation messages]. *Chrezvychainye situatsii: preduprezhdenie i likvidatsiya*. 2013;2:84–94. Russian.

36. Taranchuk VB. Tools and examples of intelligent data processing for geological models. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*. 2019;3:117–122. Russian.

37. Wu Z, Wang B, Li M, Tian Y, Quan Y, Liu J. Simulation of forest fire spread based on artificial intelligence. *Ecological Indicators*. 2022;136:108653. DOI: 10.1016/j.ecolind.2022.108653.

38. Barovik DV, Taranchuk VB. Rothermel's model adaptation for implementation in forest fires forecast software. *Tekhnologii tekhnosfernoi bezopasnosti*. 2011;6:6. Russian.

Received 31.03.2022 / revised 07.07.2022 / accepted 07.07.2022.

УДК 004.89

ВЫДЕЛЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА НА ИЗОБРАЖЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И МОДЕЛИ ВНИМАНИЯ

В. В. СОРОКИНА[1)], ***С. В. АБЛАМЕЙКО***[1), 2)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь*

Выделение отдельных участков тела человека является сложной задачей, которая имеет множество приложений. В данной работе предлагается алгоритм выделения частей тела человека на изображениях с помощью системы OpenPose и модели внимания. Новизна представленного алгоритма заключается в том, что он основан на сверточной нейронной сети, использующей непараметрическое представление для связывания частей тела с людьми на изображении, в сочетании с моделью внимания, которая учится сосредоточиваться на определенных областях входного изображения. Алгоритм является частью разработанной авторами системы Smart Cropping, цель которой – вырезать на изображении нужные части одежды и подготовить каталог электронной коммерции.

Ключевые слова: выделение частей тела человека; модель внимания; сверточная нейронная сеть; Smart Cropping.

DETECTION OF HUMAN BODY PARTS ON THE IMAGE USING THE NEURAL NETWORKS AND THE ATTENTION MODEL

V. V. SOROKINA[a], ***S. V. ABLAMEYKO***[a, b]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus, 6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus*

Corresponding author: V. V. Sorokina (viktoria.sorokina.96@gmail.com)

Human body parts detection is a challenging task, which has a lot of applications. In this paper, we propose an algorithm to detect human body parts on images using the OpenPose neural network and the attention model. The novelty of the proposed algorithm is that it is based on a convolutional neural network that uses non-parametric representation to

Образец цитирования:
Сорокина ВВ, Абламейко СВ. Выделение отдельных участков тела человека на изображении с использованием нейронных сетей и модели внимания. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:94–106.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-94-106

For citation:
Sorokina VV, Ablameyko SV. Detection of human body parts on the image using the neural networks and the attention model. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:94–106. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-94-106

Авторы:
Виктория Вадимовна Сорокина – аспирантка кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета. Научный руководитель – С. В. Абламейко.
Сергей Владимирович Абламейко – академик НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета[1)], главный научный сотрудник отдела интеллектуальных информационных систем[2)].

Authors:
Viktoria V. Sorokina, postgraduate student at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
viktoria.sorokina.96@gmail.com
Sergey V. Ablameyko, academician of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics[a], and chief researcher at the department of intelligent information systems[b].
ablameyko@bsu.by
https://orcid.org/0000-0001-9404-1206

associate the body parts with people in an image in combination with the attention model that learns to focus on specific regions of the input image. The algorithm is part of the Smart Cropping system developed by the authors with the aim to cut necessary pieces of clothing in images and prepare e-commerce catalogues.

Keywords: human body parts detection; attention model; convolutional neural network; Smart Cropping.

Введение

В современном обществе технологии искусственного интеллекта играют все более важную роль. Хорошо известно, что глубокое обучение можно использовать для определения частей тела человека.

Выделение частей тела человека [1] – это задача компьютерного зрения, которая вычисляет расположение части тела человека на изображении или видео. Она является фундаментом другой задачи компьютерного зрения – оценки позы, которую также можно рассматривать как проблему определения положения и ориентации камеры относительно конкретного объекта или человека. Обычно это делается путем идентификации, поиска и отслеживания ряда ключевых точек на данном объекте или человеке. Для объектов это могут быть углы или другие важные элементы, а для людей ключевыми точками являются основные суставы, такие как локоть или колено.

Решая задачу выделения частей тела человека, можно отслеживать объект или человека (либо нескольких людей) в реальном пространстве на невероятно детальном уровне, что открывает широкий спектр возможных приложений.

Применение задач выделения частей тела человека и оценки позы достаточно обширно – от виртуальных спортивных тренеров и персональных тренеров на базе искусственного интеллекта до программ отслеживания движений на производственных площадках в целях обеспечения безопасности рабочих, а также области робототехники [2] (определение частей тела может создать новую волну автоматизированных инструментов, предназначенных для измерения точности движений человека).

Выделение частей тела человека может быть использовано в задачах электронной коммерции, а именно при создании каталога электронной коммерции, что и будет продемонстрировано в данной статье.

Товарный каталог – это иллюстрированный перечень товаров или услуг, составляемый для нужд клиентов, покупателей или других заинтересованных лиц. Иерархическая структура каталога включает категории и подкатегории, в которых содержится информация о товарах. Электронный каталог – это разновидность товарного каталога, в котором вся имеющаяся информация представлена в электронном виде. В электронной коммерции такие каталоги являются важнейшим, а зачастую и единственным каналом коммуникации между производителем или поставщиком товара и покупателем. Основная задача электронного каталога – представление информации таким образом, чтобы покупатель имел возможность эффективного поиска необходимой информации и при этом у него не возникало трудностей с ее пониманием и использованием.

Создание каталога электронной коммерции включает в себя подготовку изображений и контента к ним [3]. При подготовке изображений одежды обычно используется фотография человека в полный рост, представляющего несколько предметов одежды одновременно. Такое изображение нарезается на части в соответствии с определенными правилами. Например, для юбки необходимо показывать часть от талии до стоп, а для рубашки или пиджака – от макушки головы либо шеи до бедер. В настоящее время нарезка производится вручную и занимает длительное время.

Для автоматизации данного процесса авторами разработан алгоритм Smart Cropping, позволяющий с помощью решения задачи выделения частей тела человека производить нарезку деталей изображений для формирования электронного каталога.

Анализ существующих подходов

Выделение частей тела человека отличается от других распространенных задач компьютерного зрения некоторыми важными аспектами. Такие задачи, как обнаружение объектов и распознавание образов [4], также определяют местонахождение объектов на изображении. Однако эта локализация обычно является крупнозернистой и состоит из ограничивающей рамки, охватывающей объект. Выделение частей тела человека идет дальше, предсказывая точное местоположение ключевых точек, связанных с объектом [5; 6].

Ранние работы по оценке позы человека на изображении основывались на построении графических структур и моделировании взаимосвязей между суставами [7–9]. Однако эти методы в значительной степени зависели от выделенных вручную признаков, что ограничивало их универсальность при применении для оценки позы человека в реальности. На смену методам на основе графических структур пришли алгоритмы, базирующиеся на сверточных нейронных сетях [10; 11]. Такие модели позволили обобщить признаки, свойственные определенной позе, посредством изучения различных пространственных отношений из набора данных. В последних работах [12; 13] используется стратегия итеративного уточнения выходных данных каждого слоя сети. В указанных исследованиях представлены передовые алгоритмы, которые протестированы на различных изображениях.

Классический подход к задачам выделения частей тела человека и оценки позы, предложенный в работе [14], заключается в том, чтобы представить объект в виде набора частей, расположенных в деформируемой (нежесткой) конфигурации. Большинство новейших систем оценки позы используют сверточные нейронные сети в качестве основного строительного блока, в значительной степени заменяя созданные вручную функции и графические модели. Эта стратегия позволила существенно улучшить стандартные подходы.

DeepPose [11] – первая архитектура на основе глубокой сверточной нейронной сети, примененная к задаче оценки позы человека. Она достигла производительности передовых алгоритмов и превзошла существующие модели. В этом подходе оценка позы формулируется как задача регрессии на основе сверточной сети для определения суставов тела человека. В работе также используется каскад таких регрессоров для получения более точных оценок позы. Недостатком модели является сложность обучения из-за специфики регрессии, что ослабляет обобщение и, следовательно, плохо работает в определенных регионах.

Новейшие методы преобразовывают задачу оценки позы в задачу оценки тепловых карт, где каждая тепловая карта указывает достоверность местоположения n-й ключевой точки тела человека. На данном подходе основана работа [13], где представлена архитектура, использующая сверточную нейронную сеть ConvNet [12] и модель уточнения (*refinement model*). В этом методе тепловые карты создаются путем параллельного прогона изображения, представленного в разных разрешениях, для одновременного захвата объектов в различных масштабах. Результатом является дискретная тепловая карта вместо непрерывной регрессии. Тепловая карта предсказывает вероятность наличия точки тела человека в каждом пикселе. Модель показала высокие результаты. Недостатком данного подхода является отсутствие структурного моделирования. Двумерное пространство человеческих поз высокоструктурировано из-за пропорций частей тела, симметрии слева и справа, ограничений взаимопроникновения, ограничений суставов (например, локти не сгибаются назад) и физической связи (например, запястья жестко связаны с локтями), что не было учтено в методе [9].

В настоящей статье для выделения частей тела человека используется архитектура OpenPose [15], модифицированная моделью внимания (*attention model*) [16]. Построенная модель позволяет не только структурировать части тела человека за счет полей сходства частей, но и более детально выделять участки человеческого тела благодаря стимулам к усилению значимых и подавлению незначимых объектов на изображении, что достигается ввиду построения двумерной матрицы оценок для каждой тепловой карты.

Алгоритм Smart Cropping

В данной работе предлагается алгоритм для выделения частей тела человека с помощью нейронной сети, обеспечивающий автоматическую подготовку изображений в каталог электронной коммерции.

Вначале выделяются ключевые точки человеческого тела и вычисляется позиционное соотношение между ними, которое затем используется для обрезки исходного снимка и создания набора изображений, представляющих товары. Алгоритм способен подготавливать изображения плечевой одежды (опирается на поверхность тела, ограниченную сверху линиями сочленения туловища с шеей и верхними конечностями, а снизу линией, проходящей через выступающие точки лопаток и груди), поясной одежды (опирается на поверхность тела, ограниченную сверху линией талии, а снизу линией бедер), головных уборов и обуви (рис. 1).

Предлагаемый алгоритм получил название Smart Cropping. Он включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Выделение признаков изображения.

Шаг 2. Построение тепловой и векторной карт для определения 2D-позиции частей тела человека на изображении.

Шаг 3. Вычисление позиционных отношений полученных частей тела человека.

Шаг 4. Обрезка по заданным правилам.

Архитектура алгоритма Smart Cropping представлена на рис. 2.

Рис. 1. Пример обрезки изображения
Fig. 1. Example of image cutting

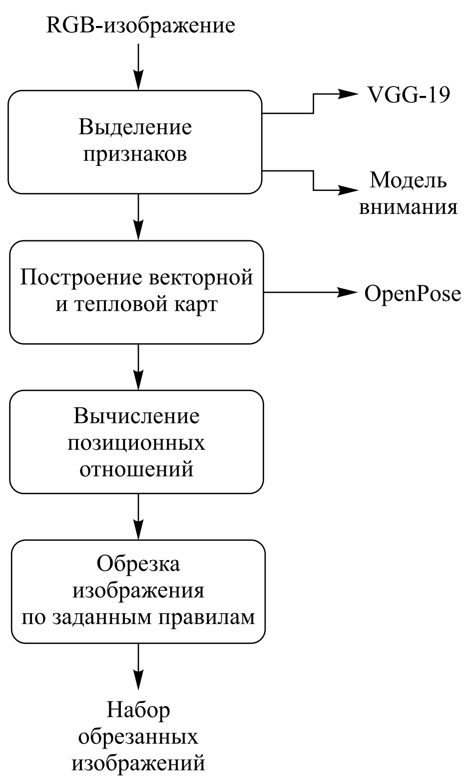


Рис. 2. Алгоритм Smart Cropping
Fig. 2. Smart Cropping algorithm

В связи с тем, что тема данной статьи – выделение частей тела человека на изображении с использованием сверточной нейронной сети и модели внимания, особое внимание уделено выделению признаков изображения, другие этапы описаны кратко.

Обучающее множество

Обучающий набор данных представлен набором Common Objects in Context (COCO)[1], который используется для обнаружения ключевых точек с помощью системы OpenPose. Целью этого набора данных является представление объектов в повседневной сцене. Объекты на изображении отмечены точной сегментацией.

Набор данных COCO предназначен для обнаружения объектов и ключевых точек человека, различных видов сегментации и создания заголовков. Он включает большое количество изображений, причем 250 000 человек в этом наборе отмечены ключевыми точками. Кроме того, большинство изображений людей в наборе данных COCO относятся к средним и крупным масштабам. Каждое изображение хранится в формате RGB (8 бит на канал). Некоторые примеры набора данных COCO показаны на рис. 3.

Рис. 3. Примеры изображений обучающей выборки
Fig. 3. Example of the training dataset's image

Выделение признаков изображения

Выделение признаков изображения – это первый шаг алгоритма Smart Cropping и основная тема данной статьи. Выделение признаков производится с помощью глубокой сверточной нейронной сети VGG-19 [17], которая является частью архитектуры OpenPose [15]. Слои нейронной сети VGG-19 от входного до последнего (MaxPool) рассматриваются как часть модели извлечения признаков. Выход слоев сети – карта признаков изображения, фиксирующая результат применения фильтров к входным данным (например, входное изображение или выход другого слоя сети). Карты признаков, близкие к входам, т. е. первым слоям сети, обнаруживают мелкие или мелкозернистые детали, тогда как карты признаков, близкие к выходным данным модели, фиксируют более общие признаки.

Новизна предложенного в настоящей статье алгоритма заключается в модификации сети VGG-19 с помощью модели внимания (карты внимания четко выделяют интересующие области при подавлении фоновых помех).

Сеть VGG-19 [17] – это вариант модели Visual Geometry Group (VGG), которая состоит из 19 слоев (16 сверточных слоев и 3 полносвязных слоя, включая 5 слоев MaxPool и 1 слой SoftMax). Архитектура сети представлена на рис. 4. Основная идея модели VGG состоит в следующем: точность классификации или локализации можно повысить путем увеличения глубины сверточного блока и использования ядра свертки 3×3, что помогает лучше выделять свойства изображения.

Одна из идей данной работы – усилить существующую архитектуру, объединив ее с моделью внимания.

Модель внимания, впервые представленная в 2015 г. для машинного перевода [16], стала преобладающей темой в литературе по нейронным сетям. Модели внимания получили чрезвычайную популярность в сообществе искусственного интеллекта как важный компонент нейронных архитектур для большого количества приложений компьютерного зрения [18].

[1]COCO dataset [Electronic resource]. URL: https://cocodataset.org/#overview (date of access: 05.04.2019).

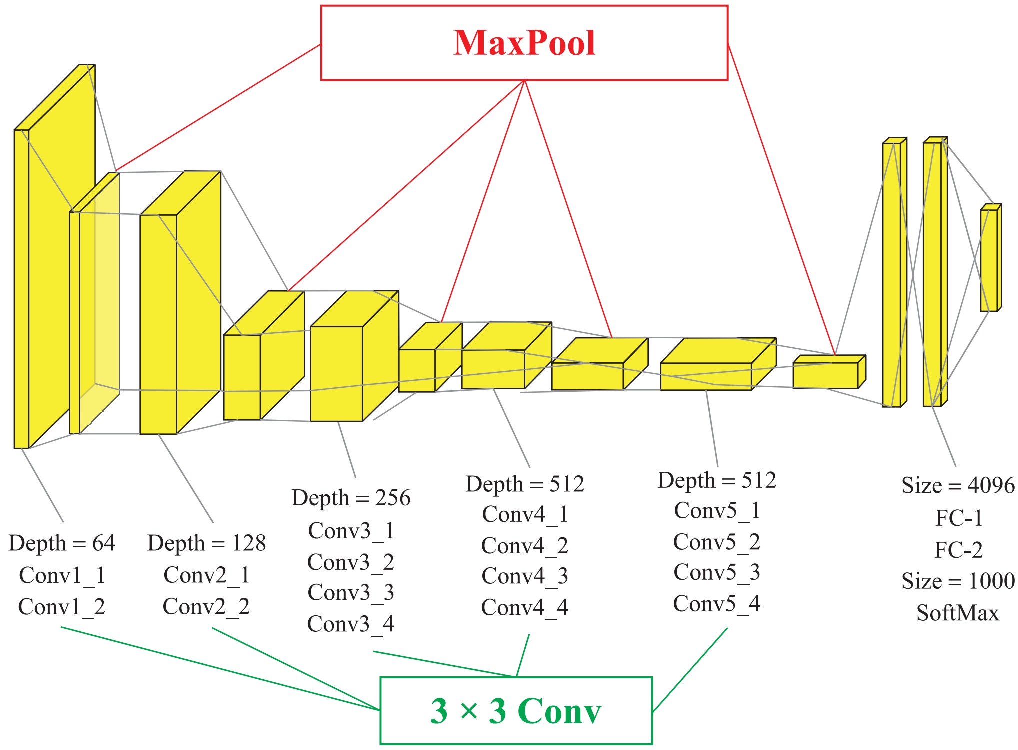


Рис. 4. Архитектура сети VGG-19
Fig. 4. VGG-19 network architecture

Модели внимания – это методы обработки входных данных нейронных сетей, которые позволяют сети сосредоточиться по одной на каждой части сложного входа до тех пор, пока весь набор данных не будет категоризирован. Цель состоит в том, чтобы разбить сложные задачи на более мелкие области внимания, которые обрабатываются последовательно подобно тому, как человеческий разум решает новую проблему, разделяя ее на более простые задачи и решая их одну за другой.

Для эффективности моделей внимания требуется обучение с подкреплением или обучение с обратным распространением ошибки. Механизм модели внимания обучается во время обучения сети и помогает сети сосредоточиться на ключевых элементах изображения.

В результате применения модели внимания строятся карты внимания. Карта внимания – это скалярная матрица, характеризующая относительную важность активации слоев в различных двумерных пространственных положениях по отношению к целевой задаче. Построенные карты внимания применяются для определения и использования эффективной пространственной поддержки визуальной информации в сверточной сети при принятии решений. Этот подход основан на гипотезе о том, что есть преимущество в выявлении заметных областей изображения и усилении их влияния при одновременном подавлении нерелевантной и потенциально вводящей в заблуждение информации в других областях. В частности, ожидается, что обеспечение более целенаправленного и экономного использования информации об изображениях должно помочь в обобщении изменений в распределении данных, как это происходит, например, при обучении на одном наборе и тестировании на другом.

В стандартной архитектуре сверточной сети глобальный дескриптор изображения g получается из входного изображения и проходит через полносвязный слой, чтобы получить вероятности предсказания. Модель внимания выражает g через отображение входных данных в многомерное пространство, в котором заметные визуальные концепции представлены в разных измерениях, чтобы сделать классы линейно разделимыми.

Авторы внесли два ключевых изменения в архитектуру сети VGG-19 (рис. 5):

• после слоев 7, 10 и 13 (выделены голубым цветом на рис. 5) вставлены «оценщики» внимания, на основе которых вычисляется бинарная маска (где 0 – нерелевантная информация для искомого объекта, а 1 – важная информация), затем маска, представленная матрицей, умножается на исходный результат слоя, для которого она была вычислена (например, слой 7), таким образом, происходит переоценка внимания;

• последний полносвязный слой заменен на полносвязный слой, входом которого являются результаты трех «оценщиков» внимания.

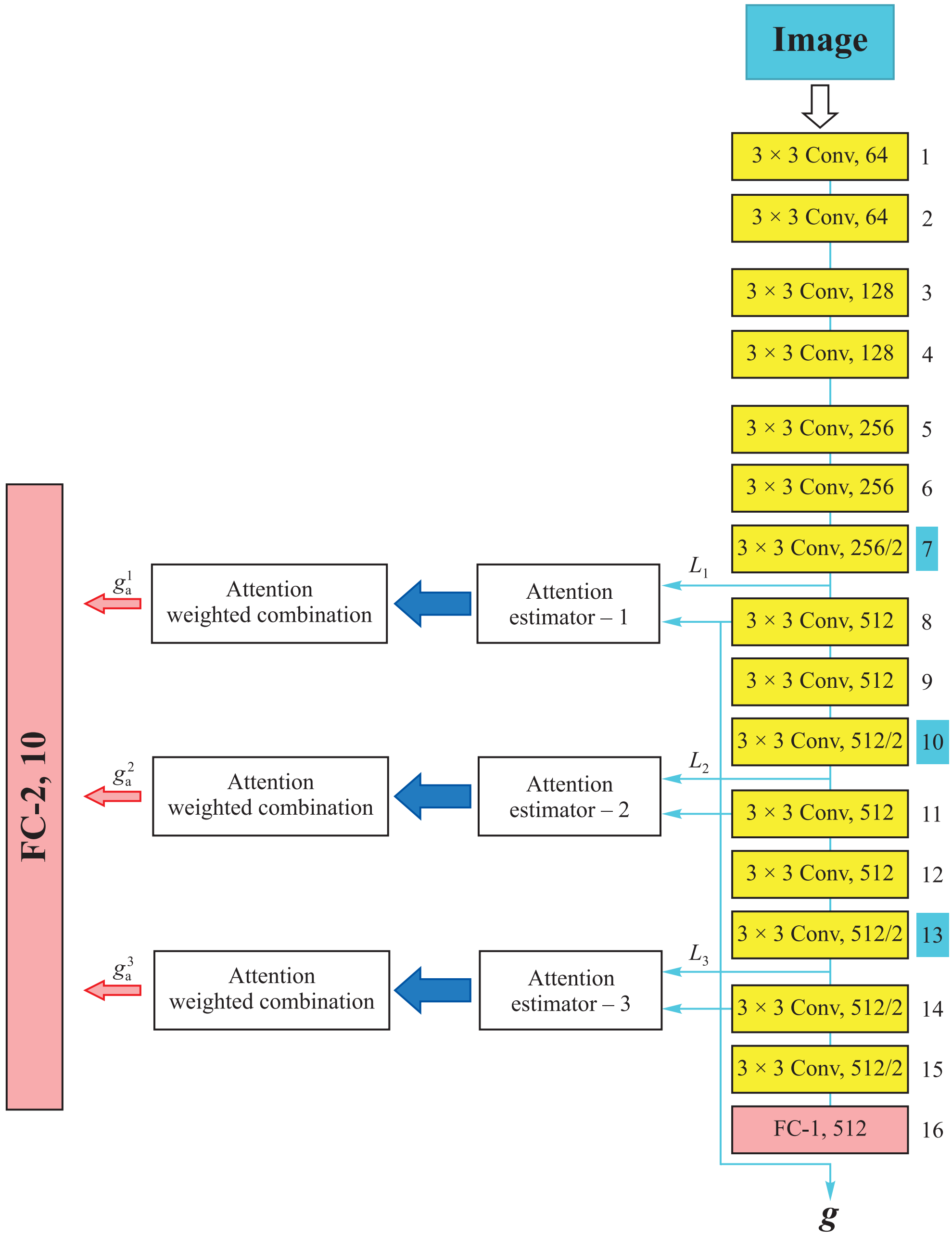


Рис. 5. Архитектура модели внимания
Fig. 5. Attention model architecture

Построение тепловой и векторной карт для определения 2D-позиции частей тела человека на изображении

Второй шаг алгоритма Smart Cropping – построение тепловых (карта достоверности) и векторных (карта полей сходства частей) карт для определения 2D-позиции частей тела человека на изображении. Тепловая карта используется для обнаружения региона интереса (конкретной части тела человека) в виде вероятности нахождения части тела в данной точке, именно поэтому ее называют также картой достоверности. Векторная карта применяется для определения отношения обнаруженной части тела человека с другими частями (представляет собой вектор направления парных элементов).

Тепловая карта (карта достоверности) есть функция плотности вероятности для нового изображения, присваивающая каждому пикселу нового изображения вероятность принадлежности данного пиксела части тела в объекте на предыдущем изображении. Обнаружение частей тела происходит в последовательном стиле, при этом прогнозирование выполняется снизу вверх с использованием пространственного контекста. Извлеченная информация впоследствии используется для создания начальной структуры человеческого скелета в текущем кадре. Каждая часть тела нумеруется соответствующим образом (рис. 6).

При построении тепловых карт отдельная часть тела будет представлена на отдельной карте (рис. 7). Таким образом, количество карт совпадает с общим количеством частей тела на изображении.

Векторная карта – набор двумерных векторных полей, которые кодируют расположение и ориентацию конечностей в области изображения (рис. 8).

На вход системы OpenPose подается RGB-изображение, которое пропускается через сверточную сеть для выделения признаков (VGG, ResNet [18], MobileNet [19]), а затем проходит шесть вышеперечисленных этапов. В работе используется сеть VGG. На каждом этапе есть две ветви, одна из которых предназначена для обнаружения тепловой карты, а другая – для обнаружения векторной карты. С помощью тепловой и векторной карт можно определить все ключевые точки на изображении.

Входными данными модели для алгоритма Smart Cropping является изображение размером $h \times w \times 3$ (h – высота, w – ширина), модель генерирует два массива, содержащих карты достоверности ключевых точек и тепловые карты сходства частей каждой пары ключевых точек. Верхние десять слоев сети VGG-19 используются для извлечения характеристик входного изображения. Затем применяется двухуровневая многоступенчатая структура CNN.

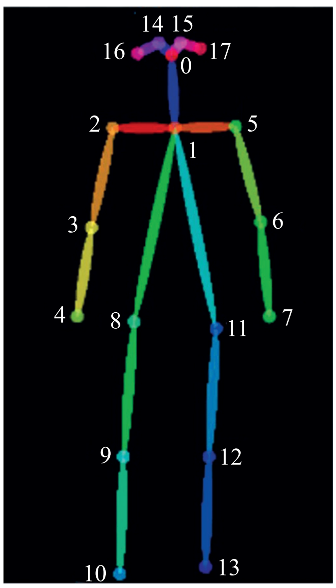


Рис. 6. Идентификатор ключевых точек для набора данных COCO

Fig. 6. Identifier of the key points from COCO dataset

Рис. 7. Обнаруженное колено на тепловой карте

Fig. 7. Detected knee on the heat map

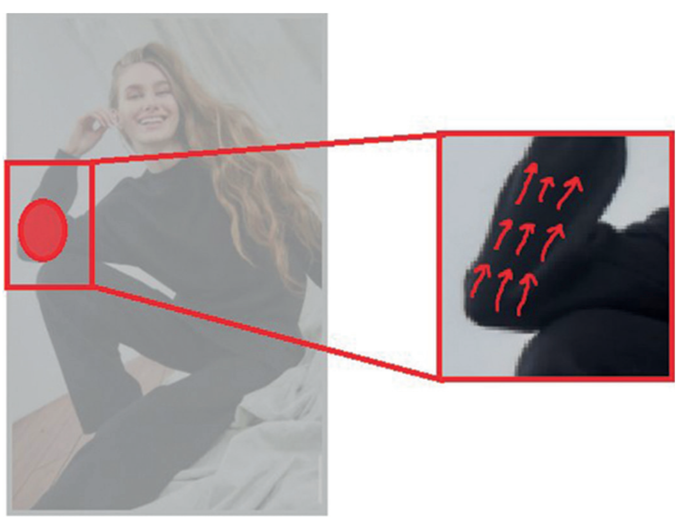


Рис. 8. Пример векторной карты

Fig. 8. Example of the vector map

Вычисление позиционных отношений и обрезка

Для выполнения обрезки исходного снимка и создания набора изображений, представляющих товары, нужно получить координаты ключевых точек человеческого тела, а затем вычислить позиционные отношения между ними через координаты каждой ключевой точки. Чтобы определить угол, образованный тремя сторонами, необходимо знать координаты трех точек. Диапазон значений таких углов впоследствии используется для оценки позы человека на изображении и выполнения корректной обрезки. Формулы для расчета этих углов показаны ниже.

Пусть известны три точки – $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ – и соответствующие векторы

$$\overrightarrow{AB} : (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$
$$\overrightarrow{AC} : (x_3 - x_1, y_3 - y_1),$$
$$\overrightarrow{BC} : (x_3 - x_2, y_3 - y_2).$$

Тогда

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$|AC| = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2},$$
$$\cos\angle A = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{|AB||AC|}.$$

Система способна распознать 23 ключевые точки человеческого тела:
- нос;
- левый глаз;
- правый глаз;
- левое ухо;
- правое ухо;
- левое плечо;
- правое плечо;
- левый локоть;
- правый локоть;
- левое запястье;
- правое запястье;
- левое бедро;
- правое бедро;
- левое колено;
- правое колено;
- левую щиколотку;
- правую щиколотку;
- большой палец левой ноги;
- большой палец правой ноги;
- мизинец левой ноги;
- мизинец правой ноги;
- левую пятку;
- правую пятку.

Перечисленные 23 ключевые точки формируют прямые, составляющие позу человека, такие как левое и правое плечо, левое и правое бедро и т. д. Пример построения прямых показан на рис. 9.

Взаимное расположение полученных прямых является инструкцией к обрезке изображения. При этом все прямые классифицируются следующим образом: ключевые точки, составляющие прямые, относятся к классу «верх», если они расположены выше запястий, и к классу «низ», если они расположены ниже запястий. Данная классификация необходима, так как в случае ненахождения одной или всех ключевых точек в паре система автоматически двигается вверх либо вниз по иерархии прямых в зависимости от типа обрезки. На рис. 10 показан пример, когда нейронная сеть не определила пальцы ног, и поэтому обрезка была произведена до основания изображения.

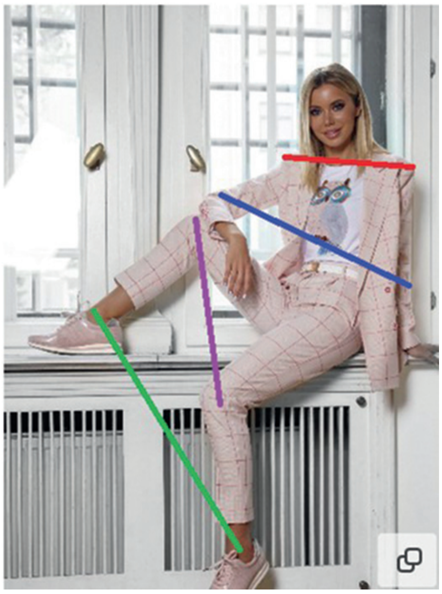


Рис. 9. Прямые, формирующие позу человека
Fig. 9. Straight lines that form a person's pose

Рис. 10. Пример обрезки
Fig. 10. Example of cutting

Результаты

Сеть для определения ключевых точек обучалась на видеокарте GPU NVIDIA T4 с применением сети VGG-19, модифицированной моделью внимания. Для выделения признаков использовались предобученные веса (размер пакета (batch_size) – 6, количество итераций – 800 000, объем обучающей выборки – 66 000 изображений).

Полученная точность составила 86 % для обучающего набора данных, представленного изображениями товаров электронной коммерции.

Система Smart Cropping способна совершать обрезку плечевой одежды (от глаз, носа или плеч до запястий либо бедер), поясной одежды (от запястий или локтей до пальцев ног, колен либо щиколоток), головных уборов (от верха изображения до плеч) и обуви (от колен или щиколоток до пальцев ног либо низа изображения), а также их комбинации. Время подготовки одного каталога, включающего 10 товаров, составляет 5 мин.

Для сравнения построенной системы с другими системами по выделению частей тела человека применялся набор данных COCO test-dev, который представлен примерно 20 000 изображений. В качестве метрики использовалась средняя точность (AP) по 10 пороговым значениям сходства ключевых точек объекта (OKS), которое играет ту же роль, что и метрика IoU при выделении объектов. Параметр OKS рассчитывается как расстояние между предсказанными точками, представляющими часть тела человека, и реальными точками (GT).

В таблице приведены результаты алгоритма Smart Cropping и других моделей, таких как CMU Pose [20], Mask R-CNN [10], OpenPose.

Сравнение результатов алгоритма Smart Cropping и других методов
Comparison of results of Smart Cropping algorithm and other methods

Метод	AP	AP^{50}	AP^{75}	AP^{M}	AP^{L}
CMU Pose	61,8	84,9	67,5	57,1	68,2
Mask R-CNN	63,1	87,3	68,7	57,8	71,4
OpenPose	65,3	85,2	71,3	62,2	70,7
Smart Cropping	67,4	85,3	72,9	63,5	71,1

Из данных таблицы видно, что алгоритм Smart Cropping имеет достаточно высокую точность. Примеры работы алгоритма представлены на рис. 11.

а/*a*

б/*b*

в/*c*

Рис. 11. Примеры генерации изображений в каталог
Fig. 11. Examples of generating images in a catalog

Заключение

В ходе исследования был разработан алгоритм на основе архитектуры OpenPose с использованием сети VGG-19 для извлечения признаков изображения, дополнительно модифицированной моделью внимания, что обеспечило повышение точности на 8 % и способность распознавания 23 ключевых точек человеческого тела.

Полученная сеть стала фундаментом системы Smart Cropping, позволяющей на основании позиционных отношений между ключевыми точками человеческого тела производить обрезку изображений для создания каталога электронной коммерции. Это дает возможность подготавливать изображения для классов плечевой и поясной одежды, а также обуви и головных уборов.

В работе использовался набор данных COCO, позволяющий определить 23 ключевые точки человеческого тела. Однако для задач электронной коммерции необходимо также определять точки, не представленные в наборе данных COCO (например, грудь, макушка головы, живот). Таким образом, система может быть улучшена путем обучения на расширенном наборе данных.

Точность обученной модели составила 86 % для набора данных, представленного изображениями товаров электронной коммерции, что обусловлено спецификой области. Повысить точность можно путем введения блока генеративно-состязательных сетей, способных предсказать наличие ключевой точки, отсутствующей в явном виде на изображении (например, платье в пол, закрывающее колени).

Построенная система Smart Cropping может быть улучшена за счет расширения распознаваемых ключевых точек, а также использована для обрезки изображений других категорий товаров.

Библиографические ссылки

1. Yucheng Chen, Yingli Tian, Mingyi He. Monocular human pose estimation: a survey of deep learning-based methods. *Computer Vision and Image Understanding.* 2020;192:102897. DOI: 10.1016/j.cviu.2019.102897.

2. Rolley-Parnell E-J, Kanoulas D, Laurenzi A, Delhaisse B, Rozo L, Caldwell DG, et al. Bi-manual articulated robot teleoperation using an external RGB-D range sensor. In: *15th International conference on control, automation, robotics and vision; 2018 November 18–21; Singapore.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2018. p. 298–304. DOI: 10.1109/ICARCV.2018.8581174.

3. Murdock H. The ultimate eCommerce product image guide for 2021 [Internet]. [S. l.]: Threekit Inc.; 2020 January 30 [cited 2021 March 25]. Available from: https://www.threekit.com/blog/ecommerce-product-image-guide-2020.

4. Абламейко СВ, Краснопрошин ВВ, Образцов ВА. Модели и технологии распознавания образов с приложением в интеллектуальном анализе данных. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2011;3:62–72.

5. Zhao Liu, Jianke Zhu, Jiajun Bu, Chun Chen. A survey of human pose estimation: the body parts parsing based methods. *Journal of Visual Communication and Image Representation.* 2015;32:10–19. DOI: 10.1016/j.jvcir.2015.06.013.

6. Luvizon DC, Picard D, Tabia H. 2D/3D pose estimation and action recognition using multitask deep learning. In: *2018 IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition; 2018 June 18–22; Salt Lake City, USA.* Los Alamitos: Conference Publishing Services, IEEE Computer Society; 2018. p. 5137–5146. DOI: 10.1109/CVPR.2018.00539.

7. Insafutdinov E. DeeperCut: a deeper, stronger, and faster multi-person pose estimation model. In: Leibe B, Matas J, Sebe N, Welling M, editors. *Computer vision – ECCV 2016. 14th European conference; 2016 October 11–14; Amsterdam, The Netherlands. Part 6.* Cham: Springer; 2016. p. 34–50 (Lecture notes in computer science; volume 9910). DOI: 10.1007/978-3-319-46466-4_3.

8. Hao-Shu Fang, Shuqin Xie, Yu-Wing Tai, Cewu Lu. RMPE: regional multi-person pose estimation. In: *2017 IEEE International conference on computer vision (ICCV); 2017 October 22–29; Venice, Italy.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 2353–2362. DOI: 10.1109/ICCV.2017.256.

9. Xiao Chu, Wei Yang, Wanli Ouyang, Cheng Ma, Yuille AL, Xiaogang Wang. Multi-context attention for human pose estimation. In: *2017 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 5669–5678. DOI: 10.1109/CVPR.2017.601.

10. He K, Gkioxari G, Dollár P, Girshick R. Mask R-CNN. In: *2017 IEEE International conference on computer vision (ICCV); 2017 October 22–29; Venice, Italy.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 2980–2988. DOI: 10.1109/ICCV.2017.322.

11. Toshev A, Szegedy C. DeepPose: human pose estimation via Deep Neural Networks. In: *2014 IEEE conference on computer vision and pattern recognition; 2014 June 23–28; Columbus, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 1653–1660. DOI: 10.1109/CVPR.2014.214.

12. Tompson J, Jain A, LeCun Y, Bregler C. Join training of a convolutional network and a graphical model for human pose estimation. In: *28th annual conference on Neural Information Processing Systems; 2014 December 8–13; Montreal, Canada.* Red Hook: Curran Associates Inc.; 2015. p. 1799–1807 (Advances in Neural Information Processing Systems; volume 27).

13. Tompson J, Goroshin R, Jain A, LeCun Y, Bregler C. Efficient object localization using convolutional networks. In: *2015 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2015 June 7–12; Boston, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2015. p. 648–656. DOI: 10.1109/CVPR.2015.7298664.

14. Yang Y, Ramanan D. Articulated human detection with flexible mixtures of parts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* 2013;35(12):2878–2890. DOI: 10.1109/TPAMI.2012.261.

15. Cao Z, Simon T, Wei S, Sheikh Y. Realtime multi-person 2D pose estimation using part affinity fields. In: *2017 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 1302–1310. DOI: 10.1109/CVPR.2017.143.

16. Bahdanau D, Cho KH, Bengio Y. Neural machine translation by jointly learning to align and translate. arXiv:1409.0473v7 [Preprint]. 2016 [cited 2019 April 5]: [15 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/1409.0473v7.

17. Simonyan K, Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. arXiv:1409.1556v6 [Preprint]. 2015 [cited 2019 April 5]: [14 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/1409.1556v6.

18. Wang F, Tax DMJ. Survey on the attention based RNN model and its applications in computer vision. arXiv:1601.06823v1 [Preprint]. 2016 [cited 2019 April 5]: [42 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/1601.06823v1.

19. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. Deep residual learning for image recognition. In: *2016 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2016 June 26 – Jule 1; Las Vegas, USA.* Los Alamitos: Conference Publishing Services, IEEE Computer Society; 2016. p. 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.

20. Sim T, Baker S, Bsat M. The CMU Pose, Illumination, and Expression (PIE) database. In: *Proceedings of Fifth IEEE International conference on automatic face gesture recognition; 2002 May 21–22; Washington, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2002. p. 53–58. DOI: 10.1109/AFGR.2002.1004130.

References

1. Yucheng Chen, Yingli Tian, Mingyi He. Monocular human pose estimation: a survey of deep learning-based methods. *Computer Vision and Image Understanding.* 2020;192:102897. DOI: 10.1016/j.cviu.2019.102897.

2. Rolley-Parnell E-J, Kanoulas D, Laurenzi A, Delhaisse B, Rozo L, Caldwell DG, et al. Bi-manual articulated robot teleoperation using an external RGB-D range sensor. In: *15th International conference on control, automation, robotics and vision; 2018 November 18–21; Singapore.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2018. p. 298–304. DOI: 10.1109/ICARCV.2018.8581174.

3. Murdock H. The ultimate eCommerce product image guide for 2021 [Internet]. [S. l.]: Threekit Inc.; 2020 January 30 [cited 2021 March 25]. Available from: https://www.threekit.com/blog/ecommerce-product-image-guide-2020.

4. Ablameyko SV, Krasnoproshin VV, Obraztsov VA. [Models and technologies of pattern recognition with application in data mining]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2011;3:62–72. Russian.

5. Zhao Liu, Jianke Zhu, Jiajun Bu, Chun Chen. A survey of human pose estimation: the body parts parsing based methods. *Journal of Visual Communication and Image Representation.* 2015;32:10–19. DOI: 10.1016/j.jvcir.2015.06.013.

6. Luvizon DC, Picard D, Tabia H. 2D/3D pose estimation and action recognition using multitask deep learning. In: *2018 IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition; 2018 June 18–22; Salt Lake City, USA.* Los Alamitos: Conference Publishing Services, IEEE Computer Society; 2018. p. 5137–5146. DOI: 10.1109/CVPR.2018.00539.

7. Insafutdinov E. DeeperCut: a deeper, stronger, and faster multi-person pose estimation model. In: Leibe B, Matas J, Sebe N, Welling M, editors. *Computer vision – ECCV 2016. 14th European conference; 2016 October 11–14; Amsterdam, The Netherlands. Part 6.* Cham: Springer; 2016. p. 34–50 (Lecture notes in computer science; volume 9910). DOI: 10.1007/978-3-319-46466-4_3.

8. Hao-Shu Fang, Shuqin Xie, Yu-Wing Tai, Cewu Lu. RMPE: regional multi-person pose estimation. In: *2017 IEEE International conference on computer vision (ICCV); 2017 October 22–29; Venice, Italy.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 2353–2362. DOI: 10.1109/ICCV.2017.256.

9. Xiao Chu, Wei Yang, Wanli Ouyang, Cheng Ma, Yuille AL, Xiaogang Wang. Multi-context attention for human pose estimation. In: *2017 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 5669–5678. DOI: 10.1109/CVPR.2017.601.

10. He K, Gkioxari G, Dollár P, Girshick R. Mask R-CNN. In: *2017 IEEE International conference on computer vision (ICCV); 2017 October 22–29; Venice, Italy.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 2980–2988. DOI: 10.1109/ICCV.2017.322.

11. Toshev A, Szegedy C. DeepPose: human pose estimation via Deep Neural Networks. In: *2014 IEEE conference on computer vision and pattern recognition; 2014 June 23–28; Columbus, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 1653–1660. DOI: 10.1109/CVPR.2014.214.

12. Tompson J, Jain A, LeCun Y, Bregler C. Join training of a convolutional network and a graphical model for human pose estimation. In: *28th annual conference on Neural Information Processing Systems; 2014 December 8–13; Montreal, Canada.* Red Hook: Curran Associates Inc.; 2015. p. 1799–1807 (Advances in Neural Information Processing Systems; volume 27).

13. Tompson J, Goroshin R, Jain A, LeCun Y, Bregler C. Efficient object localization using convolutional networks. In: *2015 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2015 June 7–12; Boston, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2015. p. 648–656. DOI: 10.1109/CVPR.2015.7298664.

14. Yang Y, Ramanan D. Articulated human detection with flexible mixtures of parts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* 2013;35(12):2878–2890. DOI: 10.1109/TPAMI.2012.261.

15. Cao Z, Simon T, Wei S, Sheikh Y. Realtime multi-person 2D pose estimation using part affinity fields. In: *2017 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2017. p. 1302–1310. DOI: 10.1109/CVPR.2017.143.

16. Bahdanau D, Cho KH, Bengio Y. Neural machine translation by jointly learning to align and translate. arXiv:1409.0473v7 [Preprint]. 2016 [cited 2019 April 5]: [15 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/1409.0473v7.

17. Simonyan K, Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. arXiv:1409.1556v6 [Preprint]. 2015 [cited 2019 April 5]: [14 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/1409.1556v6.

18. Wang F, Tax DMJ. Survey on the attention based RNN model and its applications in computer vision. arXiv:1601.06823v1 [Preprint]. 2016 [cited 2019 April 5]: [42 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/1601.06823v1.

19. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. Deep residual learning for image recognition. In: *2016 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2016 June 26 – Jule 1; Las Vegas, USA.* Los Alamitos: Conference Publishing Services, IEEE Computer Society; 2016. p. 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.

20. Sim T, Baker S, Bsat M. The CMU Pose, Illumination, and Expression (PIE) database. In: *Proceedings of Fifth IEEE International conference on automatic face gesture recognition; 2002 May 21–22; Washington, USA.* [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2002. p. 53–58. DOI: 10.1109/AFGR.2002.1004130.

Получена 18.01.2022 / исправлена 22.06.2022 / принята 22.06.2022.
Received 18.01.2022 / revised 22.06.2022 / accepted 22.06.2022.

Краткие сообщения

Short communications

УДК 517.9

МЕТОД ОСЛАБЛЕНИЯ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

***М. П. ДЫМКОВ*[1)], *С. М. ДЫМКОВ*[2)]**

[1)]*Белорусский государственный экономический университет, пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Независимый исследователь, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии фазовых ограничений. Получены теоретические результаты, касающиеся аппроксимации этой задачи последовательностью новых задач оптимального управления с модифицированной правой частью системы управления и без фазовых ограничений. Обсуждаются также вопросы аппроксимации непрерывных систем управления их дискретными версиями.

Ключевые слова: оптимальное управление; фазовые ограничения; негладкая оптимизация; аппроксимация.

A METHOD FOR RELAXING STATE CONSTRAINTS IN NONSMOOTH OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

***M. P. DYMKOV*[a], *S. M. DYMKOU*[b]**

[a]*Belarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus*
[b]*Independent researcher, Minsk, Belarus*

Corresponding author: M. P. Dymkov (dymkov_m@bseu.by)

In this paper, we consider the optimal control problem described by a system of ordinary differential equations in the presence of state constraints. Theoretical results are obtained concerning the approximation of this problem by a sequence of new optimal control problems with a modified right-hand side of the control system and no state constraints. The issues of the approximation of continuous control systems by their discrete versions are also discussed.

Keywords: optimal control; state constraints; nonsmooth optimisation; approximation.

Образец цитирования:
Дымков МП, Дымков СМ. Метод ослабления фазовых ограничений в негладких задачах оптимального управления. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:107–114 (на англ.).
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-107-114

For citation:
Dymkov MP, Dymkou SM. A method for relaxing state constraints in nonsmooth optimal control problems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022; 2:107–114.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-107-114

Авторы:
Михаил Пахомович Дымков – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры высшей математики факультета цифровой экономики.
Сергей Михайлович Дымков – кандидат физико-математических наук; независимый исследователь.

Authors:
Michael P. Dymkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of higher mathematics, faculty of digital economy.
dymkov_m@bseu.by
Siarhey M. Dymkou, PhD (physics and mathematics); independent researcher.
dymkov78@mail.ru

Introduction

This paper is concerned with the optimal control problem described by the ordinary differential equations in the presence of the trajectory constraints of min-max kind which often arise during the mathematical modelling of real technical processes. The research of the extremal problems with nonsmooth state restriction (min-max constraints are typical for this) has met both essential theoretical and numerical difficulties (see, for example, [1; 2]). As far as the theoretical ones are concerned, then the main problem is generated by the fact that the state constraints lead to the discontinuity (jump) of the trajectories of the adjoint system. This yields, in part, that the formulation of the optimality conditions uses the heavy mathematical tools such as the Borel measures, constrained variation functions as Lagrange multiplayers, etc. In addition, the necessary optimality conditions in this case can be degenerated for any admissible trajectory. The bibliography on the classic optimisation with a state constraint can be found, for example, in survey [3]. The nonsmooth character of the state constraints gives additional difficulties for the optimisation of these control models. Naturally, the effective numerical methods can not be constructed without a proper theoretical background based on the update nonsmooth optimisation theory (see [4; 5]). Note that there exists a good theory to construct the discrete approximation for optimisation problems under state constraints (see [6; 7] and the bibliography therein). It is well known that the approximation in this case demands a careful construction of the discrete model to guarantee the necessary adequacy of the model (the counterexample that demonstrates the noncorrect results of standard discretisation can be found in [7], for example). The nonsmooth character of the state constraint leads, in general, to an increasing number of the corresponding discrete finite-dimensional models of the constrained mathematical programming problem, and hence their solving by readily available software is exorbitantly expensive. An essential and key question for both theoretical and numerical aspects of approximations is the following: can one and in which sense approximate an optimal solution of the original control system using the approximate model? In order to achieve a well-posed discrete approximation ensuring the proper convergence of optimal solutions we need to admit, in general, the state perturbations in the discrete model. Another way to construct the proper approximation for the optimisation problem under the state constraint is to introduce a new (continuous in time) model without any state constraints. Surely, such simplification demands proper modification of the model: we make worse (in some sense) the right-hand side of the control system. Some aspects of this approach were considered in [8; 9].

Notation and model definition

In this section we use the idea of approximation by a continuous in time model for the following optimal control problem:
minimize

$$J(u) = \varphi(x(T)) \to \min_{u(\cdot)} \tag{1}$$

over absolutely continuous trajectories $x : [0, T] \to R^n$ for the differential equation

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u, t),\ x(0) = x_0,\ u(t) \in U, \text{ almost everywhere } t \in [0, T] \tag{2}$$

under the nonsmooth state constraint of the form

$$x(t) \in G,\ t \in [0, T], \text{ where } G = \{x \in R^n : g(x) \le 0\}, \tag{3}$$

where $\varphi : R^n \to R$ is a continuous function; $g : R^n \to R$ is a continuous and continuous directional differentiable function; x_0 is the given n-vector. The derivatives along the direction $l \in R^n$ we denote as $g'_x(l)$. Let us assume that the function $l \to g'_x(l)$ is continuous. We suppose that the function $f : R^n \times R^r \times R \to R^r$ satisfies the Caratheodory conditions (i. e. f is continuous on (x, u) and measurable on t) such that the initial Cauchy problem for differential equation (2) has an unique absolutely continuous solution.

Definition 1. We say that the function $u : T \to R^r$ is admissible for (2) if it is measurable and satisfies the constraint $u(t) \in U$ almost everywhere $t \in T$, where U is a given compact set from R^r. We say that the function $x : T \to R^n$ is an admissible solution of (2) corresponding to the given admissible control $u(t)$ if it is absolutely continuous with respect to $t \in T$ and satisfies (2) for almost all $t \in T$.

Next we suppose that the set of admissible controls $U(\cdot)$ is nonempty and assume also that the following assumption is satisfied.

Assumption 1. There exist the constants $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha < 0$ such that for all $u \in U$ and almost all $t \in [0, T]$ the following inequality is fulfilled:

$$g'_x\big(f(x, u, t)\big) \leq \alpha \text{ for } \forall x : 0 \leq g(x) \leq \varepsilon_0. \tag{4}$$

This condition can be treated as some normality or regularity conditions for the optimisation problem with state constraints. In fact, the assumption 1 coordinates the dynamic behaviour of system (2) with state restriction (3) in order to avoid the long time presence in the prohibited zone where the state constraints are disturbed. Also note that since $g(x)$, $g'_x(l)$, $f(x, u, t)$ are continuous then the assumption 1 is sufficiently to satisfy for $\forall x : g(x) = 0$ with some $\alpha < 0$. We consider this condition in the form (4) since the given number ε_0 will be used in the estimates below.

Remark 1. The constraint of form (3) includes a wide class of the state restriction. In particular, this constraint is often given in the following form:

$$x(t) \in G,\ t \in [0, T], \text{ where } G = \left\{ x \in R^n : g(x) = \max_{1 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \leq 0 \right\}.$$

Usually it is assumed that the functions $\varphi_i(x)$ are continuously differentiable. It is known that in this case the function $g(x)$ is continuous, directional differentiable and the derivative along the direction $l \in R^n$ is given by the formula

$$g'_x(l) = \max_{i \in Q(x)} \left(\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x},\ l \right), \text{ where } Q(x) = \{ i : g(x) = \varphi_i(x) \}.$$

Approximation by continuous in time optimisation problems

In order to construct the proper approximation for the optimisation problem with the state constraint we introduce a new model without any state constraints. Such simplification demands the corresponding modification of the right-hand side of the control system. This approach for optimisation problems of differential inclusions with the smooth state constraint can be proposed by [8]. In this paper, we use this idea for the control systems described by the ordinary differential equations in the presence of a nonsmooth state constraint.

For the optimisation problem, (1)–(3) introduce the following continuous time approximation: for each $n = 1, 2, \ldots$ one consider the sequence of the optimal control problems of the form

$$J(u) = \varphi\big(x(T)\big) \to \min_{u(\cdot)} \tag{5}$$

over the solutions of the equations

$$\frac{dx(t)}{dt} = \big(1 - nh^2(x)\big) f(x, u, t),\ u(t) \in U, \text{ almost everywhere } t \in [0, T],\ x(0) = x_0, \tag{6}$$

where $h(x) = \max\{0, g(x)\}$.

Thus, the original optimisation problem (1)–(3) is approximated by a sequence of continuous time optimisation problems without state constraints $x(t) \in G$. This relaxation is compensated by the modification of the right-hand side of the differential equation. Surely, it is interesting how the trajectories of the relaxed problem approximate the trajectories of the original system and the state constraint G. The following results are true.

Theorem 1. *Let $n \geq \frac{1}{\varepsilon_0^2}$ and the assumption 1 be held. Then each trajectory $x(t)$ of system (6) with the initial condition $x(0) = x_1 : g(x_1) \leq 0$ and the fixed admissible control function $u(t)$ satisfies the inequality $nh^2(x(t)) < 1$ for $\forall t \in [0, T]$.*

Proof. On the contrary, let there exist a moment $\hat{t} \in [0, T]$ such that $nh^2\big(x(\hat{t})\big) \geq 1$. Since the parameter $nh^2(x)$ is continuous and $nh^2\big(x(0)\big) = nh^2(x_1) = 0$, then there is a minimal $t_* \in (0, T]$ such that $nh^2\big(x(t_*)\big) = 1$, and hence for any $\varepsilon > 0$ there is such $\delta > 0$ that $1 - \varepsilon \leq nh^2\big(x(t)\big) < 1$ for $\forall t \in [t_* - \delta, t_*)$. Since $n \geq \frac{1}{\varepsilon_0^2}$ then

$0 \leq g(x(t)) \leq \varepsilon_0$ for $\forall t \in [t_* - \delta, t_*)$. Using the properties (see details in [7; 10], for example) of the function $h(x(t))$ we can calculate the one-sided derivative $\frac{d^+ h}{dt}$ for all $t \in [t_* - \delta, t_*)$:

$$\frac{d^+}{dt}\left[nh^2(x(t))\right] = 2ng(x(t))g'_{x(t)}(\dot{x}(t)). \tag{7}$$

Using (4), we have

$$\frac{d^+}{dt}\left[nh^2(x(t))\right] = 2ng(x(t))\left(1 - nh^2(x(t))\right)g'_{x(t)}\left(f(x(t), u(t), t)\right) \leq 2ng(x(t))\alpha\varepsilon \leq 0.$$

The obtained inequality contradicts to the the given condition

$$1 = nh^2(x(t_*)) = \max\left\{nh^2(x(t)) : t \in [t_* - \delta, t_*]\right\}.$$

Since we have the function $nh^2(x(t))$ that does not increase on the interval $[t_* - \delta, t_*]$, and hence $nh^2(x(t)) \geq 1$ for $\forall t \in [t_* - \delta, t_*]$ that is false since t_* is the minimal time where $nh^2(x(t_*)) = 1$. The theorem is proved.

Remark 2. Differential equation (6) can be presented in a different way in the general form

$$\frac{dx(t)}{dt} = H(x, u, t),\ u(t) \in U, \text{ almost everywhere } t \in [0, T],\ x(0) = x_0,$$

where the choice of H can be used to improve in the proper sense the necessary properties of the produced approximation. In general, we may variate the right-hand side of the differential equation (6) in the wide margins. In particular, differential equality (6) can be replaced by a differential inclusion that gives the wide margin to use this choice to guarantee the necessary approximation properties. As an example, we present the following modification. Let us assume that there are constants $\alpha < 0$, $\varepsilon_0 > 0$, and the continuous function $r(x)$ such that the following inequality

$$g'_x(r(x)) \leq \alpha \text{ for } \forall x : 0 \leq g(x) \leq \varepsilon_0$$

is held. Now we consider the sequence of the optimal control problem f (5), (6) where differential equation (6) is replaced by the following

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(1 - nh^2(x)\right)f(x, u, t) + nh^2(x)r(x).$$

We can use the choice of the function $r(x)$ to improve the properties of the produced differential equation. It is shown that the statement of theorem 1 is true in this case. The corresponding changes of the proof after (7) are given as follows:

$$\frac{d^+}{dt}\left[h^2(x(t))\right] = 2ng(x(t))\left[g'_{x(t)}\left(f(x(t), u(t), t)\right)\left(1 - h^2(x(t))\right) + h^2(x)g'_{x(t)}\left(rx(t)\right)\right].$$

Since the functions $f(x, u, t)$, $x(t)$, $g'_x(l)$ are continuous then there is a constant $M > 0$ such that $g'_{x(t)}\left(f(x(t), u(t), t)\right) \leq M$ for $\forall t \in [0, T]$. Hence, choosing $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$, we have again

$$\frac{d^+}{dt}\left[h^2(x(t))\right] = 2ng(x(t))\left[\varepsilon M + \alpha(1 - \varepsilon)\right] \leq 0,\ t \in [t_* - \delta, t_*].$$

So, the required statement is obtained.

Theorem 2. *Let the given assumptions in theorem 1 and the following condition* $|f(x, u, t)| \leq M$ *for* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall u \in \mathbb{R}^r$, $\forall t \in [0, T]$ *are held with* $M > 0$. *Then for any fixed control* $u(t)$ *the trajectory of system (6) with the initial condition* $x(0) = x_1 : g(x_1) \leq 0$ *satisfies the following estimation:*

$$\rho(x(t), G) \leq -\frac{M}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{n}} \text{ for } \forall t \in [0, T],$$

starting from some $n > n_0$, *where* n_0 *is some integer,* $\rho(x, G) = \min_{y \in G}\|x - y\|$ *is the distance between the point* x *and the set* G.

P r o o f. From theorem 1 it follows that for any $t \in [0, T]$ the inequality $nh^2(x(t)) < 1$ is held, starting from $n \ge \frac{1}{\varepsilon_0^2}$, and hence $g(x(t)) \le \sqrt{\frac{1}{n}}$. Thus for any ε_*, $0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$, the inequality $g(x(t)) \le \sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon_*$ is held for all $t \in [0, T]$, starting from some $n > n_0$. If $g(x(t)) \le 0$ for $\forall t \in [0, T]$ then $\rho(x, G) = 0$ since $x(t) \in G$ for $\forall t \in [0, T]$. Let the inequality $g(x(t)) \le 0$ is not fulfilled on the interval $[0, T]$. We pick an arbitrary value $\tau \in [0, T]$, where $0 < g(x(\tau)) < \varepsilon_*$. Let us consider now the following Cauchy problem:

$$\dot{y} = f(y, u(t), t),\; y(0) = x(\tau),\; t \ge 0, \tag{8}$$

where $u(t)$ is the control function corresponding to the given trajectory $x(t)$. This problem has a unique solution defined on the interval $[0, T]$. Since $0 < g(y(0)) = g(x(\tau)) < \varepsilon_*$ and then the function $g(y)$ is continuous for small values $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$ and for almost all $t \in [0, \varepsilon]$, we have $0 \le g(y(t)) \le \varepsilon_*$. Then due to the assumption 1 we have

$$g'_{y(t)}\big(f(y(t), u(t), t)\big) \le \alpha < 0$$

for all $y(t)$ such that $0 \le g(y(t)) \le \varepsilon_*$ for $\forall t \in [0, \varepsilon]$. Then calculating the directional derivative of the function $g(y(t))$ yields

$$\frac{d^+}{dt}\big[g(y(t))\big] = g'_{y(t)}(\dot{y}(t)) = g'_{y(t)}\big(f(y(t), u(t), t)\big) \le \alpha < 0,\; t \in [0, \varepsilon].$$

Therefore the following decomposition

$$g(y(t)) = g(y(0)) + t\frac{d^+}{dt}\big[g(y(0))\big] + o(t),\; \frac{o(t)}{t} \to 0 \text{ at } t \downarrow 0,$$

is fulfilled. Since $\frac{d^+}{dt}\big[g(y(0))\big] \le \alpha$, where $\alpha < 0$ is a constant, then for a small ε_* the inequality

$$0 \le g(y(t)) = g(x(\tau)) + t\alpha + o(t) \le \varepsilon_* + \alpha\varepsilon_* \le 0$$

is held for all $t \in [0, \varepsilon]$, $\varepsilon \le \varepsilon_*$. This yields that $\exists \hat{\tau}$, $0 < \hat{\tau} \le -\frac{1}{\alpha} g(x(\tau))$ such that $g(y(\hat{\tau})) = 0$. This says that $y(\hat{\tau}) \in G$. Hence, integrating system (8) leads to the following estimation:

$$\rho(x(\tau), G) = \min_{y : g(y) \le 0} \|x(\tau) - y\| \le \|x(\tau) - y(\hat{\tau})\| \le$$

$$\le \left\| x(\tau) - x(\tau) - \int_0^{\hat{\tau}} f(y, u, t)\,dt \right\| \le M\hat{\tau} \le -\frac{M}{\alpha} g(x(\tau)) \le -\frac{M}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{n}}$$

for all $t \in [0, T]$ and $n \ge n_0$ for some integer n_0. The proof is completed.

Discrete approximation

In the introduction of this paper it is noted that the well posed discrete approximation based on finite differences can be achieved if some perturbations of the state constraints are admitted in the produced discrete models. In this paragraph on the basis of the approach proposed in [6] we construct the well-posed discrete model for the control model (1), (2) with nonsmooth state constraint (3). Here we adopt this result for using in the numerical solution of the robot pass planning in the presence of state constraints and comparing the latter with the solution based on the proposed relaxation approach approximation.

Let us replace the derivatives in (2) by the Euler finite difference

$$\dot{x}(t) \approx \frac{1}{h}\big[x(t+h) - x(t)\big] \text{ as } h \to 0.$$

Put $N = 1, 2, 3, \ldots$. Let $T_N \doteq \{0, h_N, 2h_N, \ldots, T - h_N\}$ be a uniform grid on $[0, T]$ with the stepsize $h_N \doteq \frac{T}{N}$, and let

$$x_N(t+h_N) = x_N(t) + h_N f\left(x_N(t), u_N(t), t\right) \text{ for } t \in T_N,\ N = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

be an associated sequence of discrete equations. State constraints (3) are replaced by the following disturbed discrete analogous

$$g\left(x(t)\right) \leq \varepsilon_N. \tag{10}$$

We say that the sequence of the problems of (1), (9), (10) is a discrete approximation of problem (1)–(3) if $h_N \to 0$ and $\varepsilon_N \to 0$ as $N \to \infty$.

Our purpose is to state the condition that guarantees the convergence of the optimal trajectories and optimal criteria values for the given discrete approximation at $N \to \infty$.

First of all, we establish that any admissible trajectory of (2) can be uniformly approximated by a sequence of discrete trajectories (9). This can be done on the basis of the known results of the optimal control theory. Next, using the results obtained in [6] we show that the so-called relaxation stability property is sufficient for the value convergence of discrete approximation under the proper perturbation of the state constraints. It should be noted that the requirement of the proper state constraints perturbation in the discrete scheme is essential for the value convergence (some details and corresponding counterexamples can be found in [6], for example).

Let $x(t),\ t \in T_N$, be a trajectory of discrete equation (9), and for any $t \in [0, T]$ we denoted by t^N and t_N the points of the grid T_N nearest to t from left and right, respectively. Now we consider the following piecewise-linear extension of the discrete trajectories (the so-called Euler's broken line):

$$x_N(t) = x_N\left(t^N\right) + \frac{1}{h_N}\left[x_N(t_N) - x_N\left(t^N\right)\right]\left(t - t^N\right) \text{ for } t \in [0, T]. \tag{11}$$

The following result for the pointwise convergence of the extended trajectories is true.

Lemma 1. *Let $x(t),\ t \in [0, T]$, be admissible absolutely continuous trajectory of (2). Then for any partition T_N of the interval $[0, T]$ with $h_N \to 0$ as $N \to \infty$ there exists a subsequence $\{x_N(t)\},\ t \in T_N$, of admissible solutions of discrete equation (9), piecewise-linear extensions (11) of which converge uniformly to $x(t)$ on the interval $[0, T]$.*

A well-posed approximation ensuring a proper convergence of the optimal discrete trajectories of (1), (9), (10) to the optimal solution of the original problem (1)–(3) exploits its following relaxation stability property. Along with the optimisation problem (1)–(3) we consider the following relaxation (in the Gamkrelidze form): to minimise cost functional (1) over the set of couples of measurable functions $\{\alpha_i(t), u_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n+1\}$ and the set of absolutely continuous trajectories $x(t),\ t \in [0, T]$, which satisfy constraints (3) and the following convexified differential equations:

$$\begin{gathered} \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f(x, u_i, t), \text{ almost everywhere } t \in [0, T],\ x(0) = x_0, \\ \alpha_i(t) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) = 1,\ u_i(t) \in U,\ i = 1, 2, \ldots, n+1. \end{gathered} \tag{12}$$

Let $J_C^0,\ J_R^0,\ J_N^0,\ N = 1, 2, \ldots$, be the minimal values of cost functional (1) in problems (2), (3), (12) and (9), (10), respectively.

It is said that the original optimisation problem (1)–(3) is stable with respect to relaxation if $J_C^0 = J_R^0$.

This property is connected with the so-called hidden convexity [6] of the nonconvex differential systems and it holds for a wide class of the control systems such as linear systems, nonlinear systems in the absence of state constraints and some others. Thus, the necessary value convergence is given by the following lemma.

Lemma 2. *Let us assume problem (1)–(3) is stable with respect to relaxation. Then there is a sequence of perturbations $\varepsilon_N \to 0$ as $N \to \infty$ in (9), (10) such that $\lim\limits_{N \to \infty} J_N^0 = J_C^0$.*

The outlined in this section discrete approximation will be used for numerical tests and the results will be reported in due course.

Conclusion

This paper has used the continuous in time approximation to design numerical methods for solutions of the optimisation problems with min-max state constraints. The main advantage of using the proposed approximation is that it eliminates the need for solving a potentially very large collection of the constrained nonlinear programming problems which usually arise under standard approximation schemes. We present the theoretical background to construct the scheme with proper trajectory convergence. It is conjectured that our approach accompanied by the modern methods of nonsmooth optimisation (see [4; 7; 10]), computational theory for optimal control (see [5]) and some results for the optimisation of special repetitive processes (see [11–13]) will be effective for the solution of optimal control problems with state constraints. The proposed approximation will be tested for the robot trajectory planning and the results of numerical tests will be reported in due course.

Библиографические ссылки

1. Arutyunov AV, Aseev SM. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1997;35(3):930–952. DOI: 10.1137/S036301299426996X.

2. Mordukhovich BS. Discrete approximations and refined Euler – Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1995;33(3):882–915. DOI: 10.1137/S0363012993245665.

3. Hartl RF, Sethi SP, Vickson RG. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review.* 1995;37(2):181–218. DOI: 10.1137/1037043.

4. Clarke FH. *Optimization and nonsmooth analysis.* New York: Willey; 1983. 308 p.

5. Teo KL, Goh CJ, Wong KH. *A unified computational approach to optimal control problems.* Harlow: Longman Scientific & Technical; 1991. 329 p. (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics; volume 55).

6. Мордухович БШ. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* Москва: Наука; 1988. 360 с.

7. Гороховик ВВ. *Конечномерные задачи оптимизации.* Минск: Издательский центр БГУ; 2007. 240 с.

8. Асеев СМ. Задача оптимального управления для дифференциального включения с фазовым ограничением. Гладкие аппроксимации и необходимые условия оптимальности. В: *Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина; 31 августа – 6 сентября 1998 г.; Москва, Россия. Том 3. Геометрическая теория управления.* Москва: ВИНИТИ; 1999. с. 57–81 (Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры; том 64).

9. Dymkou S. Approximation of the constrained nonsmooth optimal control problems and their applications for the robot planning motion. In: Moore RR, editor. *Book of abstracts of 5th International congress on industrial and applied mathematics; 7–11 July 2003; Sydney, Australia.* Sydney: ICIAM 2003 Management Committee; c2003. p. 184.

10. Demyanov V, Rubinov A. *Constructive nonsmooth analysis.* Frankfurt am Main: Published Verlag Peter Lang; 1995. 416 p.

11. Dymkou S, Dymkov M, Rogers E, Galkowski K. Optimal control of non-stationary differential linear repetitive processes. *Integral Equations and Operator Theory.* 2008;60(2):201–216. DOI: 10.1007/s00020-008-1554-0.

12. Dymkov M, Rogers E, Dymkou S, Galkowski K. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2008;47(1):396–420. DOI: 10.1137/060668298.

13. Дымков МП. О структуре решения в линейной задаче движения газа в трубопроводе. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2017;3:27–37.

References

1. Arutyunov AV, Aseev SM. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1997;35(3):930–952. DOI: 10.1137/S036301299426996X.

2. Mordukhovich BS. Discrete approximations and refined Euler – Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1995;33(3):882–915. DOI: 10.1137/S0363012993245665.

3. Hartl RF, Sethi SP, Vickson RG. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review.* 1995;37(2):181–218. DOI: 10.1137/1037043.

4. Clarke FH. *Optimization and nonsmooth analysis.* New York: Willey; 1983. 308 p.

5. Teo KL, Goh CJ, Wong KH. *A unified computational approach to optimal control problems.* Harlow: Longman Scientific & Technical; 1991. 329 p. (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics; volume 55).

6. Mordukhovich BS. *Metody approksimatsii v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in problems of optimization and control]. Moscow: Nauka; 1988. 360 p. Russian.

7. Gorokhovik VV. *Konechnomernye zadachi optimizatsii* [Finite dimensional optimization problems]. Minsk: Izdatel'skii tsentr BGU; 2007. 240 p. Russian.

8. Aseev SM. Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya differentsial'nogo vklyucheniya s fazovym ogranicheniem. Gladkie approksimatsii i neobkhodimye usloviya optimal'nosti. In: *Trudy mezhdunarodnoi konferentsii, posvyashchennoi 90-letiyu so dnya rozhdeniya L. S. Pontryagina; 31 avgusta – 6 sentyabrya 1998 g.; Moskva, Rossiya. Tom 3. Geometricheskaya teoriya upravleniya* [An optimal control problem for a differential inclusion with a phase constraint. Smooth approximations and necessary optimality conditions. In: Proceedings of the international conference dedicated to the 90th anniversary of the birth of L. S. Pontryagin; 31 August – 6 September 1998; Moscow, Russia. Volume 3. Geometric control theory]. Moscow: VINITI; 1999. p. 57–81 (Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory; volume 64). Russian.

9. Dymkou S. Approximation of the constrained nonsmooth optimal control problems and their applications for the robot planning motion. In: Moore RR, editor. *Book of abstracts of 5th International congress on industrial and applied mathematics; 7–11 July 2003; Sydney, Australia.* Sydney: ICIAM 2003 Management Committee; c2003. p. 184.

10. Demyanov V, Rubinov A. *Constructive nonsmooth analysis.* Frankfurt am Main: Published Verlag Peter Lang; 1995. 416 p.

11. Dymkou S, Dymkov M, Rogers E, Galkowski K. Optimal control of non-stationary differential linear repetitive processes. *Integral Equations and Operator Theory.* 2008;60(2):201–216. DOI: 10.1007/s00020-008-1554-0.

12. Dymkov M, Rogers E, Dymkou S, Galkowski K. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2008;47(1):396–420. DOI: 10.1137/060668298.

13. Dymkov MP. Solution representation for a linear gas flow model in pipeline. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2017;3:27–37. Russian.

Received 04.04.2022 / revised 10.07.2022 / accepted 10.07.2022.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ

INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 519.2(075.8)
Велько О. А. **Теория вероятностей и математическая статистика** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2022. 267 с. : ил. Библиогр.: с. 266–267. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/277186. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 31.03.2022, № 003231032022.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначен для студентов специальности 1-23 01 05 «Социология». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, тестовые задания, контрольные работы, задания эвристического типа, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 51(072)(06)+004(072)(06)
Проблемы преподавания высшей математики и информатики в условиях новой образовательной парадигмы [Электронный ресурс] : материалы Междунар. науч.-практ. конф. (Минск, 14–15 апр. 2022 г.) / БГУ ; [редкол.: С. А. Самаль (отв. ред.) и др.]. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2022. 146 с. : ил., табл. Библиогр. в тексте. Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/277837. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 13.04.2022, № 004213042022.

В сборнике представлены материалы докладов, включенных в программу Международной научно-практической конференции, которая проводится кафедрой общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Тематика сборника охватывает широкий спектр проблем современного университетского образования, проблемы эффективного преподавания математики и информатики для студентов различных специальностей высшей школы.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, РИНЦ.

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. № 2. 2022

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: https://journals.bsu.by/index.php/mathematics

«Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика» издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика» (ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Семенец, М. А. Подголина*
Технический редактор *В. В. Пишкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 29.07.2022.
Тираж 100 экз. Заказ 5697.

Издательско-полиграфическое частное унитарное предприятие «Донарит». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/289 от 17.04.2014.
Ул. Октябрьская, 25, 220030, г. Минск, Республика Беларусь.

Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. No. 2. 2022

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave., Minsk 220030.
Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave., Minsk 220030.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: https://journals.bsu.by/index.php/mathematics

«Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics» published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika» (ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Semenets, M. A. Podgolina*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul’*

Signed print 29.07.2022.
Edition 100 copies. Order number 5697.

Publishing and printing private unitary enterprise «Donarit».
Certificate of state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printed publications No. 1/289 dated 17.04.2014.
25 Kastryčnickaja Str., Minsk 220030, Republic of Belarus.