



ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)
Выходит три раза в год

1

2022

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Бухштабер В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демид Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Донской В. И. Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.

- Княжище Л. Б.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Кожанов А. И.** Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никоноров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Тузигов А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief	KHARIN Y. S. , doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: kharin@bsu.by
Deputy editors-in-chief	KROTOV V. G. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: krotov@bsu.by
	DUDIN A. N. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: dudin@bsu.by
Executive secretary	MATEIKO O. M. , PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: matseika@bsu.by
Ablameyko S. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H.	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M.	Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Vabishchevich P. N.	Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Volkov V. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Gladkov A. L.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W.	University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Goginava U.	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A.	Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Dzemyda G.	Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Donskoy V. I.	V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia.
Egorov A. D.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A.	Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Zoladek H.	Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
Zhuravkov M. A.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zalesskii P. A.	University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
Zubkov A. M.	Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Kaplunov J. D.	Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H.	University of Graz, Graz, Austria.
Knyazhishche L. B.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I.	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Kotov V. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.

- Krasnoproshin V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Laurinchikas A. P.** Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
- Madani K.** Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
- Makarov E. K.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Matus P. P.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Medvedev D. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Mikhasev G. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Nesterenko Y. V.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Trofimov V. A.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Filzmoser P.** Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
- Chernousov V. I.** University of Alberta, Edmonton, Canada.
- Chizhik S. A.** National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 519.9

ОБ АССОЦИИРОВАННЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А. И. ЖУК¹⁾, Е. Н. ЗАЩУК¹⁾

¹⁾Брестский государственный технический университет,
ул. Московская, 267, 224023, г. Брест, Беларусь

Исследуются системы неавтономных дифференциальных уравнений в алгебре новых обобщенных функций. Система неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами рассматривается как система уравнений в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций. Решением таких систем является новая обобщенная функция. Показывается, что различные интерпретации решений данных систем могут быть получены при помощи единственного подхода, использующего новые обобщенные функции. В настоящей статье, в отличие от предшествующих работ, описаны ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в пространствах Лебега $L_p(T)$.

Ключевые слова: алгебра новых обобщенных функций; дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами; функции ограниченной вариации.

Образец цитирования:

Жук АИ, Защук ЕН. Об ассоциированных решениях систем неавтономных дифференциальных уравнений в пространствах Лебега. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:6–13 (на англ.).
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-6-13>

For citation:

Zhuk AI, Zashchuk HN. On associated solutions of the system of non-autonomous differential equations in the Lebesgue spaces. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:6–13.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-6-13>

Авторы:

Анастасия Игоревна Жук – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета электронно-информационных систем.

Елена Николаевна Защук – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета электронно-информационных систем.

Authors:

Anastasia I. Zhuk, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of electronic informational systems.
aizhuk85@mail.ru

Helena N. Zashchuk, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of electronic informational systems.
shvichkina@tut.by

ON ASSOCIATED SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF NON-AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE LEBESGUE SPACES

A. I. ZHUK^a, H. N. ZASHCHUK^a

^aBrest State Technical University, 267 Maskoŭskaja Street, Brest 224023, Belarus

Corresponding author: A. I. Zhuk (aizhuk85@mail.ru)

Herein, we investigate systems of non-autonomous differential equations with generalised coefficients using the algebra of new generalised functions. We consider a system of non-autonomous differential equations with generalised coefficients as a system of equations in differentials in the algebra of new generalised functions. The solution of such a system is a new generalised function. It is shown that the different interpretations of the solutions of the given systems can be described by a unique approach of the algebra of new generalised functions. In this paper, for the first time in the literature, we describe associated solutions of the system of non-autonomous differential equations with generalised coefficients in the Lebesgue spaces $L_p(T)$.

Keywords: algebra of new generalised functions; differential equations with generalised coefficients; functions of finite variation.

Introduction

The theory of generalised functions is one of the most powerful tools for investigating the systems of linear differential equations. However, from the outset the distribution theory has an essential disadvantage: it is inapplicable to the solution of non-linear problems. Therefore, various interpretations of the solutions of the systems of non-linear differential equations have been proposed by mathematicians. Unfortunately, different interpretation of the same equation lead, in general, to different solutions (see [1–3]). Usually, systems of differential equations are used to describe the dynamics of real systems or phenomena. In order to choose an adequate interpretation of such systems of equations one has to consider reasons for modelling the dynamics of real systems.

In this paper we will consider the following system of non-linear equations with generalised coefficients on $T \in [0; a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(t, x(t)) \dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1, z}, \quad (1)$$

with the initial value $x(0) = x_0$, where $t \in T$ and $\dot{L}^j(t)$ are the derivative in the distributional sense, or we can say that $\dot{L}^j(t)$ are the derivative in the Schwartz space $D'(T)$, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^z(t)]$. In general, since $\dot{L}^j(t)$ is the distribution and $f^{ij}(x(t))$ is not a smooth function, the products $f^{ij}(x(t)) \dot{L}^j(t)$ are not well defined and the solution of system (1) essentially depends on the interpretation. System (1) describes the model of the rocket flight process. The generalised coefficients of equations correspond to the fact that mass is irregularly changed when the rocket stages are thrown. Also the control problems with impulse actions lead to such systems. Let us recall some approaches to the interpretation of system (1).

The first approach is concerned with considering the system of equations in the framework of the distribution theory. According to this approach, once the product of distributions from some classes is defined, then one tries to find the solution of the system of equations (1) in these classes of distributions. For example, in papers [1; 3] the product of some distributions and discontinuous functions was defined. See also monograph [4] for another definition. Notice that the solutions of system (1) obtained using the products from [1–4] are different.

The second approach is to interpret system (1) as the following system of integral equations:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) \dot{L}^j(s) ds, \quad i = \overline{1, z},$$

where the integrals are understood in the Lebesgue – Stieltjes sense, Perron – Stieltjes sense, etc. [2; 5]. But in this approach the solution of the system of integral equations depends on the interpretation of the integral and the definition of the functions $x^i(t)$ in the discontinuity points of $L^j(t)$.

The third approach is based on the idea of the approximation of the solution of system (1) by the solutions of the system of ordinary differential equations, which are constructed using the smooth approximation of the functions $L^j(t)$. In the monograph [4] it is shown that in this case the limit of the solutions of the smoothed equations exists.

In this paper we will consider system of equations (1) using the algebra of new generalised functions from [6]. Thus we will interpret system of equations (1) as a system of equations in the differentials in the algebra of new generalised functions. Such interpretation says that the solution of system (1) is a new generalised function.

The main purpose of this article is to show that under some conditions this new generalised function associates with some ordinary function, which is natural to call the solution of system (1). Also it will be shown that the solutions of system (1) in the sense of the previous approaches can be obtained from the solution of the system of equations in the differentials in the algebra of new generalised functions. We will describe associated solutions of the approximated systems used in previous similar articles, but we will obtain the main results in the Lebesgue spaces $L_p(T)$.

The algebra of new generalised functions

In this section we recall the definition of the algebra of new generalised functions from [6]. At first, we define an extended real line $\tilde{\mathfrak{R}}$ using a construction typical for non-standard analysis.

Let $\tilde{\mathfrak{R}} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in R \text{ for all } n \in N \right\}$ be a set of real sequences. We call two sequences $\{x_n\} \in \tilde{\mathfrak{R}}$ and $\{y_n\} \in \tilde{\mathfrak{R}}$ equivalent if there is a natural number N such that $x_n = y_n$ for all $n > N$.

The set $\tilde{\mathfrak{R}}$ of equivalence classes is called the extended real line, and any of the classes – a generalised real number.

It is easy to see that $R \subset \tilde{\mathfrak{R}}$ because one may associate with any ordinary number $x \in R$ a class containing a stationary sequence with $x_n = x$. It is evident that $\tilde{\mathfrak{R}}$ is an algebra. The product $\tilde{x}\tilde{y}$ of two generalised real numbers is defined as the class of sequences equivalent to the sequence $\{x_n y_n\}$, where $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are the arbitrary representatives of the classes $\tilde{x}$ and $\tilde{y}$ respectively.

For any segment $T = [0; a] \subset R$ one can construct an extended segment $\tilde{T}$ in a similar way. Let H denote the subset of $\tilde{\mathfrak{R}}$ of non-negative «infinitely small numbers»:

$$H = \left\{ \tilde{h} \in \tilde{\mathfrak{R}} : \tilde{h} = [\{h_n\}], h_n > 0 \text{ for all } n \in N, \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \right\}. \quad (2)$$

Consider the set of sequences of infinity differentiable functions $\{f_n(x)\}$ on R . We will call two sequences $\{f_n(x)\}$ and $\{g_n(x)\}$ equivalent if for each compact set $K \subset R$ there is a natural number N such that $f_n(x) = g_n(x)$ for all $n > N$ and $x \in K$. The set of classes of equivalent functions is denoted by $\mathfrak{S}(R)$ and its elements are called new generalised functions. Similarly, one can define the space $\mathfrak{S}(T)$ for any interval $T = [0; a]$.

For each distribution f we can construct a sequence $\{f_n\}$ of smooth functions such that f_n converges to f (i. e. one can consider the convolution of f with some δ -sequence). This sequence defines the new generalised function that corresponds to the distribution f . Thus the space of distribution is a subset of the algebra of new generalised functions. However, in this case infinitely many new generalised functions correspond to one distribution (e. g. by taking a different δ -sequence). We will say that the new generalised function $\tilde{f} = [\{f_n\}]$ associates with the ordinary function or distribution f if f_n converges to f in some sense.

Let $\tilde{f} = [\{f_n\}]$ and $\tilde{g} = [\{g_n\}]$ be generalised functions. Then the composition $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ is defined by $\tilde{f} \circ \tilde{g} = [\{f_n \circ g_n\}] \in \mathfrak{S}(R)$. Similarly, one can define the value of the new generalised function $\tilde{f}$ at the generalised real point $\tilde{x} = [\{x_n\}] \in \tilde{\mathfrak{R}}$ as $\tilde{f}(\tilde{x}) = [\{f_n(x_n)\}]$.

For each $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$ and $\tilde{f} = [\{f_n\}] \in \mathfrak{S}(R)$ we define a differential $d_{\tilde{h}} \tilde{f} \in \mathfrak{S}(R)$ by $d_{\tilde{h}} \tilde{f} = [\{f_n(x + h_n) - f_n(x)\}]$. The construction of the differential was proposed by N. Lazakovich (see [6]).

Now we can give an interpretation of system of equations (1) using the introduced algebras. Let $L(t)$, $t \in [0; a] = T$, be a right-continuous function of finite variation. We replace ordinary functions in system (1) by the corresponding new generalised functions and then write differentials in the algebra. So we have

$$d_{\tilde{t}} \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{t}} \tilde{L}^j(\tilde{t}), i = \overline{1, p}, \quad (3)$$

with the initial value $\tilde{x}|_{[0; \tilde{h}]} = \tilde{x}_0$, where $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\tilde{t} = [\{t_n\}] \in T$, $\tilde{x} = [\{x_n\}]$, $\tilde{f} = [\{f_n\}]$, $\tilde{x}_0 = [\{x_{0n}\}]$ and $\tilde{L} = [\{L_n\}]$ are elements of $\mathfrak{S}(R)$. Moreover $\tilde{f}$ and $\tilde{L}$ are associated with f and L respectively. If $\tilde{x}$ is associated with some function x then we say that x is a solution of system (3).

The following theorem from [7] gives necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solutions of system (3).

Theorem 1. *If the following equality holds for some representatives $\{f_n^{ij}\} \in \tilde{f}^{ij}$, $\{L_n^j\} \in \tilde{L}^j$, $\{x_n^i\} \in \tilde{x}^i$, $\{x_{0n}^i\} \in \tilde{x}_0^i$, for all sufficiently large $n \in N$ and for all $l = 0, 1, \dots$:*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{d^l}{dt^l} [x_{0n}^i(h_n - t) - x_{0n}^i(t)] - \sum_{j=1}^q \frac{d^l}{dt^l} [f_n^{ij}(t, x_{0n}(t)) [L_n^j(h_n + t) - L_n^j(t)]] \right) = 0,$$

then a solution of system (3) exists and is unique.

The purpose of the present paper is to investigate the case when the solution $\tilde{x}$ of system (3) is associated with some function and to describe all possible associated solutions.

Main results

In this paper we consider specific types of representatives of the new generalised functions (mnemofunctions). We take the following convolutions as representatives of $\tilde{L}$ from system (3):

$$L_n^j(t) = (L^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/(\gamma^j(n))} L^j(t+s) \rho_n^j(s) ds, \quad (4)$$

where $\rho_n^j(t) = \gamma^j(n) \rho^j(\gamma^j(n)t)$; $\rho^j \geq 0$; $\text{supp } \rho^j \subseteq [0; 1]$; $\int_0^1 \rho^j(s) ds = 1$ and $f_n = f * \tilde{\rho}_n$; $\tilde{\rho} \in C^\infty(R^{z+1})$;

$$\int_{[0;1]^{z+1}} \tilde{\rho}(x_0, x_1, \dots, x_z) dx_0 dx_1 \dots dx_z = 1; \tilde{\rho} \geq 0; \text{supp } \tilde{\rho} \subseteq [0; 1]^{z+1}.$$

If the function $\gamma^j(n)$ is some monotonic function such as $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n) = \infty$, we will assume that $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n) h_n = \infty$ for $j = \overline{1, w}$ and $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n) h_n = 0$ for $j = \overline{w+1, q}$.

Using representatives, we can rewrite system (3) in the following form:

$$\begin{cases} x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(t, x_n(t)) [L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)], i = \overline{1, z}, \\ x_n(t)|_{[0; h_n]} = x_{0n}(t). \end{cases} \quad (5)$$

The solution $\tilde{x}$ of system (3) is associated with some function if and only if the sequence $\{x_n\}$ of the solutions of system (5) converges. Therefore, we have to investigate the limiting behaviour of the sequence $\{x_n\}$.

Let t be an arbitrary point of T . There exist $m_t \in N$ and $\tau_t \in [0; h_n)$ such that $t = \tau_t + m_t h_n$. Set $t_k = \tau_t + k h_n$ for $k = 0, 1, \dots, m_t$. Then the solution of system (5) can be written as

$$x_n^i(t) = x_{0n}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(t_k, x_n(t_k)) [L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)], i = \overline{1, z}. \quad (6)$$

Let $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, $t \in T = [0; a]$, be a right-continuous function of finite variation. We will assume that $L^j(t) = L(a)$ if $t > a$ and $L^j(t) = L(0)$ if $t < 0$. Let us denote by $\text{var}_{u \in T} L(u) = \sum_{j=1}^q \text{var}_{u \in T} L^j(u)$ the total variation of the function $L = [L^1, L^2, \dots, L^q]$ on the interval T . Suppose that f is a Lipschitz continuous function with a constant M and for all $x_1, x_2 \in R$ and $t \in T$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|. \quad (7)$$

In order to describe the limits of the sequence x_n of (6), we consider the following system of integral equations:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1, z}, \quad (8)$$

where $L^{jc}(t)$ is the continuous part and $L^{jd}(t)$ is discontinuous part of the function $L^j(t)$; $\mu_r, r = 1, 2, \dots$, is discontinuity points of the function $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$; $\Delta L^j(\mu_r) = L^{jd}(\mu_r+) - L^{jd}(\mu_r-)$, $j = \overline{1, q}$, is the size of the jump

$$S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u),$$

where $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ is the solution of the integral equation

$$\begin{aligned} \varphi^i(t, \mu, x, u) = & x^i + \sum_{j=1}^w u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s-, \mu, x, u)) dH(s-1) + \\ & + \sum_{j=w+1}^q u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u)) ds, \quad i = \overline{1, z}. \end{aligned}$$

Here and in what follows all integrals are understood in the Lebesgue – Stieltjes sense.

Theorem 2. Let $f^{ij}, i = \overline{1, z}, j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (7) and L^j be right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0, \gamma^j(n) \rightarrow \infty$ and $\gamma^j(n)h_n \rightarrow \infty$ for $j = \overline{1, w}$ and $\gamma^j(n)h_n \rightarrow 0$ for $j = \overline{w+1, q}$, then the solution $x_n(t)$ of (5) converges to the solution $x(t)$ of (8) in $L_p(T)$.

Theorem 3. Under the condition of theorem 1 let $f^{ij}, i = \overline{1, z}, j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (7) and L^j be right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0, \gamma^j(n) \rightarrow \infty$ and $\gamma^j(n)h_n \rightarrow \infty$ for $j = \overline{1, w}$ and $\gamma^j(n)h_n \rightarrow 0$ for $j = \overline{w+1, q}$, then the associated solution of (3) is the solution of (8) in the space $L_p(T)$.

Similar results for the system of non-autonomous differential equations in the space $L_1(t)$ have been obtained in [8].

Definition 1. We say that the function $x(t)$ is an I -associated (S -associated) solution of the system of equations in differentials (3) if it is associated solution of (3) under conditions that $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n)h_n = \infty$ ($\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n)h_n = 0$)

and the representatives of the functions $\tilde{f}$ and $\tilde{L}$ are set by formula (4). In this case we name $d_{\tilde{f}} \tilde{L}^j$ as an I -associated (S -associated) coefficient.

Let $f: R^z \rightarrow R$. We set

$$f_n(t) = (f * \tilde{\rho}_n)(t) = \int_{[0, 1/n]^z} f(t+s) \tilde{\rho}_n(s) ds,$$

where $\tilde{\rho}_n(t) \in C^\infty(R^z); \tilde{\rho}_n(t) \geq 0; \text{supp } \tilde{\rho}_n(t) \subset \left[0, \frac{1}{n}\right]^z; \int_{[0, 1/n]^z} \tilde{\rho}_n(s) ds = 1, n \in N$.

Consider the case when $\gamma^j(n) = n$, then $\tilde{\rho}_n(t) \in n^z \tilde{\rho}(nt), \tilde{\rho}_n(t) \in C^\infty(R^z), \text{supp } \tilde{\rho} \subset [0, 1]^z, \int_{[0, 1]^z} \tilde{\rho}_n(s) ds = 1, n \in N$.

Remark 1. Let $\gamma^j(n) = n$, then we can define the set H from (2) using the following subsets:

$$\begin{aligned} I &= \left\{ \tilde{h} \in H : \frac{1}{n} = o(h_n), n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0 \text{ for all } h_n \in \tilde{h} \right\}, \\ S &= \left\{ \tilde{h} \in H : h_n = o\left(\frac{1}{n}\right), h_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ for all } h_n \in \tilde{h} \right\}. \end{aligned}$$

We name the generalised differential $d_{\tilde{h}}$ as I -generalised (S -generalised) differential and denote $d_{\tilde{h}}^I (d_{\tilde{h}}^S)$, if $\tilde{h} \in I (\tilde{h} \in S)$. Note, that the I -generalised (S -generalised) differential makes sense only for the new generalised function $\tilde{L}^j$ with representatives (4), where $\gamma^j(n) = n$.

According to equation (3), we will consider the systems of equations with I -generalised and S -generalised differentials:

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}}^I \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}}^I \tilde{L}^j(\tilde{t}), \\ \tilde{x}|_{[0, \tilde{h})} = \tilde{x}^0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}}^S \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}}^S \tilde{L}^j(\tilde{t}), \\ \tilde{x}|_{[0, \tilde{h})} = \tilde{x}^0. \end{cases} \quad (10)$$

Remark 2. In case $\gamma^j(n) = n$ definition 1 will take the following form: we will say that the function $x(t)$ is the I -associated or S -associated solution of a system of equations in differentials (3) if it is associated solution of (9) or (10) respectively.

Let $\gamma^j(n) = n$. In order to describe the limits of the sequence x_n we consider the following system of integral equations:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^j(s), \quad i = \overline{1, z}. \quad (11)$$

Theorem 4. Let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (7) and L^j be continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$, then the solution $x_n(t)$ of (5) converges to the solution $x(t)$ of (11) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$.

Theorem 5. Under the condition of theorem 1 let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (7) and L^j be continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$, then the associated solution of (3) is the solution of (11) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$.

The proof of a similar theorem in another space and in an autonomous case can be seen in [9].

Let L^j be right-continuous functions of finite variation, $\gamma^j(n) = n$ and $\frac{1}{n} = o(h_n)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$. In order to describe the limits of the sequence x_n , we consider the following system of integral equations:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^{t+} f^{ij}(s, x(s-)) dL^j(s), \quad i = \overline{1, z}. \quad (12)$$

Theorem 6. Let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (7) and L^j be right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$, then the solution $x_n(t)$ of (5) converges to the solution $x(t)$ in the space $L_p(T)$ of (12) as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ and $\frac{1}{n} = o(h_n)$.

Theorem 7. Under the condition of theorem 1 let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (7) and L^j be right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$, then the I -associated solution of (3) is the solution of (12) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$.

Similar results for the system of autonomous differential equations in other spaces have been obtained in [10; 11].

Let L^j be right-continuous functions of finite variation, $\gamma^j(n) = n$ and $h_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$. In order to describe the limits of the sequence x_n , we consider the following system of integral equations:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1, z}, \quad (13)$$

where $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, and $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ is the solution of the integral equation

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^q u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u)) ds, \quad i = \overline{1, z}.$$

Theorem 8. Let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (7) and L^j be right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$, then the solution $x_n(t)$ of (5) converges to the solution $x(t)$ of (13) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ and $h_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Theorem 9. Under the condition of theorem 1 let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$, be Lipschitz continuous functions satisfying (7) and L^j be right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$, then the S -associated solution of (3) is the solution of (13) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$.

Similar results for such system of autonomous differential equations in another space have been obtained in [12].

Notice that the solution $x_n(t)$ of system (5) converges either to the solution of system (1) in the sense of paper [2; 5] if $\frac{1}{n} = o(h_n)$ or to the approximative solution of (1) in the sense of monograph [4] if $h_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Библиографические ссылки

1. Antosik P, Legeza J. Products of measures and functions of finite variations. In: *Proceedings of the International conference on generalized functions and operational calculus; 29 September – 6 October 1975; Varna, Bulgaria*. Sophia: Bulgarian Academy of Science; 1979. p. 20–26.
2. Das PC, Sharma RR. Existence and stability of measure differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1972; 22(1):145–158. DOI: 10.21136/cmj.1972.101082.
3. Ligeza J. On generalized solutions of some differential nonlinear equations of order n . *Annales Polonici Mathematici*. 1975; 31(2):115–120. DOI: 10.4064/ap-31-2-115-120.
4. Zavalishchin ST, Sesekin AN. *Dynamic impulse systems: theory and applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1997. 271 p. (Mathematics and its applications; volume 394).
5. Pandit SG, Deo SG. *Differential systems involving impulses*. Berlin: Springer; 1982. 106 p. (Lecture notes in mathematics; volume 954). DOI: 10.1007/BFb0067476.
6. Лазакович НВ. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов. *Доклады академии наук Беларуси*. 1994;38(5):23–27.
7. Каримова ТИ, Яблонский ОЛ. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2009;2:81–86.
8. Жук АИ, Яблонский ОЛ, Спасков СА. Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай. *Весці БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія*. 2019;4:16–22.
9. Жук АИ, Яблонский ОЛ. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2011;1:12–16.
10. Жук АИ, Яблонский ОЛ. Неавтономные системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций. *Труды Института математики*. 2011;19(1):43–51.
11. Жук АИ, Яблонский ОЛ. Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемифункций. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2015;59(2):17–22.
12. Жук АИ, Хмызов АК. Системы квазидифференциальных уравнений в прямом произведении алгебр мнемифункций. Симметрический случай. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2010;2:87–93.

References

1. Antosik P, Legeza J. Products of measures and functions of finite variations. In: *Proceedings of the International conference on generalized functions and operational calculus; 29 September – 6 October 1975; Varna, Bulgaria*. Sophia: Bulgarian Academy of Science; 1979. p. 20–26.
2. Das PC, Sharma RR. Existence and stability of measure differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1972; 22(1):145–158. DOI: 10.21136/cmj.1972.101082.
3. Ligeza J. On generalized solutions of some differential non-linear equations of order n . *Annales Polonici Mathematici*. 1975; 31(2):115–120. DOI: 10.4064/ap-31-2-115-120.
4. Zavalishchin ST, Sesekin AN. *Dynamic impulse systems: theory and applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1997. 271 p. (Mathematics and its applications; volume 394).
5. Pandit SG, Deo SG. *Differential systems involving impulses*. Berlin: Springer; 1982. 106 p. (Lecture notes in mathematics; volume 954). DOI: 10.1007/BFb0067476.
6. Lazakovich NV. [Stochastic differentials in the algebra of generalised random processes]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 1994;38(5):23–27. Russian.
7. Karimova TI, Yablonskii OL. About associated solutions of system of non-homogeneous equations in differentials in the algebra of generalized stochastic processes. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2009;2:81–86. Russian.
8. Zhuk AI, Yablonskiy OL, Spaskov SA. Associated solutions of the system of non-autonomous differential equations with generalized coefficients. Mixed cas. *Vesci BDPU. Seriya 3. Fizika. Matjematyka. Infarmatyka. Bijalogija. Geografija*. 2019;4:16–22. Russian.
9. Zhuk AI, Yablonskiy OL. [Systems of differential equations in the algebra of generalised functions]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2011;1:12–16. Russian.
10. Zhuk AI, Yablonskii OL. Non-autonomous systems of differential equations in the algebra of generalized functions. *Trudy Instituta matematiki*. 2011;19(1):43–51. Russian.
11. Zhuk AI, Yablonski OL. Estimation of a convergence rate to associated solutions of differential equations with generalized coefficients in the algebra of mnemofunctions. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2015;59(2):17–22. Russian.
12. Zhuk AI, Khmyzov AK. Systems of quasidifferential equations with generalized right part is investigated. Associated solution of the initial problem is considered in the direct product of algebras of mnemonic functions. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2010;2:87–93. Russian.

Received 09.11.2021 / revised 18.01.2022 / accepted 15.02.2022.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 513.6

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ С БИНАРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

А. А. БОНДАРЕНКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы размерностей m и n соответственно над полем K , $\text{char} K \neq 2$. Рассматривается проблема бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$: когда произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m+n$? Основным результатом статьи – полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем K при $m=2$. Получены необходимые и достаточные условия существования бирациональной композиции $h(Z)$ для квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем K при $m=2$. Описано множество квадратичных форм, которые подходят в качестве $h(Z)$ в этом случае.

Ключевые слова: квадратичная форма; бирациональная эквивалентность; бирациональная композиция.

Образец цитирования:

Бондаренко АА. Бирациональная композиция произвольной квадратичной формы с бинарной квадратичной формой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:14–20.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-14-20>

For citation:

Bondarenko AA. The birational composition of arbitrary quadratic form with binary quadratic form. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:14–20. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-14-20>

Автор:

Александр Адамович Бондаренко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета.

Author:

Alexandr A. Bondarenko, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of higher algebra and information security, faculty of mechanics and mathematics.
bondarenko@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-9264-9397>

THE BIRATIONAL COMPOSITION OF ARBITRARY QUADRATIC FORM WITH BINARY QUADRATIC FORM

A. A. BONDARENKO^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Let $f(X)$ and $g(Y)$ be non-degenerate quadratic forms of dimensions m and n respectively over a field K , $\text{char} K \neq 2$. Herein, the problem of the birational composition of $f(X)$ and $g(Y)$ is considered, namely, the condition is established when the product $f(X)g(Y)$ is birationally equivalent over K to a quadratic form $h(Z)$ over K of dimension $m+n$. The main result of this paper is the complete solution of the problem of the birational composition for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over a field K when $m=2$. The sufficient and necessary conditions for the existence of birational composition $h(Z)$ for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over a field K for $m=2$ are obtained. The set of quadratic forms is described which can be considered as $h(Z)$ in this case.

Keywords: quadratic form; birational equivalence; birational composition.

Введение

Пусть K – поле характеристики, не равной двум, $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ и $Z = (z_1, \dots, z_{m+n})$ – независимые наборы переменных над K , $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы над K .

Определение. Если произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K , т. е. $f(X)g(Y)$ представляется квадратичной формой $h(Z)$ над K и $x_i, y_i \in K(Z)$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K .

Первые общие результаты по проблеме композиции восходят к А. Гурвицу, который изучил задачу о сумме квадратов: найти наименьшее t при заданных m и n , чтобы выполнялось тождество

$$(x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \Phi_1^2 + \dots + \Phi_t^2,$$

где Φ_i – билинейные функции от $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$ над K . Классические результаты А. Гурвица и И. Радона, связанные с этой задачей, хорошо известны (см. [1; 2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам изучения такой композиции квадратичных форм. А. Пфистер продолжил рассматривать подобные тождества, но полагал, что Φ_i – рациональные функции от $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$. Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4].

Первые общие теоремы о бирациональной композиции над произвольным полем K получены в [5]. Естественно возникла задача изучения бирациональной композиции квадратичных форм над классами полей. Полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальным полем дано в [6], над конечным полем – в [7], над полем функций – в [8]. Что касается проблемы бирациональной композиции над произвольным полем, то ее решение для тернарных квадратичных форм над произвольным полем K получено автором в [9], для бинарных квадратичных форм – в [6].

Основная цель настоящей статьи – решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм, одна из которых является бинарной, над произвольным полем K .

Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда бинарная квадратичная форма $f(X)$ и произвольная квадратичная форма $g(Y)$ анизотропны над K , дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные над K квадратичные формы размерностей $m=2$ и n . Бирациональная композиция $h(Z)$ над K квадратичных форм $f(X) = ax_1^2 + bx_2^2 = a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, где $\alpha = \frac{b}{a}$, и $g(Y)$ существует тогда и только тогда, когда $g(Y)$ K -эквивалентна

$$\begin{cases} \beta_1(y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \beta_k(y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2), & n = 2k, \\ \beta_1(y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \beta_{k-1}(y_{n-2}^2 + \alpha y_{n-1}^2) + \beta_k y_n^2, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

При этом с точностью до эквивалентности над K

$$h(z_1, \dots, z_{n+2}) = a(\beta_1(z_1^2 + \alpha z_2^2) + \dots + \beta_k(z_{2k-1}^2 + \alpha z_{2k}^2)).$$

Решение проблемы бирациональной композиции, когда бинарная форма $f(X)$ либо квадратичная форма $g(Y)$ изотропна над K , следует из теоремы 1 работы [5].

Предварительно в статье доказаны любопытные утверждения о бирациональной композиции квадратичных форм над произвольным полем. Основные понятия и обозначения традиционны (см. [10; 11]).

Вспомогательные результаты

Докажем утверждения о квадратичных формах над произвольным полем, которые будем использовать при доказательстве теоремы. Они представляют и самостоятельный интерес.

Предложение 1. Пусть анизотропные квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ размерностей m и n над полем K образуют бирациональную композицию $h(Z)$, $m \leq n$, $f(X)$ – пфистерова квадратичная форма, h_1 – невырожденная часть h . Тогда $h_1 \sim \beta_1 f + \dots + \beta_k f$.

Доказательство этого предложения приведено в статье [8].

В дальнейшем будет полезна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $h = a_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + a_k \langle 1, \alpha \rangle$ – невырожденная анизотропная квадратичная форма размерности $2k$. Любая подформа h размерности $2k - 1$ эквивалентна квадратичной форме

$$\beta_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_{k-1} \langle 1, \alpha \rangle + \langle \beta_k \rangle,$$

а любая подформа h размерности $2k - 2$ эквивалентна квадратичной форме $\gamma_1 \langle 1, \alpha_1 \rangle + \gamma_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \gamma_{k-1} \langle 1, \alpha \rangle$, где α_1 может как совпадать, так и не совпадать с α .

Доказательство. Если g – подформа h размерности $2k - 1$, то $h \sim g + \langle a \rangle$. Следовательно, $a^{-1}h \sim a^{-1}g + \langle 1 \rangle$, $1 \in D_K(a^{-1}h)$. Пфистерова форма $\langle 1, \alpha \rangle = x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h)$, так как

$$\begin{aligned} (x_1^2 + \alpha x_2^2) a^{-1}h &= a^{-1} (a_1 (x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle + \dots + a_k (x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle) \sim \\ &\sim a^{-1} (a_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + a_k \langle 1, \alpha \rangle) = a^{-1}h, \end{aligned}$$

поскольку $(x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle \sim \langle 1, \alpha \rangle$ над $K(x_1, x_2)$ по теореме 4.1 работы [11].

Группа подобий $G_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h) \subset D_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h)$, так как форма $a^{-1}h$ представляет единицу (см. замечание 3.2 публикации [11]), поэтому по теореме 2.1 работы [11]

$$a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha \rangle + h_1. \quad (1)$$

Если h_1 – нулевая квадратичная форма, то $a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha \rangle$. В противном случае работаем с h_1 как с h , а именно: пусть $s_2 \in D_K(h_1)$, тогда $s_2^{-1}h_1$ представляет единицу над K и $x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(s_2^{-1}h_1)$. В силу (1) имеем

$$(x_1^2 + \alpha x_2^2) a^{-1}h \sim (x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle + (x_1^2 + \alpha x_2^2) h_1. \quad (2)$$

Однако, как показано выше, $(x_1^2 + \alpha x_2^2) a^{-1}h \sim a^{-1}h$ и $(x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle \sim \langle 1, \alpha \rangle$ над $K(x_1, x_2)$. Следовательно, по теореме 4 работы [10, гл. 4] в силу (1) и (2) получаем, что $(x_1^2 + \alpha x_2^2) h_1 \sim h_1$ над $K(x_1, x_2)$, а значит, $x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(s_2^{-1}h_1)$ и $s_2^{-1}h_1 \sim \langle 1, \alpha \rangle + h_2$, т. е. $h_1 \sim s_2 \langle 1, \alpha \rangle + s_2 h_2$. Размерность квадратичных форм h_k все время уменьшается на два, и на некотором шаге h_{k+1} будет нулевой квадратичной формой. В итоге имеем

$$a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha \rangle + s_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + s_k \langle 1, \alpha \rangle,$$

т. е.

$$a^{-1}h \sim \langle 1 \rangle + \langle \alpha \rangle + s_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + s_k \langle 1, \alpha \rangle.$$

Но выше было установлено, что $a^{-1}h \sim a^{-1}g + \langle 1 \rangle$. По теореме сокращения (см. [10, гл. 4]) $a^{-1}g \sim \langle \alpha \rangle + s_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + s_k \langle 1, \alpha \rangle$. Значит,

$$g \sim \beta_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_{k-1} \langle 1, \alpha \rangle + \langle \beta_k \rangle.$$

Если $n = 2k - 1$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2, \\ z_2 = x_2 y_1 - x_1 y_2, \\ \\ z_{n-2} = x_1 y_{n-2} + \alpha x_2 y_{n-1}, \\ z_{n-1} = x_2 y_{n-2} - x_1 y_{n-1}, \\ z_n = x_1 y_n, \\ z_{n+1} = x_2 y_n, \\ z_{n+2} = y_n. \end{array} \right. \quad (6)$$

В силу (5) и (6) очевидно, что x_1, x_2 и $y_1, \dots, y_n$ выражаются рационально через $z_1, \dots, z_{n+2}$. Это и доказывает, что произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$. Значит, бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K существует и с точностью до K -эквивалентности равна

$$h(Z) = a \left[\beta_1 (z_1^2 + \alpha z_2^2) + \dots + \beta_k (z_{2k-1}^2 + \alpha z_{2k}^2) \right].$$

Докажем предложение, которое используется в доказательстве условия необходимости основной теоремы.

Предложение 2. Пусть $f(X) = x_1^2 + \alpha x_2^2$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы размерностей 2 и $2k$ над K , бирациональная композиция которых равна $h(Z)$. Тогда $\text{rang } h(Z) = 2k$.

Доказательство. Согласно определению бирациональной композиции квадратичных форм $\dim h(Z) = 2k + 2$. По лемме 1 статьи [5] $g(Y) \in D_{K(Y)}(h)$, так как $1 \in D_K(f)$. Значит,

$$2k = \text{rang } g \leq \text{rang } h \leq \dim h = 2k + 2$$

и, исходя из предложения 1, $\text{rang } h$ – четное число. Следовательно, $\text{rang } h = 2k$ либо $\text{rang } h = 2k + 2$.

Предположим, $\text{rang } h = 2k + 2$. Тогда согласно предложению 1

$$h_1 = h \sim s_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + s_{k+1} \langle 1, \alpha \rangle.$$

Как уже отмечалось, $g(Y) \in D_{K(Y)}h$ и $g(Y)$ – подформа $h(Z)$ размерности $2k$. Согласно лемме 1

$$g \sim \gamma_1 \langle 1, \alpha_1 \rangle + \dots + \gamma_k \langle 1, \alpha \rangle.$$

Можем считать, что

$$g \sim \langle 1, \alpha_1 \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$$

(этого можно достичь, заменив g на $\gamma_1^{-1}g$).

Положив $y_2 = 0$ в g , получим квадратичную форму

$$g_1 \sim y_1^2 + \beta_2(y_3^2 + \alpha y_4^2) + \dots + \beta_k(y_{2k-1}^2 + \alpha y_{2k}^2).$$

Согласно достаточному условию основной теоремы статьи, доказанному выше, бирациональная композиция $f(X)$ и $g_1(Y)$ равна

$$h_2 \sim \langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle,$$

$fg_1 \in D_{K(x_1, x_2, y_1, \dots, y_{2k})}(h)$ и, следовательно, h_2 – подформа h .

Обозначим через V_1 , V_2 и V квадратичные пространства, соответствующие квадратичным формам g , h_2 и h .

Рассмотрим $V_1 \cap V_2$. Очевидно, что $\dim V_1 \cap V_2 = 2k$ либо $\dim V_1 \cap V_2 = 2k - 1$. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2k$, то $V_1 = V_2$ и квадратичные формы g и h_2 эквивалентны над K . Тогда согласно достаточному условию основной теоремы бирациональная композиция f и g эквивалентна $\langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$, т. е. $\text{rang } h = 2k$. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2k - 1$, $g = \langle 1, \alpha_1 \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$ в базисе $e_1, u_2, e_3, \dots, e_{2k}$ пространства V_1 и $h_2 = \langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$ в базисе $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2k}$ пространства V_2 , то в базисе $u_2, e_1, e_2, \dots, e_{2k}$ пространства $V_1 + V_2$ квадратичная форма этого квадратичного пространства $h_3 = \langle a_1 \rangle + \langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$ анизотропна, так как $V_1 + V_2 \subset V$ и h_3 – подформа h .

Рассмотрим квадратичную форму

$$q(U) = \langle 1, \alpha \rangle + \alpha_1 \langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$$

ранга $2k + 2$. Тогда $f(X)g(Y)$ очевидно представляется этой формой. Достаточно положить

$$\begin{cases} u_1 = x_1 y_1, \\ u_2 = x_2 y_1, \\ u_3 = x_1 y_2, \\ u_4 = x_2 y_2, \\ u_5 = x_1 y_3 + \alpha x_2 y_4, \\ u_6 = x_1 y_4 - x_2 y_3, \\ \dots \\ u_{2k+1} = x_1 y_{2k-1} + \alpha x_2 y_{2k}, \\ u_{2k+2} = x_1 y_{2k} - x_2 y_{2k-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Покажем, что квадратичная форма $q(U)$ анизотропна над K . Предположим обратное. Тогда $a_1 + \alpha_1 a_2 + \beta_2 a_3 + \dots + \beta_k a_{k+1} = 0$, где $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in D_K \langle 1, \alpha \rangle \cup \{0\}$, причем $a_2 \neq 0$, так как в противном случае h_2 изотропна. Поскольку $D_K \langle 1, \alpha \rangle$ – подгруппа K^* (см. теорему 4.1 работы [11]), то $-\alpha_1 = a_1 a_2^{-1} + \beta_2 a_3 a_2^{-1} + \dots + \beta_k a_{k+1} a_2^{-1}$ представляется квадратичной формой $\langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$. Отсюда следует, что квадратичная форма h_3 изотропна, но это не так. Данное противоречие и доказывает анизотропность над K квадратичной формы $q(U)$.

Получили, что $h(Z)$ – бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K и $f(X)g(Y) \in D_{K(X,Y)} q$. По этому согласно предложению 2 статьи [8] $h_1(Z) = h(Z)$ – подформа $q(U)$. Так как $h(Z)$ и $q(U)$ – анизотропные квадратичные формы размерности $2k + 2$, то по теореме 2.1 работы [11] $h(Z) \sim q(U)$ над K .

Переменные $u_1, \dots, u_{2k+2}$ алгебраически зависимы, поскольку $u_1 u_4 = u_2 u_3$. Из эквивалентности $h(Z)$ и $q(U)$ следует, что набор переменных $z_1, z_2, \dots, z_{2k+2}$ алгебраически зависим над K . Но по определению $Z = (z_1, \dots, z_{2k+2})$ – алгебраически независимый набор переменных. Противоречие мы получили, предположив, что $h(Z)$ имеет ранг $2k + 2$. Это и завершает доказательство предложения 2.

2. Докажем необходимость. Пусть бирациональная композиция $f(X)g(Y)$ над K равна $h(Z)$. Согласно предложению 1 $h_1 \sim \gamma_1 f + \dots + \gamma_s f$, где $f = \langle 1, \alpha \rangle$, h_1 – невырожденная часть h . Теперь надо определить $g(Y)$ в этом случае.

Если $n = \dim g = 2k - 1$ – нечетное, то

$$\text{rang } h = \dim h_1 = 2s \leq \dim h = \dim f + \dim g = 2k + 1,$$

так как h_1 – подформа h . По лемме 1 статьи [5] ag – подформа h_1 , где $a \in D_k(f)$, а значит, $\dim h_1 \geq \dim g = 2k - 1$. Имеем

$$2k - 1 = \dim g \leq \dim h_1 \leq \dim h = 2k + 1,$$

$\dim h_1$ – четное число. Следовательно, $\dim h_1 = 2k$. Согласно лемме 1

$$ag \sim \gamma_1 (y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \gamma_{k-1} (y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2) + \gamma_k y_n^k,$$

значит,

$$g \sim \beta_1 (y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \beta_{k-1} (y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2) + \beta_k y_n^k,$$

где $\beta_i = \frac{\gamma_i}{a}$.

Теперь определим вид g , если $n = \dim g = 2k$. В этом случае согласно предложению 2 $\text{rang } h = \dim h_1 = 2k$, а согласно лемме 1 статьи [5] ag – подформа h_1 , следовательно, $h_1 \sim ag$. Значит, $g \sim \beta_1 (y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \beta_k (y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2)$, если $h = (z_1, \dots, z_{n+2}) = a [\beta_1 (z_1^2 + \alpha z_2^2) + \dots + \beta_k (z_{n-1}^2 + \alpha z_n^2)]$. Теорема полностью доказана.

Библиографические ссылки

1. Hurwitz A. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Mathematische Annalen*. 1922;88(1–2):1–25. DOI: 10.1007/BF01448439.
2. Radon J. Lineare Scharen orthogonaler Matrizen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. 1922;1(1):1–14. DOI: 10.1007/BF02940576.
3. Lam KY. Topological methods for studying the composition of quadratic forms. In: Riehm CR, Hambleton I, editors. *Quadratic and Hermitian forms [Conference on quadratic forms and Hermitian K-theory, held at McMaster University; 1983 July 11–22; Hamilton, Ontario, Canada]*. Providence: American Mathematical Society; 1984. p. 173–192 (CMS conference proceedings; volume 4).
4. Pfister A. Multiplikative quadratische Formen. *Archiv der Mathematic*. 1965;16(1):363–370. DOI: 10.1007/BF01220043.
5. Бондаренко АА. О бирациональной композиции квадратичных форм. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2007;4:56–61.
6. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем. *Математические заметки*. 2009;85(5):661–670. DOI: 10.4213/mzm4673.
7. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над конечным полем. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2010;3:90–93.
8. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над полем функций. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2014;3:28–32.
9. Бондаренко АА. Бирациональная композиция тернарных квадратичных форм. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2012;2:106–110.
10. Серр Ж-П. *Курс арифметики*. Скопин АИ, переводчик; Малышев АВ, редактор. Москва: Мир; 1972. 184 с.
11. Knebusch M, Scharlau W. *Algebraic theory of quadratic forms. Generic methods and Pfister forms*. Boston: Birkhäuser; 1980. 44 p. (DMV seminar; 1).

References

1. Hurwitz A. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Mathematische Annalen*. 1922;88(1–2):1–25. DOI: 10.1007/BF01448439.
2. Radon J. Lineare Scharen orthogonaler Matrizen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. 1922;1(1):1–14. DOI: 10.1007/BF02940576.
3. Lam KY. Topological methods for studying the composition of quadratic forms. In: Riehm CR, Hambleton I, editors. *Quadratic and Hermitian forms [Conference on quadratic forms and Hermitian K-theory, held at McMaster University; 1983 July 11–22; Hamilton, Ontario, Canada]*. Providence: American Mathematical Society; 1984. p. 173–192 (CMS conference proceedings; volume 4).
4. Pfister A. Multiplikative quadratische Formen. *Archiv der Mathematic*. 1965;16(1):363–370. DOI: 10.1007/BF01220043.
5. Bondarenko AA. [On the birational composition of quadratic forms]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2007;4:56–61. Russian.
6. Bondarenko AA. [Birational composition of quadratic forms over a local field]. *Matematicheskie zametki*. 2009;85(5):661–670. DOI: 10.4213/mzm4673. Russian.
7. Bondarenko AA. [The birational composition of quadratic forms over a finite field]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2010;3:90–93. Russian.
8. Bondarenko AA. [The birational composition of quadratic forms over a function field]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2014;3:28–32. Russian.
9. Bondarenko AA. [The birational composition of ternary quadratic forms]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2012;2:106–110. Russian.
10. Serre J-P. *Cours d'arithmétique*. Paris: Presses Universitaires de France; 1970. 188 p.
Russian edition: Serre J-P. *Kurs arifmetiki*. Skopin AI, translator; Malyshev AV, editor. Moscow: Mir; 1972. 184 p.
11. Knebusch M, Scharlau W. *Algebraic theory of quadratic forms. Generic methods and Pfister forms*. Boston: Birkhäuser; 1980. 44 p. (DMV seminar; 1).

Получена 26.03.2021 / исправлена 15.01.2022 / принята 15.02.2022.
Received 26.03.2021 / revised 15.01.2022 / accepted 15.02.2022.

УДК 515.12

О ВЛОЖЕНИИ Ω -НАСЫЩЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. БЕДРИЦКИЙ¹⁾, В. Л. ТИМОХОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Счетнокомпактификацией топологического пространства X называется такое расширение Y пространства X , что Y вполне регулярно и счетно-компактно и любое замкнутое счетно-компактное подмножество пространства X замкнуто и в Y . Однако подобное расширение не всегда существует. В связи с этим появилось понятие насыщения топологического пространства, которое является некоторым обобщением понятия счетнокомпактификации: вместо условия счетнокомпактности Y требуется, чтобы любое бесконечное подмножество в X имело предельную точку в Y , второе условие остается неизменным. Такое расширение уже определено для любого T_1 -пространства. В работе рассмотрена конкретная конструкция насыщения, названная Ω -насыщением. Доказано, что при некотором дополнительном условии (необходимом и достаточном) на отделимость исходного пространства X его Ω -насыщение канонически вкладывается в стоун-чеховское расширение βX . Аналогичный результат для счетнокомпактификации получен К. Моритой.

Ключевые слова: насыщение топологического пространства; счетнокомпактификация в смысле Мориты; Ω -насыщение; компактификация Волмэна; Δ -база; компактификация Стоуна – Чеха.

Образец цитирования:

Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. О вложении Ω -насыщения топологического пространства. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;1:21–25.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-21-25>

For citation:

Biadrytski AS, Timokhovich VL. On the embedding of the Ω -saturation of a topological space. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;1:21–25. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-21-25>

Авторы:

Александр Сергеевич Бедрицкий – магистрант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:

Aliaksandr S. Biadrytski, master's degree student at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.

abedr@vk.com

Vladimir L. Timokhovich, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.

timvlaleo@gmail.com

ON THE EMBEDDING OF THE Ω -SATURATION OF A TOPOLOGICAL SPACE

A. S. BIADRYTSKI^a, V. L. TIMOKHOVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. S. Biadrytski (abedr@vk.com)

The countably-compactification of a topological space X is such its extension Y , that Y is a completely regular and countably-compact space, and any closed countably-compact subset of X is closed in Y . But this extension does not always exist. Due to this, the concept of a saturation of a topological space appeared, which is a generalisation of the countably-compactification: instead of the condition of the countably-compactness of Y , it is necessary that any infinite subset of X has a limit point in Y . Meanwhile, the second condition remains unchanged. Such an extension is already defined for any T_1 -space. In this paper we consider a specific construction of saturation named as Ω -saturation. It is proved that under some additional (necessary and sufficient) condition to the separation of the initial space X , its Ω -saturation is canonically embedded in the Stone – Čech compactification βX . An analogous result is obtained for the countably-compactification by K. Morita.

Keywords: saturation of a topological space; countably-compactification in the sense of Morita; Ω -saturation of a topological space; Wallman compactification; Δ -base; Stone – Čech compactification.

Введение

Понятие перистого паракомпакта появилось в работе А. В. Архангельского [1], там же дана его внешняя характеристика. Чуть позже в статье Д. Нагаты [2] было показано, что перистые паракомпакты (и только они) представляются как замкнутые подпространства произведений метризуемых пространств на компакты. Параллельно теории перистых паракомпактов развивалась теория M -пространств [3; 4]. Ввиду схожести внешних характеристик перистых паракомпактов и M -пространств естественно возник вопрос о представлении последних в виде замкнутых подпространств произведений вполне регулярных счетно-компактных пространств на метризуемые пространства. К. Моритой в работе [5] было доказано, что данное представление M -пространства X равносильно его счетнокомпактифицируемости, т. е. существованию такого вполне регулярного счетно-компактного расширения Y , что любое замкнутое счетно-компактное подмножество в X замкнуто и в Y . В этой же работе доказано, что если счетнокомпактификация Y пространства X существует, то она канонически вкладывается в стоун-чеховское расширение βX . Но, как оказалось, даже не все нормальные локально компактные M -пространства имеют счетнокомпактификацию [6]. В связи с этим возникают две задачи:

1) нахождения необходимых и достаточных условий счетнокомпактифицируемости (не обязательно M -пространства);

2) нахождения некоторой конструкции расширения, близкой по свойствам к счетнокомпактификации, но существующей по крайней мере для достаточно широкого класса пространств.

В плане решения второй задачи в публикации [7] появилось понятие насыщения топологического пространства. В работе [8] были определены и исследованы конструкции ω - и Ω -насыщений.

В настоящей статье рассмотрена конструкция Ω -насыщения, обозначенная Y_γ , и показано, что при некотором дополнительном условии (необходимом и достаточном) на отделимость исходного пространства X это расширение канонически вкладывается в стоун-чеховское расширение βX . Данный результат аналогичен вышеупомянутому свойству счетнокомпактификации, установленному К. Моритой.

Под пространством, если не оговорено иное, будем понимать произвольное топологическое T_1 -пространство. Пусть X – пространство, $A \subset X$. Тогда $[A]_X$ – замыкание множества A в X ; $A \subset X$ ($A \subset X$), если множество A открыто (замкнуто) в X ; $C(X, I)$ – множество всех непрерывных функций из X в I , где $I = [0; 1]$.

Множество A называется дискретом в X , если A счетно, дискретно как подпространство и замкнуто в X . Через Δ будем обозначать семейство всех дискретов пространства X .

Дальнейшие построения и рассуждения существенно используют конструкцию и свойства волмэновского компактного расширения ωX , поэтому напомним основные положения, связанные с этим расширением. Нарост $\omega X \setminus X$ волмэновского расширения ωX составляют замкнутые (т. е. состоящие из

замкнутых в X множеств) свободные (т. е. имеющие пустое пересечение) ультрафильтры. Базу топологии ωX образуют множества вида $W(U) = U \cup \{\xi \in \omega X \setminus X \mid U \supset F \text{ для некоторого } F \in \xi\}$, где $U \subset X$ [9, с. 272]. Отметим также, что $W(U)$ является максимальным открытым раздутием множества U в ωX , т. е. $W(U) = \bigcup_{op} \left\{ G \subset \omega X \mid G \cap X = U \right\}$. Если $F \subset_{cl} X$ и $F \subset U \subset_{op} X$, то $[F]_{\omega X} = F \cup \{\xi \in \omega X \setminus X \mid F \in \xi\}$ и $[F]_{\omega X} \subset W(U)$. Также верно следующее: $W(U_1 \cup \dots \cup U_n) = W(U_1) \cup \dots \cup W(U_n)$, $[F_1 \cap \dots \cap F_n]_{\omega X} = [F_1]_{\omega X} \cap \dots \cap [F_n]_{\omega X}$, где $U_i \subset_{op} X$, $F_i \subset_{cl} X$, $1 \leq i \leq n$ (подробнее см. [9, с. 272]).

Предварительные рассмотрения

Пусть X и Y – пространства и X – подпространство в Y .

Определение 1 [10]. Говорят, что пространство X относительно счетно-компактно в Y , если любое бесконечное множество $A \subset X$ имеет в Y предельную точку.

Определение 2 [7]. Пространство Y называют насыщением пространства X , если X всюду плотно в Y (т. е. Y – расширение для пространства X), X относительно счетно-компактно в Y и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто и в Y .

Следуя [8], подсемейство $\gamma \subset \Delta$ назовем Δ -базой в X , если для любого $A \in \Delta$ найдется $B \in \gamma$ такое, что $B \subset A$. Для $U \subset X$ максимальное открытое раздутие множества U в пространстве Y обозначим через $\hat{U}$,

$$\text{т. е. } \hat{U} = \bigcup_{op} \left\{ G \subset Y \mid G \cap X = U \right\}.$$

Определение 3 [8]. Пусть X всюду плотно в Y и γ – Δ -база в X . Пространство Y называется ω -насыщением пространства X , а Δ -база γ – ω -допустимой при выполнении следующих условий:

1) для любой точки $y \in Y \setminus X$ найдется дискрет $A \in \gamma$ такой, что $y \in [A]_Y$, и обратно, для любого $A \in \gamma$ $[A]_Y \cap (Y \setminus X) \neq \emptyset$;

2) если $A \in \gamma$, $B \subset A$ и $B \subset U \subset_{op} X$, то $[B]_Y \subset \hat{U}$;

3) множества вида $\hat{U}$, где $U \subset_{op} X$, образуют базу топологии пространства Y .

Если при этом для любого $A \in \gamma$ множество $[A]_Y$ компактно, то Y называется Ω -насыщением для X , а Δ -база γ – Ω -допустимой.

В работе [8] показано, что определенное таким образом ω -насыщение действительно является насыщением для пространства X . Там же определена и исследована следующая конкретная конструкция Ω -насыщения.

Фиксируем некоторую Δ -базу γ и положим

$$Y_\gamma = X \cup \{\xi \in \omega X \setminus X \mid \xi \cap \gamma \neq \emptyset\}.$$

Теорема 1 [8]. Пространство Y_γ – насыщение пространства X , причем выполняются следующие условия:

1) множества вида $\hat{U}$, где $U \subset X$, образуют базу топологии пространства Y_γ ;

2) если $A \in \gamma$, то $[A]_{Y_\gamma} = [A]_{\omega X}$ и $[A]_{Y_\gamma}$ компактно;

3) если X регулярно, то пространство Y_γ хаусдорфово;

4) если $F \subset_{cl} X$ и $F \subset U \subset_{op} X$, то $[F]_{Y_\gamma} \subset \hat{U}$;

5) если $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$, то $\hat{U} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$, если $F = F_1 \cap \dots \cap F_n$, то $[F]_{Y_\gamma} = [F_1]_{Y_\gamma} \cap \dots \cap [F_n]_{Y_\gamma}$, где $U_i \subset_{op} X$, $F_i \subset_{cl} X$, $1 \leq i \leq n$.

Очевидно, что Y_γ – Ω -насыщение для пространства X , а Δ -база γ является Ω -допустимой. Отметим также, что свойства, описанные в п. 1 и 5, есть прямые следствия соотношений $\hat{U} = W(U) \cap Y_\gamma$ и $[F]_{Y_\gamma} = [F]_{\omega X} \cap Y_\gamma$.

Об отделимости пространства Y_γ , помимо п. 3, известно следующее.

Определение 4 [11]. Пространство X называется δ -хаусдорфовым, если оно хаусдорфово и из любого множества $A \in \Delta$ можно выделить бесконечное подмножество $B \subset A$, допускающее раздутие до дискретного семейства $\{U_b \mid b \in B\}$, где $b \in U_b \subset_{op} X$, $b \in B$ (семейство множеств в X называют дискретным, если для любой точки из X найдется окрестность, пересекающаяся не более чем с одним множеством данного семейства).

Следуя [8], множество всех дискретов, допускающих раздутие до дискретного семейства окрестностей своих точек, обозначим через δ , а Δ -базу γ назовем δ -базой, если $\gamma \subset \delta$.

Предложение 1 [8] (см. также [12, лемма 2, теорема 5]). Если насыщение Y_γ регулярно для некоторой Δ -базы γ , то пространство X δ -хаусдорфово и $\gamma \subset \delta$, и обратно, если X регулярно и δ -хаусдорфово, то Y_γ регулярно для любой δ -базы γ .

Предложение 2 [8]. Пусть X вполне регулярно и δ -хаусдорфово. Тогда и Y_γ вполне регулярно для любой δ -базы γ .

Следующая теорема показывает, что рассмотренная выше конструкция насыщения Y_γ является универсальным пространством для всех ω -насыщений с ω -допустимой Δ -базой γ .

Теорема 2 [8]. Для любого ω -насыщения Y пространства X с ω -допустимой Δ -базой γ существует каноническое (т. е. тождественное на X) вложение пространства Y в Y_γ , причем если Y – Ω -насыщение, а γ Ω -допустима, то Y и Y_γ канонически гомеоморфны.

Вложение Y_γ в βX

На основании предложений 1 и 2 можем заключить, что условие δ -хаусдорфовости вполне регулярного пространства X является необходимым для вложения Y_γ в βX . Действительно, если существует вложение Y_γ в βX , то Y_γ вполне регулярно, а тогда согласно предложению 1 пространство X δ -хаусдорфово. Покажем, что это условие является и достаточным.

Перед формулировкой следующей теоремы напомним, что если отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, а Y вполне регулярно, то f единственным образом непрерывно продолжается до отображения $\varphi: \omega X \rightarrow \beta Y$ [9, с. 272].

Теорема 3. Пусть X – вполне регулярное δ -хаусдорфово пространство, $\varphi: \omega X \rightarrow \beta X$ – непрерывное продолжение тождественного отображения Id_X пространства X на себя, γ – δ -база в X . Тогда сужение $\varphi|_{Y_\gamma}: Y_\gamma \rightarrow \varphi(Y_\gamma)$ – гомеоморфизм.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутое отображение (т. е. $f(F) \subset_{cl} Y$ для любого $F \subset X$), $B \subset Y$, $A = f^{-1}(B)$. Тогда сужение $f|_A: A \rightarrow B$ – также замкнутое отображение.

Доказательство. Пусть $C \subset_{cl} A$, т. е. существует множество $F \subset X$ такое, что $C = F \cap A$. Утверждение будет доказано, если покажем, что $f(C) \subset_{cl} B$. Исходя из общих свойств отображений, имеем

$$f(C) = f(A \cap F) \subset f(A) \cap f(F) = f(f^{-1}(B)) \cap f(F) \subset B \cap f(F).$$

Обратно, пусть $y \in f(F) \cap B$. Тогда $f^{-1}(y) \subset A$ и $y = f(x)$, где $x \in F$. Очевидно, что $x \in f^{-1}(y) \cap F \subset A \cap F$, откуда $y \in f(A \cap F) = f(C)$. Таким образом, $f(C) = f(F) \cap B$. По условию $f(F) \subset_{cl} Y$, а значит, $f(C) = f(F) \cap B \subset_{cl} B$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Легко видеть, что отображение φ замкнуто. В самом деле, любое замкнутое в ωX множество компактно, следовательно, его непрерывный образ является компактом в βX ,

а значит, и замкнутым множеством. Пространство Y_γ представим в виде $Y_\gamma = X \cup \left(\bigcup_{A \in \gamma} [A]_{\omega X} \right)$. Поскольку

$$\varphi([A]_{\omega X}) = [\varphi(A)]_{\beta X} = [A]_{\beta X} \text{ для любого } A \in \gamma, \text{ то } \varphi(Y_\gamma) = X \cup \left(\bigcup_{A \in \gamma} [A]_{\beta X} \right).$$

Докажем далее, что сужение φ на множестве $\varphi^{-1}(\varphi(Y_\gamma))$ инъективно. Пусть $x \in X$, $\xi \in \omega X \setminus X$. Покажем, что $\varphi(x) = x \neq \varphi(\xi)$. Выберем $F \in \xi$ такое, что $x \notin F$. Так как $\xi \in [F]_{\omega X}$, то $\varphi(\xi) \in \varphi([F]_{\omega X}) = [\varphi(F)]_{\beta X} = [F]_{\beta X}$, следовательно, $\varphi(\xi) \in [F]_{\beta X}$. Но при замыкании F в βX будут добавляться только точки нароста, значит, $x \notin [F]_{\beta X}$. Таким образом, $\varphi(\xi) \neq x$.

Пусть теперь $\xi_1 \in Y_\gamma \setminus X$, $\xi_2 \in \omega X \setminus X$ и $\xi_1 \neq \xi_2$. Тогда найдутся $F_1 \in \xi_1$, $F_2 \in \xi_2$ такие, что $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Выберем дискрет $A \in \gamma \cap \xi_1$ и положим $A_1 = A \cap F_1$. Отметим, что $A_1 \in \xi_1$ и $F_2 \cap A_1 = \emptyset$. Так как A – элемент δ -базы γ , то A можно раздуть до дискретного семейства окрестностей $\{U_a | a \in A\}$, где $a \in U_a \subset_{op} X$, $a \in A$. Рассмотрим далее подсемейство $\{U_a | a \in A_1\}$. Затем для каждой точки $a \in A_1$ определим окрестность $O_a = U_a \cap (X \setminus F_2)$. Так как X вполне регулярно, то найдутся функции $f_a \in C(X, I)$ такие, что

$f_a(x) = 1$, если $x = a$, и $f_a(x) = 0$, если $x \in X \setminus O_a$. Рассмотрим новую функцию $f(x) = \sum_{a \in A_1} f_a(x)$. Покажем, что $f \in C(X, I)$. Пусть $x \in X$. В силу того, что семейство $D = \{O_a \mid a \in A_1\}$ дискретное, существует окрестность U точки x такая, что U пересекается не более чем с одним множеством семейства D . В том случае, когда U вовсе не пересекается ни с одним элементом из D , непрерывность очевидна, так как $f|_U \equiv 0$. Если же U пересекается с некоторой окрестностью O_a , $a \in A_1$, то $f|_U \equiv f_a|_U$, и непрерывность f в точке x будет следовать из непрерывности f_a . В силу произвольности выбора точки x можем считать, что $f \in C(X, I)$. Как известно, любая непрерывная ограниченная функция на X может быть непрерывно продолжена на βX единственным образом [9, с. 266]. Пусть $\tilde{f}: \beta X \rightarrow I$ – непрерывное продолжение функции f . Обозначим $y_i = \varphi(\xi_i)$. Имеем $\tilde{f}(y_1) \in \tilde{f}([A_1]_{\beta X}) = [f(A_1)]_I = \{1\}$ и $\tilde{f}(y_2) \in \tilde{f}([F_2]_{\beta X}) = [f(F_2)]_I = \{0\}$, откуда следует, что $\varphi(\xi_1) \neq \varphi(\xi_2)$.

Итак, доказано, что $\varphi^{-1}(\varphi(Y_\gamma)) = Y_\gamma$ и $\varphi|_{Y_\gamma}: Y_\gamma \rightarrow \varphi(Y_\gamma)$ – биекция. Согласно приведенной выше лемме отображение замкнуто, и, таким образом, оно является гомеоморфизмом. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Архангельский АВ. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства. *Математический сборник*. 1965;67(1):55–88.
2. Nagata J. A note on M -space and topologically complete space. *Proceedings of the Japan Academy*. 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.
3. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen*. 1964;154(4):365–382. DOI: 10.1007/BF01362570.
4. Morita K. A survey of the theory of M -spaces. *General Topology and its Applications*. 1971;1(1):49–55. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90110-3.
5. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A*. 1973;12(313/328):7–15.
6. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact M -spaces. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology*. New York: Academic Press; 1977. p. 81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
7. Голдовт ИЮ, Тимохович ВЛ. Насыщения топологических пространств и проблема Мориты. *Доклады Академии наук СССР*. 1977;21(9):777–780.
8. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О счетнокомпактифицируемости в смысле Мориты. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;1:46–53. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-46-53.
9. Энгелькинг Р. *Общая топология*. Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 752 с.
10. Архангельский АВ. Компактность. *Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. 1989;50:5–128.
11. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О пределе обратного спектра экспоненциальных пространств. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2001;1:51–55.
12. Фролова ДС. О секвенциально собственных топологиях пространства отображений. *Труды Института математики*. 2013;21(1):102–108.

References

1. Arkhangel'skii AV. [One class of spaces containing all metric and all locally compact spaces]. *Matematicheskii sbornik*. 1965; 67(1):55–88. Russian.
2. Nagata J. A note on M -space and topologically complete space. *Proceedings of the Japan Academy*. 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.
3. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen*. 1964;154(4):365–382. DOI: 10.1007/BF01362570.
4. Morita K. A survey of the theory of M -spaces. *General Topology and its Applications*. 1971;1(1):49–55. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90110-3.
5. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A*. 1973;12(313/328):7–15.
6. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact M -spaces. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology*. New York: Academic Press; 1977. p. 81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
7. Goldovt IYu, Timokhovich VL. [Saturation of topological spaces and the Morita problem]. *Doklady Akademii nauk BSSR*. 1977;21(9):777–780. Russian.
8. Kukrak HO, Timokhovich VL. On the countably-compactifiability in the sense of Morita. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;1:46–53. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-46-53.
9. Engelking R. *General topology*. Warszawa: Polish Scientific Publishers; 1977. 626 p. (Monografie matematyczne; tom 60). Russian edition: Engelking R. *Obshchaya topologiya*. Antonovskii MYa, Arkhangel'skii AV, translators. Moscow: Mir; 1986. 752 p.
10. Arkhangel'skii AV. [Compactness]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya*. 1989;50:5–128. Russian.
11. Kukrak HO, Timokhovich VL. [On the limit of the inverse spectrum of exponential spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatica*. 2001;1:51–55. Russian.
12. Frolova DS. On the family of sequentially proper topologies on the space of maps. *Trudy Instituta matematiki*. 2013;21(1): 102–108. Russian.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.226

О МОЩНОСТИ ТЕСТОВ МНОГОМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ РАВНОМЕРНОСТИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ГЕНЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. А. ВОЛОШКО¹⁾, А. И. ТРУБЕЙ¹⁾

¹⁾Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики БГУ,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Получена асимптотика мощностей статистических тестов многомерной дискретной равномерности в условиях континуального сближения альтернатив. Рассмотрены две версии теста многомерной дискретной равномерности – по пересекающимся отрезкам (входит в состав батареи тестов NIST SP 800-22) и по непересекающимся отрезкам. Нулевой гипотезе H_0 соответствует так называемая чистая случайность наблюдаемой последовательности, т. е. независимость и одинаковое равномерное распределение ее элементов. Альтернатива H_1 предполагается цепью Маркова некоторого произвольного фиксированного конечного порядка.

Ключевые слова: мощность теста; тест многомерной дискретной равномерности; континуальные альтернативы; нецентральное распределение хи-квадрат; генератор случайных чисел; цепь Маркова.

Образец цитирования:

Волошко ВА, Трубей АИ. О мощности тестов многомерной дискретной равномерности, используемых для статистического анализа генераторов случайных последовательностей. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:26–37.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-26-37>

For citation:

Voloshko VA, Trubey AI. On the power of tests of multidimensional discrete uniformity used for statistical analysis of random number generators. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:26–37. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-26-37>

Авторы:

Валерий Анатольевич Волошко – кандидат физико-математических наук; заведующий сектором компьютерного анализа данных.

Антон Иванович Трубей – заведующий научно-исследовательской лабораторией прикладной информатики.

Authors:

Valeriy A. Voloshko, PhD (physics and mathematics); head of the sector of computer data analysis.

valeravoloshko@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0002-9693-0688>

Anton I. Trubey, head of the laboratory of applied informatics.
trubeia@mail.ru

ON THE POWER OF TESTS OF MULTIDIMENSIONAL DISCRETE UNIFORMITY USED FOR STATISTICAL ANALYSIS OF RANDOM NUMBER GENERATORS

V. A. VOLOSHKO^a, A. I. TRUBEY^a

^aResearch Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics,
Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. A. Voloshko (valeravoloshko@yandex.ru)

In this paper, we obtained the asymptotic power values for the statistical tests of multidimensional discrete uniformity under conditions of contiguous convergence of alternatives. Two versions of the test are considered, namely, with overlapping blocks (included in the NIST SP 800-22 test suit) and with non-overlapping blocks. The null hypothesis H_0 is related to the so-called pure randomness of the observed sequence, i. e. independence and the same uniform distribution of its elements. An alternative H_1 is assumed to be a Markov chain of some arbitrary fixed finite order.

Keywords: power of a test; test of multidimensional discrete uniformity; contiguous alternatives; non-central chi-squared distribution; random number generator; Markov chain.

Введение

Многие криптографические задачи (например, генерация ключей, анализ стойкости криптографических алгоритмов) требуют применения статистических критериев для обнаружения большого числа отклонений от гипотетической модели. Теория вероятностей описывает и анализирует случайность с помощью абстрактных математических объектов, моделируя ее случайными величинами и случайными процессами. Математическая статистика посредством экспериментов связывает эти абстрактные математические модели с реально существующими генераторами случайных последовательностей. Данные эксперименты могут быть использованы для оценки параметров, описывающих модели, или для проверки гипотез, проистекающих из моделей. Разработчику генераторов следует провести исследования в целях обнаружения отклонений двоичной последовательности от модели независимых симметричных испытаний Бернулли, а также минимизации вероятности ошибки второго рода для применяемых тестов.

Общие сведения о проверке статистических гипотез

С каждым из используемых для проверки гипотезы H_0 тестов связана определенная статистика S , которая в соответствии с некой мерой измеряет отклонение в наблюдаемом процессе от ситуации, отвечающей H_0 . В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики S , вычисляемые по этим выборкам. При справедливости гипотезы H_1 статистика S подчиняется некоторому распределению $F_{S|H_1}(z) = P\{S \leq z | H_1\}$.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем. Область значений статистики S разбивается на два подмножества. Одно из них представляет собой критическую область, попадание в которую при справедливости H_0 маловероятно. При попадании вычисленного по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ значения статистики S в критическую область проверяемая гипотеза H_0 отклоняется (отвергается). В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

С проверкой статистических гипотез связывают вероятности ошибок двух видов. С одной стороны, справедливая гипотеза H_0 может быть отклонена, и этим будет совершена ошибка первого рода. При проверке гипотез, как правило, задают вероятность ошибки первого рода α (уровень значимости), допуская тем самым возможность отклонения H_0 и совершения такой ошибки. С другой стороны, может быть справедлива некоторая конкурирующая гипотеза H_1 . Если при справедливости H_1 в процессе проверки гипотеза H_0 не была отклонена, то этим самым совершена ошибка второго рода. Ее вероятность будем обозначать β .

Обычно, используя тесты для проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. В таком случае при проверке гипотез о случайности можно считать, что конкурирующая гипотеза связана с наличием, например, какого-то отклонения от случайности (неравновероятности или зависимости между знаками).

Если же гипотеза H_1 задана и связана с наличием конкретного отклонения от случайности (к примеру, неравновероятности заданного типа), то задание величины α для используемого теста проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β . Так, в случае правостороннего теста вида

$$\begin{cases} H_0, S \leq S_{1-\alpha}, \\ H_1, S > S_{1-\alpha}, \end{cases} \quad (1)$$

где $S_{1-\alpha} = F_{S|H_0}^{-1}(1-\alpha)$, вероятность ошибки второго рода

$$\beta = F_{S|H_1}(S_{1-\alpha}). \quad (2)$$

Величину $1 - \beta$ принято называть мощностью статистического теста. Чем выше мощность теста при заданном значении α , тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1 . Особенно важно, чтобы используемый тест хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы.

Очевидно, что при проверке любой статистической гипотезы желательно применять наиболее мощный критерий, который для заданной вероятности ошибки первого рода α обеспечивает минимальную вероятность ошибки второго рода β относительно любой конкурирующей гипотезы H_1 . Лучше всего использовать равномерно наиболее мощный критерий, который для любого заданного α обеспечивает минимальное значение β . Однако существование такого критерия для проверки конкретной гипотезы H_0 является редчайшим исключением.

Имеющиеся наборы тестов, в том числе NIST SP 800-22 [1], предлагают современные статистические тесты для генераторов (псевдо)случайных последовательностей, позволяющие обнаружить отклонения двоичной последовательности от модели независимых симметричных испытаний Бернулли. Одной из основных целей данных статистических тестов является минимизация вероятности ошибки второго рода, т. е. минимизация вероятности принятия последовательности, созданной генератором, в качестве удовлетворительной, в то время как генератор в действительности был некачественным. Вероятности α и β связаны друг с другом, а также с размером n тестируемой последовательности таким образом, что если два из этих значений указаны, то третье значение определяется автоматически.

На практике обычно выбираются уровень значимости α , тип альтернативы H_1 и приемлемая вероятность ошибки второго рода β (вероятность решения, что некачественный генератор произвел в действительности случайную последовательность). Затем вычисляется достаточный размер последовательности n , обеспечивающий выбранные значения α и β . При этом тесты и альтернативы H_1 взаимосвязаны: для каждого типа альтернативы существуют свои оптимальные тесты, которые лучше других тестов отличают нулевую гипотезу H_0 от данного типа альтернативы H_1 . Таким образом, батареи тестов позволяют охватить некоторый конечный набор альтернатив. Реальная, возникающая на практике альтернатива при этом в случае неверной нулевой гипотезы неизвестна, поэтому реальное значение вероятности ошибки второго рода β не может быть вычислено, а могут быть определены только значения β , относящиеся к гипотетическим альтернативам H_1 .

Далее рассмотрены статистические тесты многомерной дискретной равномерности по непересекающимся и по пересекающимся отрезкам. Для этих тестов в условиях бернуллиевских и марковских (рекуррентных) альтернатив H_1 , континуально сближающихся с нулевой гипотезой H_0 , получены асимптотические выражения для вероятностей ошибки второго рода β .

Тест многомерной дискретной равномерности по непересекающимся L -отрезкам

Введем обозначения: Z – произвольное конечное множество; $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; $U(Z)$ – равномерное распределение вероятностей $p(z) \equiv |Z|^{-1}$, $z \in Z$; $\Lambda\{\xi\}$ – распределение вероятностей случайной величины $\xi \in Z$. Дивергенция Кульбака – Лейблера двух распределений вероятностей p, q на Z имеет вид

$$KL(p; q) = \sum_{z \in Z} p(z) \ln \frac{p(z)}{q(z)} \geq 0.$$

Энтропия Шеннона определяется по формуле

$$H(p) = - \sum_{z \in Z} p(z) \ln p(z) \geq 0.$$

Для последовательности $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in Z^n$ элементов множества Z введем следующие функции и величины:

1) функцию частот

$$f = f_z : Z \rightarrow \mathbb{R}, f = \psi(z), f_z = \sum_{i=1}^n 1\{z_i = z\},$$

где $1\{A\}$ – индикаторная функция события A ;

2) статистику хи-квадрат относительно равномерного распределения вероятностей

$$\chi^2(z_1, \dots, z_n) = \sum_{z \in Z} \frac{(f_z - n/|Z|)^2}{n/|Z|}, f = \psi(z);$$

3) последовательность пересекающихся L -грамм (слов длины L) в закольцованной последовательности $\mathbf{z}$

$$\Phi_L(\mathbf{z}) = ((z_1, z_2, \dots, z_L), (z_2, z_3, \dots, z_{L+1}), \dots, (z_n, z_1, \dots, z_{L-1})) \in (Z^L)^n;$$

4) последовательность непересекающихся L -грамм в последовательности $\mathbf{z}$ (в этом случае предполагается, что L делит n , $n' = \frac{n}{L}$)

$$\Phi_L(\mathbf{z}) = ((z_1, \dots, z_L), (z_{L+1}, \dots, z_{2L}), \dots, (z_{n-L+1}, \dots, z_n)) \in (Z^L)^{n'}.$$

Одним из классических тестов, предложенных Д. Кнудом, является тест многомерной дискретной равномерности по непересекающимся L -отрезкам (далее – МДРН(L)-тест). Данный тест предназначен для проверки гипотезы согласия наблюдаемой последовательности L -векторов с L -мерным дискретным равномерным распределением. Предположим, что имеем двоичную последовательность

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V^n, V = \{0, 1\},$$

длины $n \in \mathbb{N}$, кратной L ($n' = \frac{n}{L}$). Статистика хи-квадрат МДРН(L)-теста

$$S = \chi^2(\Phi_L(\mathbf{x})) = \sum_{z \in V^L} \frac{(f_z - n'/2^L)^2}{n'/2^L}, \quad (3)$$

где $f = \psi(\Phi_L(\mathbf{x}))$ – частоты встречаемости среди n' непересекающихся L -грамм в последовательности $\mathbf{x}$. Своим названием статистика хи-квадрат МДРН(L)-теста (как и все прочие статистики хи-квадрат) обязана тому свойству, что при истинной нулевой гипотезе H_0 с ростом n она сходится по распределению к закону хи-квадрат [2]:

$$F_{S|H_0}(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} F_{\chi_d^2}(\cdot),$$

где в случае МДРН(L)-теста число степеней свободы $d = 2^L - 1$.

Мы будем рассматривать ситуацию континуального сближения альтернатив, когда с ростом n альтернатива H_1 сходится к гипотезе H_0 таким образом, что статистика хи-квадрат S при истинной альтернативе H_1 сходится по распределению к нецентральному распределению хи-квадрат с некоторым параметром нецентральности $\lambda > 0$:

$$F_{S|H_1}(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} F_{\chi_{d,\lambda}^2}(\cdot).$$

При $\lambda = 0$ $F_{\chi_{d,0}^2}(\cdot) = F_{\chi_d^2}(\cdot)$. Тогда из выражений (1) и (2) получаем соотношение, связывающее асимптотические вероятности ошибок первого и второго рода:

$$\beta = F_{\chi_{d,\lambda}^2}(F_{\chi_d^2}^{-1}(1 - \alpha)). \quad (4)$$

Как видим, соотношение (4) зависит от двух параметров – числа степеней свободы d и параметра нецентральности λ . Число степеней свободы d зависит только от вида статистического теста и не зависит от вида альтернативы H_1 . Приведенные далее результаты основаны на формуле (4) и на вычислении параметра нецентральности λ для двух видов тестов хи-квадрат (по непересекающимся и по пересекающимся отрезкам) в случае марковских альтернатив H_1 .

Определение 1. Будем говорить, что марковская альтернатива H_1 континуально сближается с нулевой гипотезой H_0 , если при истинной альтернативе H_1 последовательность $\{x_i\}$ представляет собой

стационарную цепь Маркова некоторого фиксированного порядка $s \in \mathbb{N}$, не зависящего от n , и переходные вероятности цепи Маркова $\{x_i\}$ удовлетворяют следующей асимптотике при $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_{q=(q_1, \dots, q_s) \in V^s} \delta^2(q) = O(n^{-1}),$$

$$\delta(q) = P\{x_i = 0 | x_{i-1} = q_1, \dots, x_{i-s} = q_s\} - \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Для краткости s будем называть порядком марковской альтернативы H_1 .

Введем функцию энтропии L -вектора элементов тестируемой последовательности в случае истинной альтернативы H_1 и связанные величины:

$$h(L) = H(\Lambda\{x_1, \dots, x_L | H_1\}), \quad L > 0, \quad h(0) = 0,$$

$$\Delta h(L) = h(L) - h(L-1), \quad L > 0,$$

$$h^* = \lim_{L \rightarrow \infty} \Delta h(L) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{h(L)}{L}.$$

Величина h^* называется удельной энтропией случайной последовательности $\{x_i\}$ при истинной альтернативе H_1 .

Теорема 1. Пусть марковская альтернатива H_1 континуально сближается с нулевой гипотезой H_0 . Тогда МДРН(L)-тест имеет асимптотическую ошибку второго рода (4) с числом степеней свободы $d = 2^L - 1$ и параметром нецентральности вида

$$\lambda = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln 2 - \frac{h(L)}{L} \right). \quad (6)$$

Доказательство. Для применения формулы (4) достаточно доказать, что статистика хи-квадрат (3) при истинной альтернативе H_1 имеет асимптотическое нецентральное распределение хи-квадрат с параметром нецентральности (6). При истинной марковской альтернативе H_1 некоторого порядка s последовательность непересекающихся L -грамм $\Phi_L(\mathbf{x})$ длины $n' = \frac{n}{L}$ также представляет собой цепь Маркова некоторого порядка s' . Нормированные частоты $\hat{\pi}_z = \frac{f_z}{n'}$, $z \in V^L$, $f = \Psi(\Phi_L(\mathbf{x}))$, представляют собой состоятельные асимптотически нормальные [3; 4] статистические оценки вероятностей L -грамм $\pi_z = P\{(x_1, \dots, x_L) = z | H_1\}$. При континуальном сближении альтернатив распределение $\pi = (\pi_z)_{z \in V^L}$ сходится к равномерному закону $U(V^L)$, и касательные пространства точек π и $U(V^L)$ в пространстве вероятностных распределений на V^L совпадают, равно как и асимптотические ковариационные матрицы Σ_0 и Σ_1 оценок $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_z)_{z \in V^L}$ в случае нулевой гипотезы H_0 и альтернативы H_1 соответственно. Точке $U(V^L)$ в ее собственном касательном пространстве отвечает нулевой вектор, а близкой к $U(V^L)$ точке p – вектор, который будем обозначать $v(p)$. Статистика хи-квадрат (3) МДРН(L)-теста представляет собой квадрат нормы вектора $\sqrt{n'} \cdot v(\hat{\pi})$ в стандартной метрике Фишера [3]. При нулевой гипотезе H_0 вектор $\sqrt{n'} \cdot v(\hat{\pi})$ имеет асимптотическое центрированное стандартное нормальное распределение, а при альтернативе H_1 ввиду равенства асимптотических ковариационных матриц $\Sigma_0 = \Sigma_1$ – асимптотическое нецентрированное стандартное нормальное распределение со средним $\mu = \sqrt{n'} \cdot v(\pi)$, и, следовательно, статистика хи-квадрат S имеет асимптотическое нецентральное распределение хи-квадрат с параметром нецентральности

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n' \rightarrow \infty} \|\mu\|^2 = 2 \lim_{n' \rightarrow \infty} n' \cdot \text{KL}(\pi; U(V^L)) = \\ &= 2 \lim_{n' \rightarrow \infty} n' \left(\ln |V^L| - H(\Delta(x_1, \dots, x_L | H_1)) \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln 2 - \frac{h(L)}{L} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Тест многомерной дискретной равномерности по пересекающимся L -отрезкам

Тест многомерной дискретной равномерности по пересекающимся L -отрезкам (далее – МДРП(L)-тест) предназначен для проверки гипотезы согласия наблюдаемой последовательности L -векторов с L -мерным дискретным равномерным распределением. Данный тест позволяет обнаруживать отклонения от L -мерного дискретного равномерного распределения типа рекуррентной марковской зависимости порядка $s < L$ (меньшего, чем размерность вектора L).

Статистика хи-квадрат МДРП(L)-теста имеет вид

$$S = \chi^2(\varphi_L(\mathbf{x})) - \chi^2(\varphi_{L-1}(\mathbf{x})) = \sum_{z \in V^L} \frac{(f_z - n/2^L)^2}{n/2^L} - \sum_{z \in V^{L-1}} \frac{(g_z - n/2^{L-1})^2}{n/2^{L-1}}, \quad (7)$$

где $f = \psi(\varphi_L(\mathbf{x}))$ и $g = \psi(\varphi_{L-1}(\mathbf{x}))$ – частоты встречаемости среди n пересекающихся L -грамм и $(L-1)$ -грамм соответственно в закольцованной последовательности $\mathbf{x}$.

Теорема 2. Пусть марковская альтернатива H_1 континуально сближается с нулевой гипотезой H_0 . Тогда МДРП(L)-тест имеет асимптотическую ошибку второго рода (4) с числом степеней свободы $d = 2^{L-1}$ и параметром нецентральности вида

$$\lambda = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln 2 - \Delta h(L)). \quad (8)$$

Доказательство. Как и в теореме 1, для применения формулы (4) достаточно доказать, что статистика хи-квадрат (7) при истинной альтернативе H_1 имеет асимптотическое нецентральное распределение хи-квадрат с параметром нецентральности (8). Обозначим

$$p^k = (p_z^k)_{z \in V^k}, \quad p_z^k = \frac{P\{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = (z, 0)\}}{P\{(x_1, \dots, x_k) = z\}}.$$

Для цепи Маркова порядка s вектор p^s – стандартный параметр модели (вектор переходных вероятностей в нулевой знак) и система координат в пространстве $\text{MC}(s)$ цепей Маркова порядка s . При этом вектор p^k , $k < s$, представляет точку в подпространстве $\text{MC}(k) \subset \text{MC}(s)$ цепей Маркова меньшего порядка k :

$$p^k = \wp_{s \rightarrow k}(p^s),$$

где $\wp_{s \rightarrow k}$ – оператор m -проекции [3] экспоненциального семейства $\text{MC}(s)$ [5] на свое экспоненциальное подсемейство $\text{MC}(k)$. На уровне касательных пространств m -проекция действует как ортогональная проекция: можно считать [3], что касательное пространство T^s в точке p^s в пространстве $\text{MC}(s)$ содержит в качестве подпространства касательное пространство T^k в точке p^k в пространстве $\text{MC}(k)$, и оператор $\wp_{s \rightarrow k} : T^s \rightarrow T^k$ – ортогональный проектор в метрике Фишера.

Не ограничивая общности, можем считать, что $s > L$. Рассмотрим стандартные статистические оценки параметров цепи Маркова порядка k [4]:

$$\hat{p}^k = (\hat{p}_z^k)_{z \in V^k}, \quad \hat{p}_z^k = \frac{f_{(z,0)}}{g_z}, \quad f = \psi(\varphi_{k+1}(\mathbf{x})), \quad g = \psi(\varphi_k(\mathbf{x})).$$

При истинной марковской альтернативе H_1 порядка s оценка $\hat{p}^s$ состоятельна, асимптотически нормальна и эффективна [4] (достигает границы Крамера – Рао), и оценка $\hat{p}^{L-1} = \wp_{s \rightarrow L-1}(\hat{p}^s)$ благодаря описанным выше проективным свойствам отображения $\wp$ обладает аналогичными свойствами асимптотической нормальности и эффективности. Пусть точка $q^k = \left(q_z^k \equiv \frac{1}{2}\right)_{z \in V^k}$ отвечает чисто случайной последовательности (нулевой гипотезе H_0). Как и в доказательстве теоремы 1, при континуальном сближении альтернатив касательные пространства точек p^{L-1} и q^{L-1} совпадают, равно как и асимптотические ковариационные матрицы оценки $\hat{p}^{L-1}$ при истинной нулевой гипотезе H_0 и истинной альтернативе H_1 соответственно. Поэтому в касательном пространстве точки q^{L-1} вектор $\sqrt{n} \cdot v(\hat{p}^{L-1})$ имеет асимптотическое нецентрированное стандартное нормальное распределение со средним $\mu = \sqrt{n} \cdot v(p^{L-1})$, и квадрат нормы

$$S' = \left\| \sqrt{n} \cdot v(\hat{p}^{L-1}) \right\|^2$$

имеет асимптотическое нецентральное распределение хи-квадрат с параметром нецентральности

$$\lambda' = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu\|^2 = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \text{KL}(p^{L-1}; q^{L-1}). \quad (9)$$

Метрика Фишера в пространстве $\text{MC}(L-1)$ представляет собой разность [3; 5] метрик Фишера в пространствах распределений на L -граммах и на $(L-1)$ -граммах, а именно информационная матрица Фишера

$$I(p^{L-1}) = I_L(p^{L-1}) - I_{L-1}(p^{L-1}),$$

где $I_k(p^{L-1})$ – информационная матрица Фишера распределения k -грамм $(x_i)_{i=1}^k$ относительно параметра p^{L-1} . Поэтому $S' = S$ (разность (7) есть разность квадратов касательных векторов в метрике Фишера между L -граммами и $(L-1)$ -граммами, чьи распределения задаются цепью Маркова порядка $L-1$ с параметром $\hat{p}^{L-1}$). Аналогично распадается в разность дивергенция Кульбака – Лейблера в формуле (9):

$$\begin{aligned} \text{KL}(p^{L-1}; q^{L-1}) &= \text{KL}(\Lambda\{x_1, \dots, x_L | H_1\}; U(V^L)) - \text{KL}(\Lambda\{x_1, \dots, x_{L-1} | H_1\}; U(V^{L-1})) = \\ &= L \ln 2 - h(L) - (L-1) \ln 2 + h(L-1) = \ln 2 - \Delta h(L), \end{aligned}$$

что в объединении с выражением (9) дает $\lambda = \lambda'$ (см. формулу (8)). Таким образом, мы доказали, что $S' = S$ имеет асимптотическое нецентральное распределение хи-квадрат с параметром нецентральности $\lambda' = \lambda$. Теорема доказана.

Вычисления в терминах отклонения переходных вероятностей марковской альтернативы

Пределы (6), (8) могут быть выражены в терминах функции (5) отклонений переходных вероятностей марковской альтернативы H_1 от чистой случайности.

Лемма 1. Пусть марковская альтернатива H_1 порядка $s \geq 0$ континуально сближается с нулевой гипотезой H_0 . Тогда в обозначениях определения 1 имеет место следующее асимптотическое соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln 2 - \Delta h(L)) = 2\rho_{\min\{s, L-1\}}, \quad L \geq 1, \quad (10)$$

$$\rho_r = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot M_2 \{E\{\delta(q) | q_1, \dots, q_r\}\}, \quad 0 \leq r < s,$$

где $M_2\{\xi\} = E\{\xi^2\}$ для случайной величины $\xi \in \mathbb{R}$, случайный двоичный вектор $q = (q_1, \dots, q_s) \in V^s$ равномерно распределен.

Доказательство. Используем обозначения доказательства теоремы 2. Как отмечалось в указанном доказательстве, $\Delta h(r+1)$ есть удельная энтропия цепи Маркова порядка r с заданным распределением $(r+1)$ -грамм, поэтому при $r \geq s$ эта разность равна удельной энтропии марковской альтернативы H_1 порядка s , а при $r < s$ – удельной энтропии проекции $\wp_{s \rightarrow r}(H_1)$. Разность $\ln 2 - \Delta h(r+1)$ равна дивергенции Кульбака – Лейблера между чисто случайной цепью Маркова (гипотеза H_0) и проекцией $\wp_{s \rightarrow r}(H_1)$. При малых δ для $s = r$ эта дивергенция асимптотически эквивалентна [3] величине $\frac{1}{2} \sum_{q, q' \in V^s} \delta(q)\delta(q')I_{q, q'}$, где $I \in \mathbb{R}^{2^s \times 2^s}$ – информационная матрица Фишера цепи Маркова порядка s относительно параметра δ в точке $\delta \equiv 0$. Матрица I диагональна [4] со всеми диагональными элементами $I_{q, q} \equiv 2^{2-s}$, откуда получаем соотношение (10) для $L > s$. Ортогональный проектор $\wp_{s \rightarrow r}: T^s \rightarrow T^r$ относительно единичной с точностью до множителя матрицы Фишера I действует на функцию $\delta(q)$ усреднением по $q_{r+1}, \dots, q_s$ при фиксированных $q_1, \dots, q_r$:

$$\wp_{s \rightarrow r}(\delta) = \tilde{\delta}: V^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\delta}(q_1, \dots, q_r) = E\{\delta(q) | q_1, \dots, q_r\},$$

откуда по аналогии со случаем $r = s$ при $r < s$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln 2 - \Delta h(r+1)) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot M_2 \{ \tilde{\delta}(q_1, \dots, q_r) \},$$

что эквивалентно соотношению (10) для $L \leq s$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть марковская альтернатива H_1 порядка $s \geq 0$ континуально сближается с нулевой гипотезой H_0 . Тогда величина (6) в обозначениях леммы 1 имеет вид

$$\lambda = 4 \frac{\omega_{L-1}}{L}, \quad \omega_r = \sum_{i=0}^r \rho_{\min\{s, i\}}. \quad (11)$$

Величина (8) соответствует выражению

$$\lambda = 4 \rho_{\min\{s, L-1\}}. \quad (12)$$

Доказательство. С использованием тождества (10) выражение (12) прямо получается из параметра нецентральности (8), а выражение (11) – из параметра нецентральности (6), представленного как деленная на L частичная сумма левых частей тождества (10). Следствие доказано.

Таким образом, для вычисления асимптотической вероятности ошибки второго рода МДРН(L)-теста и МДРП(L)-теста при континуальном сближении марковской альтернативы H_1 с нулевой гипотезой H_0 нужно вычислить асимптотическое значение параметра нецентральности λ и подставить его в формулу (4). В тех простых случаях, когда марковская альтернатива H_1 допускает явное выражение функции $h(L)$, значение λ для обоих тестов может быть вычислено непосредственно по формулам (6) и (8). В общем случае следует использовать формулы (11) и (12). Приведем примеры вычисления параметра нецентральности λ обоими способами.

Рассмотрим альтернативу H_1 , представляющую собой цепь Маркова порядка s с одной частичной связью $MC(s, 1)$ [6], так что переходная вероятность $P\{x_t = 0 | x_{t-1}, \dots, x_{t-s}\} = \frac{1}{2} + (-1)^{x_{t-s}} \delta$ зависит только от x_{t-s} , δ – малое отклонение ($|\delta| \ll 1$). Тогда цепь Маркова $\{x_t\}$ распадается на s независимых цепей Маркова первого порядка $\{x_{st+k}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $k = 1, \dots, s$, члены которых чередуются в $\{x_t\}$. К отрезку $x_1, \dots, x_L$ длины L последовательности $\{x_t\}$ применим взаимно однозначное (а следовательно, сохраняющее энтропию) преобразование $(x_1, \dots, x_L) \rightarrow (y_1, \dots, y_L)$, где $y_i = x_i$ при $i \leq s$ и $y_i = x_i \oplus x_{i-s}$ при $i > s$. Непосредственно видно, что $\{y_i\}$ независимы в совокупности, причем $P\{y_i = 0\} = \frac{1}{2}$ при $i \leq s$ и $P\{y_i = 0\} = \frac{1}{2} + \delta$ при $i > s$. Таким образом,

$$h(L) = H(\Lambda\{x_1, \dots, x_L\}) = H(\Lambda\{y_1, \dots, y_L\}) = \sum_{i=1}^L H(\Lambda\{y_i\}) = \begin{cases} L \ln 2, & L \leq s, \\ s \ln 2 + (L-s)h^*, & L > s, \end{cases}$$

где удельная энтропия

$$h^* = -\left(\frac{1}{2} + \delta\right) \ln\left(\frac{1}{2} + \delta\right) - \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \ln\left(\frac{1}{2} - \delta\right) = \ln 2 - 2\delta^2 + O(\delta^4).$$

Отсюда при $L \leq s$ имеем $\lambda = 0$ (неразличимость гипотез H_0 и H_1) как для МДРН(L)-теста (формула (6)), так и для МДРП(L)-теста (формула (8)). При $L > s$ для МДРН(L)-теста $\lambda = 4\left(1 - \frac{s}{L}\right)\kappa$, для МДРП(L)-теста $\lambda = 4\kappa$, где $\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} n\delta^2$. Эти формулы верны и в случае $s = 0$, когда марковская альтернатива $MC(0, 1)$ превращается в схему независимых испытаний Бернулли (на рис. 1–5 обозначена как Ber).

Теперь рассмотрим альтернативу H_1 , представляющую собой цепь Маркова порядка s с почти идеальными переходными вероятностями, нарушенными только для одной из 2^s предысторий:

$$P\{x_t = 0 | x_{t-1}, \dots, x_{t-s}\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x_{t-1}, \dots, x_{t-s}) \neq \tilde{h}, \\ \frac{1}{2} + \delta, & (x_{t-1}, \dots, x_{t-s}) = \tilde{h}, \end{cases}$$

где $\vec{h} = (\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_s) \in V^s$ – некоторая выделенная «плохая» предыстория. В этом случае функция (5) принимает вид $\delta(q) = \delta \cdot 1\{q = \vec{h}\}$. Для вычислений согласно лемме 1 полагаем q чисто случайным двоичным s -вектором. Обозначим $q' = (q_i)_{i=1}^r$, $q'' = (q_i)_{i=r+1}^s$, $\vec{h}' = (\vec{h}_i)_{i=1}^r$, $\vec{h}'' = (\vec{h}_i)_{i=r+1}^s$. Тогда

$$\begin{aligned} E\{\delta(q)|q'\} &= E\{\delta \cdot 1\{q' = \vec{h}'\} \cdot 1\{q'' = \vec{h}''\}|q'\} = \delta \cdot 1\{q' = \vec{h}'\} \cdot E\{1\{q'' = \vec{h}''\}|q'\} = \\ &= \delta \cdot 1\{q' = \vec{h}'\} \cdot E\{1\{q'' = \vec{h}''\}\} = \delta \cdot 1\{q' = \vec{h}'\} \cdot P\{q'' = \vec{h}''\} = 2^{r-s} \delta \cdot 1\{q' = \vec{h}'\}, \end{aligned}$$

$$M_2\{E\{\delta(q)|q'\}\} = 2^{2r-2s} \delta^2 P\{q' = \vec{h}'\} = 2^{r-2s} \delta^2,$$

$$\rho_r = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot M_2\{E\{\delta(q)|q'\}\} = 2^{r-2s} \kappa,$$

$$\omega_r = 2^{-2s} \kappa \cdot \begin{cases} 2^{r+1} - 1, & r \leq s, \\ (r-s+2)2^s - 1, & r > s. \end{cases}$$

Подстановка найденных выражений в формулы (11) и (12) дает значения λ для МДРН(L)-тестов и МДРП(L)-тестов соответственно.

Численные примеры

На рис. 1–5 приведены графики зависимости вероятности ошибки второго рода β МДРН(L)-теста и МДРП(L)-теста от размера выборки n и от параметра δ отклонения марковской альтернативы H_1 от нулевой гипотезы H_0 . Для вычислений применялась формула (4) с подстановкой значений параметра нецентральности λ , найденных по формулам (6), (8), (11), (12). Оценки сверху для используемой в соотношении (4) функции $F_{\chi^2_{d,\lambda}}(\cdot)$ приведены в [7]. Вычисление этой функции встроено во многие среды, например в Python и Wolfram.

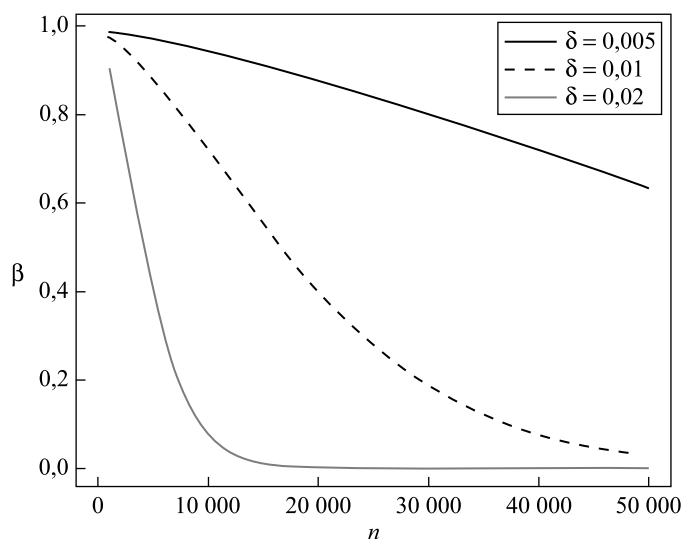


Рис. 1. Зависимость вероятности ошибки второго рода β от размера выборки n для теста *Monobit* (МДРН(1)):

$$H_1 = \text{Ber}, \alpha = 0.01, \delta \in \{0.005, 0.01, 0.02\}$$

Fig. 1. Type II error probability β plotted against the length n of the binary sequence for the *Monobit* test:

$$H_1 = \text{Ber}, \alpha = 0.01, \delta \in \{0.005, 0.01, 0.02\}$$

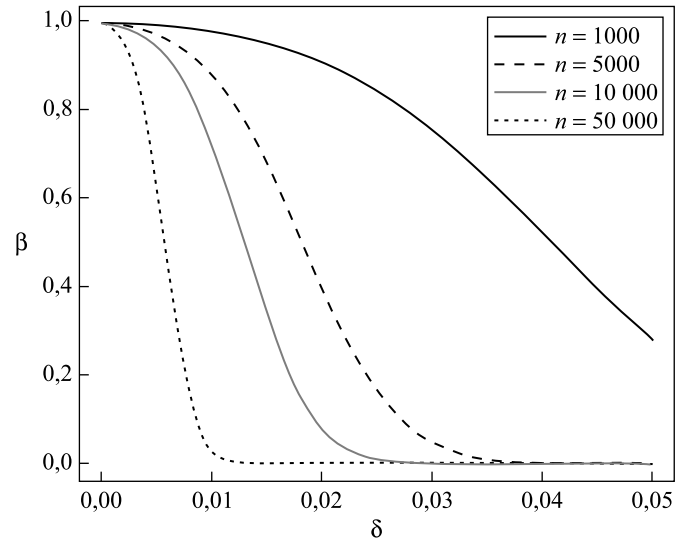


Рис. 2. Зависимость вероятности ошибки второго рода β от параметра δ для теста *Monobit* (МДРН(1)):
 $H_1 = \text{Ber}, \alpha = 0,01, n \in \{1000, 5000, 10\,000, 50\,000\}$

Fig. 2. Type II error probability β plotted against the parameter δ for the *Monobit* test:
 $H_1 = \text{Ber}, \alpha = 0.01, n \in \{1000, 5000, 10\,000, 50\,000\}$

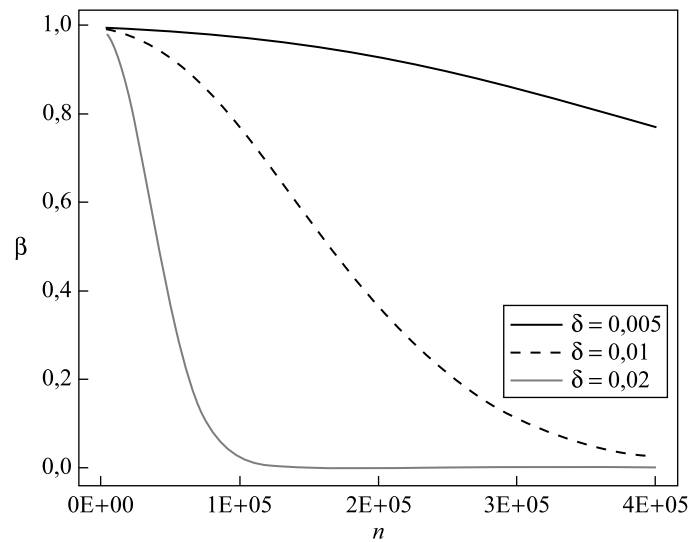


Рис. 3. Зависимость вероятности ошибки второго рода β от размера выборки n для теста МДРН(4):
 $H_1 = \text{MC}(3, 1), \alpha = 0,01, \delta \in \{0,005, 0,01, 0,02\}$

Fig. 3. Type II error probability β plotted against the length n of the binary sequence for the test of multidimensional discrete uniformity by non-overlapping 4-tuples:
 $H_1 = \text{MC}(3, 1), \alpha = 0.01, \delta \in \{0.005, 0.01, 0.02\}$

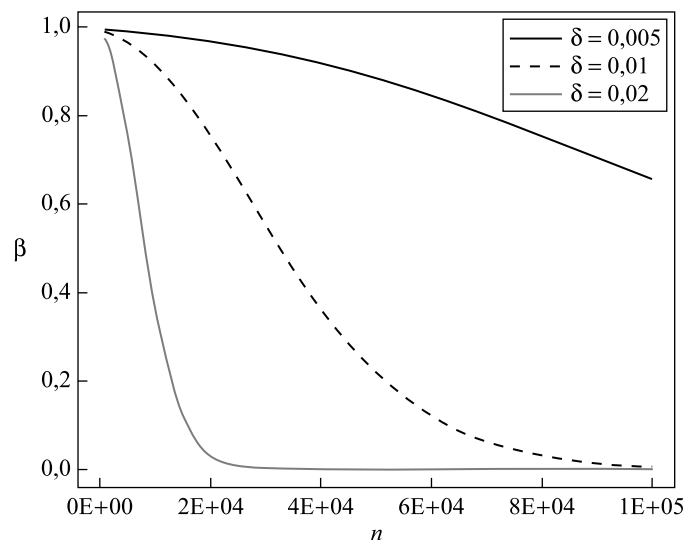


Рис. 4. Зависимость вероятности ошибки второго рода β от размера выборки n для теста МДРП(4):

$$H_1 = MC(s, 1), 0 \leq s \leq 3, \alpha = 0.01, \delta \in \{0.005, 0.01, 0.02\}$$

Fig. 4. Type II error probability β plotted against the length n of the binary sequence for the test of multidimensional discrete uniformity by overlapping 4-tuples:

$$H_1 = MC(s, 1), 0 \leq s \leq 3, \alpha = 0.01, \delta \in \{0.005, 0.01, 0.02\}$$

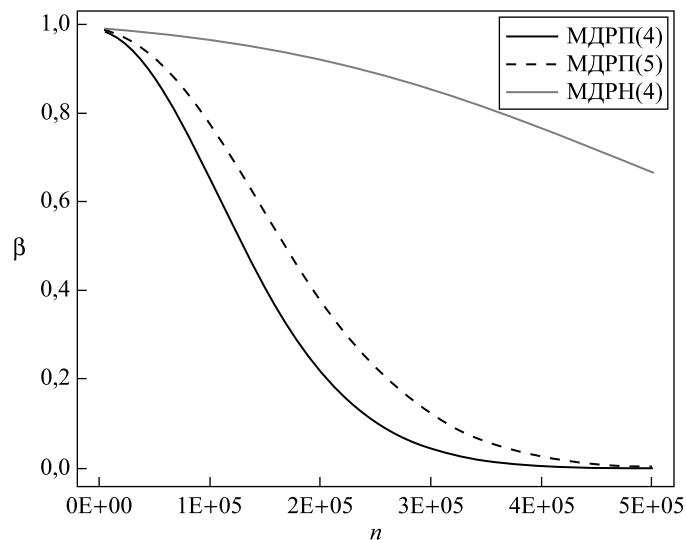


Рис. 5. Зависимость вероятности ошибки второго рода β от размера выборки n для тестов МДРП(4), МДРП(5) и МДРН(4):

$$H_1 = MC(3, 1), \alpha = 0.01, \delta = 0.005$$

Fig. 5. Type II error probability β plotted against the length n of the binary sequence for the tests of multidimensional discrete uniformity by overlapping 4-tuples (МДРП(4)), by overlapping 5-tuples (МДРП(5)), and by non-overlapping 4-tuples (МДРН(4)):

$$H_1 = MC(3, 1), \alpha = 0.01, \delta = 0.005$$

Библиографические ссылки

1. Rukhin A, Soto J, Nechvatal J, Smid M, Barker E, Leigh S, et al. *A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications: NIST SP 800-22. Revision 1a* [Internet]. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology; 2010 [cited 2021 September 20]. 131 p. Available from: <https://csrc.nist.gov/publications/detail/sp/800-22/rev-1a/final>.
2. Трубей АИ, Палуха ВЮ, Пирштук ИК, Мальцев МВ, Рашченя НА. Методика тестирования случайных последовательностей на основе статистического расстояния и закона повторного логарифма. В: *Проблемы защиты информации (с грифом «Секретно»)*. Номер 16. Минск: БГУ; 2020. с. 64–94.
3. Amari S, Nagaoka H. *Methods of information geometry*. Harada D, translator. Providence: American Mathematical Society; 2000. 206 p. (Translations of mathematical monographs; volume 191). Co-published by the Oxford University Press.
4. Billingsley P. Statistical methods in Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1961;32(1):12–40. DOI: 10.1214/aoms/1177705136.
5. Hayashi M, Watanabe S. Information geometry approach to parameter estimation in Markov chains. *The Annals of Statistics*. 2016;44(4):1495–1535. DOI: 10.1214/15-AOS1420.
6. Харин ЮС, Петлицкий АИ. Цепь Маркова s -го порядка с r частичными связями и статистические выводы о ее параметрах. *Дискретная математика*. 2007;19(2):109–130. DOI: 10.4213/dm26.
7. Волошко ВА, Вечерко ЕВ. Новые верхние границы для функции нецентрального хи-квадрат распределения. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;1:70–74. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-70-74.

References

1. Rukhin A, Soto J, Nechvatal J, Smid M, Barker E, Leigh S, et al. *A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications: NIST SP 800-22. Revision 1a* [Internet]. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology; 2010 [cited 2021 September 20]. 131 p. Available from: <https://csrc.nist.gov/publications/detail/sp/800-22/rev-1a/final>.
2. Trubey AI, Palukha VYu, Pirshtuk IK, Mal'tsev MV, Rashcheny NA. [A technique for testing random sequences based on statistical distance and the law of the iterated logarithm]. In: *Problemy zashchity informatsii (s grifom «Sekretno»)*. Nomer 16 [Problems of information security (with the heading «Secret»). Number 16]. Minsk: Belarusian State University; 2020. p. 64–94. Russian.
3. Amari S, Nagaoka H. *Methods of information geometry*. Harada D, translator. Providence: American Mathematical Society; 2000. 206 p. (Translations of mathematical monographs; volume 191). Co-published by the Oxford University Press.
4. Billingsley P. Statistical methods in Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1961;32(1):12–40. DOI: 10.1214/aoms/1177705136.
5. Hayashi M, Watanabe S. Information geometry approach to parameter estimation in Markov chains. *The Annals of Statistics*. 2016;44(4):1495–1535. DOI: 10.1214/15-AOS1420.
6. Kharin YS, Petlitskii AI. [A Markov chain of order s with r partial connections and statistical inference on its parameters]. *Diskretnaya matematika*. 2007;19(2):109–130. Russian. DOI: 10.4213/dm26.
7. Voloshko VA, Vecherko EV. New upper bounds for noncentral chi-square cdf. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;1:70–74. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-70-74.

Получена 18.10.2021 / исправлена 14.02.2022 / принята 14.02.2022.
Received 18.10.2021 / revised 14.02.2022 / accepted 14.02.2022.

УДК 519.217.2

МОНОТОННОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ НА КОНЕЧНЫХ РЕШЕТКАХ

А. О. ЗАДОРЖНЮК¹⁾

¹⁾ЭПАМ Системз, ул. Академика Купревича, 1, корп. 1, 220141, г. Минск, Беларусь

Рассматриваются два способа упорядочить вершины графа относительно некоторой его фиксированной вершины, связанных со случайными блужданиями на нем. Первый способ – порядок вершин в соответствии с вероятностью того, что случайное блуждание фиксированной длины закончится в каждой из них. Исследуемое в этой части блуждание является «ленивым», т. е. вместо очередного шага может оставаться на месте. Выделен класс графов, для которых такой порядок совпадает со слабым порядком по геодезическим расстояниям до соответствующих вершин. Приведены примеры представителей данного класса – n -мерные решетки. Второй способ упорядочивания – резисторные расстояния до выбранной вершины. Для класса графов установлена пара вершин, между которыми достигается максимальное по всему графу резисторное расстояние. Приведены примеры представителей этого класса, включая n -мерные решетки.

Ключевые слова: случайные блуждания; резисторное расстояние; решетки.

Благодарность. Автор выражает благодарность заведующему кафедрой высшей математики БГУ М. М. Васильковскому за постановку задачи и участие в обсуждении, а также рецензенту за выявление существенных недостатков статьи.

MONOTONICITY OF RANDOM WALKS' STATES ON FINITE GRIDS

A. O. ZADOROZHNUYK^a

^aEPAM Systems, 1 Akademika Kupreviča Street, 1 building, Minsk 220141, Belarus

In this paper two ways to order the nodes of a graph with respect to an arbitrary node are considered, both connected to random walks on the graph. The first one is the order according to probabilities of states of a random walk of fixed length started in that arbitrary node. The walks considered here are lazy walks – instead of making a step they are allowed to stay in the same node. A class of graphs, where such order corresponds to the weak order by geodesic distances, was found. Square and toric n -dimensional grids are shown to be instances of this class. The second way of ordering is resistance distance to a fixed node. For another class of graphs, a pair of vertices with maximal resistance distance between them is established. Grids are again shown to be an example of graphs belonging to this class.

Keywords: random walks; resistance distance; grids.

Acknowledgements. The author is grateful to the head of the department of higher mathematics of the Belarusian State University M. M. Vaskouski for stating the problem and taking part in the discussion, as well as to the reviewer for pointing out significant flaws in this work.

Образец цитирования:

Задорожнюк АО. Монотонность вероятностей состояний случайного блуждания на конечных решетках. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022;1:38–45.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-38-45>

For citation:

Zadorozhnyuk AO. Monotonicity of random walks' states on finite grids. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022;1:38–45. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-38-45>

Автор:

Анна Олеговна Задорожнюк – системный аналитик.

Author:

Anna O. Zadorozhnyuk, system analyst.
a_zadorozhnyuk@mail.ru

Введение

Резисторное расстояние – метрика на графе, полезная для описания его кластерной структуры при анализе распространения информации [1; 2]. Его можно сопоставить с сопротивлением электрической цепи, соответствующей графу, где каждое ребро – это резистор. В отличие от геодезического расстояния резисторное расстояние зависит в большей степени от количества разных путей между вершинами, и геодезические расстояния мало что позволяют сказать о резисторных расстояниях. Однако для их исследования оказываются полезными изопериметрические неравенства [1; 3; 4].

Резисторные расстояния в графе можно анализировать не только путем соотнесения их со значениями сопротивлений в соответствующей электрической цепи, но и с помощью случайных блужданий. Так, резисторное расстояние между парой вершин пропорционально времени доступа – количеству шагов, которое сделает блуждание, прежде чем первый раз попадет из одной вершины в другую.

Случайные блуждания на графах Кэли симметрической группы и групп Коксетера были исследованы М. Бернштейн [5] и Г. Уайтом [6] соответственно. В частности, ими определено, как упорядочены вероятности того, что блуждание на n -м шаге окажется в каждой из вершин. На основе использовавшегося в указанных работах метода в настоящей статье устанавливается упорядоченность для другого класса графов, представителями которого являются в том числе решетки.

Что касается монотонности резисторных расстояний, то для ее исследования, как правило, не подходят точные формулы, хотя они и известны [7]. Знание формулы для точного значения оказывается полезным в редких случаях, таких как графы химических соединений [8; 9]. В [10] для класса графов определяется вершина с максимальным резисторным расстоянием относительно заданной вершины. В настоящей работе этот подход адаптируется так, чтобы параметрами были сразу две вершины вместо одной, и определяются пары вершин графа с максимальным сопротивлением между ними.

Случайные блуждания и слабый порядок

Случайное блуждание на графе – процесс перемещения по вершинам графа. Начавшись в некоторой вершине, блуждание на каждом шаге переходит в одну из смежных с текущей вершин с вероятностью, пропорциональной весу соединяющего их ребра. В данной статье рассматриваются невзвешенные графы, поэтому переходы в каждую из соседних вершин равновероятны. Блуждания, которые исследуются далее, называются «ленивыми», поскольку на каждом шаге они могут остаться в текущей вершине с той же вероятностью, что и совершить переход в каждую из соседних вершин.

Введем частичный (слабый) порядок на графе G относительно некоторой его вершины v : будем говорить, что $w \leq_v u$, если существует кратчайший путь из v в u , который содержит w .

Как показано в [6], для графов Кэли групп Коксетера верно следующее: для любого n и любых вершин $w \leq_e w'$ вероятность того, что блуждание длины n , начавшееся в e , закончится в w , не меньше, чем вероятность того, что оно закончится в w' . Для доказательства данного факта рассматриваются блуждания длины n , заканчивающиеся в каждой из двух смежных вершин, и строится инъекция множества путей до большей вершины во множество путей до меньшей вершины. Эту же идею мы применим в настоящей статье для исследования блужданий на решетках, но не ограничиваясь инъекциями, для построения которых используются свойства графов Кэли.

Граф G будем называть монотонным, если для любой его вершины v выполняется условие: для $\forall n \in \mathbb{N}$ и любых двух смежных вершин $w \leq_v u$ существует инъекция множества $P(u)$ путей длины n между v и u во множество путей $P(w)$ длины n между v и w , обладающая следующим свойством: если в пути $p(u) \in P(u)$ равны i -я и $(i+1)$ -я вершины, то и в соответствующем ему пути $p(w) \in P(w)$ эти вершины равны.

Теорема 1. Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$, где все графы G_i монотонны. Тогда для любых $v \in G$, $n \in \mathbb{N}$ и таких $w, w' \in G$, что $w \leq_v w'$, вероятность того, что случайное блуждание длины n заканчивается в w' , не больше, чем вероятность того, что оно заканчивается в w .

Доказательство. Введем координаты на графе G (каждому G_i будет соответствовать одно измерение). Вершины графов G_i пронумеруем произвольно (нам достаточно просто отличать их друг от друга). Таким образом, вершина $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ является произведением вершин с номерами x_i из графов G_i . Заметим, что расстояния в G выражаются через расстояния в G_i : $d_G(x, y) = \sum_{i=1}^m d_{G_i}(x_i, y_i)$.

Начнем с рассмотрения случая, когда w и w' смежны. Их координаты совпадают во всех измерениях, кроме одного. Обозначим их $(w_1, \dots, w_k, \dots, w_m)$ и $(w_1, \dots, w'_k, \dots, w_m)$. Блуждание $v, a'_2, \dots, a'_{n-1}, w'$ на графе G будем рассматривать покоординатно. Так, его компонента, относящаяся к k -й координате, – это блуждание длины n в монотонном графе G_k , заканчивающееся в w'_k . Для таких блужданий существует

инъекция во множество блужданий длины n , заканчивающихся в w_k . Тогда, чтобы получить инъекцию для блужданий в графе G , все координаты вершин в них, кроме k -й координаты, оставляем нетронутыми, а для k -х координат применяем упомянутую инъекцию на графе G_k . Убедимся, что полученные таким образом последовательности $v, a_2, \dots, a_{n-1}, w$ неразрывны и могут считаться блужданиями. Каждая пара соседних вершин a'_i, a'_{i+1} блуждания отличается максимум одной координатой. Если это k -я координата или $a'_i = a'_{i+1}$, то смежность a_i, a_{i+1} следует из смежности $a_{i,k}, a_{i+1,k}$ в графе G_k . Если же a'_i, a'_{i+1} отличаются какой-то другой j -й координатой, то они и продолжают отличаться только ею, потому что мы потребовали от инъекции на графе G_k , чтобы из $a'_{i,k} = a'_{i+1,k}$ следовало $a_{i,k} = a_{i+1,k}$.

Для несмежных вершин $w \leq_v w'$ инъекцию получим как композицию всех инъекций на кратчайшем пути из w' в w .

В качестве примера монотонных графов приведем C_m и P_m . В данном случае пронумеровать вершины, задавая координаты, для удобства можно по порядку, а не случайным образом. Будем рассматривать только отображения для смежных пар вершин, поскольку остальные являются их композицией. Не теряя общности, будем считать, что вершина, из которой начинается блуждание в C_m , имеет координату 0, и мы отображаем множество блужданий $P(x+1)$ во множество $P(x)$. Также будем полагать, что вершина белая, если она ближе к x , чем к $x+1$, и черная, если наоборот. Тогда, если m четное, есть два ребра, соединяющих вершины разных цветов: $(x, x+1)$ и $\left(x + \frac{m}{2}, x+1 + \frac{m}{2}\right)$. Будем называть эти ребра

серыми. Если же m нечетное, то вместо ребра $\left(x + \frac{m}{2}, x+1 + \frac{m}{2}\right)$ имеем серую вершину $x + \frac{m+1}{2}$. Для блуждания $0, a_2, \dots, a_{n-1}, x+1$ строим отображение следующим образом. Находим последнюю такую вершину a_j , что она либо сама является серой, либо лежит на белом конце серого ребра. Для $i \leq j$ задаем отображение как $l(a_i) = a_i$, а для $i > j$ — как $l(a_i) = (2x - a_i + 1) \bmod m$. Можно убедиться, что данное отображение меняет местами концы серых ребер, а также вершины, смежные с серой вершиной. Поэтому a_j смежна с $l(a_{j+1})$ (или равна ей), и в результате мы действительно получим случайное блуждание длины n , которое заканчивается в вершине $(2x - (x+1) + 1) \bmod m = x$.

Теперь рассмотрим P_m . Пусть вершина, где начинается блуждание, имеет номер k . Не теряя общности, будем строить отображение множества блужданий $P(x+1)$ во множество $P(x)$, где $x \geq k$. В данном случае мы имеем единственное серое ребро — $(x, x+1)$. В блуждании $0, a_2, \dots, a_{n-1}, x+1$ определим последнюю вершину $a_j = x$, являющуюся белым концом серого ребра. Для $i \leq j$ зададим отображение как $l(a_i) = a_i$, для $i > j$ — как $l(a_i) = a_i - 1$. Получившийся путь остается непрерывным, так как $l(a_{j+1}) = l(x+1) = x = l(a_j)$.

Имея эти отображения, мы можем использовать теорему 1 на произведениях циклов и цепей. В частности, заключаем следующее.

Следствие 1. Пусть граф G — m -мерная решетка (торическая в случае произведения циклов или квадратная в случае произведения цепей). Для любых $v \in G$, $n \in \mathbb{N}$ и таких $w, w' \in G$, что $w \leq_v w'$, вероятность того, что случайное блуждание длины n заканчивается в w' , не больше, чем вероятность того, что оно заканчивается в w .

Была предпринята попытка доказать аналогичное свойство для треугольной решетки (рис. 1), но, как оказалось, она не обладает подобной монотонностью.

Вычисления на решетке для $n = 5$, например, показывают, что блуждание, начавшееся в вершине v , отмеченной выколотой точкой (рис. 2), через три шага будет в вершине w с вероятностью $\approx 0,124$, а в самой вершине v с вероятностью $\approx 0,118$, в то время как $v \leq_v w$.

Экстремальность резисторных расстояний

Резисторное расстояние — метрика, значение которой соответствует сопротивлению между вершинами в электрической цепи, построенной по образцу графа, где ребра — единичные резисторы, одна из двух рассматриваемых вершин — источник, а другая — сток. Законы Кирхгофа позволяют построить систему уравнений для потенциалов в вершинах графа, решив которую по закону Ома можно найти и само сопротивление. Впрочем, даже для относительно небольших графов вычисление значений сопротивлений с помощью этой системы — достаточно трудоемкий процесс, и при исследовании свойств резисторного расстояния часто оказывается удобнее обходиться без него.

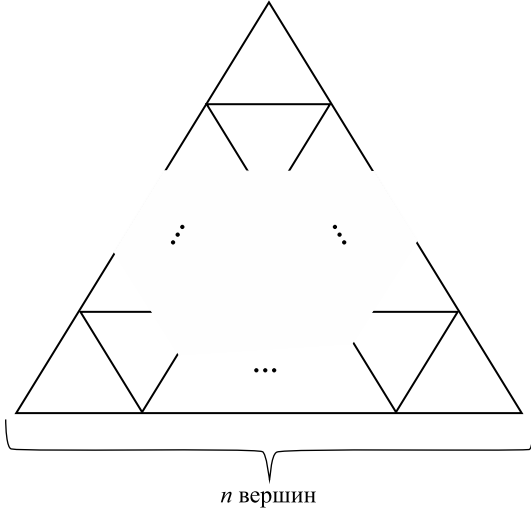


Рис. 1. Треугольная решетка
Fig. 1. Triangular grid

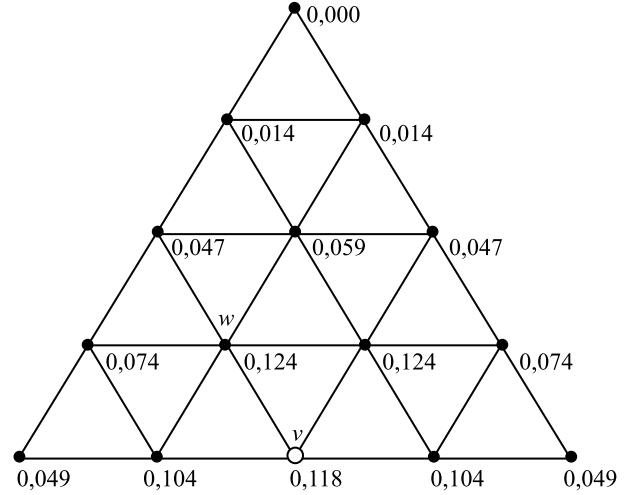


Рис. 2. Вероятности достижения каждой из вершин блужданием длины 3
Fig. 2. Probabilities for each node to be reached by a random walk of length 3

Сопротивление связано со случайными блужданиями. Величина, равная математическому ожиданию числа шагов, которое потребуется «неленивому» блужданию, начавшемуся в вершине a , чтобы впервые достигнуть вершины b , называется временем доступа, она пропорциональна резисторному расстоянию $R(a, b)$ с коэффициентом, равным числу ребер в графе.

Начнем с исследования положения в графе вершин, сопротивление между которыми максимально. Ниже будет продемонстрировано, что максимальное сопротивление достигается между наиболее удаленными друг от друга вершинами для таких графов, как, например, решетки и торы. Интуитивно может показаться, что тот же принцип будет действовать в общем случае, но это не так. Например, рассмотрим граф на рис. 3. Его диаметр 4, и единственная пара вершин с таким расстоянием между ними – это v и u . Сопротивление $R(u, v) \approx 0,44$, в то время как $R(x, w) \approx 0,56$, а $R(x, y) \approx 1,11$.

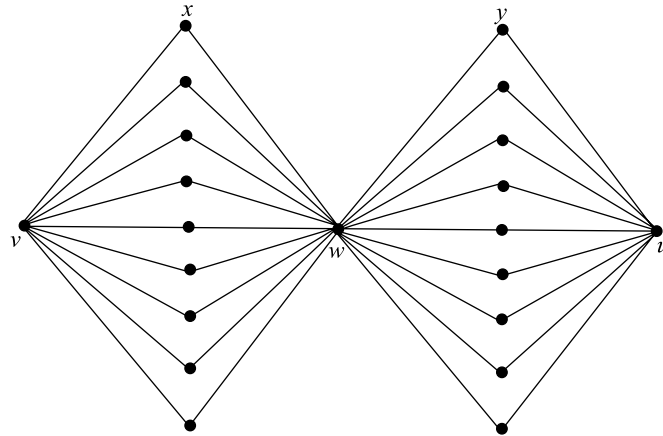


Рис. 3. Пример пары вершин с максимальным расстоянием и не максимальным сопротивлением
Fig. 3. Example of a pair of nodes with maximal distance but not maximal resistance between them

Вернемся к торам и решеткам, для которых интуитивное предположение оказывается верным. На графе $G(V, E)$, содержащем N вершин, введем функцию

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{(v_i, v_j) \in E} (x_i - x_j)^2$$

(значение x_i соответствует вершине v_i). Согласно [10]

$$\frac{1}{R(a, b)} = \inf_{x_i \in \mathbb{R}, x_a = 1, x_b = 0} f(x_1, \dots, x_N).$$

Причем инфимум в левой части достигается в стационарной точке функции f , координаты которой являются потенциалами в соответствующих вершинах сети.

Граф H , для которого существует такой порядок $(v_1, \dots, v_N)$ вершин, что для любого набора чисел $x_1 \leq \dots \leq x_N$ и любой его перестановки σ

$$f(x_1, \dots, x_N) \leq f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}),$$

будем называть упорядоченным. Следующая теорема – улучшенная версия теоремы 4 работы [10]: в ней сопротивление максимизируется сразу по двум вершинам упорядоченного графа, а не по одной.

Теорема 2. Пусть граф H упорядоченный. Тогда для любого связного графа G резисторное расстояние $R((a, v_i), (b, v_j))$ в графе $G \times H$ максимально при $i = 1, j = N$.

Доказательство. Пусть $\{u'_w\}_{w \in G \times H}$ – потенциалы в вершинах при условии, что потенциал в источнике (a, v_i) равен нулю, а потенциал в стоке (b, v_j) равен единице. Тогда если нам удастся показать, что система потенциалов $\{u_w\}_{w \in G \times H}$, где $u_{(a, v_1)} = 0$, а $u_{(b, v_N)} = 1$, такова, что $f(\{u_w\}_{w \in G \times H}) \leq f(\{u'_w\}_{w \in G \times H})$, то и теорема будет доказана.

Заметим, что, поскольку в точках-потенциалах достигается инфимум f , необязательно нужно использовать реальные значения потенциалов, достаточно придумать любой набор чисел $\{x_w\}_{w \in G \times H}$, соответствующих вершинам, где 0 и 1 соответствуют (a, v_1) и (b, v_N) , для которого выполнялось бы неравенство $f(\{x_w\}_{w \in G \times H}) \leq f(\{u'_w\}_{w \in G \times H})$.

Для каждой вершины $(c, v_k) \in G \times H$ зададим потенциалы $u_{(c, v_1)}, \dots, u_{(c, v_N)}$ как $u'_{(c, v_1)}, \dots, u'_{(c, v_N)}$, упорядоченные по возрастанию. Заметим, что при этом действительно получается $u_{(a, v_1)} = 0$, а $u_{(b, v_N)} = 1$. Покажем, что по сравнению с предыдущей системой значение f не увеличилось.

Рассмотрим граф H , ассоциированный с вершиной $c \in G$. Числа в нем теперь упорядочены в соответствии с порядком, заданным на самом графе, а значит, f на нем не превосходит f исходного графа.

Далее перейдем к ребрам, соединяющим два графа H в $G \times H$. Воспользуемся трансервенством: для наборов $x_1 \leq \dots \leq x_N$ и $y_1 \leq \dots \leq y_N$ и перестановки N чисел σ верно

$$\sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^N (x_k - y_{\sigma(k)})^2.$$

После произведенного нами упорядочивания числа в вершинах любых двух графов H из $G \times H$ представляют собой как раз такие односторонние наборы, а значит, f на них не больше, чем f исходного графа. Итак, требуемая система построена. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы может быть доказан и более общий результат (более слабая версия также приведена в [10]).

Теорема 3. Пусть G – декартово произведение упорядоченных графов H_i . Противоположными будем называть вершины $v = (v_1, \dots, v_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_n)$, где существует такой порядок на каждом H_i , что v_i и w_i – первая и последняя вершины в нем соответственно. Тогда максимальное сопротивление на G достигается на паре противоположных вершин.

Доказательство. Будем рассматривать H_1 с порядком вершин $(v_{1,1}, \dots, v_{1,N})$ как H из теоремы 2, а остальную часть произведения как G . Тогда для любых i, j, a, b верно $R((v_{1,i}, a), (v_{1,j}, b)) \leq R((v_{1,1}, a), (v_{1,N}, b))$, и пара вершин с максимальным сопротивлением – это $(v_{1,1}, \dots)$ и $(v_{1,N}, \dots)$. Аналогично можно рассматривать как H любой из графов H_i . В конце концов везде будут выбраны первая и последняя (в соответствии с порядком на H_i) вершины.

Следствие 2. Если G – произведение полных графов, цепей и циклов, то максимальное сопротивление в нем достигается на паре самых удаленных друг от друга вершин.

Доказательство. Согласно [10] цепь и цикл – упорядоченные графы. Порядок вершин цепи совпадает с тем, в котором они соединены в этой цепи. Вершины цикла C_N , пронумерованные по кругу,

можно упорядочить как $(v_1, v_2, v_N, v_3, v_{N-1}, \dots)$. Для вершин полного графа подойдет любой порядок. Таким образом, противоположными в этом графе являются вершины, расстояние между которыми максимально.

Для n -мерного куба можно пойти дальше и с помощью теоремы 2 доказать монотонность сопротивлений относительно геодезических расстояний.

Утверждение. Пусть v, u, w – такие вершины n -мерного куба, что для геодезических расстояний между ними верно $d(v, u) \leq d(v, w)$. Тогда $R(v, u) \leq R(v, w)$.

Доказательство. Будем задавать вершины куба через n -мерные векторы, состоящие из нулей и единиц. Поскольку куб – вершинно-транзитивный граф, можем зафиксировать $v = (0, \dots, 0)$. Кроме того, для любых вершин u и w , находящихся на одном и том же расстоянии k от v , существует автоморфизм куба, переводящий u в w и оставляющий v на месте, – это перестановка координат вектора, задающего вершину, которая возможна благодаря тому, что количество единиц в векторах для u и w одинаково. Таким образом, $R(v, u) = R(v, w)$, если $d(v, u) = d(v, w)$, и в дальнейшем при сравнении вершин с разными расстояниями до v можно без потери общности рассматривать любую пару таких вершин.

Очевидно, что если $u = v$, то из $d(v, u) \leq d(v, w)$ следует $0 = R(v, u) \leq R(v, w)$ (как метрика, резисторное расстояние неотрицательно). Пусть теперь $d(v, u) = k$, $d(v, w) = k + 1$, $0 < k < n$. В качестве u

выберем вершину $\left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0, 0 \right)$, в качестве w – вершину $\left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0, 1 \right)$. Теперь обратимся

к теореме 2. Граф G – это $(n - 1)$ -мерный куб, который задается первыми $n - 1$ координатами, за $H = P_2$

отвечает последняя координата, $a = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1} \right)$, $b = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1-k} \right)$. Таким образом, получаем, что

$R(v, u) \leq R(v, w)$. Учитывая, что это верно для всех k от 1 до $n - 1$, можем построить цепочку неравенств, в которой пары вершин по сопротивлениям будут упорядочены так же, как по расстояниям.

В целом, однако, резисторное расстояние является мерой скорее количества путей между вершинами, чем их длины, и подобное соответствие между ним и геодезическим расстоянием – довольно неестественное свойство. Даже для менее элементарных вариантов решеток и торов этого не наблюдается. На рис. 4 приведена развертка тора $C_5 \times C_{12}$ с сопротивлениями между одной фиксированной вершиной (выколота точка) и всеми остальными вершинами (значения округлены до третьего знака). Можно заметить, например, что вершины со значениями сопротивлений 0,742 и 0,698 находятся на расстояниях 2 и 3 от выколота точки соответственно.

На рис. 5 приведен пример немонотонности для решетки, где, в частности, сопротивлениям 1,451 и 1,510 соответствуют расстояния 5 и 3.

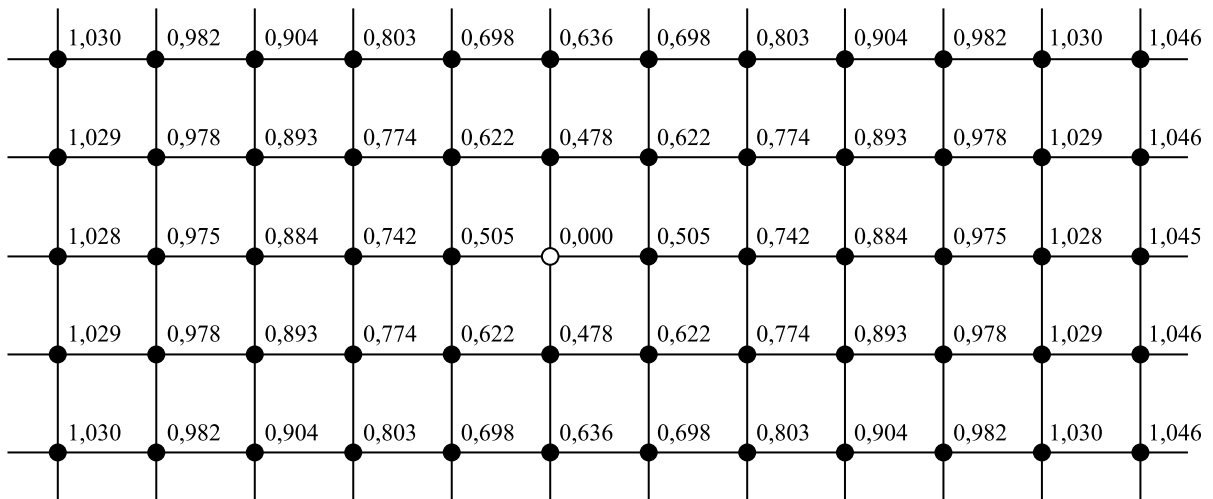


Рис. 4. Сопротивления в $C_5 \times C_{12}$

Fig. 4. Resistances in $C_5 \times C_{12}$

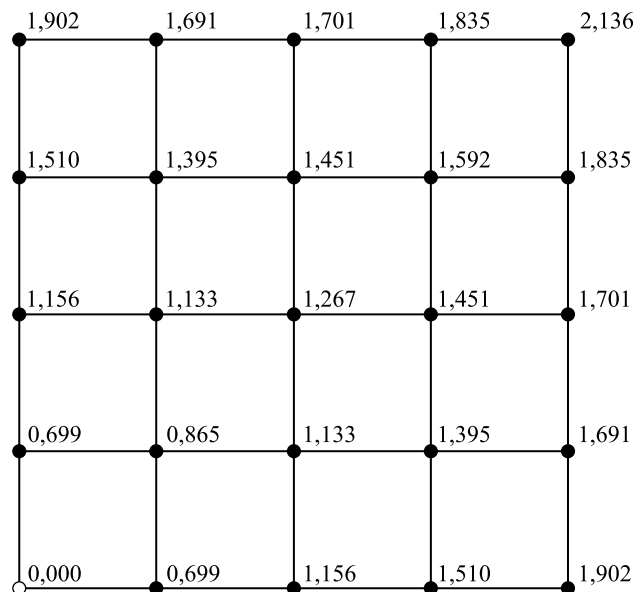


Рис. 5. Сопротивления в $P_5 \times P_5$

Fig. 5. Resistances in $P_5 \times P_5$

Заключение

В работе получены следующие результаты.

1. Выделен класс графов, для которых вероятности того, что случайное блуждание фиксированной длины закончится в данной вершине, упорядочены в соответствии со слабым порядком вершин по геодезическим расстояниям.
2. Для класса графов установлена пара вершин, между которыми достигается максимальное по всему графу резисторное расстояние.

Библиографические ссылки

1. von Luxburg U, Radl A, Hein M. Hitting and commute times in large random neighborhood graphs. *Journal of Machine Learning Research*. 2014;15(1):1751–1798.
2. Sauerwald T. *Randomized protocols for information dissemination* [dissertation]. Paderborn: University of Paderborn; 2008. 146 p.
3. Васильковский ММ, Задорожнюк АО. Асимптотическое поведение резисторных расстояний в графах Кэли. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2018;62(2):140–146. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146.
4. Vaskouski M, Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics*. 2017;227:121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044.
5. Bernstein M. Likelihood orders for some random walks on the symmetric group. arXiv:1306.5008v2 [Preprint]. 2014 [cited 2021 December 20]: [34 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1306.5008v2>.
6. White G. The weak Bruhat order for random walks on Coxeter groups. arXiv:1611.04098v1 [Preprint]. 2016 [cited 2021 December 20]: [9 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1611.04098v1>.
7. Bapat RB, Gutman I, Xiao W. A simple method for computing resistance distance. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 2003; 58(9–10):494–498. DOI: 10.1515/zna-2003-9-1003.
8. Li Q, Li S, Zhang L. Two-point resistances in the generalized phenylenes. *Journal of Mathematical Chemistry*. 2020;58(9): 1846–1873. DOI: 10.1007/s10910-020-01152-z.
9. Sardar MS, Pan X-F, Xu S-A. Computation of resistance distance and Kirchhoff index of the two classes of silicate networks. *Applied Mathematics and Computation*. 2020;381:125283. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125283.
10. Bollobás B, Brightwell G. Random walks and electrical resistances in products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1997; 73(1):69–79. DOI: 10.1016/S0166-218X(96)00002-9.

References

1. von Luxburg U, Radl A, Hein M. Hitting and commute times in large random neighborhood graphs. *Journal of Machine Learning Research*. 2014;15(1):1751–1798.
2. Sauerwald T. *Randomized protocols for information dissemination* [dissertation]. Paderborn: University of Paderborn; 2008. 146 p.
3. Vaskouski MM, Zadorozhnyuk AO. Asymptotic behavior of resistance distances in Cayley graphs. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2018;62(2):140–146. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146.
4. Vaskouski M, Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics*. 2017;227:121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044.

5. Bernstein M. Likelihood orders for some random walks on the symmetric group. arXiv:1306.5008v2 [Preprint]. 2014 [cited 2021 December 20]: [34 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1306.5008v2>.
6. White G. The weak Bruhat order for random walks on Coxeter groups. arXiv:1611.04098v1 [Preprint]. 2016 [cited 2021 December 20]: [9 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1611.04098v1>.
7. Bapat RB, Gutman I, Xiao W. A simple method for computing resistance distance. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 2003; 58(9–10):494–498. DOI: 10.1515/zna-2003-9-1003.
8. Li Q, Li S, Zhang L. Two-point resistances in the generalized phenylenes. *Journal of Mathematical Chemistry*. 2020;58(9): 1846–1873. DOI: 10.1007/s10910-020-01152-z.
9. Sardar MS, Pan X-F, Xu S-A. Computation of resistance distance and Kirchhoff index of the two classes of silicate networks. *Applied Mathematics and Computation*. 2020;381:125283. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125283.
10. Bollobás B, Brightwell G. Random walks and electrical resistances in products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1997; 73(1):69–79. DOI: 10.1016/S0166-218X(96)00002-9.

Получена 12.01.2022 / исправлена 14.02.2022 / принята 14.02.2022.
Received 12.01.2022 / revised 14.02.2022 / accepted 14.02.2022.

УДК 519.2

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ МАРШАЛЛА – ОЛКИНА, ПОРОЖДЕННАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕЙССЬЕ, ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДАННЫХ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ

Дж. Т. ЭГВЕРИДО¹⁾

¹⁾Федеральный университет нефтяных ресурсов в Эффуруне, шт. Дельта, Нигерия

Точность математических выводов зависит от плана эксперимента и принятой модели. В настоящем исследовании для описания данных времени жизни использовано обобщенное распределение вероятностей Маршалла – Олкина, порожденное распределением Тейссье. Характеристики предложенной модели изучены и представлены в завершённой форме. Показано, что в частных случаях интенсивность отказов может иметь формы J и U , убывать и возрастать. Представлены результаты имитационного моделирования с использованием метода Монте-Карло для различных конфигураций параметров при меняющихся размерах выборки. На основании полученных результатов имитационного моделирования и проведенного анализа качества соответствия модели реальным данным времени жизни установлено, что исследованная в работе модель является гибкой, хорошо интерпретируемой и применимой в сравнении с другими двухпараметрическими распределениями вероятностей.

Ключевые слова: распределение Гомперца; распределение Маршалла – Олкина; распределения, порожденные распределением Тейссье; распределение Тейссье.

Благодарность. Исследование проводилось без финансовой поддержки.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

THE MARSHALL – OLKIN TEISSIER GENERATED MODEL FOR LIFETIME DATA

J. T. EGHWERIDO^a

^aFederal University of Petroleum Resources Effurun, Delta State, Nigeria

An accurate mathematical inference depends on the experimental design and the model adopted in the process. Thus, in this study Marshall – Olkin Teissier generated distribution was used to present the distribution of the true nature of lifetime data. The characteristics of the proposed model were examined in a closed form. The behaviour of the new model indicated that the hazard rate of the submodels could be J - and U -shaped, decreasing and increasing. Monte Carlo simulations were presented for different configurations of parameters with varying sizes. The results of the simulation and goodness-of-fit of the real lifetime data show that the Marshall – Olkin Teissier generated model is flexible, tractable and applicable when compared to some classical two parameters distributions.

Keywords: Gompertz distribution; Marshall – Olkin distribution; Teissier generated distributions; Teissier distribution.

Acknowledgements. No financial grant for this research.

Conflict of interest. The author declares no potential conflict of interests.

Образец цитирования:

Эгверидо ДжТ. Вероятностная модель Маршалла – Олкина, порожденная распределением Тейссье, для описания данных времени жизни. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;1: 46–65 (на англ.).
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-46-65>

For citation:

Eghwerido JT. The Marshall – Olkin Teissier generated model for lifetime data. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;1:46–65.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-46-65>

Автор:

Джозеф Томас Эгверидо – кандидат физико-математических наук; преподаватель кафедры статистики.

Author:

Joseph Thomas Eghwerido, PhD (physics and mathematics); lecturer at the department of statistics.
eghwerido.joseph@fupre.edu.ng
<https://orcid.org/0000-0001-8986-753X>

Introduction

An accurate mathematical conclusion is drawn when an accurate, flexible and applicable statistical distribution is used to express the true nature of the data set obtained from the scenario. However, many statistical distributions have been used in the fields of survival analysis, quality control, reliability theory, ecology, economics, medical sciences, actuarial science and others in modelling the behaviour of lifetime processes. Of utmost importance is the use of probability in ascertaining the quality, quantity and control of random processes. This is the result of the inherent stochastic nature of random processes. Thus a classical probability generator is a probability distribution that can generate several other recent probability densities.

The Teissier distribution is one of the statistical distributions with a parsimonious parameter like the exponential distribution in modelling lifespan scenarios and mean residual life functions with Gompertz, exponential and Weibull characteristics in modelling stochastic processes. Thus the Teissier model has been used in modelling failure and mortality from wear and ageing [1]. The Teissier distribution has an inherent monotone increasing function. However, lifetime processes are increasing non-monotone in nature (see [2–4]). Hence, there is a need to extend the classical Teissier distribution to account for the pitfall of the constant failure rate embedded in the Gompertz, Weibull and exponential distributions in modelling stochastic processes. The Teissier distribution does not account for a non-monotone increasing hazard rate such as the unimodal failure rates and the U -shaped rates that are commonly encountered in medical sciences, reliability theory, stochastic processes, thanatology and genealogy. Thus there is an urgent need to improve the Teissier distribution so that it can reflect the non-monotone increasing feature.

However, adding additional parameters to the existing classical statistical distribution has helped to improve the flexibility of many statistics models. Thus providing a very rich satisfactory statistical inference is germane to making good and reliable decisions. One of such interesting methods in stochastic modelling is the Marshall – Olkin model [5].

Nevertheless, for a random variable W and parameter μ the probability density function (PDF) of the Marshall – Olkin is specified as

$$f(w, \mu) = \frac{\mu g(w)}{[1 - \bar{\mu} \bar{G}(w)]^2}, \quad \mu > 1, \quad w > 0.$$

The cumulative distribution function (CDF) of the Marshall – Olkin generated model is designated as

$$F(w, \mu) = \frac{G(w)}{[1 - \bar{\mu} \bar{G}(w)]}, \quad \mu > 1, \quad w > 0,$$

where $g(w, \mu) = \frac{dG(w)}{dw}$ is the baseline and parent PDF, $\bar{\mu} = (1 - \mu)$ and $\bar{G}(w) = (1 - G(w))$ with the CDF $G(w)$.

Thus, the transformed transformer ($T-X$) method [6] of generating a flexible family of classical distribution with a link function $-\log[1 - G(w)]$ can be adopted to obtain the Teissier generated family as the PDF and the CDF as

$$g(w) = \beta m(w) (1 - M(w))^{-(\beta+1)} \left([1 - M(w)]^{-\beta} - 1 \right) e^{1 - (1 - M(w))^{-\beta}} \quad \text{for } \beta > 0$$

and

$$G(w) = 1 - (1 - M(w))^{-\beta} e^{1 - (1 - M(w))^{-\beta}} \quad \text{for } \beta > 0,$$

where $m(w)$ and $M(w) = \int m(w) dw$ are the parent classical distribution PDF and CDF.

The development of a generalised family of distribution models that provides a parameterised mathematical function, a simple and efficient algorithm for the parameter estimation of data sets of various characteristics, has become an interest to researchers. Thus several Marshall – Olkin methods of adding parameters in the researched studies such as [7; 8–15] and alpha power Teissier in [16] were examined.

In this article the Marshall – Olkin Teissier (MT) generator is introduced with the prefix MT to improve the performance and flexibility of the parsimonious Teissier distribution. The MT generated model hazard rate function could be J - and U -shaped, decreasing and increasing in nature. Thus the proposed model extends and pushes forward the frontier of knowledge in many applied areas in statistics. However, few methods of improving the Teissier distribution has been in the existing literature. These methods include the Teissier distribution proposed in [17], the exponentiated Teissier distribution proposed by [18] and the bivariate Teissier distribution proposed by [19].

The Marshall – Olkin Teissier generated distribution

Let W be a random variable for $w \in \mathfrak{R}$. Then the PDF and CDF of the MT generated distribution can be defined as

$$f(w, \mu, \beta) = \frac{\mu\beta m(w)(1-M(w))^{-(\beta+1)}\left((1-M(w))^{-\beta} - 1\right)e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}}{\left[1 - \bar{\mu}(1-M(w))^{-\beta}e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}\right]^2} \text{ for } \mu, \beta > 0, w > 0$$

and

$$F(w, \mu, \beta) = \frac{1 - (1-M(w))^{-\beta}e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}}{\left[1 - \bar{\mu}(1-M(w))^{-\beta}e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}\right]} \text{ for } \mu, \beta > 0, w > 0,$$

where $m(w) = \frac{dM(w)}{dw}$ and $M(w)$ are the parent classical distribution and μ and β are the scale and threshold parameters respectively. The MT generated hazard rate function can take the form

$$h(w, \mu, \beta) = \frac{\left[\frac{\mu\beta m(w)(1-M(w))^{-(\beta+1)}\left((1-M(w))^{-\beta} - 1\right)e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}}{\left[1 - \bar{\mu}(1-M(w))^{-\beta}e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}\right]^2} \right]}{\left[1 - \frac{1 - (1-M(w))^{-\beta}e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}}{\left[1 - \bar{\mu}(1-M(w))^{-\beta}e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}\right]} \right]}.$$

The MT generated hazard rate is increasing function if $\beta \geq 1$ and $\mu \geq 1$, while it is decreasing if $\beta \leq 1$ and $\mu \leq 1$. It can be observed that when $\mu = 1$, we obtain the Teissier generated family of distributions.

The quantile function of the MT generated model for a uniform interval $p \in (0, 1)$ can be obtained using the Lambert function W that satisfies the equation $W(t) = \exp(W(t)) = t \in [-1, \infty)$. Then for $(1-M(w))^{-\beta} > 0$ we have $W_{-1}\left(\frac{p-1}{(p\bar{\mu}-1)e}\right) = (1-M(w))^{-\beta}$. Thus the quantile function of the MT generated model can be defined as

$$w_p = M^{-1}\left[1 - \left\{W_{-1}\left[\left(\frac{p-1}{p\bar{\mu}-1}\right)e^{-1}\right]\right\}^{-\frac{1}{\beta}}\right],$$

where W_{-1} is the negative branch of the Lambert function W .

Estimation

Parameter estimation. Several approaches for obtaining the parameter estimate of models have been proposed in the literature. However, the maximum likelihood method is one of the most commonly employed methods. Hence the maximum likelihood method was employed to obtain the parameter estimate of the proposed MT generated model in this section.

Let the likelihood of the MT generated model be denoted by Φ . Then the log-likelihood of Φ can be specified as

$$\begin{aligned} \log \Phi = & n \log \mu + n \log \beta + \sum_{d=1}^k \log m(w_d, \varepsilon) - (\beta + 1) \sum_{d=1}^k \log(1 - M(w_d, \varepsilon)) + \\ & + \sum_{d=1}^k \log R_d(w_d) - \sum_{d=1}^k R_d(w_d) - \sum_{d=1}^k \log T_d, \end{aligned}$$

where $R_d = (1 - M(w_d))^{-\beta} - 1$; ε is the parameter vector; $T_d = \left[\mu - (\mu - 1) \left[1 - \left(1 - (1 - M(w_d))^{-\beta} \right) \times e^{1 - (1 - M(w_d))^{-\beta}} \right] \right]^2$.

The parameters estimate of the MTG model can be obtained by taking the partial derivative of the $\log \Phi$ and equating it to zero. We have

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial \mu} = \frac{n}{\mu} - \sum_{d=1}^k \frac{T'_{d,\mu}(w_d, \varepsilon)}{T_d(w_d, \varepsilon)} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{d=1}^k \log(1 - M(w_d, \varepsilon)) + \sum_{d=1}^k \frac{R'_{d,\beta}(w_d, \varepsilon)}{R_d(w_d, \varepsilon)} - \sum_{d=1}^k R'_{d,\beta}(w_d, \varepsilon) - \sum_{d=1}^k \frac{T'_{d,\beta}(w_d, \varepsilon)}{T_d(w_d, \varepsilon)} = 0 \quad (2)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \Phi}{\partial \varepsilon} = & \sum_{d=1}^k \frac{m'_\varepsilon(w_d, \varepsilon)}{m(w_d, \varepsilon)} + (\beta + 1) \sum_{d=1}^k \frac{M'_\varepsilon(w_d, \varepsilon)}{1 - M(w_d, \varepsilon)} + \sum_{d=1}^k \frac{R'_{d,\varepsilon}(w_d, \varepsilon)}{R_d(w_d, \varepsilon)} - \\ & - \sum_{d=1}^k R'_{d,\varepsilon}(w_d, \varepsilon) - \sum_{d=1}^k \frac{T'_{d,\varepsilon}(w_d, \varepsilon)}{T_d(w_d, \varepsilon)} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

However, in all cases symbol ' represents partial derivative of the corresponding parameter estimate. Equations (1)–(3) are non-linear. Thus the model parameters in the equations can be obtained using the Newton – Raphson method in R [20] and MatLab.

Special model

The performance of the MT generated model is assessed using the Weibull, Gompertz and Lomax distributions. Plots of equations (4)–(9) for some selected parameter values are given in fig. 1–3. The plots in fig. 1 show the density, hazard rate function and CDF of the MTG generated model. The plots in fig. 2 show the density, hazard rate function and CDF of the MTW generated model. More so, the plots in fig. 3 show the density, hazard rate function and CDF of the MTL generated model. The plots in fig. 1, a; 2, a, and 3, a, indicate that the MT generated model is very adaptable and flexible with the value of α having a weighty effect on the model kurtosis and skewness. On the plots in fig. 1, b; 2, b, and 3, b, we observe that MTG model can be used in solving a variety of statistical problems in modelling reliability data, because its hazard rate function can be expressed as U-shaped, increasing, decreasing, or initially increasing, then decreasing and eventually increasing.

The MTG distribution. Suppose for a random variable X the PDF and CDF of the Gompertz distribution is given as $m(x) = \rho e^{\theta x - \frac{\rho}{\theta}(e^{\theta x} - 1)}$ and $M(x) = 1 - e^{-\frac{\rho}{\theta}(e^{\theta x} - 1)}$ respectively for positive parameters ρ and θ . Then the PDF and hazard rate function of the MT generated model is specified as

$$\begin{aligned} f(w, \mu, \beta) = & \frac{\mu \beta \rho \exp\left(\theta x - \frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right) \left(\exp\left(-\frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right)\right)^{-(\beta+1)}}{\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left[\exp\left(-\frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right) \right]^{-\beta} \right) e^{1 - \left(\exp\left(-\frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right)\right)^{-\beta}} \right]^2} \times \\ & \times \left(\left(\exp\left(-\frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right) \right)^{-\beta} - 1 \right) e^{1 - \left(\exp\left(-\frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right)\right)^{-\beta}} \end{aligned} \quad (4)$$

and

$$\begin{aligned} h(w, \mu, \beta) = & \frac{\mu \beta \rho \exp\left(\theta x - \frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right) \left(\exp\left(-\frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right)\right)^{-(\beta+1)}}{\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left[\exp\left(-\frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right) \right]^{-\beta} \right) e^{1 - \left(\exp\left(-\frac{\rho}{\theta}(\exp(\theta x) - 1)\right)\right)^{-\beta}} \right]^2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\left(\exp \left(-\frac{\rho}{\theta} (\exp(\theta x) - 1) \right) \right)^{-\beta} - 1 \right) e^{1 - \left(\exp \left(-\frac{\rho}{\theta} (\exp(\theta x) - 1) \right) \right)^{-\beta}} \times \\ & \times \left[1 - \frac{1 - \left(\exp \left(-\frac{\rho}{\theta} (\exp(\theta x) - 1) \right) \right)^{-\beta} e^{1 - \left(\exp \left(-\frac{\rho}{\theta} (\exp(\theta x) - 1) \right) \right)^{-\beta}}}{\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left[\exp \left(-\frac{\rho}{\theta} (\exp(\theta x) - 1) \right) \right]^{-\beta} \right) e^{1 - \left(\exp \left(-\frac{\rho}{\theta} (\exp(\theta x) - 1) \right) \right)^{-\beta}} \right]} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

The MTW distribution. Suppose for a random variable X the PDF and CDF (for $x \geq 0$), say $m(x) = \rho \theta^\rho x^{\rho-1} e^{-(\theta x)^\rho}$ and $M(x) = 1 - e^{-(\theta x)^\rho}$ respectively (for $\theta > 0$, $\rho > 0$) of the Weibull distribution. Then the PDF and hazard rate function of the MT generated model is specified as

$$\begin{aligned} f(w, \mu, \beta) &= \mu \beta \rho \theta^\rho x^{\rho-1} \exp(-(\theta x)^\rho) \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-(\beta+1)} \left(\left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta} - 1 \right) \times \\ & \times e^{1 - \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta}} \left[\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left[\exp(-(\theta x)^\rho) \right]^{-\beta} \right) e^{1 - \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta}} \right]^{-2} \right]^{-2} \end{aligned} \quad (6)$$

and

$$\begin{aligned} h(w, \mu, \beta) &= \frac{\mu \beta \rho \theta^\rho x^{\rho-1} \exp(-(\theta x)^\rho) \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-(\beta+1)} \left(\left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta} - 1 \right)}{\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left[\exp(-(\theta x)^\rho) \right]^{-\beta} \right) e^{1 - \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta}} \right]^2} \times \\ & \times e^{1 - \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta}} \left[1 - \frac{1 - \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta} e^{1 - \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta}}}{\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left[\exp(-(\theta x)^\rho) \right]^{-\beta} \right) e^{1 - \left(\exp(-(\theta x)^\rho) \right)^{-\beta}} \right]} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

The MTL distribution. Suppose for a random variable X the PDF and CDF (for $x \geq 0$), say $m(x) = \frac{\theta}{\rho} \left[1 + \frac{x}{\rho} \right]^{-(\theta+1)}$ and $M(x) = 1 - \left[1 + \frac{x}{\rho} \right]^{-\theta}$ respectively (for a scale parameter $\rho > 0$ and a shape parameter $\theta > 0$) of the Lomax distribution. Then the PDF and hazard rate function of the MT generated model is specified as

$$\begin{aligned} f(w, \mu, \beta) &= \frac{\mu \beta \frac{\theta}{\rho} \left[1 + \frac{x}{\rho} \right]^{-(\theta+1)} \left(\left[1 + \frac{x}{\rho} \right]^{-\theta} \right)^{-(\beta+1)} \left(\left(\left[1 + \frac{x}{\rho} \right]^{-\theta} \right)^{-\beta} - 1 \right) e^{1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho} \right]^{-\theta} \right)^{-\beta}}}{\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left[\left[1 + \frac{x}{\rho} \right]^{-\theta} \right]^{-\beta} \right) e^{1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho} \right]^{-\theta} \right)^{-\beta}} \right]^2} \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$h(w, \mu, \beta) = \frac{\left[\frac{\mu \beta \frac{\theta}{\rho} \left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-(\theta+1)} \left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-(\beta+1)} \left(\left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-\beta} - 1\right) e^{1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-\beta}}}{\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-\beta}\right) e^{1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-\beta}} \right]^2} \right]}{1 - \frac{1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-\beta} e^{1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-\beta}}}{\left[\mu - (\mu - 1) \left(1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-\beta}\right) e^{1 - \left(\left[1 + \frac{x}{\rho}\right]^{-\theta}\right)^{-\beta}} \right]}}}. \quad (9)$$

General statistical properties

In this section the statistical properties of the MT generated model are discussed. However, simplification is carried out on the proposed model to enable the proposed model to be presented in a simple manner.

Let $|s| < 1$ and $c > 0$. Then the expression $(1-s)^{-c}$ can be simplified as

$$(1-s)^{-c} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)d!} s^d,$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the gamma function. Thus the PDF of the MT generated family can be specified as a linear combination of the Teissier generated distribution as

$$f(w) = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+2)}{d!} \mu(1-\mu)^d g(w, \beta(d+1)), \mu > 0, w > 0.$$

Also the CDF can be expressed as

$$F(w) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{t!} (1-\mu)^t G(w) \bar{G}^t(w).$$

Moments. The MT generated r moment can be obtained as

$$\mu'_r = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+2)}{d!} \mu(1-\mu)^d K(r),$$

where $K(r) = \int_0^{\infty} w^r g(w, \beta(d+1)) dw$. The mean of the MT generated model is obtained when $r = 1$. Various moments can be obtained by varying the values of r .

Probability generating function. Let $w_1, w_2, \dots, w_n$ be the random variable sampled from the MT generated model. Then the MT generated probability generating function is given as

$$p(w) = \sum_{d,a=0}^{\infty} \frac{(\log t)^a \Gamma(d+2)}{a!d!} \mu(1-\mu)^d B(a),$$

where

$$B(a) = \int_1^{\infty} w^a g(w, \beta(d+1)) dw.$$

Probability weighted moments. The parameters and quantile of the MT generated model can be obtained using the probability weighted moments (PWM). Thus the MT generated PWM for $r \geq 1$ and $s \geq 0$ can be obtained as

$$P_{sr}(w) = \sum_{d,t=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+2)}{d!} \left[\frac{\Gamma(t+1)}{t!} \right]^s \mu(1-\mu)^{ts+d} R(t, d),$$

where

$$R(t, d) = \int_0^{\infty} w^r g(w, \beta(d+1)) G^s(w) \bar{G}^{ts}(w) dw.$$

Moment of the residual. The r moment of the residual life of the MT generated model, say $d_r(t) = E[(W-t)^r | W > t]$ for $r = 1, 2, 3, 4, \dots$ can be obtained uniquely as

$$d_r(t) = \frac{1}{1-F(w)} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{c=0}^r \binom{r}{c} t^{n-c} \frac{\Gamma(d+2)}{d!} \mu(1-\mu)^d R(c, d),$$

where

$$R(c, d) = \int_t^{\infty} w^c g(w, \beta(d+1)) dw.$$

However, the r moment of the reversed residual life, say $D_r(t) = E[(t-W)^r | W \leq t]$ for $t > 0$ can be defined as

$$D_r(t) = \frac{1}{F(w)} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{a=0}^r \binom{r}{a} t^{n-a} \frac{\Gamma(d+2)}{d!} \mu(1-\mu)^d R(a, d),$$

where

$$R(a, d) = \int_0^t w^a g(w, \beta(d+1)) dw.$$

Entropy. Entropy is the measure of uncertainty. Thus the Renyi entropy is expressed as

$$R_e(v) = \frac{1}{(1-v)} \log \left(\sum_{d=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+2)}{d!} \mu(1-\mu)^d \right)^v D(v),$$

where $D(v) = \int_0^{\infty} g^v(w, \beta(d+1)) dw$.

Order statistics. Let $W_1, W_2, \dots, W_n$ be MT generated random samples of size n and $W_{(1)}, W_{(2)}, \dots, W_{(n)}$ the order statistics of the processes. Then the PDF of the j order statistic $W_{(j)}$, say $f_j(w)$ is defined as

$$f_j(w) = \frac{n! \mu \beta m(w)}{(j-1)!(n-j)!} \frac{(1-M(w))^{-(\beta+1)} \left((1-M(w))^{-\beta} - 1 \right) e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}}{\left[1 - \bar{\mu} (1-M(w))^{-\beta} e^{1-(1-M(w))^{-\beta}} \right]^2} \times$$

$$\times \left[\frac{1 - (1-M(w))^{-\beta} e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}}{1 - \bar{\mu} (1-M(w))^{-\beta} e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}} \right]^{j-1} \left[1 - \frac{1 - (1-M(w))^{-\beta} e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}}{1 - \bar{\mu} (1-M(w))^{-\beta} e^{1-(1-M(w))^{-\beta}}} \right]^{n-j}, \quad w > 0, \beta > 0.$$

The minimum and maximum order statistics are obtained when $j = 1$ and $j = n$ respectively.

Application

An application to demonstrate the tractability and flexibility is given in this section. The MT generated submodels are compared with some existing generating models of Weibull, Gompertz and Kumaraswamy. A simulation and real-life applications are considered in this section.

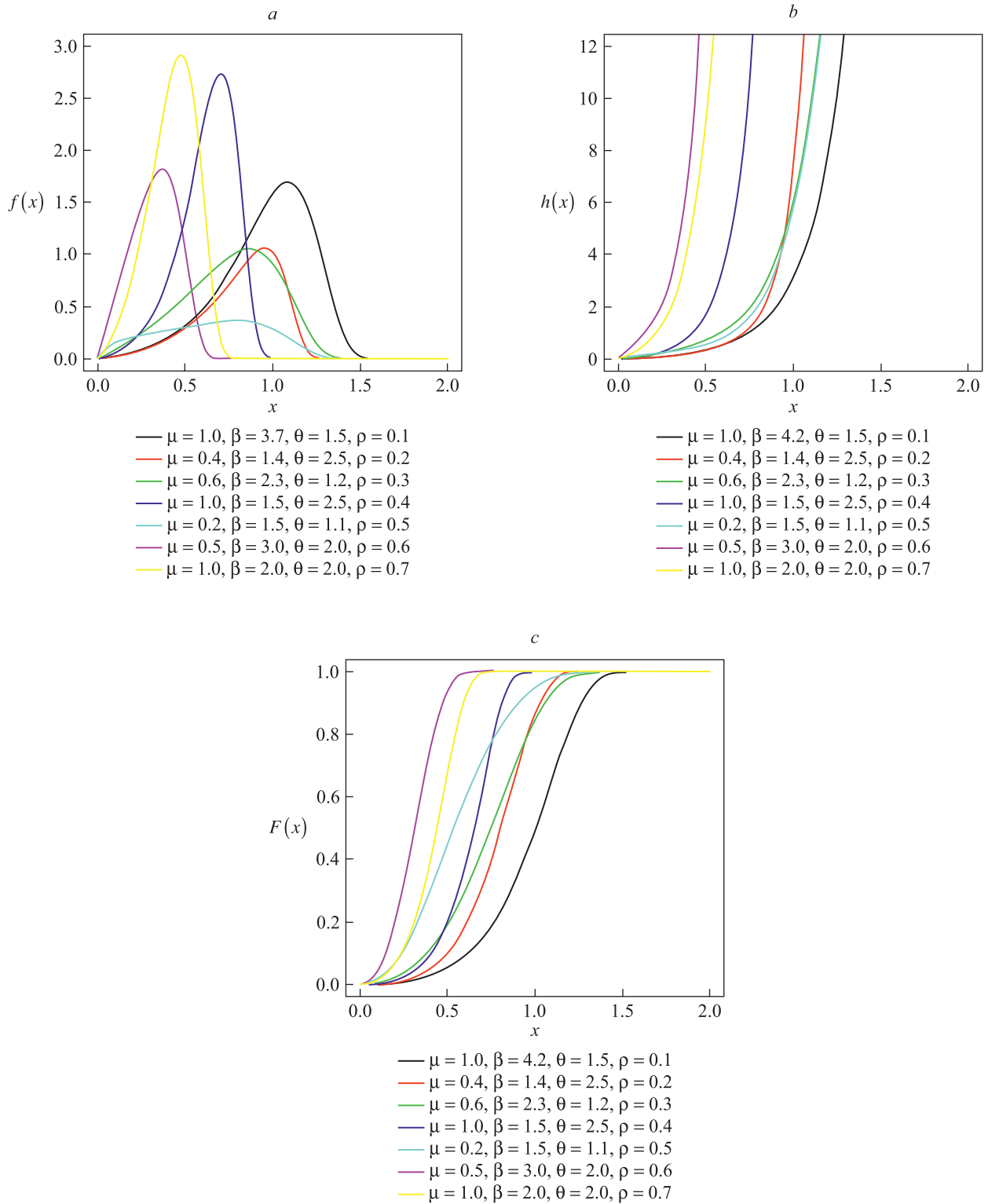


Fig. 1. MT generated plots
for the Gompertz model with various parameter values:
a – MTG density; b – MTG hazard rate function; c – MTG CDF

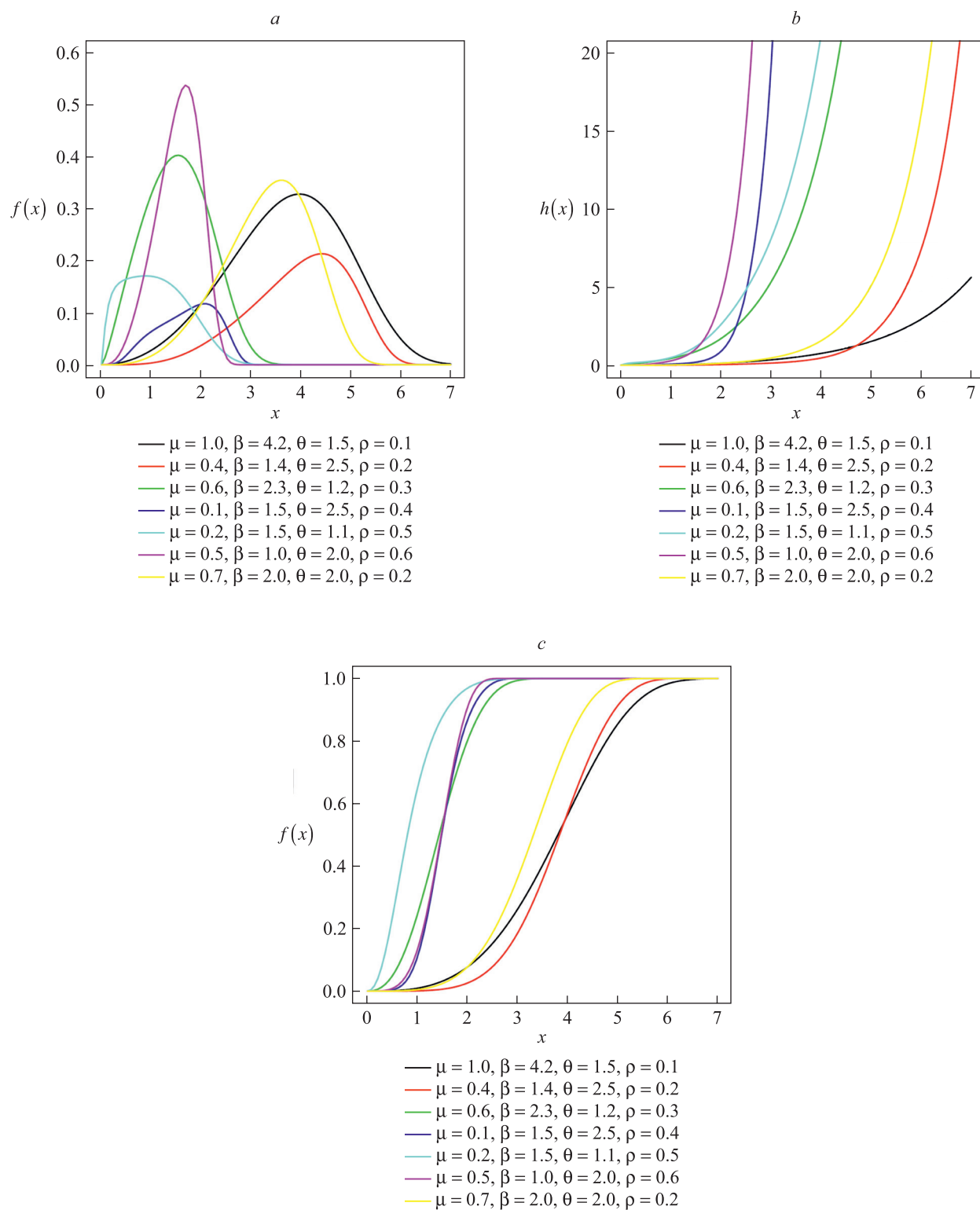


Fig. 2. MT generated plots
for the Weibull model with various parameter values:
 a – MTW density; b – MTW hazard rate function; c – MTW CDF

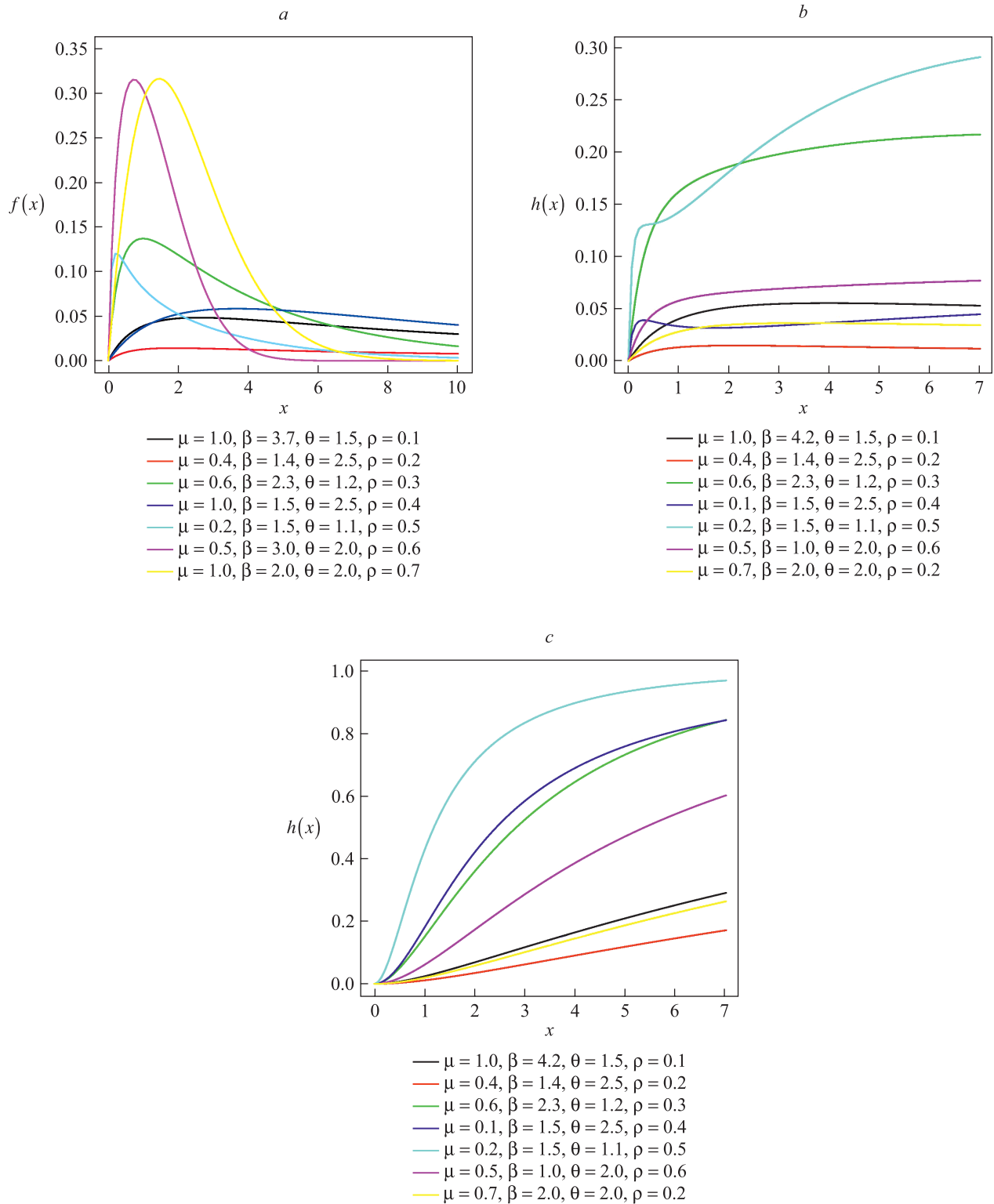


Fig. 3. MT generated plots
for the Lomax model with various parameter values:
 a – MTL density; b – MTL hazard rate function; c – MTL CDF

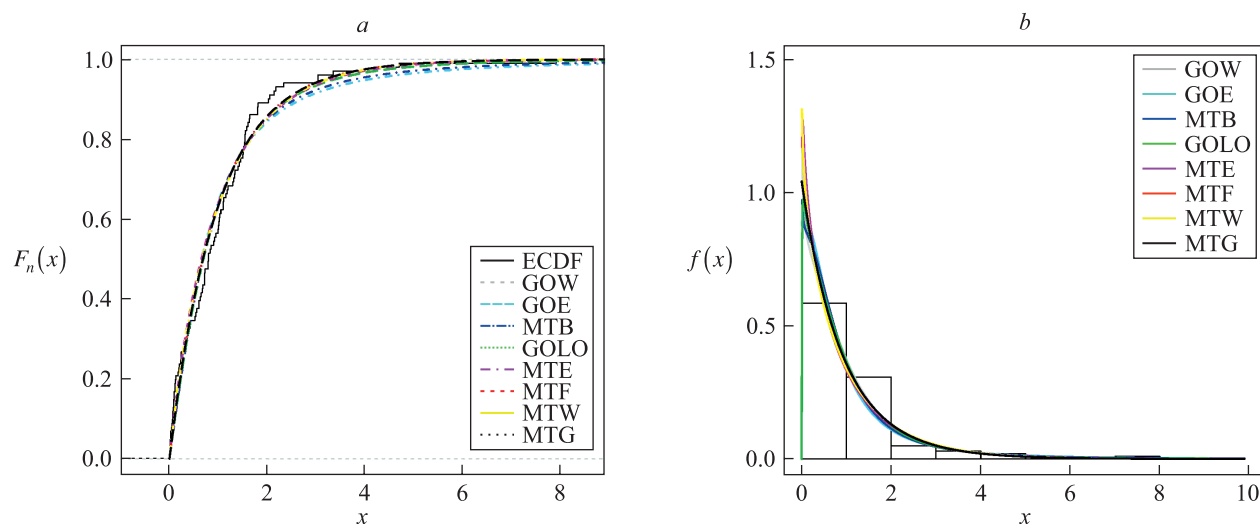


Fig. 4. Empirical estimate for the first dataset:
a – empirical densities; b – empirical CDFs

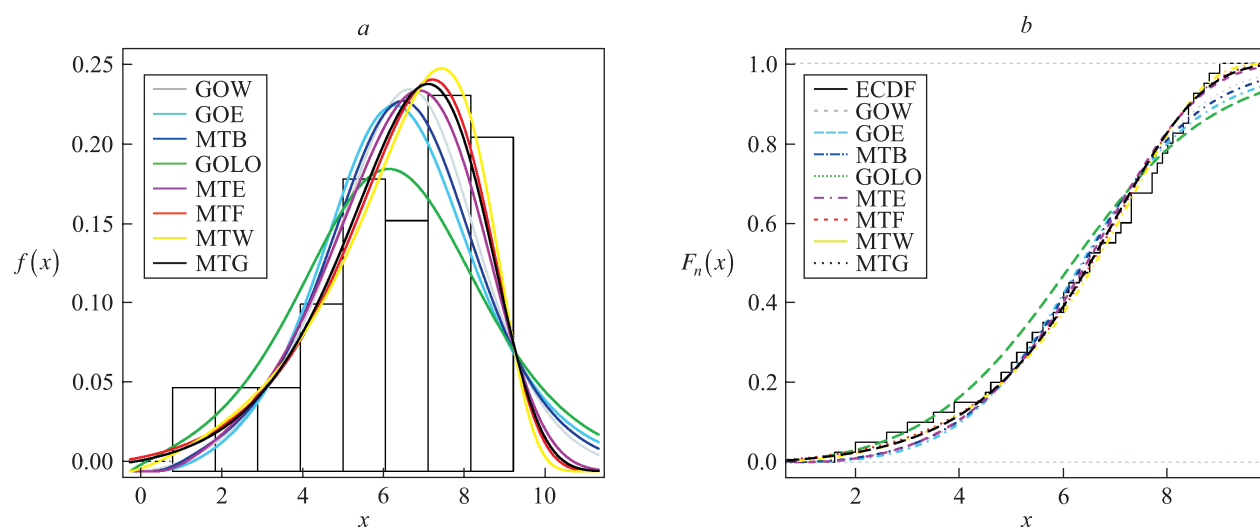


Fig. 5. Empirical estimate for the second dataset:
a – empirical densities; b – empirical CDFs

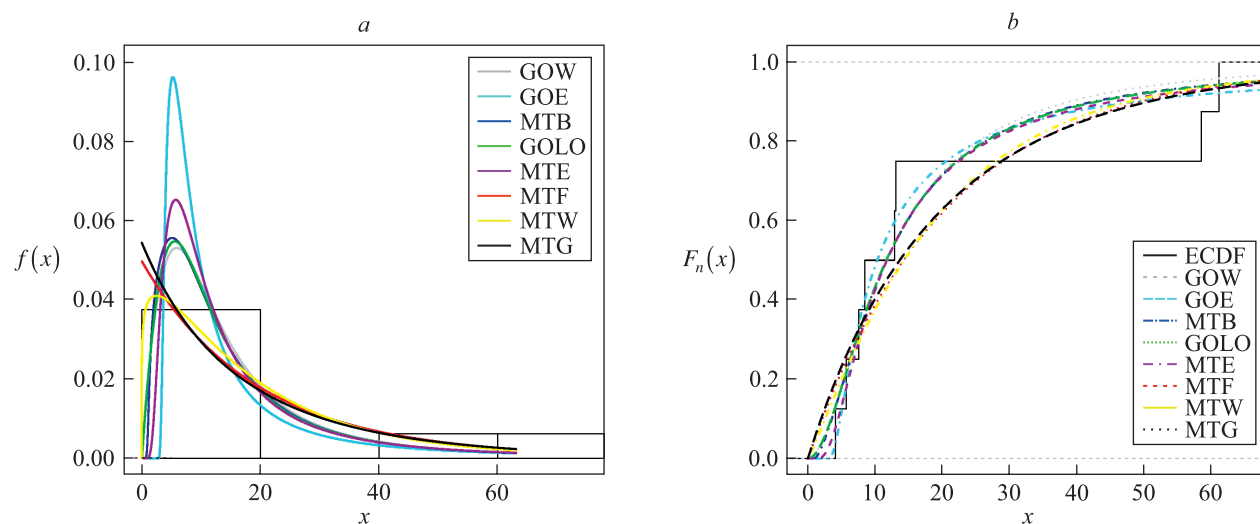


Fig. 6. Empirical estimate for the third dataset:
a – empirical densities; b – empirical CDFs

Simulation study. A simulation is used to examine the tractability, flexibility and performance of the proposed model with the submodels, Gompertz, Weibull and Lomax distributions. In the simulation study the estimated mean estimate is denoted by ME, the bias is denoted by Bias and mean squared errors by MSE [20], software is used to obtain the simulation results. Random sample sizes of 5, 10, 20, 50, 100, 200, 250, 300, 450, 500 and 600 are used. The sample sizes are replicated 6000 times for the value of the estimated parameter $\mu = 0.25$, $\beta = 1.50$, $\rho = 1.25$ and $\theta = 2.00$ for the Gompertz model, $\mu = 2.50$, $\beta = 1.60$, $\rho = 0.60$ and $\theta = 0.70$ for the Weibull model and $\mu = 0.50$, $\beta = 0.40$, $\rho = 0.70$ and $\theta = 0.70$ for the Lomax model using the quantile function. Table 1 shows the results of the simulation.

Table 1

The mean estimates, biases and mean squared errors Monte Carlo simulation results

Model	n	ME	Bias	MSE
Gompertz	5	1.0157, 1.1885, 2.0465, 1.3275	0.0157, 0.1885, 0.5465, -0.1725	2.2387, 0.5569, 1.1076, 1.5291
	10	0.5503, 1.2813, 1.6780, 1.7002	-0.4497, 0.2813, 0.1780, 0.2002	1.1246, 0.4875, 0.4573, 0.6351
	20	0.3554, 1.3426, 1.4933, 1.8498	-0.6446, 0.3426, -0.0067, 0.3498	0.7829, 0.4013, 0.2439, 0.3848
	50	0.2592, 1.4001, 1.3639, 1.8996	-0.7408, 0.4001, -0.1361, 0.3996	0.6683, 0.3312, 0.1260, 0.2721
	100	0.2456, 1.4397, 1.3071, 1.8912	-0.7544, 0.4397, -0.1929, 0.3912	0.0220, 0.1862, 0.0319, 0.1096
	200	0.2433, 1.4656, 1.2763, 1.8766	-0.7567, 0.4656, -0.2237, 0.3766	0.0163, 0.1779, 0.0275, 0.0316
	250	0.2437, 1.4746, 1.2671, 1.8721	-0.7563, 0.4746, -0.2329, 0.3721	0.0108, 0.0162, 0.0154, 0.0240
	300	0.2422, 1.4744, 1.2657, 1.8710	-0.7578, 0.4744, -0.2343, 0.3710	0.0093, 0.0143, 0.0140, 0.0210
	450	0.2452, 1.4860, 1.2562, 1.8682	-0.7548, 0.4860, -0.2438, 0.3682	0.0077, 0.0134, 0.0127, 0.0171
	500	0.2474, 1.4938, 1.2521, 1.8678	-0.7526, 0.4938, -0.2479, 0.3678	0.0059, 0.0099, 0.0058, 0.0158
	600	0.2495, 1.5006, 1.2478, 1.8651	-0.7505, 0.5006, -0.2522, 0.3651	0.0019, 0.0037, 0.0041, 0.0136
Weibull	5	3.0984, 1.8692, 0.7350, 0.7248	2.0984, 0.8692, 0.2350, 0.2248	1.5445, 0.3159, 0.1937, 0.1211
	10	3.2731, 1.7685, 0.5964, 0.7243	2.2731, 0.7685, 0.0964, 0.2243	1.4101, 0.2169, 0.0537, 0.1063
	20	3.2434, 1.7141, 0.5627, 0.7238	2.2434, 0.7141, 0.0627, 0.2238	1.1715, 0.1583, 0.0275, 0.0917
	50	3.0367, 1.7106, 0.5590, 0.6734	2.0367, 0.7106, 0.0590, 0.1734	0.8990, 0.0981, 0.0161, 0.0532
	100	2.8336, 1.7070, 0.5812, 0.6448	1.8336, 0.7070, 0.0812, 0.1448	0.6782, 0.0722, 0.0122, 0.0292
	200	2.6601, 1.6648, 0.6073, 0.6492	1.6601, 0.6648, 0.1073, 0.1492	0.4692, 0.0497, 0.0092, 0.0145
	250	2.6203, 1.6505, 0.6157, 0.6412	1.6203, 0.6505, 0.1157, 0.1512	0.3899, 0.0432, 0.0085, 0.0120
	300	2.5085, 1.6336, 0.6211, 0.6401	1.5885, 0.6336, 0.1111, 0.1501	0.3364, 0.0399, 0.0075, 0.0105
	450	2.5038, 1.6023, 0.6156, 0.6694	1.5338, 0.6023, 0.1356, 0.1694	0.2147, 0.0298, 0.0058, 0.0074
	500	2.5024, 1.5966, 0.6040, 0.6717	1.5354, 0.5966, 0.1380, 0.1717	0.1949, 0.0287, 0.0054, 0.0069
	600	2.5005, 1.5859, 0.6005, 0.6745	1.5235, 0.5859, 0.1435, 0.1745	0.1649, 0.0255, 0.0048, 0.0061
Lomax	5	1.1175, 1.8662, 0.7310, 0.7188	2.1175, 0.8662, 0.2310, 0.2188	1.5439, 0.2928, 0.1876, 0.1158
	10	1.2638, 1.7546, 0.5955, 0.7364	2.2638, 0.7546, 0.0955, 0.2364	1.3417, 0.2172, 0.0556, 0.1102
	20	1.2585, 1.7148, 0.5596, 0.7236	2.2585, 0.7148, 0.0596, 0.2236	1.1901, 0.1568, 0.0272, 0.0908
	50	1.0350, 0.7174, 0.5579, 0.6710	2.0350, 0.7174, 0.0579, 0.1710	0.9278, 0.0361, 0.0163, 0.0531
	100	0.8403, 0.7092, 0.5806, 0.6420	1.8403, 0.7092, 0.0806, 0.1420	0.2769, 0.0292, 0.0126, 0.0277
	200	0.6719, 0.6662, 0.6079, 0.6477	1.6719, 0.6662, 0.1079, 0.1477	0.1852, 0.0194, 0.0093, 0.0144
	250	0.6215, 0.6490, 0.6159, 0.6526	1.6215, 0.6490, 0.1159, 0.1526	0.0958, 0.0132, 0.0082, 0.0113
	300	0.5030, 0.6357, 0.6218, 0.6581	1.5930, 0.6357, 0.1218, 0.1581	0.0428, 0.0103, 0.0077, 0.0104
	450	0.5052, 0.5052, 0.6342, 0.6680	1.5452, 0.6052, 0.1342, 0.1680	0.0139, 0.0096, 0.0060, 0.0077
	500	0.5005, 0.4009, 0.6385, 0.6716	1.5305, 0.5959, 0.1385, 0.1716	0.0086, 0.0084, 0.0056, 0.0070
	600	0.5002, 0.4002, 0.6424, 0.6757	1.5202, 0.5842, 0.1424, 0.1757	0.0020, 0.0059, 0.0050, 0.0062

The bias is calculated (for X) by

$$\hat{\text{Bias}}_W = \frac{1}{6000} \sum_{i=1}^{6000} (\hat{W}_i - W).$$

Also the MSE is obtained as

$$\hat{\text{MSE}}_W = \frac{1}{6000} \sum_{i=1}^{6000} (\hat{W}_i - W)^2.$$

In table 1 the performance of the proposed model is examined. The mean estimated value tends to the true values in all cases considered as the sample sizes increase. More so, the MSE decrease as the sample size increases.

Real-life. A real-life dataset is used to illustrate the performance of the MT generated model. In the illustrations given the goodness-of-fit of the submodels is classified using their p -values, Kolmogorov – Smirnov (KS) test statistic, negative log-likelihood (log-lik), Cramér-von Mises statistic (W) and Anderson – Darling statistic (A). Figures 4–6 show the empirical densities and CDFs of the first, second and third dataset. Several models are compared with the MT generated models of Gompertz, Weibull, Frechet, Burr XII and Lomax. These include Gompertz – Weibull (GW), Weibull – Gompertz (WG), Gompertz – Lomax (GL), alpha power Gompertz (APG), Weibull – Burr XII (WB), Kumaraswamy – Burr XII (KB), Kumaraswamy – Frechet (KF), Kumaraswamy – Gompertz (KG), Kumaraswamy – Lomax (KL), Weibull – Frechet (WF), Gompertz exponential (GE), gamma (Ga), Gompertz – Lomax and Gompertz – Burr XII (GB).

The first real data set refers to the stress-rupture life of kevlar 49 and epoxy strands subjected to constant sustained pressure at the 90 % stress level until all had failed. This data set was studied by [21–25]. The data are as follows

1.8, 1.8, 1.81, 2.02, 2.05, 2.14, 2.17, 2.33, 3.03, 3.03, 3.34, 4.2, 4.69, 7.89, 0.01, 0.01, 0.02, 0.02, 0.02, 0.03, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.07, 0.08, 0.09, 0.09, 0.1, 0.1, 0.11, 0.11, 0.12, 0.13, 0.18, 0.19, 0.2, 0.23, 0.24, 0.24, 0.29, 0.34, 0.35, 0.36, 0.38, 0.4, 0.42, 0.43, 0.52, 0.54, 0.56, 0.6, 0.6, 0.63, 0.65, 0.67, 0.68, 0.72, 0.72, 0.72, 0.73, 0.79, 0.79, 0.8, 0.8, 0.83, 0.85, 0.9, 0.92, 0.95, 0.99, 1, 1.01, 1.02, 1.03, 1.05, 1.1, 1.1, 1.11, 1.15, 1.18, 1.2, 1.29, 1.31, 1.33, 1.34, 1.4, 1.43, 1.45, 1.5, 1.51, 1.52, 1.53, 1.54, 1.54, 1.55, 1.58, 1.60, 1.63, 1.64.

Table 2 shows the MLEs with standard errors in parentheses and the measures A, W, AIC, KS, negative log-likelihood and p -values with the stress-rupture data.

Table 2

MLEs and the test statistic for first data

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	p -Value
MTW	$\hat{\mu} = 5.885\ 7\ (0.262\ 0)$ $\hat{\beta} = 3.288\ 5\ (0.806\ 2)$ $\hat{\theta} = 1.051\ 3\ (0.776\ 7)$ $\hat{\phi} = 0.448\ 1\ (0.079\ 5)$	82.56	0.003 5	0.000 3	0.001 9	0.981 4
MTG	$\hat{\mu} = 0.074\ 5\ (0.040\ 3)$ $\hat{\beta} = 0.220\ 9\ (0.163\ 9)$ $\hat{\theta} = 0.651\ 8\ (0.237\ 1)$ $\hat{\phi} = 0.335\ 5\ (0.000\ 2)$	89.41	0.005 4	0.000 8	0.002 2	0.954 8
MTE	$\hat{\mu} = 0.102\ 4\ (0.082\ 6)$ $\hat{\beta} = 0.581\ 6\ (0.277\ 0)$ $\hat{\theta} = 0.105\ 8\ (0.098\ 3)$	92.81	0.070 4	0.045 2	0.016 0	0.874 1
MTL	$\hat{\mu} = 0.399\ 0\ (0.165\ 3)$ $\hat{\beta} = 0.740\ 0\ (0.000\ 0)$ $\hat{\theta} = 1.380\ 4\ (0.656\ 1)$ $\hat{\phi} = 0.074\ 5\ (0.000\ 0)$	93.28	0.090 6	0.251 0	0.353 6	0.777 5

Continuation of the table 2

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	p-Value
MTF	$\hat{\mu} = 0.933\ 8\ (0.069\ 3)$ $\hat{\beta} = 0.472\ 1\ (0.189\ 1)$ $\hat{\theta} = 0.165\ 3\ (0.020\ 5)$ $\hat{\phi} = 0.636\ 3\ (0.102\ 3)$	96.08	0.093 2	0.350 3	0.501 6	0.763 9
MTB	$\hat{\mu} = 1.096\ 1\ (0.684\ 5)$ $\hat{\beta} = 0.066\ 0\ (0.000\ 0)$ $\hat{\theta} = 1.949\ 9\ (0.000\ 1)$ $\hat{\phi} = 0.521\ 4\ (0.091\ 1)$	100.00	0.099 5	0.389 4	0.602 4	0.752 2
KB	$\hat{\alpha} = 0.114\ 6\ (0.052\ 3)$ $\hat{\beta} = 0.325\ 4\ (0.097\ 2)$ $\hat{\theta} = 1.425\ 1\ (0.915\ 1)$ $\hat{\phi} = 4.566\ 5\ (1.667\ 9)$	101.12	0.099 9	0.490 4	0.619 8	0.644 3
WG	$\hat{\mu} = 0.369\ 6\ (0.232\ 6)$ $\hat{\beta} = 0.690\ 2\ (0.147\ 4)$ $\hat{\theta} = 2.013\ 9\ (1.214\ 1)$ $\hat{\phi} = -0.492\ 1\ (0.148\ 1)$	101.15	1.002 8	0.080 5	0.737 8	0.620 5
WB	$\hat{\alpha} = 0.914\ 1\ (0.103\ 9)$ $\hat{\beta} = 0.136\ 9\ (0.011\ 8)$ $\hat{\theta} = 1.244\ 5\ (0.105\ 7)$ $\hat{\phi} = 6.145\ 7\ (0.073\ 0)$	102.42	1.082 1	0.141 2	0.844 3	0.503 0
KG	$\hat{\mu} = 0.792\ 0\ (0.182\ 9)$ $\hat{\beta} = 0.252\ 1\ (0.044\ 6)$ $\hat{\theta} = 3.791\ 1\ (0.302\ 1)$ $\hat{\phi} = -0.027\ 4\ (0.085\ 2)$	102.58	1.088 3	0.168 0	0.965 8	0.409 3
GL	$\hat{\mu} = 0.266\ 6\ (0.437\ 0)$ $\hat{\beta} = 0.788\ 9\ (0.179\ 5)$ $\hat{\theta} = 2.818\ 4\ (5.223\ 7)$ $\hat{\phi} = 1.358\ 3\ (0.457\ 7)$	102.59	1.178 8	0.863 9	1.004 3	0.406 3
GB	$\hat{\mu} = 0.879\ 5\ (0.201\ 4)$ $\hat{\beta} = 0.350\ 9\ (0.321\ 4)$ $\hat{\theta} = 1.226\ 7\ (0.320\ 2)$ $\hat{\phi} = 2.435\ 5\ (2.237\ 2)$	102.68	1.184 2	0.921 4	1.157 3	0.401 4
GW	$\hat{\mu} = 1.783\ 3\ (12.012\ 4)$ $\hat{\beta} = 4.708\ 5\ (9.879\ 1)$ $\hat{\theta} = 0.044\ 2\ (0.129\ 7)$ $\hat{\phi} = 0.147\ 0\ (0.355\ 7)$	102.87	1.185 4	1.003 8	1.159 8	0.400 3
KL	$\hat{\mu} = 0.925\ 3\ (0.055\ 6)$ $\hat{\beta} = 5.716\ 5\ (0.000\ 0)$ $\hat{\theta} = 0.029\ 4\ (0.049\ 6)$ $\hat{\phi} = 5.220\ 5\ (0.000\ 0)$	102.94	1.192 6	1.103 0	1.180 4	0.350 9

Ending table 2

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	<i>p</i> -Value
WF	$\hat{\mu} = 20.2781 (4.6040)$ $\hat{\beta} = -0.2712 (0.0306)$ $\hat{\theta} = -3.4104 (0.2777)$ $\hat{\phi} = 25.6038 (0.2329)$	102.97	1.1937	1.1187	1.1917	0.3760
GE	$\hat{\alpha} = 24.9400 (65.1117)$ $\hat{\beta} = 0.9086 (0.0868)$ $\hat{\theta} = 0.0286 (0.0747)$	103.00	1.2894	1.1201	1.2739	0.3539
APG	$\hat{\alpha} = 1.4727 (1.1890)$ $\hat{\beta} = 1.1825 (0.3364)$ $\hat{\theta} = -0.0955 (0.1127)$	103.10	1.3886	1.1483	1.2828	0.3053
KF	$\hat{\mu} = 5.5352 (3.1267)$ $\hat{\beta} = 324.1089 (327.7648)$ $\hat{\theta} = 0.1450 (0.0244)$ $\hat{\phi} = 1.2144 (4.4818)$	106.67	1.4297	1.4038	2.1526	0.0666

The second data set below is obtained from [26] as used in [27]. It represents the time to failure (103 h) of the turbocharger of one type of engine. The data are

2.0, 3.9, 5.0, 5.6, 6.1, 6.5, 7.1, 7.3, 7.8, 8.1, 8.4, 2.6, 4.5, 5.1, 5.8, 6.3, 6.7, 7.3, 7.7, 7.9, 8.3, 8.5, 3.0, 4.6, 5.3, 6.0, 8.7, 8.8, 1.6, 3.5, 4.8, 5.4, 6.0, 6.5, 7.0, 7.3, 7.7, 8.0, 8.4, 9.0.

The results of the goodness-of-fit are given in table 3.

Table 3

MLEs and the test statistic for second data

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	<i>p</i> -Value
MTW	$\hat{\mu} = 0.4864 (0.0289)$ $\hat{\beta} = 0.7589 (0.9293)$ $\hat{\theta} = 0.3904 (0.2390)$ $\hat{\phi} = 1.6277 (0.4479)$	62.61	0.0108	0.0037	0.0291	0.9957
MTL	$\hat{\mu} = 0.9698 (0.7766)$ $\hat{\beta} = 0.7918 (0.4993)$ $\hat{\theta} = 0.0122 (0.0055)$ $\hat{\phi} = 0.2731 (0.1423)$	64.94	0.0203	0.0138	0.1397	0.9679
MTG	$\hat{\mu} = 1.2063 (1.3997)$ $\hat{\beta} = 0.3300 (0.1252)$ $\hat{\theta} = 0.2543 (0.0001)$ $\hat{\phi} = 0.1766 (0.0001)$	69.76	0.0879	0.0283	0.2168	0.9165
MTB	$\hat{\mu} = 5.8081 (0.4091)$ $\hat{\beta} = 2.8726 (0.1930)$ $\hat{\theta} = 0.0977 (0.0093)$ $\hat{\phi} = 3.5877 (0.4220)$	73.20	0.0928	0.0877	0.6326	0.8807

Continuation of the table 3

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	p-Value
MTF	$\hat{\mu} = 0.764\ 9\ (0.330\ 9)$ $\hat{\beta} = 0.429\ 3\ (0.030\ 4)$ $\hat{\theta} = 0.494\ 2\ (0.239\ 6)$ $\hat{\phi} = 1.782\ 6\ (0.247\ 4)$	74.79	0.102 5	0.118 6	0.832 0	0.794 4
GW	$\hat{\alpha} = 0.301\ 6\ (0.000\ 0)$ $\hat{\beta} = 1.310\ 9\ (0.000\ 0)$ $\hat{\theta} = 0.155\ 0\ (0.000\ 0)$ $\hat{\phi} = 2.275\ 6\ (0.887\ 7)$	79.15	0.179 6	0.223 4	0.971 4	0.761 3
KG	$\hat{\mu} = 0.755\ 4\ (0.395\ 7)$ $\hat{\beta} = 0.387\ 2\ (0.488\ 6)$ $\hat{\theta} = 0.009\ 7\ (0.012\ 4)$ $\hat{\phi} = 0.716\ 3\ (0.161\ 9)$	79.81	0.182 6	0.232 7	1.123 7	0.747 4
APG	$\hat{\alpha} = 1.784\ 2\ (2.369\ 8)$ $\hat{\beta} = 0.010\ 8\ (0.010\ 2)$ $\hat{\theta} = 0.584\ 1\ (0.115\ 8)$	79.94	0.187 1	0.612 5	1.232 7	0.721 3
GE	$\hat{\mu} = 0.011\ 1\ (0.012\ 2)$ $\hat{\beta} = 0.972\ 5\ (1.160\ 8)$ $\hat{\theta} = 0.647\ 6\ (0.741\ 9)$	79.95	0.196 1	0.622 9	1.262 5	0.704 5
GL	$\hat{\mu} = 0.044\ 5\ (0.058\ 7)$ $\hat{\beta} = 6.564\ 9\ (7.923\ 7)$ $\hat{\theta} = 0.039\ 4\ (0.000\ 0)$ $\hat{\phi} = 3.083\ 7\ (3.673\ 7)$	80.22	0.292 9	0.643 1	1.266 7	0.579 5
GF	$\hat{\mu} = 0.803\ 8\ (5.066\ 5)$ $\hat{\beta} = 19.022\ 0\ (31.524\ 7)$ $\hat{\theta} = 0.657\ 1\ (0.186\ 7)$ $\hat{\phi} = 18.221\ 6\ (40.735\ 2)$	80.28	0.318 0	0.736 4	1.284 1	0.536 8
WL	$\hat{\mu} = 0.022\ 2\ (0.049\ 0)$ $\hat{\beta} = 1.985\ 5\ (1.242\ 5)$ $\hat{\theta} = 0.028\ 8\ (0.000\ 0)$ $\hat{\phi} = 11.118\ 1\ (8.658\ 4)$	80.51	0.329 7	0.839 5	1.306 1	0.530 6
WF	$\hat{\mu} = 0.006\ 9\ (0.004\ 7)$ $\hat{\beta} = 0.957\ 6\ (0.615\ 8)$ $\hat{\theta} = 3.859\ 9\ (2.585\ 7)$ $\hat{\phi} = 1.792\ 7\ (0.376\ 8)$	82.59	0.410 5	0.888 8	1.650 5	0.512 5
WB	$\hat{\mu} = 0.004\ 0\ (0.001\ 9)$ $\hat{\beta} = 2.879\ 8\ (2.013\ 6)$ $\hat{\theta} = 0.656\ 3\ (0.278\ 0)$ $\hat{\phi} = 1.610\ 7\ (1.263\ 7)$	83.39	0.422 2	0.900 9	1.729 8	0.507 9

Ending table 3

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	<i>p</i> -Value
KL	$\hat{\mu} = 4.979\ 7\ (1.074\ 2)$ $\hat{\beta} = 33.612\ 9\ (25.933\ 6)$ $\hat{\theta} = 0.014\ 0\ (0.006\ 6)$ $\hat{\phi} = 7.393\ 6\ (3.509\ 7)$	84.49	0.5089	0.9269	1.8130	0.5007
KF	$\hat{\mu} = 6.262\ 5\ (0.000\ 0)$ $\hat{\beta} = 581.390\ 8\ (351.452\ 6)$ $\hat{\theta} = 0.486\ 8\ (0.067\ 5)$ $\hat{\phi} = 7.099\ 7\ (0.000\ 0)$	86.18	0.6110	1.0731	1.9007	0.4078
KB	$\hat{\mu} = 43.913\ 3\ (0.000\ 0)$ $\hat{\beta} = 85.7011\ (54.587\ 7)$ $\hat{\theta} = 1.802\ 3\ (0.000\ 0)$ $\hat{\phi} = 0.509\ 2\ (0.000\ 0)$	86.67	0.6114	1.1034	2.2040	0.4034
Ga	$\hat{\alpha} = 7.718\ (1.689\ 1)$ $\hat{\beta} = 1.234\ (0.279\ 0)$	87.41	0.7201	0.2051	1.3607	0.3239

The third data consists of the lists of the number of deaths caused as reported by the Centers for Disease Control and Prevention on 6 February 2015 in ten of thousands (www.cdc.gov) (see [28, p. 6]). The data are as follows

61.1105, 58.4881, 13.0557, 12.8978, 8.4767, 7.5578, 5.6979, 4.1149.

Table 4 shows the MLEs with standard errors in parentheses and the measures A, W, AIC, KS, negative log-likelihood and *p*-values with the lists of number of deaths data for the MT generated models and some classical statistical distribution models.

Table 4

MLEs and the test statistic for third data

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	<i>p</i> -Value
MTF	$\hat{\mu} = 0.696\ 0\ (0.172\ 0)$ $\hat{\beta} = 0.120\ 0\ (0.083\ 1)$ $\hat{\theta} = 1.084\ 3\ (0.283\ 0)$ $\hat{\phi} = 3.319\ 1\ (0.042\ 8)$	28.42	0.1679	0.0332	0.2590	0.9508
MTL	$\hat{\mu} = 0.128\ 8\ (0.011\ 5)$ $\hat{\beta} = 1.619\ 8\ (0.128\ 5)$ $\hat{\theta} = 0.022\ 3\ (0.004\ 1)$ $\hat{\phi} = 1.429\ 2\ (0.083\ 8)$	28.54	0.2013	0.0732	0.4999	0.8429
MTB	$\hat{\mu} = 2.584\ 0\ (1.524\ 1)$ $\hat{\beta} = 0.873\ 2\ (0.250\ 4)$ $\hat{\theta} = 0.329\ 0\ (0.077\ 9)$ $\hat{\phi} = 5.864\ 8\ (2.736\ 9)$	29.56	0.2027	0.0739	0.5033	0.8371
MTW	$\hat{\mu} = 0.065\ 7\ (0.199\ 5)$ $\hat{\beta} = 0.117\ 6\ (3.046\ 8)$ $\hat{\theta} = 0.298\ 2\ (8.329\ 4)$ $\hat{\phi} = 0.929\ 3\ (0.282\ 8)$	29.61	0.2050	0.0834	0.5567	0.8274

Continuation of the table 4

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	p-Value
MTG	$\hat{\mu} = 0.024\ 2\ (0.095\ 3)$ $\hat{\beta} = 0.043\ 1\ (0.435\ 5)$ $\hat{\theta} = 0.455\ 1\ (4.729\ 1)$ $\hat{\phi} = 0.012\ 9\ (0.025\ 6)$	29.71	0.2071	0.0957	0.5759	0.8179
KF	$\hat{\alpha} = 4.090\ 4\ (0.000\ 0)$ $\hat{\beta} = 0.085\ 4\ (0.030\ 2)$ $\hat{\theta} = 10.037\ 4\ (0.118\ 1)$ $\hat{\phi} = 3.594\ 3\ (0.113\ 2)$	30.93	0.2539	0.1068	0.5856	0.7759
WF	$\hat{\mu} = 0.908\ 8\ (0.937\ 6)$ $\hat{\beta} = 0.268\ 6\ (0.166\ 4)$ $\hat{\theta} = 2.347\ 0\ (1.738\ 5)$ $\hat{\phi} = 11.738\ 4\ (8.958\ 3)$	31.11	0.2691	0.1374	0.6188	0.5820
KG	$\hat{\mu} = 16.063\ 8\ (0.567\ 6)$ $\hat{\beta} = 0.109\ 8\ (0.063\ 3)$ $\hat{\theta} = 0.765\ 5\ (0.109\ 2)$ $\hat{\phi} = -0.017\ 0\ (0.021\ 0)$	31.22	0.2769	0.1463	0.6233	0.5805
GB	$\hat{\mu} = 11.151\ 3\ (75.020\ 3)$ $\hat{\beta} = 2.524\ 1\ (1.005\ 4)$ $\hat{\theta} = 0.013\ 4\ (0.000\ 0)$ $\hat{\phi} = 8.316\ 8\ (0.000\ 0)$	31.42	0.2858	0.1880	0.5762	0.5759
WB	$\hat{\mu} = 5.390\ 9\ (22.769\ 1)$ $\hat{\beta} = 2.398\ 7\ (0.826\ 3)$ $\hat{\theta} = 0.028\ 9\ (0.110\ 2)$ $\hat{\phi} = 4.738\ 1\ (16.669\ 1)$	31.44	0.2944	0.1889	0.5810	0.5525
KB	$\hat{\mu} = 44.026\ 1\ (104.661\ 4)$ $\hat{\beta} = 0.526\ 9\ (0.655\ 4)$ $\hat{\theta} = 0.331\ 7\ (3.585\ 5)$ $\hat{\phi} = 6.329\ 1\ (68.262\ 6)$	31.56	0.2988	0.1950	0.5901	0.4491
GL	$\hat{\mu} = 5.985\ 6\ (24.872\ 6)$ $\hat{\beta} = 2.324\ 9\ (1.870\ 0)$ $\hat{\theta} = 0.591\ 7\ (1.796\ 6)$ $\hat{\phi} = 0.150\ 5\ (0.206\ 8)$	31.82	0.3004	0.1999	0.6591	0.4376
APG	$\hat{\alpha} = 0.188\ 7\ (0.594\ 5)$ $\hat{\beta} = 0.025\ 8\ (0.031\ 5)$ $\hat{\theta} = 0.007\ 6\ (0.022\ 3)$	32.38	0.3108	0.2297	0.8018	0.4342
WG	$\hat{\mu} = 7.569\ 5\ (17.899\ 1)$ $\hat{\beta} = 1.188\ 3\ (0.614\ 5)$ $\hat{\theta} = 0.009\ 9\ (0.016\ 6)$ $\hat{\phi} = -0.018\ 7\ (0.035\ 2)$	32.48	0.3159	0.2305	0.8465	0.4188

Ending table 4

Distribution	Estimates	Log-lik	KS	W	A	p-Value
GE	$\hat{\alpha} = 6.297\ 7\ (9.968\ 3)$ $\hat{\beta} = 0.951\ 6\ (0.260\ 7)$ $\hat{\theta} = 0.005\ 9\ (0.007\ 7)$	32.59	0.3173	0.243 8	0.874 8	0.416 2
GW	$\hat{\mu} = 0.153\ 4\ (1.378\ 1)$ $\hat{\beta} = 6.062\ 9\ (14.095\ 6)$ $\hat{\theta} = 0.011\ 8\ (0.037\ 9)$ $\hat{\phi} = 0.112\ 9\ (0.281\ 6)$	32.64	0.322 1	0.245 9	0.885 9	0.369 5
KL	$\hat{\mu} = 37.806\ 5\ (79.735\ 7)$ $\hat{\beta} = 0.245\ 8\ (0.382\ 1)$ $\hat{\theta} = 0.181\ 2\ (0.402\ 6)$ $\hat{\phi} = 5.788\ 1\ (11.123\ 2)$	32.65	0.332 2	0.251 0	0.896 7	0.312 4

In the three datasets illustrated the MT generated models have the highest p -values and with the smallest Akaike information criteria. Thus it is chosen to be the best model for the data under consideration.

Conclusions

A family of distribution models that provides a parameterised mathematical function, simple and efficient, has been the trend. Thus a model with the algorithm for the parameter estimation of data sets of various characteristics and decision making has become an interest to researchers. However, Marshall – Olkin [5] proposed a major transformation for adding a parameter to a classical statistical distribution. Thus a two-parameter method is introduced for generating efficient, improved, and flexible classical models in distribution theory. The Lambert W function is implored to obtain the MT generated quantile function. The parameter of the proposed model is acquired using the maximum likelihood. The outcomes of the real-life and simulation study show the relevance and performance of the MT generated model. The results indicated that the MT generated is flexible and tractable in terms of their goodness-of-fit. Thus stochastic processes in quality control and reliability studies can be modelled using the MT generated distribution because of its U - and J -shaped hazard rate function.

References

1. Laurent AG. Failure and mortality from wear and ageing. The Teissier model. In: Patil GP, Kotz S, Ord JK, editors. *A modern course on statistical distributions in scientific work*. Dordrecht: Springer; 1975. p. 301–320. (NATO advanced study institutes series; volume 17). DOI: 10.1007/978-94-010-1845-6_22.
2. Eghwerido JT, Nzei LC, Agu FI. The alpha power Gompertz distribution: characterization, properties and applications. *Sankhya A: The Indian Journal of Statistics*. 2021;83(1):449–475. DOI: 10.1007/s13171-020-00198-0.
3. Eghwerido JT, Agu FI. The shifted Gompertz-G family of distributions: properties and applications. *Mathematica Slovaca*. 2021; 71(5):1291–1308. DOI: 10.1515/ms-2021-0053.
4. Sarhan AM, Kundu D. Generalized linear failure rate distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*. 2009; 38(5):642–660. DOI: 10.1080/03610920802272414.
5. Marshall AW, Olkin I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*. 1997;84(3):641–652. DOI: 10.1093/biomet/84.3.641.
6. Alzaatreh A, Lee C, Famoye F. A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*. 2013;71(1):63–79. DOI: 10.1007/s40300-013-0007-y.
7. Eghwerido JT, Oguntunde PE, Agu FI. The alpha power Marshall – Olkin-G distribution: properties and applications. *Sankhya A: The Indian Journal of Statistics*. 2021c. DOI: 10.1007/s13171-020-00235-y.
8. Ghitany ME, Al-Awadhi FA, Alkhalfan LA. Marshall – Olkin extended Lomax distribution and its application to censored data. *Communication in Statistics: Theory and Methods*. 2007;36(10):1855–1866. DOI: 10.1080/03610920601126571.
9. Ghitany ME, Al-Hussaini EK, AL-Jarallah RA. Marshall – Olkin extended Weibull distribution and its application to censored data. *Journal of Applied Statistics*. 2005;32(10):1025–1034. DOI: 10.1080/02664760500165008.
10. Ghitany ME. Marshall – Olkin extended Parento distribution and its application. *International Journal of Applied Mathematics*. 2005;18:17–32.
11. Ristic MM, Jose KK, Ancy J. A Marshall – Olkin gamma distribution and manification process. *Stress and Anxiety Research Society*. 2007;11:107–117.
12. Almetwally EM, Sabry MAH, Alharbi R, Alnagar D, Mubarak ShAM, Hafez EH. Marshall – Olkin alpha power Weibull distribution: different methods of estimation based on type I and type II censoring. *Complexity*. 2021;2021(1):5533799. DOI: 10.1155/5533799.

13. Nassar M, Kumar D, Dey S, Cordeiro GM, Afify AZ. The Marshall – Olkin alpha power family of distributions with applications. *Journal of Computation and Applied Mathematics*. 2019;351:41–53. DOI: 10.1016/j.cam.2018.10.052.
14. Benkhelifa L. The Marshall – Olkin extended generalized Lindley distribution: properties and application. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*. 2017;46(10):8306–8330. DOI: 10.1080/03610918.2016.1277747.
15. Mansoor M, Tahir MH, Cordeiro GM, Provost SB, Alzaatreh A. The Marshall – Olkin logistic exponential distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*. 2019;48(2):220–234. DOI: 10.1080/03610926.2017.1414254.
16. Eghwerido JT. The alpha power Teissier distribution and its applications. *Afrika Statistika*. 2021;16(2):2731–2744. DOI: 10.16929/as/2021.2731.181.
17. Teissier G. Recherches sur le vieillissement et sur les lois de mortalite. *Annales de Physiologie et de Physicochimie Biologique*. 1934;10(1):237–284.
18. Sharma VK, Singh SV, Shekhawat K. Exponentiated Teissier distribution with increasing, decreasing and bathtub hazard functions. *Journal of Applied Statistics*. 2022;49(2):371–393. DOI: 10.1080/02664763.2020.1813694.
19. Kolev N, Ngoc N, Ju YT. Bivariate Teissier distributions. In: Rykov VV, Singpurwalla ND, Zubkov AM, editors. *Analytical and Computational Methods in Probability Theory*. Cham: Springer; 2017. p. 279–290. (Lecture Notes in Computer Science; volume 10684). DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9_24.
20. R Core Team R: a language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing [Internet]. 2019 [cited 2022 January 1]. Available from: [https://www.scirp.org/\(S\(lz5mqp453edsnp55rrgict55\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=2631126](https://www.scirp.org/(S(lz5mqp453edsnp55rrgict55))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=2631126).
21. Cooray K, Ananda MMA. A generalization of the half-normal distribution with applications to lifetime data. *Communications in Statistics: Theory and Methods*. 2008;37(9):1323–1337. DOI: 10.1080/03610920701826088.
22. Paranaiba PF, Ortega EMM, Cordeiro GM, de Pascoa MAR. The Kumaraswamy Burr XII distribution: theory and practice. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 2013;83(11):2117–2143. DOI: 10.1080/00949655.2012.683003.
23. Gomez YM, Bolfarine H, Gomez HW. A new extension of the exponential distribution. *Revista Colombiana de Estadística*. 2014;37(1):25–34. DOI: 10.15446/rce.v37n1.44355.
24. Alizadeh M, MirMostafaei SMTK, Ghosh I. A new extension of power Lindley distribution for analyzing bimodal data. *Chilean Journal of Statistics*. 2017;8(1):67–86.
25. Eghwerido JT, Nzei LC, Omotoye AE, Agu FI. The Teissier-G family of distributions: properties and applications. *Mathematica Slovaca*. Forthcoming August 2022.
26. Xu K, Xie M, Tang LC, Ho SL. Application of neural networks in forecasting engine systems reliability. *Applied Soft Computing*. 2003;2(4):255–268. DOI: 10.1016/S1568-4946(02)00059-5.
27. Afify AZ, Altun E, Alizadeh M, Ozel G, Hamedani GG. The odd exponentiated half-logistic-G family: properties, characterizations and applications. *Chilean Journal of Statistics*. 2017;8(2):65–91.
28. Mann PS, editor. *Introductory statistics*. 9th edition. New York: Wiley; 2016. 640 p.

Received 05.01.2022 / revised 11.01.2022 / accepted 22.03.2022.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.118

ОЦЕНКА СВЕРХУ ДЛЯ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ФОРМЕ МУАВРА – ЛАПЛАСА

С. В. АГИЕВИЧ¹⁾

¹⁾Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики БГУ,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Построена оценка сверху для биномиальных коэффициентов, которая действует на всей области изменения параметров и имеет форму, повторяющую форму аппроксимации Муавра – Лапласа симметричного биномиального распределения. С помощью этой оценки получены ограничения на число продолжений заданной булевой функции до бент-функций, определена степень зависимости в спектрах Уолша – Адамара, найдены ограничения на количество представлений натуральных чисел в виде суммы квадратов целых чисел, ограниченных по модулю.

Ключевые слова: биномиальный коэффициент; теорема Муавра – Лапласа; спектр Уолша – Адамара; бент-функция; представление в виде суммы квадратов.

Образец цитирования:

Агиевич СВ. Оценка сверху для биномиальных коэффициентов в форме Муавра – Лапласа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:66–74.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-66-74>

For citation:

Agievich SV. An upper bound on binomial coefficients in the de Moivre – Laplace form. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:66–74. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-66-74>

Автор:

Сергей Валерьевич Агиевич – кандидат физико-математических наук; заведующий научно-исследовательской лабораторией проблем безопасности информационных технологий.

Author:

Sergey V. Agievich, PhD (physics and mathematics); head of the laboratory of IT security.
agievich@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-9413-8574>

AN UPPER BOUND ON BINOMIAL COEFFICIENTS IN THE DE MOIVRE – LAPLACE FORM

S. V. AGIEVICH^a

^aResearch Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics,
Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

We provide an upper bound on binomial coefficients that holds over the entire parameter range and whose form repeats the form of the de Moivre – Laplace approximation of the symmetric binomial distribution. Using the bound, we estimate the number of continuations of a given Boolean function to bent functions, investigate dependencies into the Walsh – Hadamard spectra, obtain restrictions on the number of representations as sums of squares of integers bounded in magnitude.

Keywords: binomial coefficient; de Moivre – Laplace theorem; Walsh – Hadamard spectrum; bent function; sum of squares representation.

Результаты

Теорема Муавра – Лапласа применительно к симметричному биномиальному распределению может быть записана в виде следующей оценки биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{k} = \frac{2^n}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}} \exp \left(-\frac{2 \left(k - \frac{n}{2} \right)^2}{n} \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

Данная оценка справедлива при $n \rightarrow \infty$ и $\left| k - \frac{n}{2} \right| = O(\sqrt{n})$, т. е. в так называемой центральной области изменения параметров.

То, что оценка носит асимптотический характер и справедлива только в центральной области, затрудняет ее применение в ряде случаев (некоторые из них рассмотрены в настоящей работе). Известны неасимптотические оценки, которые справедливы в более широких областях. Например:

$$\left(\frac{n}{k} \right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k} \right)^k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

или

$$\frac{2^{nH_2(k/n)}}{\sqrt{8k \left(1 - \frac{k}{n} \right)}} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{2^{nH_2(k/n)}}{\sqrt{2\pi k \left(1 - \frac{k}{n} \right)}}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

где $H_2(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ (см. соответственно [1; 2, chapter 10, lemma 7]). Однако либо эти оценки недостаточно точны, либо их форма оказывается недостаточно удобной.

Автором найдена оценка сверху для биномиальных коэффициентов, в которой сохраняется форма Муавра – Лапласа, и при этом данная оценка справедлива во всей области изменения параметров.

Теорема. Для натурального n и $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ справедлива оценка

$$\binom{n}{k} \leq \frac{2^n}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}} \exp \left(-\frac{2 \left(k - \frac{n}{2} \right)^2}{n} + \frac{23}{18n} \right).$$

При ее построении использовался представленный в публикации [3] подход, в свою очередь основанный на ряде предшествующих работ.

Далее в статье обсуждается применение полученной оценки, а именно: оценивается сверху число продолжений заданной булевой функции до бент-функций, определяется степень зависимости координат

спектров Уолша – Адамара, находятся ограничения на количество представлений натуральных чисел в виде суммы квадратов целых чисел, ограниченных по модулю, и приводится доказательство теоремы.

Продолжения до бент-функций

Пусть $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов (0 и 1), $\mathbb{F}_2^n$ – n -мерное векторное пространство над $\mathbb{F}_2$, $\mathcal{F}_n$ – множество булевых функций от n переменных, т. е. функций $\mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$. Для $f \in \mathcal{F}_n$ определена спектральная функция (спектр) Уолша – Адамара:

$$\hat{f}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n} \chi(f(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^n.$$

Здесь χ – нетривиальный аддитивный характер $\mathbb{F}_2$: $\chi(a) = (-1)^a$, а точка обозначает скалярное произведение векторов.

Для спектра $\hat{f}$ справедливо тождество Парсеваля:

$$\sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^n} \hat{f}(\mathbf{u})^2 = 2^{2n}.$$

В силу этого тождества $\max_{\mathbf{u}} |\hat{f}(\mathbf{u})| \geq 2^{n/2}$. Если нижняя граница достигается (это возможно только при четных n), то f называется *бент-функцией* [4]. Пусть $\mathcal{B}_n$ – множество бент-функций от n переменных.

Бент-функции являются идеальными объектами в контексте некоторых задач теории кодирования, криптографии, комбинаторики. Несмотря на интенсивные исследования, бент-функции сохраняют статус трудных для изучения, существует множество открытых вопросов, связанных с ними. Один из таких вопросов – оценка числа бент-функций. В [5] для построения оценок сверху предложено оценивать число продолжений булевой функции до бент-функций. Далее остановимся на числе продолжений, раскрывая и детализируя положения [5].

Пусть $k < n$. Функция $f \in \mathcal{F}_n$ является *продолжением* $g \in \mathcal{F}_k$, если

$$g(y_1, \dots, y_k) = f\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, y_1, \dots, y_k\right).$$

Другими словами, f есть продолжение g , если g является *сужением* f на аффинную плоскость $E = \{(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_k) : y_i \in \mathbb{F}_2\}$. Выбор E в нашем случае не имеет принципиального значения: можно зафиксировать любую другую плоскость размерности k .

Пусть $\mathcal{B}_n(g)$ – множество всех функций $f \in \mathcal{B}_n$, которые являются продолжениями g . Далее мы оценим число продолжений $|\mathcal{B}_n(g)|$ сверху. Используемый метод оценивания основан на представлении бент-функций бент-прямоугольниками. Это представление было введено в [6]. Опишем его.

Пусть $f \in \mathcal{F}_n$ и $n = m + k$, где m и k – натуральные числа. Рассмотрим всевозможные сужения f на плоскости, параллельные E :

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{y}), \mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^m, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^k.$$

От сужений $f_{\mathbf{u}}$ перейдем к их спектрам $\hat{f}_{\mathbf{u}}$, а затем построим функцию

$$\hat{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \hat{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}), \mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^m, \mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^k.$$

Она называется *прямоугольником* f . По построению сужения $\hat{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $\mathbf{v}$ (*строки*) являются спектральными функциями. Если дополнительно сужения $\hat{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $\mathbf{u}$ (*столбцы*), домноженные на $2^{(m-k)/2}$, также являются спектральными функциями, то $\hat{f}$ называется *бент-прямоугольником*. В [6] доказано, что f – бент-функция тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ – бент-прямоугольник.

В терминах бент-прямоугольников задача оценки числа продолжений $|\mathcal{B}_n(g)|$ сводится к оценке числа бент-прямоугольников $\hat{f}$, первая строка которых фиксирована:

$$\hat{f}(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = \hat{g}(\mathbf{v}).$$

Сразу отметим, что при $k > \frac{n}{2}$ существуют функции g , не допускающие продолжений: $|\mathcal{B}_n(g)| = 0$. При мером является функция, которая принимает в точности $2^{k-1} + 1$ нулевых значений, и поэтому $\hat{g}(\mathbf{0}) = 2$. Функция $2^{(m-k)/2} \hat{f}(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ содержит нечетное или даже дробное значение

$$2^{(m-k)/2} \hat{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 2^{(m-k)/2} \hat{g}(\mathbf{0}) = 2^{(m-k)/2+1}$$

и не может являться спектральной функцией. Следовательно, $\hat{f}$ не может быть бент-прямоугольником.

При $k \leq \frac{n}{2}$ ситуация меняется: как показывает следующее предложение, продолжение g до бент-функции всегда существует. С помощью теоремы мы оценим сверху число продолжений.

Предложение 1. При четном n для любой булевой функции g от $k \leq \frac{n}{2}$ переменных множество $\mathcal{B}_n(g)$ непусто. Справедлива оценка

$$\log_2 |\mathcal{B}_n(g)| \leq 2^n (1 - \gamma_{2^{n-k}}),$$

в которой

$$\gamma_M = \frac{\log_2 e + \log_2 \pi + \log_2 M - 1}{2M} - \frac{23 \log_2 e}{18M^2}.$$

Доказательство. Сначала докажем, что $|\mathcal{B}_n(g)| \neq 0$. Достаточно рассмотреть случай $k = \frac{n}{2}$. Прямоугольник

$$\hat{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \hat{g}(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^k,$$

реализует биаффинную конструкцию из [7] и поэтому является бент-прямоугольником. Следовательно, соответствующая $\hat{f}$ функция f лежит в $\mathcal{B}_n$. Более того, первая (при $\mathbf{u} = \mathbf{0}$) строка $\hat{f}$ совпадает с $\hat{g}$, и, значит, f является продолжением g . В целом $f \in \mathcal{B}_n(g)$, и, таким образом, $\mathcal{B}_n(g)$ непусто.

Перейдем к оценке $|\mathcal{B}_n(g)|$ сверху. Требуется оценить число бент-прямоугольников $\hat{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ таких, что $\hat{f}(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = \hat{g}(\mathbf{v})$. Обозначим $M = 2^m$, $K = 2^k$, $s_v = 2^{(m-k)/2} \hat{g}(\mathbf{v})$.

Рассмотрим столбцы $\hat{f}$, домноженные на $2^{(m-k)/2}$. Речь идет о спектральных функциях

$$\hat{g}_v(\mathbf{u}) = 2^{(m-k)/2} \hat{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^m, \mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^k,$$

которым соответствуют функции $g_v \in \mathcal{F}_m$. Исходя из ограничений на $\hat{f}$,

$$\hat{g}_v(\mathbf{0}) = 2^{(m-k)/2} \hat{f}(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 2^{(m-k)/2} \hat{g}(\mathbf{v}) = s_v.$$

Имеются 2^M вариантов выбора g_v , и ровно $\binom{M}{(M+s_v)/2}$ из них приводят к выполнению равенства $\hat{g}_v(\mathbf{0}) = s_v$. Поэтому искомое число продолжений (число подходящих бент-прямоугольников) есть

$$|\mathcal{B}_n(g)| \leq \prod_{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^k} \binom{M}{(M+s_v)/2}.$$

Логарифмируя обе части этого неравенства и используя оценку теоремы, получаем

$$\log_2 |\mathcal{B}_n(g)| \leq \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^k} (M - \alpha_M s_v^2 - \beta_M).$$

Здесь

$$\alpha_M = \frac{\log_2 e}{2M}, \beta_M = \frac{1}{2}(\log_2 \pi + \log_2 M - 1) - \frac{23 \log_2 e}{18M}.$$

Воспользовавшись равенством

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^k} s_v^2 = 2^{m-k} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^k} \hat{g}(\mathbf{v})^2 = 2^{m-k} \cdot 2^{2k} = MK,$$

окончательно получаем

$$\log_2 |\mathcal{B}_n(g)| \leq MK \left(1 - \alpha_M - \frac{\beta_M}{M} \right) = MK(1 - \gamma_M),$$

что и требовалось доказать.

В доказательстве использовалась следующая форма оценки теоремы:

$$\binom{M}{(M+s)/2} \leq 2^{M - \alpha_M s^2 - \beta_M}.$$

По коэффициентам α_M и β_M была найдена величина $\gamma_M = \alpha_M + \frac{\beta_M}{M}$, именно она определяла точность оценивания в предложении 1. Оказывается, что α_M и β_M можно подправить так, чтобы величина γ_M увеличилась, но оценки для биномиальных коэффициентов остались в силе.

При малых M оптимальные тройки $(\alpha_M, \beta_M, \gamma_M)$ можно найти, решив задачу линейного программирования (см. таблицу). Значения γ_M из последнего столбца таблицы можно использовать в предложении 1 вместо указанных там величин γ_M .

**Решения задачи линейного программирования
по нахождению оптимальных значений α_M, β_M и γ_M**
**Solutions of the linear programming problem
to find the optimal values of α_M, β_M and γ_M**

M	α_M	β_M	γ_M
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$
8	$\frac{1}{12}$	$\frac{14}{3} - \log_2 7$	$\frac{2}{3} - \frac{\log_2 7}{8} \approx 0,3157$

Латинские зависимости

Пусть $\mathbb{Z}^N$ – множество N -наборов целых чисел, Ω – конечное подмножество $\mathbb{Z}^N$, p – распределение вероятностей на Ω , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ – случайный набор Ω с распределением p , p_i – маргинальное распределение i -й координаты набора: $p_i(x) = \mathbf{P}\{a_i = x\}$, $i = 1, \dots, N$.

Степень зависимости между координатами $\mathbf{a}$ можно оценить по следующей схеме.

Шаг 1. Выбрать случайные независимые N -наборы $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^N$ с распределением p .

Шаг 2. Составить набор $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$, в котором b_i – i -я координата $\mathbf{a}^i$.

Шаг 3. Определить степень зависимости: $L(p) = \mathbf{P}\{\mathbf{b} \in \Omega\}$.

Удобно считать, что наборы $\mathbf{a}^i$ образуют строки целочисленной матрицы порядка N , и тогда $\mathbf{b}$ – диагональ матрицы. Вероятность $\mathbf{P}\{\mathbf{b} \in \Omega\}$ характеризует соблюдение ограничений на диагональ при условии соблюдения ограничений на строки. Похожие ограничения (на строки, столбцы, иногда на диагонали) возникают в латинских квадратах. Поэтому будем называть величину $L(p)$ степенью латинской зависимости.

Величина $L(p)$ представляет собой вероятность успешной «сборки» элемента Ω из «разрозненных» координат с распределениями $p_1, \dots, p_N$. С увеличением зависимости между координатами $\mathbf{a}$ следует ожидать уменьшения вероятности $L(p)$. Максимальное значение $L(p) = 1$ достигается тогда, когда координаты $\mathbf{a}$ независимы.

Степень латинской зависимости можно вычислить по следующей формуле:

$$L(p) = \sum_{(b_1, \dots, b_N) \in \Omega} \prod_{i=1}^N p_i(b_i).$$

Пример 1. Пусть p назначает вероятность $\frac{1}{N!}$ перестановкам чисел от 1 до N и вероятность 0 всем остальным наборам. Тогда $p_i(x) = \frac{1}{N}$ для $x \in \{1, \dots, N\}$ и $p_i(x) = 0$ в противном случае. Отсюда

$$L(p) = \frac{N!}{N^N} \approx \frac{\sqrt{2\pi N}}{e^N}.$$

Можно говорить об экспоненциальной зависимости.

Пример 2. Пусть N четное, p назначает вероятность $1/\binom{N}{N/2}$ каждому из $(0, 1)$ -наборов длины N , в которых в точности $\frac{N}{2}$ единиц. Тогда $p_i(x) = \frac{1}{2}$ для $x \in \{0, 1\}$. Отсюда

$$L(p) = 2^{-N} \binom{N}{N/2} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}}.$$

Можно говорить о степенной зависимости (точнее, зависимости типа «корень квадратный»).

Покажем, как использовать теорему для оценки степени латинской зависимости в спектрах Уолша – Адамара (см. раздел «Продолжения до бент-функций»).

Предложение 2. Пусть Ω состоит из наборов значений спектральных функций $\hat{f}$, соответствующих всевозможным $f \in \mathcal{F}_n$, а p задает равномерное распределение на Ω . Тогда

$$L(p) \leq \exp\left(\frac{23}{18}\right) \left(\frac{8}{\pi e N}\right)^{N/2}, \quad N = 2^n.$$

Доказательство. Имеется 2^N функций f , преобразование $f \mapsto \hat{f}$ биективно, поэтому $|\Omega| = 2^N$. Элементы Ω – это N -наборы четных чисел, ограниченных по модулю величиной N . Маргинальные распределения координат наборов $p_i(x) = 2^{-N} \binom{N}{(N+x)/2}$, $x \in \{-N, -N+2, \dots, N\}$.

Степень зависимости координат

$$L(p) = \sum_{(b_1, \dots, b_N) \in \Omega} \prod_{i=1}^N 2^{-N} \binom{N}{(N+b_i)/2}.$$

Обратим внимание, что в силу тождества Парсеваля $\sum_i b_i^2 = N^2$.

Применяя теорему, имеем

$$\begin{aligned} L(p) &\leq 2^N \max_{(b_1, \dots, b_N) \in \Omega} \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left(-\frac{b_i^2}{2N} + \frac{23}{18N}\right) = \\ &= 2^N \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{N}{2} + \frac{23}{18}\right) = \exp\left(\frac{23}{18}\right) \left(\frac{8}{\pi e N}\right)^{N/2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Как видим, степень латинской зависимости в спектрах Уолша – Адамара асимптотически выше, чем в перестановках. В случае спектров можно говорить о факториальной зависимости.

Представление в виде суммы квадратов

Пусть $r_{s,n}(N)$ – число представлений целого неотрицательного N в виде суммы квадратов s целых чисел, ограниченных по модулю натуральным n :

$$r_{s,n}(N) = \left| \left\{ (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{Z}^s : \sum_{i=1}^s a_i^2 = N, |a_i| \leq n \right\} \right|.$$

Функция $r_{s,n}(N)$ и особенно функция $r_s(N)$, в которой ограничения на модули a_i сняты, давно изучаются в теории чисел. Например, известна асимптотическая интегральная оценка

$$\sum_{N=1}^R r_s(N) = \frac{(\pi R)^{s/2}}{\Gamma(s/2 + 1)} + O(R^{(s-1)/2}), \quad R \rightarrow \infty,$$

которая при $s = 2$ известна как круговая теорема Гаусса (см., например, [8]).

С помощью теоремы получаем следующую интегральную оценку для $r_{s,n}(N)$.

Предложение 3. *Справедлива оценка*

$$\sum_{N=0}^{sn^2} r_{s,n}(N) \exp\left(-\frac{N}{n}\right) \geq (\pi n)^{s/2} \exp\left(-\frac{23s}{36n}\right).$$

Доказательство. Набор $(a_1, \dots, a_s)$ является целой точкой s -мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^s$. Эта точка лежит в пределах s -мерного куба со стороной $2n$ и одновременно на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_s^2}$. Любая точка внутри куба лежит на окружности какого-то радиуса, причем квадрат этого радиуса является целым неотрицательным числом, не превосходящим sn^2 . Воспользуемся этим наблюдением.

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_s$ – случайные величины, каждая из которых получена суммированием $2n$ независимых случайных величин, принимающих значения 1 и -1 с равными вероятностями. Тогда для точек $(a_1, \dots, a_s)$, лежащих в пределах куба, выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{(\xi_1, \dots, \xi_s) = (2a_1, \dots, 2a_s)\} = \prod_{i=1}^s 2^{-2n} \binom{2n}{n+a_i} \leq \frac{1}{(\pi n)^{s/2}} \exp\left(-\frac{N}{n} + \frac{23s}{36n}\right).$$

Здесь $N = \sum_i a_i^2$ – квадрат радиуса окружности, на которой лежит точка $(a_1, \dots, a_s)$.

Сказанное означает, что

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{-n \leq a_1, \dots, a_s \leq n} \mathbf{P}\{(\xi_1, \dots, \xi_s) = (2a_1, \dots, 2a_s)\} = \\ &= \sum_{N=0}^{sn^2} \sum_{\substack{-n \leq a_1, \dots, a_s \leq n \\ \sum a_i^2 = N}} \mathbf{P}\{(\xi_1, \dots, \xi_s) = (2a_1, \dots, 2a_s)\} \leq \sum_{N=0}^{sn^2} r_{s,n}(N) \frac{1}{(\pi n)^{s/2}} \exp\left(-\frac{N}{n} + \frac{23s}{36n}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемый результат.

Доказательство теоремы

Лемма. *Для натурального n и $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ справедлива оценка*

$$\binom{2n}{n+k} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\frac{k^2}{n} + \frac{23}{36n}\right).$$

Доказательство. Оценка очевидно выполняется для $k = \pm n$. Она проверяется прямыми расчетами при $n = 1, 2$. Биномиальные коэффициенты $\binom{2n}{n+k}$ и $\binom{2n}{n-k}$ совпадают. Поэтому остается рассмотреть случай $n \geq 3$ и $0 \leq k < n$.

Для этого случая в [3] найдена оценка

$$\log\left(\binom{2n}{n+k} 2^{-2n}\right) \leq \log \frac{1}{\sqrt{\pi n}} - b_{k,n} - \frac{1}{9n},$$

в которой

$$b_{k,n} = n \left[\left(1 + \frac{k + \frac{1}{2}}{n}\right) \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) + \left(1 - \frac{k - \frac{1}{2}}{n}\right) \log\left(1 - \frac{k}{n}\right) \right].$$

Остается доказать, что $b_{k,n} > \frac{k^2}{n} - \frac{c}{n}$, где $c = \frac{23}{36} + \frac{1}{9} = \frac{3}{4}$.

Рассмотрим функцию $f(k) = b_{k,n} - \frac{k^2}{n}$. В [3] получено представление

$$f(k) = -\frac{k^2}{2n^2} + \frac{k^4}{2n^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{k^6}{2n^5} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n}\right) + \dots$$

Пусть $k_0 = \sqrt{\frac{3n}{2}}$. В области $k \leq k_0$ выполняется неравенство

$$f(k) > -\frac{k^2}{2n^2} \geq -\frac{k_0^2}{2n^2} = -\frac{c}{n}.$$

Теперь достаточно доказать, что $f(k)$ как функция вещественного аргумента возрастает в области $k \in [k_0, n-1]$.

Обозначим $x = \frac{k}{n}$ и возьмем производную:

$$\begin{aligned} f'(k) &= 2 \operatorname{arth}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{2k}{n} + \frac{k}{k^2 - n^2} = 2 \operatorname{arth} x - 2x - \frac{x}{2n(1-x^2)} = \\ &= \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \dots - \frac{x}{2n(1-x^2)} > \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} - \frac{x}{2n(1-x^2)}. \end{aligned}$$

Производная последнего выражения имеет вид

$$\frac{(1+x^2)(4nx^2(1-x^2)^2 - 1)}{2n(1-x^2)^2}.$$

Она положительна в области $x \in \left[x_0, \frac{n-1}{n}\right]$, где $x_0 = \frac{k_0}{n}$, и в силу этого $f'(k)$ возрастает в области $k \in [k_0, n-1]$. Остается сказать, что

$$f'(k_0) > \frac{2x_0^3}{3} - \frac{x_0}{2n(1-x_0^2)} = x_0 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n\left(1-\frac{3}{2n}\right)} \right) \geq 0$$

(с учетом, что $n \geq 3$), и поэтому $f(k)$ также возрастает.

Перейдем к доказательству теоремы. Достаточно рассмотреть случай нечетного $n = 2m - 1$ и $k \leq m$. Имеем

$$\begin{aligned} \binom{2m-1}{k} &= \frac{2m-k}{2m} \binom{2m}{k} \leq \left(1 - \frac{k}{2m}\right) \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left(-\frac{(k-m)^2}{m} + \frac{23}{36m}\right) \leq \\ &\leq \frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}} \exp\left(-\frac{\left(k-m+\frac{1}{2}\right)^2}{m-\frac{1}{2}} + \frac{23}{36\left(m-\frac{1}{2}\right)} + t(k)\right). \end{aligned}$$

Здесь

$$t(k) = -\frac{(k-m)^2}{m} + \frac{\left(k-m+\frac{1}{2}\right)^2}{m-\frac{1}{2}} + \log 2 + \log\left(1 - \frac{k}{2m}\right) = \log\left(2 - \frac{k}{m}\right) - \frac{2m^2 - m - 2k^2}{2m(2m-1)}.$$

Достаточно доказать, что $t(k) \geq 0$ в области $k \in [0; m]$. Производная

$$t'(k) = \frac{2k}{2m^2 - m} - \frac{1}{2m - k} = \frac{2(m-k)^2 - m}{(2m^2 - m)(2m - k)},$$

поэтому минимум достигается в точке $k_0 = m - \sqrt{\frac{m}{2}}$, и этот минимум равняется

$$t(k_0) = \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2m}}\right) - \frac{1}{1 + \sqrt{2m}}.$$

Обозначим $x = \sqrt{2m}$. Имеем

$$t(k_0) \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x-1}{2x^2(x+1)} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Библиографические ссылки

1. Odlyzko AM. Asymptotic enumeration methods. In: Graham RL, Grötschel M, Lovász L, editors. *Handbook of combinatorics. Volume 2*. Amsterdam: Elsevier; 1995. p. 1063–1229. Co-published by the «MIT Press».
2. MacWilliams FJ, Sloane NJA. *The theory of error-correcting codes*. 2nd edition. Amsterdam: North-Holland; 1978. XX, 762 p. (North-Holland mathematical library; volume 16).
3. Szabados T. A simple wide range approximation of symmetric binomial distributions. arXiv:1612.01112v1 [Preprint]. 2016 [cited 2021 November 15]: [6 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1612.01112v1>.
4. Rothaus OS. On «bent» functions. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*. 1976;20(3):300–305. DOI: 10.1016/0097-3165(76)90024-8.
5. Агиевич СВ. О продолжении до бент-функций и оценке сверху их числа. *Прикладная дискретная математика. Приложение*. 2020;13:18–21. DOI: 10.17223/2226308X/13/4.
6. Agievich S. On the representation of bent functions by bent rectangles. In: Kolchin VF, Kozlov VYa, Mazalov VV, Pavlov YuL, Prokhorov YuV, editors. *Probabilistic methods in discrete mathematics. Proceedings of the Fifth International Petrozavodsk conference; 2000 June 1–6; Petrozavodsk, Russia*. Utrecht: VSP; 2002. p. 121–135.
7. Agievich S. Bent rectangles. In: Preneel B, Logachev OA, editors. *Boolean functions in cryptology and information security. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute; 2007 September 8–18; Zvenigorod, Russia*. Amsterdam: IOS Press; 2008. p. 3–22 (NATO science for peace and security series. D: Information and communication security; volume 18).
8. Takloo-Bighash R. *A Pythagorean introduction to number theory. Right triangles, sums of squares, and arithmetic*. Cham: Springer; 2018. XVIII, 279 p. (Undergraduate texts in mathematics).

References

1. Odlyzko AM. Asymptotic enumeration methods. In: Graham RL, Grötschel M, Lovász L, editors. *Handbook of combinatorics. Volume 2*. Amsterdam: Elsevier; 1995. p. 1063–1229. Co-published by the «MIT Press».
2. MacWilliams FJ, Sloane NJA. *The theory of error-correcting codes*. 2nd edition. Amsterdam: North-Holland; 1978. XX, 762 p. (North-Holland mathematical library; volume 16).
3. Szabados T. A simple wide range approximation of symmetric binomial distributions. arXiv:1612.01112v1 [Preprint]. 2016 [cited 2021 November 15]: [6 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1612.01112v1>.
4. Rothaus OS. On «bent» functions. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*. 1976;20(3):300–305. DOI: 10.1016/0097-3165(76)90024-8.
5. Agievich SV. On the continuation to bent functions and upper bounds on their number. *Applied Discrete Mathematics. Supplement*. 2020;13:18–21. Russian. DOI: 10.17223/2226308X/13/4.
6. Agievich S. On the representation of bent functions by bent rectangles. In: Kolchin VF, Kozlov VYa, Mazalov VV, Pavlov YuL, Prokhorov YuV, editors. *Probabilistic methods in discrete mathematics. Proceedings of the Fifth International Petrozavodsk conference; 2000 June 1–6; Petrozavodsk, Russia*. Utrecht: VSP; 2002. p. 121–135.
7. Agievich S. Bent rectangles. In: Preneel B, Logachev OA, editors. *Boolean functions in cryptology and information security. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute; 2007 September 8–18; Zvenigorod, Russia*. Amsterdam: IOS Press; 2008. p. 3–22 (NATO science for peace and security series. D: Information and communication security; volume 18).
8. Takloo-Bighash R. *A Pythagorean introduction to number theory. Right triangles, sums of squares, and arithmetic*. Cham: Springer; 2018. XVIII, 279 p. (Undergraduate texts in mathematics).

Получена 20.01.2022 / исправлена 21.02.2022 / принята 21.02.2022.
Received 20.01.2022 / revised 21.02.2022 / accepted 21.02.2022.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 616.728:51

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЮНГА ПОРИСТОГО ТИТАНА С ОТКРЫТЫМИ ПОРАМИ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНОГО МАССИВА ЯЧЕЕК ГИБСОНА – ЭШБИ

А. В. НИКИТИН¹⁾, Г. И. МИХАСЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Цель исследования – определение эффективного модуля Юнга пористого титана с открытыми порами на основе модели Гибсона – Эшби. Предложены две новые модели в виде трехмерных массивов ячеек Гибсона – Эшби с двумя вариантами соединения вертикальных и горизонтальных балок – шарнирным опиранием и жестким защемлением. Расчеты, выполненные на основе разработанных моделей, сопоставлены с результатами известных моделей и литературными данными. Доказано предположение, что при высокой пористости деформация образцов происходит в большей мере за счет прогиба горизонтальных балок, а при уменьшении пористости значительную роль начинает играть деформация сжатия вертикальных балок.

Ключевые слова: модель Гибсона – Эшби; пористый титан; открытые поры; эффективный модуль Юнга.

Образец цитирования:

Никитин АВ, Михасев ГИ. Оценка эффективного модуля Юнга пористого титана с открытыми порами на основе трехмерного массива ячеек Гибсона – Эшби. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:75–82.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-75-82>

For citation:

Nikitsin AV, Mikhasev GI. Estimation of the effective Young's modulus for open cell porous titanium based on 3D Gibson – Ashby cell array. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:75–82. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-75-82>

Авторы:

Андрей Викторович Никитин – старший преподаватель кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.

Authors:

Andrei V. Nikitsin, senior lecturer at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
andy.nik@tut.by

Gennadi I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
mikhasev@bsu.by

ESTIMATION OF THE EFFECTIVE YOUNG'S MODULUS FOR OPEN CELL POROUS TITANIUM BASED ON 3D GIBSON – ASHBY CELL ARRAY

A. V. NIKITSIN^a, G. I. MIKHASEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. V. Nikitsin (andy.nik@tut.by)

The objective of study is to determine the effective Young's modulus of open cell porous titanium based on the Gibson – Ashby model. Two novel models are proposed in the form of 3D Gibson – Ashby cell arrays with two variants for connecting vertical and horizontal beams – hinged support and rigid clamping. Calculations made on the basis of the developed models are compared with results of known models and literature data. It is proved the assumption that at high porosity, the deformation of samples occurs to a greater extent due to the deflection of horizontal beams, and with a decrease in porosity, the compressive deformation of vertical beams is playing an important role.

Keywords: Gibson – Ashby model; porous titanium; open pores; effective Young's modulus.

Введение

Наиболее часто используемые подходы к исследованию механических характеристик пористых структур, встречающиеся в научной литературе, можно разделить на три основные группы:

- представление пористой структуры как континуума с особыми характеристиками композитного материала;
- описание ячеек пористой структуры с помощью теории балок, имеющих определенную толщину стенок;
- прямое моделирование внутренней архитектуры методом конечных элементов с использованием данных компьютерной томографии.

Несмотря на то что последний подход является максимально приближенным к реальной механике сопротивления материала, он слишком трудоемок для применения непосредственно к структурам большого размера [1]. При моделировании вставок из пористого титана в форме параллелепипеда целесообразнее использовать математические модели, построенные на теории балок.

Предложенная в 1997 г. модель Гибсона – Эшби (МГЭ) для расчета эффективного модуля Юнга пористых материалов с открытыми порами является идеализированной и представляет собой ячейку в виде куба [2]. Ребрами такой модели выступают одномерные конечные элементы типа «балка» одинаковой длины. При этом вертикально расположенные балки не испытывают деформацию и обеспечивают заделку горизонтальных балок верхней и нижней граней, к серединным точкам которых приложена внешняя сила [3]. Соотношение Гибсона – Эшби для трехмерных ячеистых структур на основе балок записывается в виде

$$\bar{E} = \frac{E_f}{E_s} = (1 - \phi)^2, \quad (1)$$

где $\bar{E}$ – относительный модуль Юнга; E_f – эффективный модуль Юнга пористого титана; E_s – эффективный модуль Юнга сплошного титана; ϕ – пористость (отношение порового пространства к общему объему).

Соотношение Гибсона – Эшби, вероятно, является наиболее удачным соотношением для прогнозирования эффективных свойств материалов с высокой пористостью (более 70 %) [4]. Однако применение такой модели ограничено геометрическими характеристиками исследуемых образцов, поскольку предполагает равную длину ребер. Расчет пористых структур, имеющих форму разностороннего параллелепипеда, возможен, если представить его объем в виде трехмерного массива определенного количества кубических ячеек. В этом случае каждая отдельная часть дискретной модели является МГЭ с идентичной геометрией, обладая одинаковыми механическими свойствами.

Цель данного исследования – создание математической модели на основе ячеистых МГЭ, описывающей деформацию пористого титана с открытыми порами в зависимости от степени пористости.

Методика исследования

Математическая модель пористой структуры с открытыми порами, рассматриваемая в настоящей работе, представляет собой дискретный параллелепипед размером $a \times b \times c$, составные части которого

являются МГЭ. Каждая такая модель состоит из 12 одномерных балок равной длины l с поперечным сечением $t \times t$. Ячейки располагаются вертикально и дополнительно к этому распределяются по плоскости в двух направлениях, как показано на рис. 1, а.

Количество кубических элементов в каждом направлении имеет свое значение – m, k, n . Ячейки соединяются между собой в столбце двумя жесткими балками высотой h , которые передают напряжение, возникающее под действием силы F , от верхней грани модели к нижней. Помимо этого, сами столбцы соединяются между собой балками длиной l , прикрепленными к серединным точкам ребер боковых граней каждой ячейки. С помощью таких геометрических параметров можно создавать трехмерные массивы любой размерности.

На рис. 1, б, показана линейно-упругая деформация отдельной ячейки. Согласно математической модели Гибсона – Эшби деформация трехмерных структур с высокой пористостью (более 70 %) происходит за счет изгиба δ горизонтальных балок [2]. Поскольку уменьшение пористости образца обусловлено увеличением поперечного сечения балок, то при расчете эффективного модуля Юнга необходимо также учитывать деформацию вертикальных стоек δ_l и δ_h .

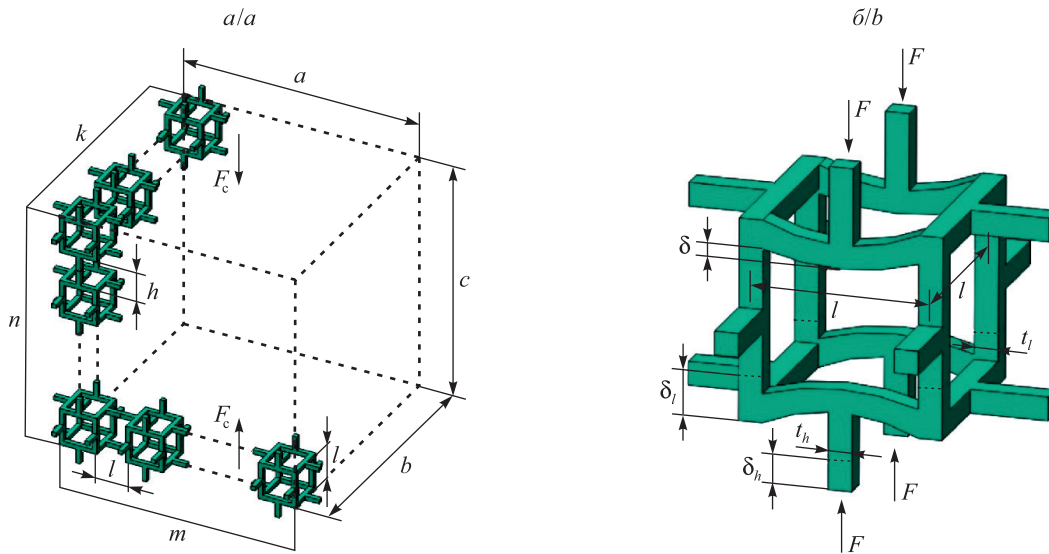


Рис. 1. Математическая модель пористой структуры с открытыми порами, состоящая из n вертикально и $m \times k$ горизонтально расположенных МГЭ (а).
Линейно-упругая деформация отдельной ячейки МГЭ (б)

Fig. 1. Mathematical model of an open pore structure consisting of n vertically and $m \times k$ horizontally arranged Gibson – Ashby models (a).
Linear elastic deformation of a separate cell of the Gibson – Ashby model (b)

Деформации вертикальных балочных элементов l и h можно выразить через их относительные удлинения: $\delta_l = \epsilon_l l$ и $\delta_h = \epsilon_h h$. Если суммарную силу F_c , действующую на верхнюю грань параллелепипеда, представленного в виде массива ячеек размерности $m \times n \times k$, принять равной $2Fmk$, то, используя стандартную теорию балок, деформацию горизонтальной балки можно рассчитать по формуле

$$\delta = C \frac{Fl^3}{E_s I} = C \frac{F_c l^3}{2mkE_s I},$$

где C – поправочный коэффициент, зависящий от типа закрепления балки: $C = \frac{1}{8}$ – шарнирное опирание концов, $C = \frac{1}{192}$ – жесткое защемление концов [2; 5; 6, с. 367–390]; $F_c = 2Fmk$ – суммарная сила, приложенная к верхней грани ячейки; $I = \frac{t^4}{12}$ – осевой момент инерции квадратного сечения.

Относительные удлинения вертикальных балок ϵ_l и ϵ_h найдем через закон Гука, предполагая линейность напряженного состояния:

$$\epsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_s} = \frac{F}{2S_l E_s} = \frac{F_c}{4mkt_l^2 E_s},$$

$$\varepsilon_h = \frac{\sigma_h}{E_s} = \frac{F}{2S_h E_s} = \frac{F_c}{2mkt_h^2 E_s},$$

где $S_l = t_l^2$, $S_h = t_h^2$ – площади поперечных сечений балочных элементов.

Напряжение σ_f , возникающее в общем объеме пористого титана вследствие приложенной суммарной силы F_c , рассчитывается по следующей формуле:

$$\sigma_f = \frac{F_c}{a \times b} = \frac{F_c}{(2m-1)(2k-1)l^2},$$

где a, b – стороны основания параллелепипеда.

Обозначив первоначальную длину параллелепипеда $L_0 = nl + (n-1)h$, а длину после деформации $L_1 = n(l - 2\delta - \delta_l) + (n-1)(h - \delta_h)$, можно найти относительную деформацию пористого титана:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= \frac{L_0 - L_1}{L_0} = \frac{nl + (n-1)h - n(l - 2\delta - \delta_l) - (n-1)(h - \delta_h)}{nl + (n-1)h} = \\ &= \frac{\frac{2nCF_c l^3}{2mkE_s I} + n\varepsilon_l l + (n-1)\varepsilon_h h}{nl + (n-1)h} = \frac{\frac{nCF_c l^3}{mkE_s I} + \frac{nF_c l}{4mkt_l^2 E_s} + \frac{(n-1)F_c h}{2mkt_h^2 E_s}}{nl + (n-1)h}. \end{aligned}$$

Далее определяем эффективный модуль Юнга:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} = \frac{F_c}{(2m-1)(2k-1)l^2 \varepsilon_f} = \frac{F_c (nl + (n-1)h)}{(2m-1)(2k-1)l^2 \left(\frac{nCF_c l^3}{mkE_s I} + \frac{nF_c l}{4mkt_l^2 E_s} + \frac{(n-1)F_c h}{2mkt_h^2 E_s} \right)} = \\ &= \frac{(nl + (n-1)h)mkE_s}{(2m-1)(2k-1)l^2 \left(\frac{12Cnl^3}{t_l^4} + \frac{nl}{4t_l^2} + \frac{(n-1)h}{2t_h^2} \right)}. \end{aligned}$$

Если принять, что $t_l = t_h = t$, то, упростив, получим выражение

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{(nl + (n-1)h)mkE_s}{(2m-1)(2k-1)l^2 \frac{12Cnl^3}{t^4} \left(1 + \frac{nl + 2(n-1)h}{4t^2} \frac{t^4}{12Cnl^3} \right)} = \\ &= \frac{C_1 (nl + (n-1)h)mk}{12 (2m-1)(2k-1)nl} \frac{t^4}{l^4} E_s \frac{1}{1 + \frac{C_1 (nl + 2(n-1)h)t^2}{48 nl^3}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где m, k, n – количество ячеек в каждом направлении; $C = \frac{1}{8}$.

Согласно расчетам, описанным Л. Дж. Гибсоном и М. Ф. Эшби [2; 3], относительную плотность пористого титана $\bar{\rho}$ можно выразить через геометрические размеры балки t и l :

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_f}{\rho_s} = \left(\frac{t}{l} \right)^2,$$

где ρ_f – плотность пористого титана; ρ_s – плотность сплошного титана.

В таком случае пористость φ можно также записать в виде

$$\varphi = 1 - \bar{\rho} = 1 - \frac{t^2}{l^2}.$$

Тогда толщину балки t выразим через пористость и длину:

$$t = l\sqrt{1 - \varphi}. \quad (3)$$

В случае шарнирного опирания балок ($C_1 = 8$) формула (2) принимает вид

$$E_f = \frac{2}{3} \frac{(nl + (n-1)h)mk}{(2m-1)(2k-1)nl} \frac{t^4}{l^4} E_s \frac{1}{1 + \frac{(nl + 2(n-1)h)t^2}{6nl^3}}, \quad (4)$$

а для жесткого защемления балок ($C_1 = 192$) имеем

$$E_f = 16 \frac{(nl + (n-1)h)mk}{(2m-1)(2k-1)nl} \frac{t^4}{l^4} E_s \frac{1}{1 + \frac{4(nl + 2(n-1)h)t^2}{nl^3}}. \quad (5)$$

Полученные нами выражения (4) и (5) являются универсальными для расчета эффективного модуля Юнга пористых структур в виде параллелепипеда любой размерности. Однако если взять частный случай и применить эти формулы для образца кубической формы, когда $m = k = n$ и $h = l$, то после выражения толщины балки через ее длину согласно уравнению (3) обе формулы будут представлять собой соотношение Гибсона – Эшби (1) с уточняющими коэффициентами для каждого типа закрепления:

$$E_f = (1 - \varphi)^2 E_s \frac{2n}{3(2n-1) \left(1 + \frac{3n-2}{6n} (1 - \varphi) \right)}, \quad (6)$$

$$E_f = (1 - \varphi)^2 E_s \frac{16n}{(2n-1) \left(1 + \frac{4(3n-2)}{n} (1 - \varphi) \right)}. \quad (7)$$

Полученные выражения зависят только от пористости образца и количества ячеек. Формула (6) описывает шарнирное опирание концов балки, а формула (7) – их жесткое защемление. В дальнейшем эти выражения используются для расчета эффективного модуля Юнга и сравнения результатов с литературными данными.

Результаты и их обсуждение

Полученные нами формулы (6) и (7) применялись для расчета эффективного модуля Юнга пористых структур с открытыми порами для десяти математических моделей с различной пористостью (от 5 до 95 %). Поскольку данные выражения зависят только от пористости и количества ячеек, в качестве исследуемой геометрии был выбран массив МГЭ в виде куба размером $200 \times 200 \times 200$. Математическую модель такой конфигурации авторы исследовали при изучении деформации пористого титана с использованием цифровых микроструктур [4]. Результаты, полученные с помощью коммерческого программного пакета *GeoDict*[®] (*Math2Market*, Германия), основанного на итеративном преобразовании Фурье уравнения Липпмана – Швингера, описываются исследователями как реалистичные и соответствующие всем аспектам теории сопротивления материалов. Для нахождения промежуточных значений применялся метод интерполяции. Модуль упругости сплошного титана $E_s = 112$ ГПа, что соответствует характеристикам коммерческого титана Grade 4 (ISO 5832-2), из которого изготавливают пористые вставки для костных имплантатов [7]. Также был рассчитан относительный модуль Юнга как отношение эффективного модуля упругости пористого и сплошного титана: $\bar{E} = \frac{E_f}{E_s}$. Расчет параметров производился для четырех

случаев: шарнирного опирания концов балки ($C_1 = 8$); жесткого защемления концов балки ($C_1 = 192$); соотношения Гибсона – Эшби (1); интерполяции результатов *GeoDict*. Сводная таблица результатов представлена ниже.

Графики зависимости относительного модуля Юнга $\bar{E}$ от пористости образца φ для каждой модели отображены на рис. 2. Фиолетовым и оранжевым цветом показаны кривые зависимости для шарнирного опирания концов балки и их жесткого защемления, рассчитанные по формулам (6) и (7) соответственно. Синим цветом отображены значения параметров для соотношения Гибсона – Эшби (1). Значения относительного модуля Юнга в зависимости от пористости модели, полученные путем интерполяции результатов программного пакета *GeoDict*, на графике отображает кривая зеленого цвета.

Расчет эффективных модулей Юнга и относительных модулей упругости
в зависимости от пористости образцов, типа закрепления балки и метода расчета
Effective and relative Young's modulus calculations depending
on the porosity of a specimen, beam attachment and the calculation method

φ	$C_1 = 8$		$C_1 = 192$		МГЭ		GeoDict	
	$\bar{E}$	E_f , ГПа	$\bar{E}$	E_f , ГПа	$\bar{E}$	E_f , ГПа	$\bar{E}$	E_f , ГПа
0,050	0,205	22,515	0,586	64,406	0,903	99,275	0,596	65,560
0,100	0,187	20,555	0,552	60,743	0,810	89,100	0,521	57,263
0,200	0,153	16,820	0,486	53,427	0,640	70,400	0,389	42,790
0,300	0,121	13,354	0,419	46,125	0,490	53,900	0,291	32,034
0,400	0,093	10,187	0,353	38,845	0,360	39,600	0,207	22,806
0,500	0,067	7,357	0,287	31,598	0,250	27,500	0,139	15,265
0,600	0,045	4,904	0,222	24,404	0,160	17,600	0,093	10,251
0,700	0,026	2,878	0,157	17,306	0,090	9,900	0,048	5,238
0,800	0,012	1,337	0,095	10,403	0,040	4,400	0,024	2,673
0,900	0,003	0,350	0,037	4,017	0,010	1,100	0,007	0,721
0,950	0,001	0,090	0,013	1,380	0,003	0,275	0,001	0,137

Как видно из рис. 2, кривая, полученная с помощью программного пакета *GeoDict*, проходит между двумя кривыми, рассчитанными для двух типов закрепления. При этом ее начало совпадает с данными для обратного коэффициента $C_1 = 192$ (жесткое защемление концов балки), а конец – с расчетными значениями для обратного коэффициента $C_1 = 8$ (шарнирное опирание концов балки). Это подтверждает наше предположение, что при высокой пористости деформация образцов происходит в большей мере за счет прогиба горизонтальных перемычек, а при уменьшении пористости вследствие увеличения толщины балок значительную роль играет деформация сжатия вертикальных стоек.

Сравним результаты расчетов с литературными данными, описывающими механические испытания на сжатие пенообразных титановых образцов с различной пористостью. Экспериментальные данные, полученные в ходе исследований [8], показали снижение эффективного модуля Юнга при увеличении пористости. Для образцов с пористостью 71; 73 и 76 % модуль упругости составил 2,8; 1,8 и 1,2 ГПа соответственно. Наиболее близкими к этим значениям оказались результаты расчетов для первой модели (шарнирное опирание концов балки) – 2,75; 2,41 и 1,93 ГПа. Модуль Юнга, рассчитанный для четвертой модели (интерполяция результатов *GeoDict*), при пористости образца 71 % был в 2 раза больше и составил 5,1 ГПа. Для третьей модели (соотношение Гибсона – Эшби) этот параметр имел значение 9,4 ГПа.

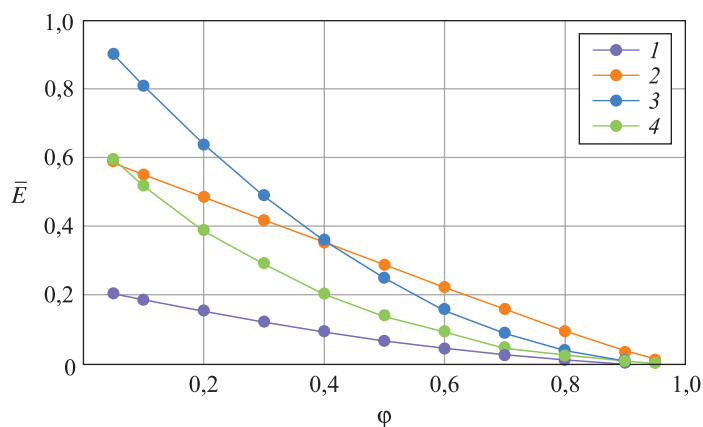


Рис. 2. Графики зависимости относительного модуля Юнга $\bar{E}$ от пористости образца φ с открытыми порами: 1 – $C_1 = 8$; 2 – $C_1 = 192$; 3 – соотношение Гибсона – Эшби; 4 – интерполяция результатов *GeoDict*

Fig. 2. Correlation between relative Young's modulus $\bar{E}$ and porosity φ for open cell foam: 1 – $C_1 = 8$; 2 – $C_1 = 192$; 3 – Gibson – Ashby ratio; 4 – interpolation of *GeoDict* results

В работе [9] изготовленные методом порошковой металлургии титановые вставки со средним уплотнением 60 % подвергались испытаниям на сжатие, в результате чего записывались кривые зависимости напряжения от деформации, и средний модуль Юнга для всех образцов составил 5,3 ГПа. Расчетное значение для первой модели с такой же пористостью – 5,0 ГПа, а для четвертой модели – 10,4 ГПа. Другие испытания на сжатие, проводимые этими же исследователями для образцов с пористостью 63 % [10], показали значение модуля упругости 4,0 ГПа, что также соответствует результату расчета для первой модели, составившему 4,3 ГПа.

Опубликованные в работе [11] результаты испытаний на сжатие включают кривую зависимости напряжения от деформации для титанового образца с пористостью 41 % и эффективный модуль Юнга, равный 41 ГПа. Авторы исследования [12], определяя прочностные характеристики с помощью ультразвукового метода, получили значение 39 ГПа для пористости 41 %. Эти данные хорошо согласуются с результатами расчетов для второй модели (жесткое защемление концов балки) и третьей модели (соотношение Гибсона – Эшби) – 38,8 и 39,0 ГПа соответственно. Также с помощью ультразвукового исследования было получено значение модуля упругости 60 ГПа для образца с пористостью 22 %, что подтверждает адекватность второй модели, для которой значение этого параметра составило 53 ГПа.

Стоит отметить, что в литературе встречались данные механических испытаний на сжатие образцов, изготовленных с использованием других производственных техник, помимо метода порошковой металлургии. При этом результаты кардинально отличались от рассчитанных нами значений. Это свидетельствует, что механические свойства пористых материалов в значительной степени могут зависеть от методов их производства.

Выводы

В описанных выше исследованиях была продемонстрирована методика построения математических моделей на основе МГЭ для пористых металлов с открытыми порами, изготовленных по технологии порошковой металлургии. Полученные с помощью теории балок формулы показали относительно хорошее соответствие результатов расчета литературным данным и подтвердили предположение, что деформация высокопористых образцов происходит в большей степени за счет прогиба горизонтальных перемычек, а при уменьшении пористости также имеет место деформация сжатия вертикальных стоек. Из четырех рассмотренных в статье моделей наиболее информативной и близкой к результатам механических испытаний на сжатие оказалась первая модель с шарнирным опиранием горизонтальных балок (формула (6)). Сравнительный анализ литературных данных позволяет сделать предположение, что данная модель наиболее подходит для расчета структур с пористостью более 60 %.

Результаты расчетов для второй модели с жестким защемлением концов балок показали возможность применения формулы (7) для титановых образцов с пористостью менее 40 %. Прогнозирование эффективного модуля Юнга с помощью данного выражения приемлемо, поскольку представляет собой усредненный вариант между соотношением Гибсона – Эшби и результатами программного пакета *GeoDict*, а также имеет сравнительно хорошее соответствие литературным данным.

В заключение отметим, что формулы (6) и (7) следует применять для образцов высокопористого титана, изготовленных по технологии порошковой металлургии, с максимально равномерно распределенными порами размером 200–500 мкм. Дальнейшие исследования будут направлены на построение математических моделей для пористых титановых вставок, заполненных костной тканью.

Библиографические ссылки

1. Никитин АВ. Определение механических характеристик биокompозита кость – титан на основании данных компьютерной томографии и конечно-элементного моделирования. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;2:79–85. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-2-79-85.
2. Gibson LJ, Ashby MF. *Cellular solids. Structure and properties*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1997. XVIII, 510 p. (Cambridge solid state science series). DOI: 10.1017/CBO9781139878326.
3. Gibson LJ. Mechanical behavior of metallic foams. *Annual Review of Material Science*. 2000;30:191–227. DOI: 10.1146/annurev.matsci.30.1.191.
4. Uhlířová T, Pabst W. Conductivity and Young's modulus of porous metamaterials based on Gibson – Ashby cells. *Scripta Materialia*. 2019;159:1–4. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2018.09.005.
5. Singh R, Lee PD, Lindley TC, Kohlhauser C, Hellmich C, Bram M, et al. Characterization of the deformation behavior of intermediate porosity interconnected Ti foams using micro-computed tomography and direct finite element modeling. *Acta Biomaterialia*. 2010;6(6):2342–2351. DOI: 10.1016/j.actbio.2009.11.032.
6. Уманский АА, редактор. *Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический*. Москва: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам; 1960. 1046 с.

7. Никитин АВ. Конечно-элементный анализ эффекта врастания костных тканей в процессе остеоинтеграции бесцементного эндопротеза. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2013; 13(4, часть 1):90–96.
8. Schuh A, Luyten J, Vidael R, Hönle W, Schmickal T. Porous titanium implant materials and their potential in orthopedic surgery. *Materials Science and Engineering Technology*. 2007;38(12):1015–1018. DOI: 10.1002/mawe.200700246.
9. Wen CE, Mabuchi M, Yamada Y, Shimojima K, Chino Y, Asahina T. Processing of biocompatible porous Ti and Mg. *Scripta Materialia*. 2001;45(10):1147–1153. DOI: 10.1016/S1359-6462(01)01132-0.
10. Wen CE, Yamada Y, Nouri A, Hodgson PD. Porous titanium with porosity gradients for biomedical applications. *Material Science Forum*. 2007;539–543:720–725. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.539-543.720.
11. Thelen S, Barthelat F, Brinson LC. Mechanics considerations for microporous titanium as an orthopedic implant material. *Journal of Biomedical Materials Research. Part A*. 2004;69A(4):601–610. DOI: 10.1002/jbm.a.20100.
12. Davis NG, Teisen J, Schuh C, Dunand DC. Solid-state foaming of titanium by superplastic expansion of argon-filled pores. *Journal of Materials Research*. 2001;16(5):1508–1519. DOI: 10.1557/JMR.2001.0210.

References

1. Nikitsin AV. Estimation of the mechanical properties for bone – titanium biocomposite based on computed tomography data and finite element modeling. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;2:79–85. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-2-79-85.
2. Gibson LJ, Ashby MF. *Cellular solids. Structure and properties*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1997. XVIII, 510 p. (Cambridge solid state science series). DOI: 10.1017/CBO9781139878326.
3. Gibson LJ. Mechanical behavior of metallic foams. *Annual Review of Material Science*. 2000;30:191–227. DOI: 10.1146/annurev.matsci.30.1.191.
4. Uhlířová T, Pabst W. Conductivity and Young's modulus of porous metamaterials based on Gibson – Ashby cells. *Scripta Materialia*. 2019;159:1–4. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2018.09.005.
5. Singh R, Lee PD, Lindley TC, Kohlhauser C, Hellmich C, Bram M, et al. Characterization of the deformation behavior of intermediate porosity interconnected Ti foams using micro-computed tomography and direct finite element modeling. *Acta Biomaterialia*. 2010;6(6):2342–2351. DOI: 10.1016/j.actbio.2009.11.032.
6. Umanskii AA, editor. *Spravochnik proektirovshchika promyshlennykh, zhilykh i obshchestvennykh zdaniy i sooruzhenii. Raschetno-teoreticheskii* [Handbook of the designer of industrial, residential and public buildings and structures. Calculation-theoretical]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu, arkhitekture i stroitel'nykh materialam; 1960. 1046 p. Russian.
7. Nikitsin AV. Biomechanical assessment of the bone ingrowth effect during cementless endoprosthesis osteointegration. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2013;13(4, part 1):90–96. Russian.
8. Schuh A, Luyten J, Vidael R, Hönle W, Schmickal T. Porous titanium implant materials and their potential in orthopedic surgery. *Materials Science and Engineering Technology*. 2007;38(12):1015–1018. DOI: 10.1002/mawe.200700246.
9. Wen CE, Mabuchi M, Yamada Y, Shimojima K, Chino Y, Asahina T. Processing of biocompatible porous Ti and Mg. *Scripta Materialia*. 2001;45(10):1147–1153. DOI: 10.1016/S1359-6462(01)01132-0.
10. Wen CE, Yamada Y, Nouri A, Hodgson PD. Porous titanium with porosity gradients for biomedical applications. *Material Science Forum*. 2007;539–543:720–725. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.539-543.720.
11. Thelen S, Barthelat F, Brinson LC. Mechanics considerations for microporous titanium as an orthopedic implant material. *Journal of Biomedical Materials Research. Part A*. 2004;69A(4):601–610. DOI: 10.1002/jbm.a.20100.
12. Davis NG, Teisen J, Schuh C, Dunand DC. Solid-state foaming of titanium by superplastic expansion of argon-filled pores. *Journal of Materials Research*. 2001;16(5):1508–1519. DOI: 10.1557/JMR.2001.0210.

Получена 24.01.2022 / исправлена 23.02.2022 / принята 23.02.2022.
Received 24.01.2022 / revised 23.02.2022 / accepted 23.02.2022.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004.4

МЕТОДЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ЭПИДЕМИИ COVID-19

**О. В. СЕНЬКО^{1), 2)}, А. В. КУЗНЕЦОВА^{1), 3)}, Е. М. ВОРОНИН¹⁾,
О. А. КРАВЦОВА^{1), 4)}, Л. Р. БОРИСОВА⁵⁾, И. Л. КИРИЛЮК⁶⁾, В. Г. АКИМКИН¹⁾**

¹⁾Центральный научно-исследовательский институт эпидемиологии Роспотребнадзора,
ул. Новогиреевская, 3а, 111123, г. Москва, Россия

²⁾Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, ул. Вавилова, 44, корп. 2, 119333, г. Москва, Россия

³⁾Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля
Российской академии наук, ул. Косыгина, 4, 119334, г. Москва, Россия

⁴⁾Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991, г. Москва, Россия

⁵⁾Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
пр. Ленинградский, 49/2, 125167, г. Москва, Россия

⁶⁾Институт экономики Российской академии наук, пр. Нахимовский, 32, 117218, г. Москва, Россия

Представлен оригинальный метод поиска связи хода эпидемии с социально-экономическими, демографическими и климатическими факторами. В рамках предложенного метода проведена иерархическая агломеративная кластеризация 110 стран мира по кривым темпа роста COVID-19 за период с января 2020 по август 2021 г. Выделены четыре крупных кластера с единообразными кривыми, включающих 11, 39, 17 и 13 стран соответственно. Еще 30 стран не вошли ни в один из кластеров. Методами машинного обучения в выделенных кластерах выявлены различия социально-экономических, демографических и географо-климатических показателей. Наиболее важными показателями, по которым кластеры отличаются друг от друга, стали амплитуда температур в течение года,

Образец цитирования:

Сенько ОВ, Кузнецова АВ, Воронин ЕМ, Кравцова ОА, Борисова ЛР, Кирилук ИЛ, Акимкин ВГ. Методы интеллектуального анализа данных в исследованиях эпидемии COVID-19. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:83–96.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-83-96>

For citation:

Senko OV, Kuznetsova AV, Voronin EM, Kravtsova OA, Borisova LR, Kirilyuk IL, Akimkin VG. Methods of intellectual data analysis in COVID-19 research. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:83–96. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-83-96>

Сведения об авторах см. на с. 95–96.

Information about the authors see p. 95–96.



высокотехнологичный экспорт, коэффициент Джини, численность городского населения и населения в целом, индекс чистых бартерных условий торговли, рост населения, средняя температура января, территория (площадь суши), количество погибших в результате стихийных бедствий, коэффициент рождаемости, длина береговой линии, запасы нефти, доля населения в городских агломерациях с численностью населения более 1 млн человек и др. Данный подход (применение кластеризации в сочетании с классификацией методами логико-статистического анализа) ранее никем не использовался. Найденные закономерности позволят более точно проводить прогнозирование эпидемиологического процесса в странах, принадлежащих к разным кластерам. Дополнение представленного подхода авторегрессионными моделями позволит автоматизировать прогноз и повысить его точность.

Ключевые слова: кластерный анализ; методы машинного обучения; статистика; эпидемиологический процесс; COVID-19.

METHODS OF INTELLECTUAL DATA ANALYSIS IN COVID-19 RESEARCH

O. V. SENKO^{a, b}, A. V. KUZNETSOVA^{a, c}, E. M. VORONIN^a,
O. A. KRAVTSOVA^{a, d}, L. R. BORISOVA^c, I. L. KIRILYUK^f, V. G. AKIMKIN^a

^aCentral Research Institute of Epidemiology, Federal Service for Surveillance on Consumer Rights
Protection and Human Wellbeing, 3a Novogireevskaya Street, Moscow 111123, Russia

^bFederal Research Center «Computer Science and Control», Russian Academy of Sciences,
44 Vavilova Street, 2 building, Moscow 119333, Russia

^cInstitute of Biochemical Physics named after N. M. Emanuel, Russian Academy of Sciences,
4 Kosygina Street, Moscow 119334, Russia

^dLomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

^eFinancial University under the Government of the Russian Federation,
49/2 Leningradskii Avenue, Moscow 125167, Russia

^fInstitute of Economics, Russian Academy of Sciences,
32 Nakhimovskii Avenue, Moscow 117218, Russia

Corresponding author: A. V. Kuznetsova (azforus@yandex.ru)

The paper presents an original method for solving the problem of finding a connection between the course of the epidemic and socio-economic, demographic and climatic factors. The method was applied to solve this problem for 110 countries of the world using a set of corresponding curves of the COVID-19 growth rate for the period from January 2020 to August 2021. Hierarchical agglomerative clustering was applied. Four large clusters with uniform curves were identified – 11, 39, 17 and 13 countries, respectively. Another 30 countries were not included in any cluster. Using machine learning methods, we identified the differences in socio-economic, demographic and geographical and climatic indicators in the selected clusters of countries of the world. The most important indicators by which the clusters differ from each other are amplitude of temperatures throughout the year, high-tech exports, Gini coefficient, size of the urban population and the general population, index of net barter terms of trade, population growth, average January temperature, territory (land area), number of deaths due to natural disasters, birth rate, coastline length, oil reserves, population in urban agglomerations with a population of more than 1 million etc. This approach (the use of clustering in combination with classification by methods of logical-statistical analysis) has not been used by anyone before. The found patterns will make it possible to more accurately predict the epidemiological process in countries belonging to different clusters. Supplementing this approach with autoregressive models will automate the forecast and improve its accuracy.

Keywords: cluster analysis; machine learning methods; statistics; epidemiological process; COVID-19.

Введение

Хорошо известно, что масштабные эпидемии могут оказывать значительное влияние на социально-экономические и демографические показатели [1]. Менее изучено обратное влияние данных показателей на развитие эпидемий. Целью настоящей работы является исследование влияния на эпидемиологический процесс социально-экономических, демографических и климатических факторов, которые далее мы будем называть внешними факторами. Необходимость учета климатических факторов связана с описанным в литературе влиянием сезонности и непосредственно температуры воздуха на заболеваемость острыми респираторными заболеваниями [2]. Знание объективных закономерностей связи хода эпидемиологического процесса с перечисленными внешними факторами, несомненно, должно способствовать пониманию механизмов развития эпидемий и выработке эффективных профилактических мер.

Задачей исследования было создание эффективной информационной технологии для поиска статистически значимых закономерностей, связывающих ход эпидемиологического процесса с внешними факторами. Одним из путей поиска подобных закономерностей является изучение связи внешних факторов с такими глобальными показателями, как общее число случаев заболеваний и (или) общая смертность по совокупности стран мира.

Однако такой анализ затрудняется различными по странам стандартами сбора эпидемиологических данных и динамическим характером процесса. Наиболее полно эпидемиологический процесс описывается кривыми, показывающими зависимость ежесуточного прироста числа случаев заболевания от времени.

Альтернативный способ выявления связи между внешними факторами и динамикой эпидемиологического процесса основан на выделении групп стран со сходной формой эпидемических кривых при значительных различиях между группами. Далее выделенные группы сравниваются между собой по перечисленным внешним факторам с использованием статистических тестов и других средств сравнения групп по наборам показателей в целях выявления статистически значимых различий. Для выделения в совокупности данных групп объектов, имеющих похожие описания, обычно применяются методы кластерного анализа. Поскольку оптимальное число выделяемых групп заранее неизвестно, а общее число объектов невелико, то наиболее подходящей технологией кластерного анализа является иерархическая агломеративная кластеризация. Важная характеристика алгоритма кластеризации – используемая мера сходства между объектами.

Сходство двух эпидемических кривых в смысле синхронности подъема или затухания эпидемии хорошо оценивается с помощью стандартного коэффициента корреляции Пирсона между одновременными суточными приростами заболеваемости. Сохранение коэффициента корреляции Пирсона между двумя переменными при произвольных линейных преобразованиях этих переменных позволяет предположить относительную устойчивость данной меры к методам определения суточного прироста заболеваемости, применяемым в разных странах. В настоящей работе для установления связи между внешними факторами и динамикой эпидемиологического процесса используется подход, основанный на выделении групп стран с единообразной формой эпидемических кривых в смысле меры сходства, задаваемой коэффициентами корреляции Пирсона. Затем выделенные группы сравниваются между собой по перечисленным внешним факторам в целях выявления статистически значимых различий. Дополнительным преимуществом предлагаемого подхода является возможность применения его непосредственно для краткосрочного прогнозирования.

Методы кластерного анализа широко используются для анализа данных, связанных с развитием эпидемии COVID-19, различными исследователями. Так, в работе [3] выделялись группы районов Индии, однородные по показателям плотности населения, количеству госпиталей для пациентов с COVID-19, числу подтвержденных случаев COVID-19. В исследовании [4] кластеризация проводилась по эпидемическим кривым с использованием евклидова расстояния для оценки различия между кривыми. В статье [5] территориальные кластеры внутри материкового Китая выделялись с применением коэффициента пространственной корреляции Морана, связь с метеорологическими, экологическими и социально-экономическими факторами устанавливалась с помощью линейной регрессии с географической привязкой. В работе [6] использовалась иерархическая кластеризация (а именно *average-link clustering*) на данных о заболеваемости и смертности и оценивался индекс перехода для прогнозирования тенденции новой волны заболеваемости как расстояние между ближайшими кластерами. В публикации [7] применялся метод *k*-средних для разбиения стран на группы, где набор признаков включает социальные, экономические и связанные со здоровьем и окружающей средой показатели, а также измерялся коэффициент корреляции Пирсона между эпидемическими кривыми заболеваемости или смертности и выбранными характеристиками. В исследовании [8] проводилась кластеризация стран ЕС с использованием метода Уорда и метода *k*-средних.

Таким образом, рассматриваемый в настоящей работе подход отличается от способов использования кластерного анализа для исследования развития эпидемии COVID-19 в работах [3–8].

Материалы и методы исследования

Исходными данными для кластеризации стали кривые темпа роста COVID-19 за период с января 2020 по август 2021 г.¹

В базу данных для классификации по кластерам вошли показатели 110 стран. В базе социально-экономического статуса стран и погодно-климатических условий было 138 показателей.

¹Данные о заболеваемости COVID-19 по странам мира получены из источника: https://datalens.yandex/7o7is1q6ikh23?tab=0Ze&utm_source=cbmain&state=6057afc92382.

Анализ данных включал следующие этапы.

Этап 1. Вычислялась мера сходства между всевозможными парами эпидемических кривых. Более точный учет сходства или различия между эпидемическими кривыми S_i и S_j достигался через подбор лага l из отрезка $[0, 20]$, при котором коэффициент корреляции Пирсона оказывался максимальным. С этой целью для каждого l вычислялись коэффициент корреляции ρ_l^+ между рядами $S_i(0), \dots, S_i(n-l)$ и $S_j(l), \dots, S_j(n)$ и коэффициент корреляции ρ_l^- между рядами $S_i(l), \dots, S_i(n)$ и $S_j(0), \dots, S_j(n-l)$. Максимальный коэффициент корреляции из набора $\rho_0^+, \rho_0^-, \dots, \rho_{20}^+, \rho_{20}^-$ использовался в качестве меры близости $\rho(S_i, S_j)$ между эпидемическими кривыми S_i и S_j .

Этап 2. Проводилась иерархическая агломеративная кластеризация. В качестве меры сходства двух групп эпидемических кривых G' и G'' использовалось среднее значение меры сходства между эпидемическими кривыми из разных групп:

$$P(G', G'') = \frac{1}{m' m''} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m''} \rho(C_i, C_j).$$

Процесс слияния кластеров прекращался, если мера сходства P между любыми двумя кластерами в текущей кластеризации не оказывалась ниже 0,5.

Этап 3. Производилось сравнение полученных кластеров по перечисленным выше внешним показателям. С этой целью применялся стандартный тест Манна – Уитни, а также метод оптимальных достоверных разбиений (ОДР).

Метод ОДР, описанный ранее в работе [9], основан на поиске разбиений интервалов значений отдельных признаков или двумерных областей допустимых значений пар признаков, позволяющих достичь максимального разделения сравниваемых групп. Разбиения строятся по выборке $\tilde{S} = \{(y_1, x_1), \dots, (y_m, x_m)\}$, где $y_1, \dots, y_m$ – значения бинарной переменной Y , являющейся индикатором сравниваемых групп G_1 и G_2 ; $x_1, \dots, x_m$ – векторы значений потенциальных объясняющих переменных $X_1, \dots, X_N$. Предположим, что имеется разбиение R , состоящее из k элементов $q_1, \dots, q_k$. Качество разделения групп G_1 и G_2 разбиением R оценивается с помощью функционала

$F(\tilde{S}, R) = \sum_{i=1}^k (v_i - v_0)^2 m_i$, где m_i – число объектов из выборки $\tilde{S}$; v_0 – доля объектов из группы G_1 во всей выборке $\tilde{S}$; v_i – доля объектов из группы G_1 внутри элемента q_i . Разбиение R_0 считается оптимальным, если значение функционала $F(\tilde{S}, R)$ для него оказывается не ниже значения $F(\tilde{S}, R)$ для произвольного разбиения R внутри семейства $\tilde{R}$, по которому производится поиск.

Поиск осуществляется внутри трех семейств разбиений, имеющих разный уровень сложности. Простейшее семейство I состоит из разбиений интервалов значений отдельных признаков с одной граничной точкой, семейство II – из разбиений интервалов значений отдельных признаков с двумя граничными точками, семейство III – из разбиений двумерной области допустимых значений пары признаков на четыре подобласти с границами, параллельными координатным осям.

Процедура статистической верификации, основанная на перестановочном тесте, позволяет оценить значимость различий между группами по отдельным признакам, а также значимость различий по каждому из признаков для двумерных разбиений.

Перестановочный тест базируется на проверке нулевой гипотезы о независимом от объясняющих переменных процессе генерации значений целевой переменной Y . Будем предполагать также, что значения переменной Y порождаются независимо из распределения, тождественного маргинальному эмпирическому распределению Y на выборке $\tilde{S}$. Сгенерируем значения переменной Y для каждого вектора объясняющих переменных согласно рассматриваемому процессу. В результате получим новую случайную выборку $\tilde{S}^r = \{(y_1^r, x_1), \dots, (y_m^r, x_m)\}$. Введем дополнительные ограничения на описанный процесс генерации, используя дополнительную селекцию случайных выборок с требованием равенства маргинальных распределений $\{y_1^r, \dots, y_m^r\}$ исходному маргинальному распределению $\{y_1, \dots, y_m\}$. Предположение о генерации данных последним процессом составляет нулевую гипотезу перестановочного теста, которая также эквивалентна гипотезе о генерации случайных выборок с помощью случайных перестановок значений Y относительно фиксированных позиций векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$. То есть случайная выборка будет представлена в виде $\{(y_{f(1)}, \bar{x}_1), \dots, (y_{f(m)}, \bar{x}_m)\}$, где $\{f(1), \dots, f(m)\}$ – случайная перестановка натуральных чисел из множества $\{1, \dots, m\}$.

В качестве статистики критерия в перестановочном тесте используется функция от данных, которая количественно описывает выраженность связи между целевой переменной Y и объясняющими переменными.

В методе ОДР статистикой критерия выступает величина $F(\tilde{S}, R_0)$, т. е. значение функционала $F(\tilde{S}, R)$ на оптимальном разбиении R_0 .

Подсчет p -значений при использовании простейшей одномерной модели производится исходя из проверки описанной выше нулевой гипотезы о полной независимости Y от объясняющих переменных. Предположим, что сгенерировано множество $\tilde{f}_N$ из N случайных перестановок натуральных чисел из набора $\{1, \dots, m\}$. Тогда оценка p -значения может быть вычислена по формуле

$$p = \frac{\sum_{f \in \tilde{f}_N} I\left[F(\tilde{S}_f^r, R_0^f) \geq F(\tilde{S}, R_0) \mid \tilde{S}_f^r = \left\{\left(y_{f(1)}, \bar{x}_1\right), \dots, \left(y_{f(m)}, \bar{x}_m\right)\right\}\right]}{N},$$

где R_0^f – оптимальное разбиение для выборки $\tilde{S}_f^r$.

Для более сложных семейств II и III вычисление p -значений осложняется требованием полной верификации моделей. Невыполнение данного требования обычно приводит к появлению на выходе метода ОДР чрезмерно большого числа избыточных разбиений [9].

Модель считается полностью верифицированной, если статистическую верификацию на достаточном уровне значимости прошли все ее элементы. Для верификации элементов разбиений в методе ОДР используется принцип бритвы Оккама, трактуемый как возможность принятия более сложной модели, если она позволяет опровергнуть нулевую гипотезу об исчерпывающем описании существующих в анализируемых данных закономерностей с помощью более простой модели [10].

Этап 4. Для интегральной оценки различий между сравниваемыми кластерами применялись методы распознавания. Нами использовался набор из девяти методов распознавания, включая такие известные статистические методы, как метод k -ближайших соседей, линейный дискриминант Фишера, логистическая регрессия; метод опорных векторов; ансамбли решающих деревьев, генерируемые с помощью процедур адаптивного и градиентного бустинга; нейронные сети; оригинальный авторский метод – статистически взвешенные синдромы (СВС) [11].

Метод СВС основан на процедуре взвешенного голосования по системам так называемых синдромов – областей признакового пространства, содержащих преимущественно объекты одного из классов.

В качестве интегральной меры различий между кластерами по наборам внешних факторов применялась величина ROC AUC для коллективного решения (ансамбля). Использование интегральной меры позволяет ранжировать различия между кластерами по уровню их выраженности. Причиной использования коллективных решений является их более высокая обобщающая способность, что связано со взаимной компенсацией ошибок различных алгоритмов.

Результаты и их обсуждение

Результаты кластеризации. С использованием описанного выше метода проведена кластеризация 110 стран мира по кривым суточного прироста случаев заболеваний. В итоге были выявлены четыре крупных кластера, каждый из которых содержал не менее 11 стран. Всего в крупные кластеры вошло 80 стран. Еще 30 стран сформировали мелкие кластеры, включающие не более 4 стран, или не образовали кластеров вообще.

Представление общих кривых заболеваемости по кластерам. В 1-й кластер вошли 11 стран – Великобритания, Россия, США, Португалия, Панама, Нигерия, Мексика, Израиль, Ирландия, ОАЭ, ЮАР. Как видно, данный кластер не имеет явной географической локализации.

Сглаженная усредненная эпидемическая кривая для 1-го кластера приведена на рис. 1. Как следует из рис. 1, высокая интенсивность эпидемии отмечалась с октября 2020 по март 2021 г.

Во 2-й кластер вошли 39 стран – Австрия, Германия, Италия, Сербия, Болгария, Румыния, Северная Македония, Венгрия, Иордания, Польша, Украина, Канада, Молдова, Сирия, Босния и Герцеговина, Норвегия, Финляндия, Албания, Эстония, Черногория, Ливан, Словакия, Чехия, Азербайджан, Литва, Хорватия, Грузия, Дания, Беларусь, Латвия, Словения, Нидерланды, Армения, Люксембург, Бельгия, Кения, Швейцария, Швеция, Палестина. Географически они локализованы главным образом в Европе. Из рис. 2 видно существование двух выраженных пиков на интервале с октября 2020 по май 2021 г.

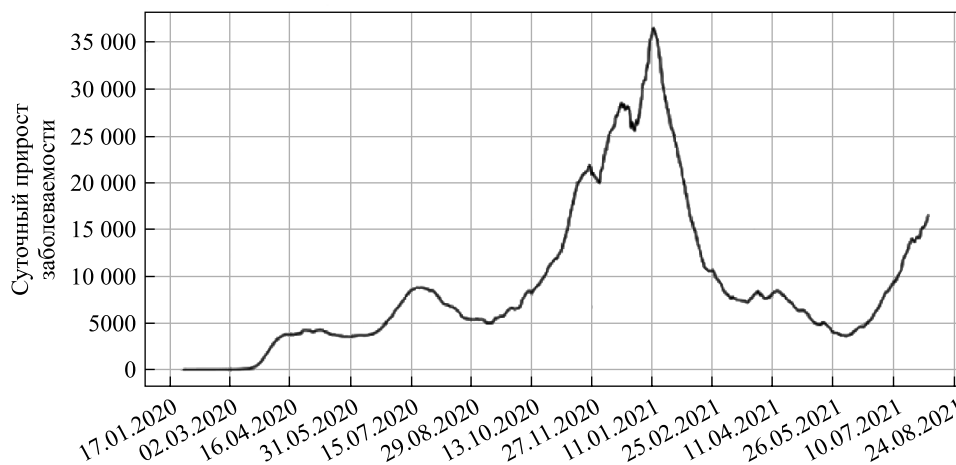


Рис. 1. Сглаженная с использованием метода скользящего среднего усредненная эпидемическая кривая для 1-го кластера на интервале от 01.02.2020 до 04.08.2021

Fig. 1. Smoothed using the moving average method, the averaged epidemic curve for the 1st cluster in the interval from 01.02.2020 to 04.08.2021

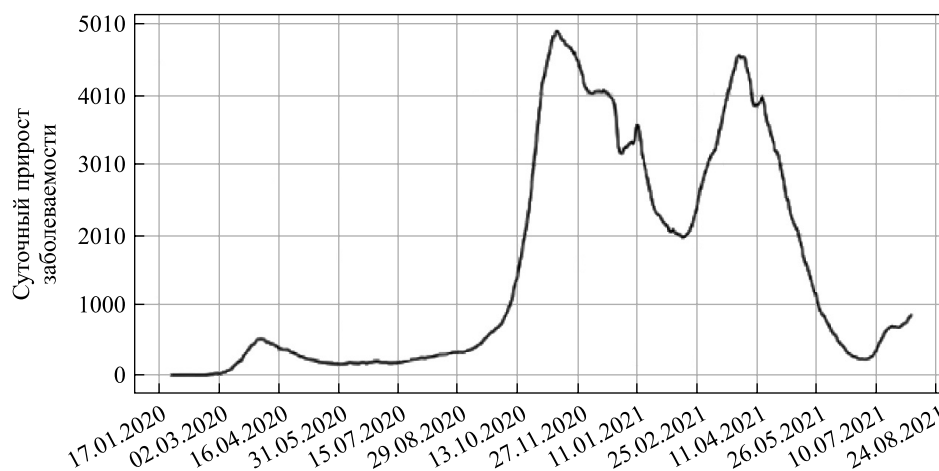


Рис. 2. Сглаженная с использованием метода скользящего среднего усредненная эпидемическая кривая для 2-го кластера на интервале от 01.02.2020 до 04.08.2021

Fig. 2. Smoothed using the moving average method, the averaged epidemic curve for the 2nd cluster in the interval from 01.02.2020 to 04.08.2021

В 3-й кластер (рис. 3) вошли 17 стран – Алжир, Марокко, Бангладеш, Вьетнам, Индонезия, Куба, Малайзия, Таиланд, Лаос, Мьянма, Тунис, Ливия, Греция, Иран, Кипр, Япония, Республика Корея. Преимущественно это страны с тропическим климатом.

В 4-й кластер вошли 13 стран – Аргентина, Колумбия, Парагвай, Уругвай, Камбоджа, Шри-Ланка, Бразилия, Ирак, Кувейт, Филиппины, Индия, Непал, Монголия. Значительная часть стран из 4-го кластера географически локализована в Южной Америке. Из рис. 4 можно отметить высокую интенсивность эпидемии с апреля 2020 по август 2021 г.

В малые кластеры (отделены точкой с запятой) вошли следующие группы стран: Катар, Саудовская Аравия, Сингапур, Таджикистан; Боливия, Египет, Чили; Гватемала, Коста-Рика, Оман; Мадагаскар, Перу, Эфиопия; Казахстан, Турция. Не образовали кластеров вообще 15 стран – Австралия, Гондурас, Исландия, Испания, Йемен, Кыргызстан, Китай, Никарагуа, Новая Зеландия, Пакистан, Судан, Танзания, Узбекистан, Франция, Эквадор.

Метод ОДР и критерий Манна – Уитни были использованы для сравнения кластеров между собой по перечисленным внешним факторам. На рис. 5 приведен пример одномерного разбиения из семейства I, разделяющего страны из 1-го и 2-го кластеров по индексу Джини, являющемуся показателем степени расслоения общества для некоторой страны.

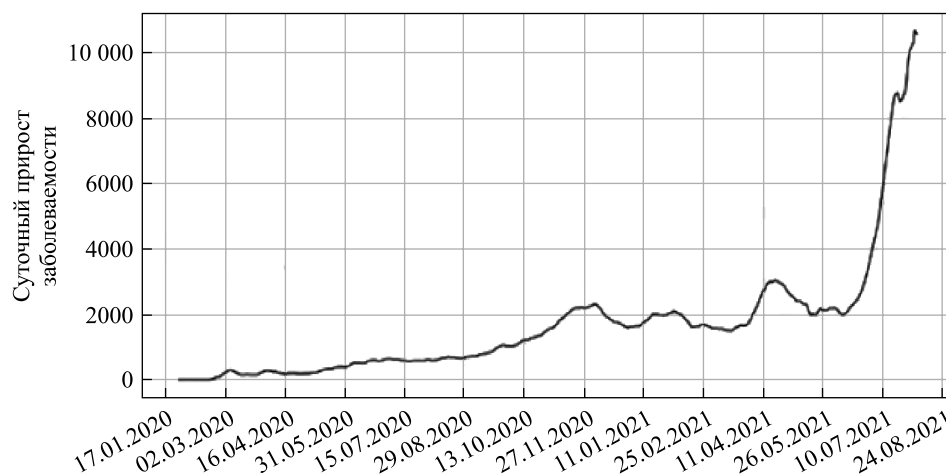


Рис. 3. Сглаженная с использованием метода скользящего среднего усредненная эпидемическая кривая для 3-го кластера на интервале от 01.02.2020 до 04.08.2021

Fig. 3. Smoothed using the moving average method, the averaged epidemic curve for the 3rd cluster in the interval from 01.02.2020 to 04.08.2021

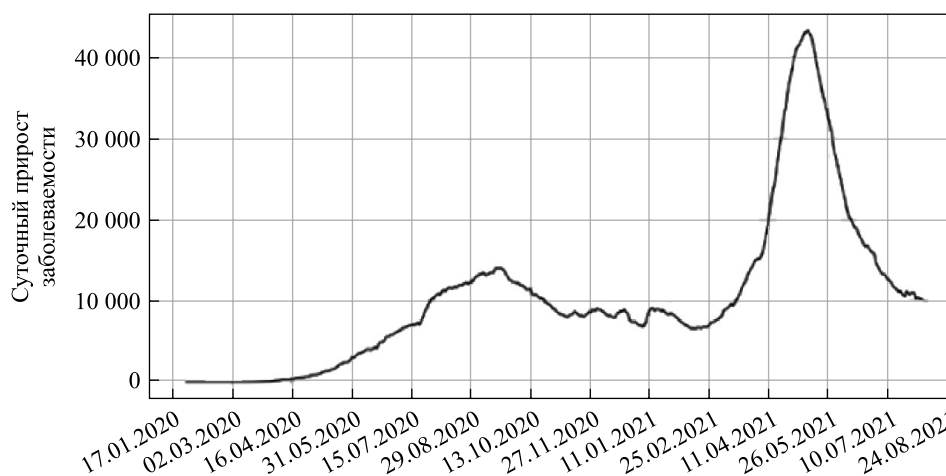


Рис. 4. Сглаженная с использованием метода скользящего среднего усредненная эпидемическая кривая для 4-го кластера на интервале от 01.02.2020 до 04.08.2021

Fig. 4. Smoothed using the moving average method, the averaged epidemic curve for the 4th cluster in the interval from 01.02.2020 to 04.08.2021

Значимость различий между кластерами (классами распознавания) оценивается с помощью перестановочного теста на уровне $p = 0,0005$.

Левее границы 36,95 находятся 29 стран из 2-го кластера (90,6 %) и только 3 страны из 1-го кластера. Справа от этой границы находятся 7 стран из 1-го кластера и лишь 3 страны из 2-го кластера (9,4 %). Результаты сравнения 1-го и 2-го кластеров с использованием однофакторной модели из семейства I приведены в табл. 1.

В табл. 1 представлены оптимальные границы, рассчитанные с помощью метода ОДР. В столбце «квадрант I» даны количества объектов 1-го и 2-го кластеров со значением соответствующего показателя слева от границы, в столбце «квадрант II» – количества объектов 1-го и 2-го кластеров со значением соответствующего показателя справа от границы. В скобках указана их доля в процентах.

В столбце «ПТ» представлены p -значения, рассчитанные с помощью перестановочного теста. Все показатели ранжированы по p -значению перестановочного теста. На первом месте, как видно из табл. 1, находятся коэффициент Джини и доля населения в городских агломерациях с численностью населения более 1 млн человек.

В столбце «U-тест» представлены p -значения, полученные с помощью стандартного теста Манна – Уитни.



Рис. 5. Оптимальное разделение по коэффициенту Джини.
Крестиками обозначены страны 1-го кластера, кружочками – страны 2-го кластера
Fig. 5. Optimal partition of Gini index ranges.
The crosses indicate the countries of the 1st cluster, circles – the countries of the 2nd cluster

Таблица 1

Одномерные разбиения для распознавания 1-го и 2-го кластеров стран мира

Table 1

One-dimensional partitions for recognising the 1st and 2nd clusters of countries in the world

№ п/п	Показатели	Граница	Квадрант I		Квадрант II		F	ПТ	U-тест
			1-й кластер	2-й кластер	1-й кластер	2-й кластер			
1	Коэффициент Джини	36,95	3 (30 %)	29 (90,6 %)	7 (70 %)	3 (9,4 %)	15,069	0,0005	0,1073
2	Доля населения в городских агломерациях с численностью населения более 1 млн чел. в 2020 г., %	35,695	4 (36,4 %)	24 (92,3 %)	7 (63,6 %)	2 (7,7 %)	12,787	0,002	0,5258
3	Последствия стихийных бедствий (землетрясения, засухи, наводнения, штормы), всего погибших в 1993–2002 гг.	369	5 (50 %)	31 (100 %)	5 (50 %)	0 (0 %)	17,222	0,003	0,6425
4	Береговая линия, км	694,5	1 (9,1 %)	25 (71,4 %)	10 (90,9 %)	10 (28,6 %)	12,947	0,003	0,1804
5	Амплитуда температур в течение года (max – min)	13,735	4 (66,7 %)	0 (0 %)	2 (33,3 %)	19 (100 %)	14,476	0,004	0,06171
6	Население в 2020 г., млн чел.	106,0699	7 (63,6 %)	35 (100 %)	4 (36,4 %)	0 (0 %)	13,636	0,005	0,03717
7	Индекс чистых бартерных условий торговли (2000 = 100)	154,0499	7 (63,6 %)	35 (100 %)	4 (36,4 %)	0 (0 %)	13,636	0,005	0,002466

Продолжение табл. 1
Continuation of the table 1

№ п/п	Показатели	Граница	Квадрант I		Квадрант II		F	ПТ	U-тест
			1-й кластер	2-й кластер	1-й кластер	2-й кластер			
8	Население в 2014 г., млн чел.	46,3349	1 (16,7 %)	17 (89,5 %)	5 (83,3 %)	2 (10,5 %)	11,51	0,005	0,0172
9	Городское население, млн чел.	32	1 (16,7 %)	17 (89,5 %)	5 (83,3 %)	2 (10,5 %)	11,51	0,006	0,04187
10	Высокотехнологичный экспорт, %	22,35	7 (63,6 %)	33 (100 %)	4 (36,4 %)	0 (0 %)	12,9	0,007	0,303
11	Территория (площадь суши) в 2020 г., млн км ²	0,7451	6 (54,5 %)	34 (97,1 %)	5 (45,5 %)	1 (2,9 %)	13,099	0,007	0,000281
12	Население столицы в 2014 г., млн чел.	5,847	3 (50 %)	19 (100 %)	3 (50 %)	0 (0 %)	10,364	0,008	0,001142
13	Экспорт товаров и услуг, % ВВП	30,7999	6 (54,5 %)	3 (8,6 %)	5 (45,5 %)	32 (91,4 %)	10,996	0,011	0,001954
14	Рост населения, % в год	1,0	4 (36,4 %)	31 (88,6 %)	7 (63,6 %)	4 (11,4 %)	12,265	0,012	0,4694
15	Последствия стихийных бедствий (землетрясения, засухи, наводнения, штормы), всего погибших в 2003–2012 гг.	81	4 (40 %)	28 (90,3 %)	6 (60 %)	3 (9,7 %)	10,903	0,015	0,000947
16	Импорт товаров и услуг, % ВВП	32,2999	6 (54,5 %)	3 (8,6 %)	5 (45,5 %)	32 (91,4 %)	10,996	0,016	0,5196
17	Орошаемые земли, тыс. га	4125	3 (50 %)	19 (100 %)	3 (50 %)	0 (0 %)	10,364	0,016	1,4E–05
18	Средняя температура января в 1961–1999 гг., °C	8,6915	3 (50 %)	19 (100 %)	3 (50 %)	0 (0 %)	10,364	0,021	0,03669
19	Пахотные земли в 2018 г., млн га	11,865	6 (54,5 %)	33 (94,3 %)	5 (45,5 %)	2 (5,7 %)	10,022	0,023	0,06803
20	Территория (площадь суши) в 2014 г., млн км ²	0,8969	2 (33,3 %)	18 (94,7 %)	4 (66,7 %)	1 (5,3 %)	10,316	0,025	0,001142
21	Количество погибших в результате стихийных бедствий в 2003–2012 гг., чел.	47	0 (0 %)	13 (72,2 %)	6 (100 %)	5 (27,8 %)	9,061	0,026	0,000463
22	Доля территории, засеянной зерновыми культурами, от пахотных земель	0,27275	5 (45,5 %)	2 (5,7 %)	6 (54,5 %)	33 (94,3 %)	10,022	0,027	0,08072
23	Ожидаемая продолжительность жизни, лет	63,6999	3 (27,3 %)	0 (0 %)	8 (72,7 %)	35 (100 %)	9,989	0,027	0,004673
24	Ирригация, тыс. га	4212	7 (70 %)	35 (100 %)	3 (30 %)	0 (0 %)	11	0,028	0,3214
25	Газ, млрд м ³	3765,5	8 (72,7 %)	35 (100 %)	3 (27,3 %)	0 (0 %)	9,989	0,03	0,001255
26	Население столицы в 2020 г., млн чел.	6,328	8 (72,7 %)	35 (100 %)	3 (27,3 %)	0 (0 %)	9,989	0,036	0,06327
27	Количество погибших в результате стихийных бедствий в среднем за 2003–2012 гг., чел. на 100 тыс. чел. населения	18	1 (16,7 %)	15 (83,3 %)	5 (83,3 %)	3 (16,7 %)	8,625	0,038	0,03952

Окончание табл. 1
Ending table 1

№ п/п	Показатели	Граница	Квадрант I		Квадрант II		F	ПТ	U-тест
			1-й кластер	2-й кластер	1-й кластер	2-й кластер			
28	Среднегодовая смертность в результате стихийных бедствий в 2003–2012 гг., чел. на 1 млн чел. населения	0,1798	1 (16,7 %)	15 (83,3 %)	5 (83,3 %)	3 (16,7 %)	8,625	0,041	0,09846
29	Земли под зерновыми культурами в 2018 г., млн га	16,1749	8 (72,7 %)	35 (100 %)	3 (27,3 %)	0 (0 %)	9,989	0,044	0,1296

Приведем и другие значимые показатели по мере убывания информативности:

- на уровне от $p < 0,005$ до $p < 0,010$ – средняя температура января в 1961–1999 гг., °С; средняя температура февраля в 1961–1999 гг., °С; средняя максимальная температура в 1961–1999 гг., °С; средняя температура декабря в 1961–1999 гг., °С; запасы нефти, млн баррелей; средняя температура марта в 1961–1999 гг., °С; средняя температура ноября в 1961–1999 гг., °С; автомобильные дороги, включая грунтовые и покрытые, км на 1000 км² территории;

- на уровне от $p < 0,01$ до $p < 0,05$ – автомобильные дороги, включая грунтовые и покрытые, км на 1000 км² территории; импорт товаров и услуг, % ВВП; год обретения независимости; среднегодовое количество пострадавших от природных катаклизмов за период 1970–2011 гг., чел. на 100 тыс. чел. населения; амплитуда температур в течение года (max – min); среднемесячный объем осадков за март, мм; средняя минимальная температура в 1961–1999 гг., °С; сельскохозяйственные угодья, % от всей территории; средняя температура сентября в 1961–1999 гг., °С; экспорт товаров и услуг, % ВВП; коэффициент рождаемости; ущерб от природных катаклизмов в среднем за 2003–2012 гг., млн долл. на 1000 км² территории; население в крупнейшем городе, % от всего городского населения; воздействие экстремальных температур в 1971–1973, 1975, 1977–2008 гг., среднее значение; среднегодовая смертность в результате стихийных бедствий в 2003–2012 гг., чел. на 100 тыс. чел. населения; среднемесячный объем осадков за сентябрь, мм; индекс чистых бартерных условий торговли (2000 = 100); средняя температура апреля в 1961–1999 гг., °С.

Из табл. 1 видна некоторая корреляция между p -значениями, рассчитанными с помощью перестановочного теста в рамках метода ОДР. Однако для многих показателей имеются существенные разнонаправленные различия.

Применение метода ОДР также позволило выявить различия между кластерами и наиболее информативные показатели по двумерным разбиениям. Значимость аналогично считали с помощью перестановочных тестов.

На рис. 6 приведено двумерное разбиение, разделяющее 1-й и 2-й кластеры по показателям «безработица» и «доля населения в городских агломерациях с численностью населения более 1 млн человек». Значимость p_X составила 0,005, значимость p_Y была на уровне 0,017.

Из рис. 6 видно, что страны 1-го кластера преобладают в квадранте I, а странам из 2-го кластера соответствуют квадранты II, III и IV. Следовательно, для стран 1-го кластера характерны невысокая безработица и значительно больший процент населения в городах-миллионниках.

Все кластеры попарно сравнивали методами машинного обучения (МО). Методы ранжировали по эффективности и формировали из них ансамбли по 3, 5 или 7 методов. После этого для каждой сравниваемой пары кластеров выбирали тот ансамбль, который давал более высокие значения ROC AUC. Результаты наиболее успешных ансамблей методов МО представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты распознавания в парах кластеров (ROC AUC) по ансамблю методов машинного обучения в комплексе *Data Master Azforus*

Table 2

Recognition results in pairs of clusters (ROC AUC) for an ensemble of machine learning methods in the *Data Master Azforus* complex

Сравниваемые кластеры (число стран)	Количество показателей	Ансамбль методов	ROC AUC
1-й кластер (11) – 2-й кластер (35)	130	AdaBoost, DT, GBM	0,9506
1-й кластер (11) – 3-й кластер (16)	130	AdaBoost, DT, KNN, LDA, SVM, SWS, GBM	0,8977

Окончание табл. 2
Ending table 2

Сравниваемые кластеры (число стран)	Количество показателей	Ансамбль методов	ROC AUC
1-й кластер (11) – 4-й кластер (11)	136	AdaBoost, KNN, SWS	0,9132
2-й кластер (35) – 3-й кластер (16)	130	AdaBoost, DT, LDA, SWS, GBM	0,9625
2-й кластер (33) – 4-й кластер (12)	128	AdaBoost, DT, SVM, SWS, GBM	0,9545
3-й кластер (16) – 4-й кластер (11)	132	AdaBoost, DT, SVM	0,7159

Примечание. AdaBoost – адаптивный бустинг; LDA – линейный дискриминант Фишера; KNN – метод k -ближайших соседей; SVM – метод опорных векторов; DT – решающие деревья; SWS – статистически взвешенные синдромы; GBM – градиентный бустинг.

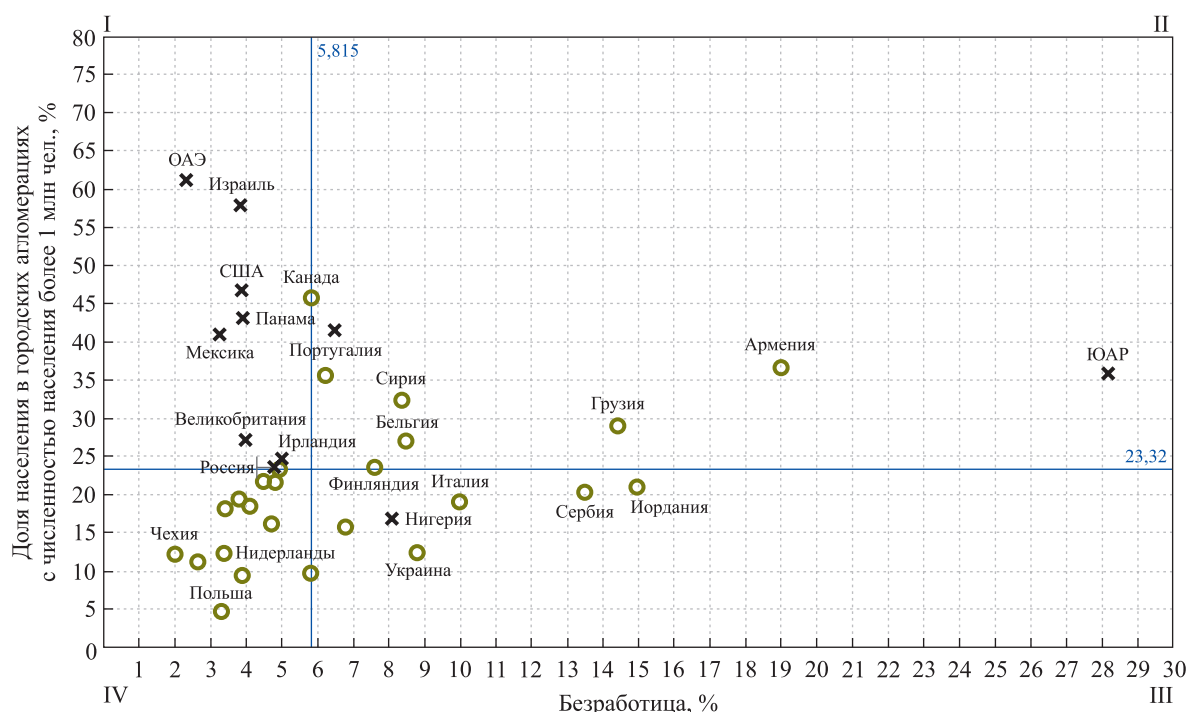


Рис. 6. Двумерное оптимальное разделение: ось x – безработица, ось y – доля населения в городских агломерациях страны с численностью населения более 1 млн чел.
Крестиками обозначены страны 1-го кластера, кружочками – страны 2-го кластера

Fig. 6. Two-dimensional optimal partitions: x axis – unemployment, y axis – population in urban agglomerations with a population of more than 1 million.
The crosses indicate the countries of the 1st cluster, circles – the countries of the 2nd cluster

Распознавание 1-го и 2-го кластеров методами МО (*Data Master Azforus*) показало следующий результат: ROC AUC = 0,95. Ансамбль методов включал адаптивный бустинг (ROC AUC = 0,895), деревья решений (ROC AUC = 0,775) и градиентный бустинг (ROC AUC = 0,732) и имел невысокую чувствительность (0,545) вследствие малого числа объектов в 1-м кластере, но при этом обладал высокой специфичностью (0,921).

Наилучший результат распознавания получили при сравнении 2-го и 3-го кластеров: ROC AUC = 0,9625. Это объясняется большим числом объектов и территориальным расположением вошедших в кластеры стран (европейские страны во 2-м кластере и страны с тропическим климатом в 3-м кластере). Самый слабый результат распознавания получили при сравнении 3-го и 4-го кластеров: ROC AUC = 0,7159. Это обусловлено малым числом объектов в 4-м кластере и тем, что сравниваемые кластеры включают страны со сходным климатом и экономикой.

Несмотря на то что метод CBC не вошел в некоторые ансамбли, он имеет преимущество перед остальными методами МО: это единственный метод, который выявляет наиболее значимые показатели с точки зрения разделения сравниваемых классов, ранжирует их, наглядно показывает на диаграммах рассеяния расположение объектов относительно выставленных границ разбиения. Все это позволяет опреде-

лить набор наиболее информативных (ключевых) показателей и оценить расположение объекта в кругу его соседей. Другие методы не обладают таким свойством (прозрачностью), что приводит к проблеме «черного ящика». Использование методов ОДР и СВС выводит анализ данных на новый уровень.

Заключение

Проведенные исследования подтвердили эффективность предложенной технологии изучения связи хода эпидемии COVID-19 с социально-экономическими, демографическими и климатическими факторами. На это указывает частичная связь найденных кластеров с географической локализацией. Вторым доказательством объективности кластеризации является высокая статистическая значимость различий между кластерами по важнейшим показателям, включая коэффициент Джини (расслоение по доходам), долю населения в городских агломерациях с численностью населения более 1 млн человек, амплитуду температур в течение года, ВВП на душу населения, импорт товаров и услуг, индекс чистых бартерных условий торговли, ожидаемую продолжительность жизни, рост населения, детскую смертность и др. Ранее показано [12], что ряд перечисленных показателей имеют статистически значимую связь с особенностями структуры базовых институтов стран мира. Поэтому в дальнейших исследованиях предполагается более детальное выявление зависимости особенностей протекания пандемии от особенностей социально-экономических институтов разных стран.

Следует отметить важность разрабатываемой технологии для решения задачи прогнозирования хода эпидемии. Такой прогноз может производиться по группе стран, в которую входит анализируемая страна.

Для успешного прогнозирования могут быть использованы модель ARIMA и различные модели авторегрессии. Авторегрессионные модели дают разное предсказание и разную точность предсказания в зависимости от того, проводилась ли массовая вакцинация, которая кардинально влияет на прогноз динамики заболеваемости COVID-19 [13]. Недостатком авторегрессионных моделей является неопределенность прогноза для моментов времени, удаленных от временного интервала, по которому была построена модель. В связи с этим в дальнейших исследованиях предполагается изучить прогностические возможности предложенной в работе [14] технологии, позволяющей получить прогнозирующую функцию в виде комбинации зависящих от времени комплексных экспоненциальных функций. Иными словами, прогноз будет экстраполирован на произвольный промежуток времени с помощью нелинейной функции, вычисляемой по интервалу наблюдений. Дальнейшим направлением исследований предполагается также включение в разрабатываемую технологию методов оценивания статистической значимости кластеризации.

Библиографические ссылки

1. Романюха АА, Санникова ТЕ, Дрынов ИД. Возникновение эпидемий острых респираторных заболеваний. *Вестник Российской академии наук*. 2011;81(2):122–126.
2. Борисова ЛР, Фридман МН. Некоторые аспекты влияния пандемии коронавируса на экономику. *Самоуправление*. 2021; 5:147–152.
3. Sengupta P, Ganguli B, SenRoy S, Chatterjee A. An analysis of COVID-19 clusters in India. *BMC Public Health*. 2021;21:631. DOI: 10.1186/s12889-021-10491-8.
4. Zarikas V, Pouloupoulos SG, Gareiou Z, Zervas E. Clustering analysis of countries using the COVID-19 cases dataset. *Data in Brief*. 2020;31:105787. DOI: 10.1016/j.dib.2020.105787.
5. Mengyang Liu, Mengmeng Liu, Zhiwei Li, Yingxuan Zhu, Yue Liu, Xiaonan Wang, et al. The spatial clustering analysis of COVID-19 and its associated factors in mainland China at the prefecture level. *Science of the Total Environment*. 2021;777:145992. DOI: 10.1016/j.scitotenv.2021.145992.
6. Rios RA, Nogueira T, Coimbra DB, Lopes TJS, Abraham A, de Mello RF. Country transition index based on hierarchical clustering to predict next COVID-19 waves. *Scientific Reports*. 2021;11(1):15271. DOI: 10.1038/s41598-021-94661-z.
7. Rizvi SA, Umair M, Cheema MA. Clustering of countries for COVID-19 cases based on disease prevalence, health systems and environmental indicators. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;151:111240. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111240.
8. Brzyska J, Szamrej-Baran I. Classification of the EU countries according to the vulnerability of their economies to the impact of COVID-19 pandemic. *European Research Studies Journal*. 2021;XXIV(2B):967–978. DOI: 10.35808/ersj/2318.
9. Kuznetsova AV, Kostomarova IV, Senko OV. Modification of the method of optimal valid partitioning for comparison of patterns related to the occurrence of ischemic stroke in two groups of patients. *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications*. 2014;24(1):114–123. DOI: 10.1134/S105466181401009X.
10. Senko OV, Dzyba DS, Pigarova EA, Rozhinskaya LYa, Kuznetsova AV. A method for evaluating validity of piecewise-linear models. In: Fred ALN, Filipe J, editors. *Proceedings of the 6th International Conference on Knowledge Discovery and Information Retrieval; 2014 October 21–24; Rome, Italy*. [S. l.]: Science and Technology Publications; 2014. p. 437–442. DOI: 10.5220/0005156904370443.
11. Senko OV, Kuznetsova AV. A recognition method based on collective decision making using systems of regularities of various types. *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications*. 2010;20(2):152–162. DOI: 10.1134/S1054661810020069.
12. Кирилук ИЛ, Волинский АИ, Круглова МС, Кузнецова АВ, Рубинштейн АА, Сенько ОВ. Эмпирическая проверка теории институциональных матриц методами интеллектуального анализа данных. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2015;7(4):923–939. DOI: 10.20537/2076-7633-2015-7-4-923-939.

13. Борисова ЛР. Исследование динамики заболеваемости коронавирусной инфекцией в Москве. В: *Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием; 18–21 ноября 2021 г.; Орел, Россия*. Орел: Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева; 2021. с. 217–220.
14. Smirnov VYu, Kuznetsova AV. Approximation of experimental data by solving linear difference equations with constant coefficients (in particular, by exponentials and exponential cosines). *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications*. 2017;27(2):175–183. DOI: 10.1134/S1054661817020109.

References

1. Romanyukha AA, Sannikova TE, Drynov ID. [Emergence of epidemics of acute respiratory diseases]. *Vestnik Rossiiskoi akademii nauk*. 2011;81(2):122–126. Russian.
2. Borisova LR, Fridman MN. Some aspects of the impact of the coronavirus pandemic on the economy. *Samoupravlenie*. 2021; 5:147–152. Russian.
3. Sengupta P, Ganguli B, SenRoy S, Chatterjee A. An analysis of COVID-19 clusters in India. *BMC Public Health*. 2021;21:631. DOI: 10.1186/s12889-021-10491-8.
4. Zarikas V, Pouloupoulos SG, Gareiou Z, Zervas E. Clustering analysis of countries using the COVID-19 cases dataset. *Data in Brief*. 2020;31:105787. DOI: 10.1016/j.dib.2020.105787.
5. Mengyang Liu, Mengmeng Liu, Zhiwei Li, Yingxuan Zhu, Yue Liu, Xiaonan Wang, et al. The spatial clustering analysis of COVID-19 and its associated factors in mainland China at the prefecture level. *Science of the Total Environment*. 2021;777:145992. DOI: 10.1016/j.scitotenv.2021.145992.
6. Rios RA, Nogueira T, Coimbra DB, Lopes TJS, Abraham A, de Mello RF. Country transition index based on hierarchical clustering to predict next COVID-19 waves. *Scientific Reports*. 2021;11(1):15271. DOI: 10.1038/s41598-021-94661-z.
7. Rizvi SA, Umair M, Cheema MA. Clustering of countries for COVID-19 cases based on disease prevalence, health systems and environmental indicators. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;151:111240. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111240.
8. Brzyska J, Szamrej-Baran I. Classification of the EU countries according to the vulnerability of their economies to the impact of COVID-19 pandemic. *European Research Studies Journal*. 2021;XXIV(2B):967–978. DOI: 10.35808/ersj/2318.
9. Kuznetsova AV, Kostomarov IV, Senko OV. Modification of the method of optimal valid partitioning for comparison of patterns related to the occurrence of ischemic stroke in two groups of patients. *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications*. 2014;24(1):114–123. DOI: 10.1134/S105466181401009X.
10. Senko OV, Dzyba DS, Pigarova EA, Rozhinskaya LYa, Kuznetsova AV. A method for evaluating validity of piecewise-linear models. In: Fred ALN, Filipe J, editors. *Proceedings of the 6th International Conference on Knowledge Discovery and Information Retrieval; 2014 October 21–24; Rome, Italy*. [S. l.]: Science and Technology Publications; 2014. p. 437–442. DOI: 10.5220/0005156904370443.
11. Senko OV, Kuznetsova AV. A recognition method based on collective decision making using systems of regularities of various types. *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications*. 2010;20(2):152–162. DOI: 10.1134/S1054661810020069.
12. Kirilyuk IL, Volynsky AI, Kruglova MS, Kuznetsova AV, Rubinstein AA, Senko OV. Empirical testing of institutional matrices theory by data mining. *Computer Research and Modeling*. 2015;7(4):923–939. Russian. DOI: 10.20537/2076-7633-2015-7-4-923-939.
13. Borisova LR. [Study of the dynamics of the incidence of coronavirus infection in Moscow]. In: *Sovremennye problemy fiziko-matematicheskikh nauk. Materialy VII Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem; 18–21 noyabrya 2021 g.; Orel, Rossiya* [Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the 7th All-Russian scientific and practical conference with international participation; 2021 November 18–21; Orel, Russia]. Orel: Orel State University named after I. S. Turgenev; 2021. p. 217–220. Russian.
14. Smirnov VYu, Kuznetsova AV. Approximation of experimental data by solving linear difference equations with constant coefficients (in particular, by exponentials and exponential cosines). *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications*. 2017;27(2):175–183. DOI: 10.1134/S1054661817020109.

Получена 31.12.2021 / исправлена 04.03.2022 / принята 04.03.2022.
Received 31.12.2021 / revised 04.03.2022 / accepted 04.03.2022.

Авторы:

Олег Валентинович Сенько – доктор физико-математических наук, профессор; старший научный сотрудник научной группы математических методов и эпидемиологического прогнозирования¹⁾, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра имени А. А. Дородницына Российской академии наук²⁾.

Анна Викторовна Кузнецова – кандидат биологических наук; старший научный сотрудник научной группы математических методов и эпидемиологического прогнозирования¹⁾, старший научный сотрудник лаборатории математической биофизики³⁾.

Authors:

Oleg V. Senko, doctor of science (physics and mathematics), full professor; senior researcher at the scientific group of mathematical methods and epidemiological forecasting^a and leading researcher at the Dorodnicyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences^b.

senkoov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-5586-3503>

Anna V. Kuznetsova, PhD (biology); senior researcher at the scientific group of mathematical methods and epidemiological forecasting^a and senior researcher at the laboratory of mathematical biophysics^c.

azforus@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0297-7013>

Евгений Михайлович Воронин – кандидат медицинских наук; руководитель научной группы математических методов и эпидемиологического прогнозирования.

Ольга Анатольевна Кравцова – статистик научной группы математических методов и эпидемиологического прогнозирования¹⁾, аспирантка кафедры математических методов прогнозирования факультета вычислительной математики и кибернетики⁴⁾. Научный руководитель – О. В. Сенько.

Людмила Робертовна Борисова – кандидат физико-математических наук; доцент Департамента математики.

Игорь Леонидович Кирилук – научный сотрудник сектора институционально-эволюционной экономики Центра институционально-эволюционной экономики и прикладных проблем воспроизводства.

Василий Геннадьевич Акимкин – академик Российской академии наук, доктор математических наук, профессор; директор.

Evgeny M. Voronin, PhD (medicine); head of the scientific group of mathematical methods and epidemiological forecasting.

emvoronin@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0001-5925-7757>

Olga A. Kravtsova, methodological expert at the scientific group of mathematical methods and epidemiological forecasting^a and postgraduate student at the department of mathematical methods of forecasting, faculty of computational mathematics and cybernetics^d.

dbri.olga@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7757-5334>

Ludmila R. Borisova, PhD (physics and mathematics); associate professor at the Department of Mathematics.

borisovalr@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-5757-0341>

Igor L. Kirilyuk, researcher at the subcenter «Institutional and evolutionary economics», Center for Institutional and Evolutionary Economics and Applied Problems of Reproduction.

igokir@rambler.ru

<https://orcid.org/0000-0002-8935-9241>

Vasiliy G. Akimkin, academician of the Russian Academy of Sciences, doctor of science (medicine), full professor; director.

crie@pcr.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4228-9044>

УДК 004.852

ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ, УЧИТЫВАЮЩАЯ СЕМАНТИКУ ПРОСТРАНСТВА, ДЛЯ СИНТЕЗА ЭМБЕДДИНГОВ НА ТРАНЗАКЦИОННЫХ ДАННЫХ

М. Е. ВАТКИН¹⁾, Д. А. ВОРОБЕЙ¹⁾, М. В. ЯКОВЛЕВ¹⁾, М. Г. КРИВОВА¹⁾

¹⁾ОАО «Сбер Банк», бул. Мулявина, 6, 220005, г. Минск, Беларусь

Популярные в банковской сфере транзакционные данные часто представляются в виде разреженных (с большим количеством признаков) векторов. Использование разреженных векторов в задачах глубинного обучения является неэффективным и может вести к переобучению. Для извлечения полезных признаков в пространстве меньшей размерности широко применяют автокодировщики. В настоящей работе предлагается новая функция потерь, которая основана на метрике, оценивающей качество отображения исходных табличных данных в пространство эмбедингов. Эта функция служит для преобразования снижения размерности и позволяет сохранить структуру отношений объектов исходного пространства. Полученные результаты показывают улучшение качества получаемых эмбедингов посредством использования новой функции потерь в комбинации с традиционной средней квадратической ошибкой функции.

Ключевые слова: данные; эмбединг; вектор; функция потерь; автокодировщик.

Образец цитирования:

Ваткин МЕ, Воробей ДА, Яковлев МВ, Кривова МГ. Функция потерь, учитывающая семантику пространства, для синтеза эмбедингов на транзакционных данных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:97–102 (на англ.).
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-97-102>

For citation:

Vatkin ME, Vorobey DA, Yakovlev MV, Krivova MG. Space semantic aware loss function for embedding creation in case of transaction data. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:97–102.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-97-102>

Авторы:

Максим Евгеньевич Ваткин – главный специалист по данным.
Дмитрий Александрович Воробей – специалист по данным.
Максим Вадимович Яковлев – специалист по данным.
Марина Григорьевна Кривова – специалист по данным.

Authors:

Maksim E. Vatkin, chief data scientist.
mevatkin@bps-sberbank.by
<https://orcid.org/0000-0002-6923-9998>
Dmitry A. Vorobey, data scientist.
davorobey@bps-sberbank.by
<https://orcid.org/0000-0001-9063-6077>
Maksim V. Yakovlev, data scientist.
mvyakovlev@bps-sberbank.by
<https://orcid.org/0000-0003-4722-9753>
Marina G. Krivova, data scientist.
mgkrivova@bps-sberbank.by
<https://orcid.org/0000-0003-0345-4828>

SPACE SEMANTIC AWARE LOSS FUNCTION FOR EMBEDDING CREATION IN CASE OF TRANSACTION DATA

M. E. VATKIN^a, D. A. VOROBAY^a, M. V. YAKOVLEV^a, M. G. KRIVOVA^a

^aSber Bank, 6 Muliavina Boulevard, Minsk 220005, Belarus

Corresponding author: M. E. Vatin (mevatkin@bps-sberbank.by)

Transaction data are the most popular data type of bank domain, they are often represented as sparse vectors with a large number of features. Using sparse vectors in deep learning tasks is computationally inefficient and may lead to overfitting. Autoencoders are widely applied to extract new useful features in a lower dimensional space. In this paper we propose to use a novel loss function based on the metric that estimates the quality of mapping the semantic structure of the original tabular data to the embedded space. The proposed loss function allows preserving the item relation structure of the original space during the dimension reduction transformation. The obtained results show the improvement of the resulting embedding properties while using the combination of the new loss function and the traditional mean squared error one.

Keywords: data; embedding; vector; loss function; autoencoder.

Introduction

Every day, a large number of payment transactions using bank cards are performed, which details are collected on the bank's servers. Such data contains information about the bank's client's behaviour, which can later be used by the bank in various forecast models. At the same time, if we want to use such data, it must be presented in a certain format, for example via transformation into a fixed-length vector, where each coordinate acts as a counter for the number of transactions of a particular type in a certain time period (e. g., the first coordinate shows the number of transactions at gas stations, the second one does it for public catering places, etc.). Such vectors can describe the client's behaviour at certain time intervals, however, due to a large number of possible transactional activity categories, these vectors have a large number of coordinates, many of which are zero, in other words, clients are described by sparse vectors.

The use and storage of such vectors is computationally inefficient and may also lead to overfitting of predictive models. A popular solution to this problem is to use autoencoders, which first encode data into a smaller space, and then reconstruct the original data from it. The process of training the model can be described as reducing the reconstruction error by updating the model's weights, and as a result, we get a mapping of the source data into a space of smaller dimension, preserving the maximum of the original information about objects.

The quality of the obtained representations is measured by the recovery error, however, it was shown in [1] that this metric is not a reliable indicator of their applicability to the final problem. In addition, it does not give us an idea of how the relationships of representations are arranged, which reduces the confidence in the results obtained. Thus, we would like to have representations that contain as much information about the original objects as possible, and also preserve their semantic relationships in the embedding space. In other words, we want the representation of objects in the new space to be formed so that, using the vector additional operation, we can move from one representation to another and this transition is meaningful. This corresponds to the analogies presented by T. Mikolov [2], where we have pairs $x : y$ and $a : b$ in the original space, where x is semantically connected with y , as well as a with b , for example «man» : «king» and «woman» : «queen», so we want this connection to be reflected in the embedding space. To fulfill this condition, we propose a modification of the loss function, which will allow not only compressing information into a space of smaller dimension, but also building the resulting vectors so that they reflect semantic relationships, which is possible due to the structure of the source data itself.

General description of problem

Let us introduce the notation: mapping $f : R^n \rightarrow R^m$ ($m < n$) to be called embedding (encoder) and mapping $g : R^m \rightarrow R^n$ to be called decoder. An object is represented by a vector $X \in R^n$, where each coordinate displays the number of transactions executed for a product or service of a certain category.

The goal is to build an embedding that reflects the semantic relationships between objects. More strictly, this can be formulated as follows:

$$g(f(x) + f(y)) = z, \quad (1)$$

where z is an object corresponding to the union of the meanings of objects x and y . Referring to the source data, you can see that each object itself reflects the client's behaviour, moreover, there is already a meaningful addition operation in the source space. Indeed, if combination the two original vectors results as a third vector that describes the third client which behaviour corresponded to the union of the first two. Then it is possible rewrite (1) as

$$g(f(x) + f(y)) = x + y.$$

Because it is assumed that the reconstruction error of autoencoder is zero, as well as the f is an injective function, then $g(f(x + y)) = x + y$ and thus $f(x) + f(y) = f(x + y)$. So actually equation (1) says that with some additional conditions f is a homomorphism. It seems that using equation (1) can transform our autoencoder into principal component analysis since it is a linear map, and the autoencoder with a linear encoder resembles principal component analysis projection [3]. This could be the case when autoencoder has a zero reconstruction error which is impossible due to different sizes of the embedding space and the objects space.

An experiment methodology

Data description. Used dataset contains information about 284.807 transactions performed during two days by European cardholders in September 2013 with 492 fraudulent transactions [4]. The reason to use this dataset is to implement the method of fraud detection described in another article [5], namely to fit the autoencoder on non-fraud data and, assuming that fraudulent transactions will be recovered by an autoencoder with a larger recovery error, use reconstruction error to verify if the new transaction is fraudulent or not. Thus the task is to compare different models. To do this, the dataset was separated into the train part that consists of 80 % of the transactions, all of them being normal, and the test part that contains the remaining 20 % with all 492 fraudulent transactions. Since to use our approach we need to be able to add the vectors of the original space, we will only use the attributes from $V1$ to $V28$.

Training metrics. For the training process evaluation, we use two metrics.

1. The mean squared error (MSE) of objects and the autoencoder's predictions to check the reconstruction abilities of our autoencoder:

$$\frac{\sum_i^N (g(f(x_i)) - x_i)^2}{N}.$$

2. Custom metric called as mean semantic preserving error (MSPE):

$$\frac{\sum_i^N \sum_j^M (g(f(x_i) + f(y_j)) - (x_i + y_j))^2}{NM},$$

where $x, y \in X$. However, it is computationally inefficient to choose all y objects from X , so for the performance reason the $M=100$ random y objects were chosen from X for every object x to be used for computation of given loss function.

Models. Autoencoders with the same architecture were used for each model: InputLayer(shape=(28)) – Dense(21, activation='elu') – Dense(14, activation='elu') – Dense(7, activation='elu') – Dense(14, activation='elu') – Dense(21, activation='elu') – Dense(28) but different losses:

- the sum of the MSE and the MSPE (model 1);
- the MSE as a model loss (model 2);
- the MSPE as a model loss (model 3).

The batch size equals 1000, the number of epochs is 50, the optimiser is Adam with the default hyperparams. As predictions for the fraud detection task, we compute the mean squared error between the input vector and its reconstruction.

Classification metrics. Since our task is essentially a binary classification task with imbalanced classes, we will use three metrics.

1. *Maximum F1-score.* F1-score is a harmonic mean of precision and recall:

$$\text{F1-score} = \frac{2 \cdot \text{precision} \cdot \text{recall}}{\text{precision} + \text{recall}},$$

where precision is the number of objects classified by the algorithm as 1 (fraud) while they really belong to class 1, divided by the number of objects classified by the algorithm as 1, which shows whether we can rely on

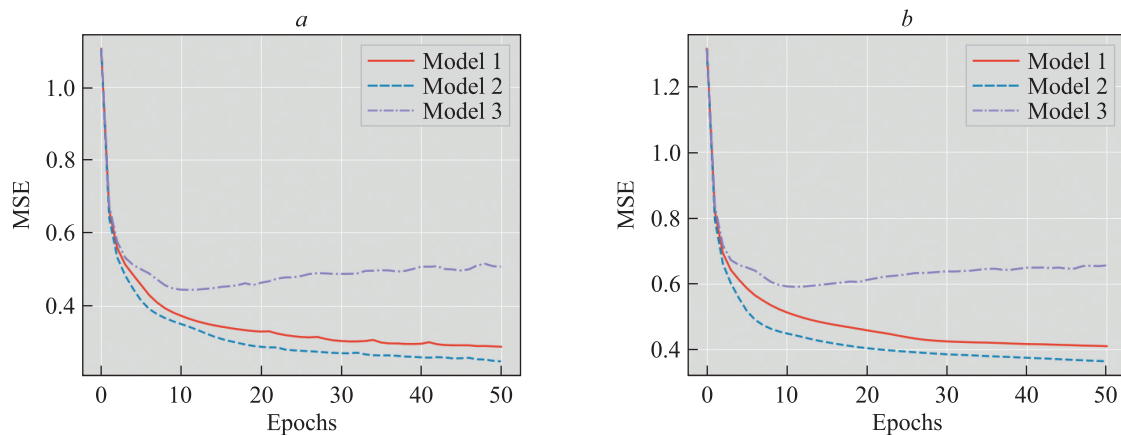


Fig. 1. The reconstruction loss (model 1 uses MSE and MSPE, model 2 uses MSE only, model 3 uses only MSPE as the loss):
a – train part; b – test part

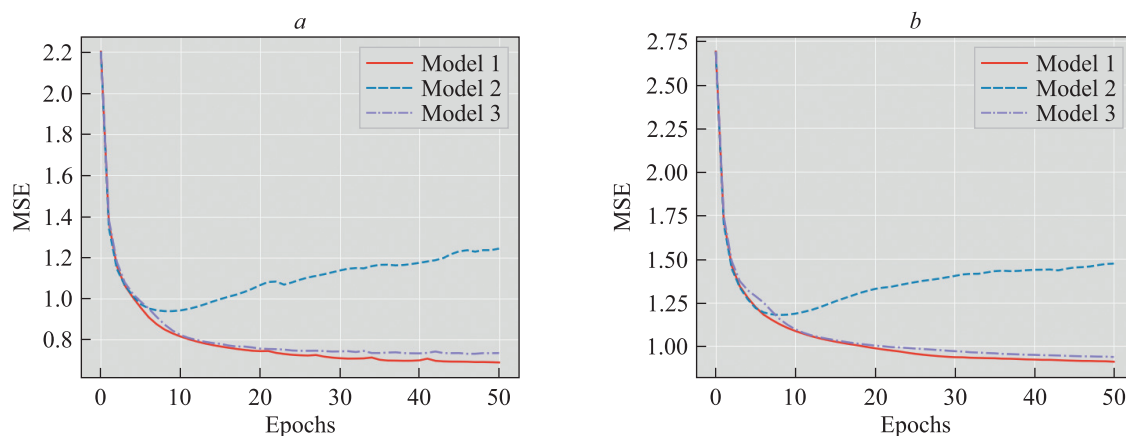


Fig. 2. The MSPE (model 1 uses MSE and MSPE, model 2 uses MSE only, model 3 uses only MSPE):
a – train part; b – test part

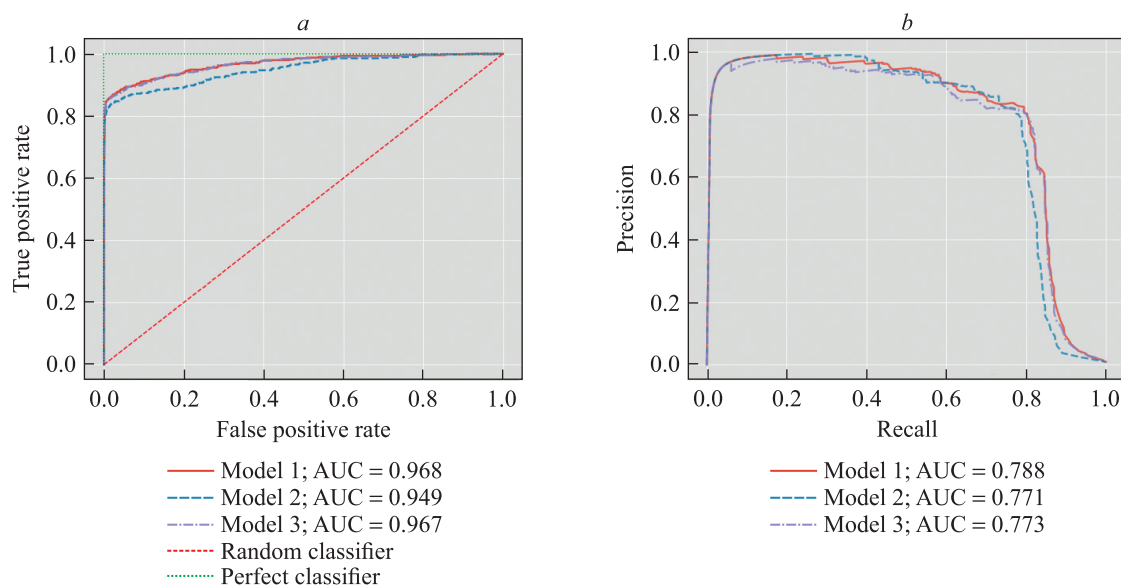


Fig. 3. The PR curve (a), the ROC curve (b)
(model 1 uses MSE and MSPE, model 2 uses MSE only, model 3 uses only MSPE as the loss)

our algorithm when it classifies objects as class 1; recall is the number of objects classified by the algorithm as 1 (fraud) while they really belong to class 1, divided by the number of objects from class 1, which shows how many objects of class 1 it can find among all objects of class 1. However, it is needed to balance these two metrics, and for this purpose F1-score is used. Since it isn't known which threshold to use for the algorithm, and F1-score depends on the threshold, the maximum F1-score within all possible values was used.

2. *PR AUC*. It is an area under the precision recall curve; the closer this metric is to 1, the better the model is.

3. *ROC AUC*. It is an area under the receiver operating characteristic, the closer this metric is to 1, the better the model is. To explain how this metric is computed, we need to know the two other metrics: true positive rate (TPR), which is actually a recall, and false positive rate (FPR), which is the number of objects classified by the algorithm as 1 (fraud) while they really belong to class 0, divided by the number of objects from class 0.

Results of experiment

Figure 1 shows the reconstruction error, fig. 2 shows the mean semantic preserving error for each epoch during the training, fig. 3 shows the ROC and PR curves, and table 1 shows the quality of models in terms of the fraud detection task. As we see from fig. 1, model 2 shows the best reconstruction loss, model 1 shows a slightly worse result, and model 3 performs much worse. However, in fig. 2, models 1 and 3 have similar results while model 2 performs much worse. So, we can make a conclusion that a combination of two losses allows getting good results in terms of both losses while using only one leads to better results in the corresponding metric but much worse in the other. Yet, good quality in those metrics doesn't necessarily lead to good results when trying to apply the models to an external task. Model 1 shows the best reconstruction ability, however it has the worst result in the fraud detection task (table 1), while model 3 with the worst reconstruction ability has better results. Also, the best model doesn't have the best reconstruction ability, but performs well in terms of both metrics. Thus, we can make the following conclusions: the better reconstruction loss in autoencoders does not necessarily lead to better results on an external task, and we can try to combine the reconstruction loss with the mean semantic preserving error in our loss function, which can lead to better results on external tasks. We can also compare the PR AUC of our best model with the results of other models from article [6] since this indicator is better than the ROC AUC for evaluating the performance in tasks with imbalanced data [7; 8]. As we can see from table 2, our best model scores the second, which proves that our approach is comparable to the existing algorithms for solving the fraud detection task.

Table 1

The comparison of the classification metrics

Algorithm	Maximum F1-score	PR AUC	ROC AUC
Model 1 (MSE + MSPE)	0.808	0.788	0.968
Model 3 (MSPE)	0.802	0.773	0.967
Model 2 (MSE)	0.794	0.771	0.949

Table 2

The PR AUC comparison with other algorithms

Algorithm	PR AUC
Bagging	0.825
Model 1 (MSE + MSPE)	0.788
C4.5	0.745
Naive bayes	0.080

Conclusions

The paper considers an actual problem of the embedding construction by applying neural network autoencoder model. In particular, the new semantic preserving error function was introduced as a loss function for autoencoder training process. Given function allows preserving semantic relations between objects in embedding space for tabular data. However, not all properties of the resulting space were considered in details. For example, given approach could be used while training neural networks of other type like in [9]. Mentioned possibilities and properties remain to be explored in the future work.

References

1. Gupta P, Banchs RE, Rosso P. Squeezing bottlenecks: exploring the limits of autoencoder semantic representation capabilities. *Neurocomputing*. 2016;175(PB):1001–1008. DOI: 10.1016/j.neucom.2015.06.091.
2. Mikolov T, Sutskever I, Chen K, Corrado GS, Dean J. Distributed representations of words and phrases and their compositionality. In: Burges CJC, Bottou L, Welling M, editors. *NIPS-2013. Proceedings of the 26th International conference on neural information processing system; 2013 December 5–10; Lake Tahoe, Nevada, USA. Volume 2*. New York: Curran Associates Inc.; 2013. p. 3111–3119.
3. Bourlard H, Kamp Y. Auto-association by multilayer perceptrons and singular value decomposition. *Biological Cybernetics*. 1988;59:291–294. DOI: 10.1007/BF00332918.
4. Credit card fraud detection [Internet]. Cambridge: Machine Learning Group; 2018 [cited 2021 March 5]. Available from: <https://www.kaggle.com/mlg-ulb/creditcardfraud/data>.
5. Al-Shabi MA. Credit card fraud detection using autoencoder model in unbalanced datasets. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*. 2019;33(5):1–16. DOI: 10.9734/jamcs/2019/v33i530192.
6. Husejinović A. Credit card fraud detection using naive Bayesian and C4.5 decision tree classifiers. *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*. 2020;8(1):1–5. DOI: 10.21533/pen.v%25vi%25i.300.
7. Saito T, Rehmsmeier M. The precision-recall plot is more informative than the ROC plot when evaluating binary classifiers on imbalanced datasets. *PLoS One*. 2015;10(3):e0118432. DOI: 10.1371/journal.pone.0118432.
8. Davis J, Goadrich M. The relationship between precision-recall and ROC curves. In: Cohen WW, Moore A, editors. *ICML-06. Proceedings of the 23rd International conference on machine learning; 2006 June 25–29; Pittsburgh, USA*. New York: Association for Computing Machinery; 2006. p. 233–240. DOI: 10.1145/1143844.1143874.
9. Marushko EE, Doudkin AA, Zheng X. Identification of Earth's surface objects using ensembles of convolutional neural networks. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;2:114–123. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-2-114-123.

Received 21.10.2021 / revised 01.02.2022 / accepted 14.02.2022.

О ЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ ФУНКЦИЙ h -КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В. А. ПАВЛОВСКИЙ¹⁾, И. Л. ВАСИЛЬЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Теория функций h -комплексного переменного – альтернатива для обычной теории функций комплексного переменного, получающаяся заменой правил умножения. Это изменение приводит к появлению делителей нуля на множестве h -комплексных чисел. Такие числа образуют коммутативное кольцо, не являющееся полем. h -Голоморфные функции выступают решениями систем уравнений гиперболического типа, тогда как классические голоморфные функции – решениями систем уравнений эллиптического типа. Следствием этого является значительное отличие свойств h -голоморфных и классических голоморфных функций. Интерес к исследованию свойств функций h -комплексного переменного связан с необходимостью поиска новых методов решения задач механики и плоской теории относительности. В данной работе доказана теорема о локальной обратимости h -голоморфных функций, сформулированы принципы сохранения области и максимума нормы для h -голоморфных функций.

Ключевые слова: h -голоморфность; локальная обратимость; принцип сохранения области; принцип максимума нормы; кольцо h -комплексных чисел; делители нуля.

ON LOCAL INVERTIBILITY OF FUNCTIONS OF AN h -COMPLEX VARIABLE

V. A. PAVLOVSKY^a, I. L. VASILIEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. A. Pavlovsky (pavlad95@gmail.com)

The theory of functions of an h -complex variable is an alternative to the usual theory of functions of a complex variable, obtained by replacing the rules of multiplication. This change leads to the appearance of zero divisors on the set of h -complex numbers. Such numbers form a commutative ring that is not a field. h -Holomorphic functions are solutions of systems of equations of hyperbolic type, in comparison with classical holomorphic functions, which are solutions of systems of equations of elliptic type. A consequence of this is a significant difference between the properties of h -holomorphic functions and the classical ones. Interest in studying the properties of functions of an h -complex variable is associated with the need to search for new methods for solving problems in mechanics and the plane theory of relativity. The paper presents a theorem on the local invertibility of h -holomorphic functions, formulates the principles of preserving the domain and maximum of the norm.

Keywords: h -holomorphy; local invertibility; domain preservation principle; norm maximum principle; ring of h -complex numbers; zero divisors.

Образец цитирования:

Павловский ВА, Васильев ИЛ. О локальной обратимости функций h -комплексного переменного. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:103–107.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-103-107>

For citation:

Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On local invertibility of functions of an h -complex variable. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:103–107. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-103-107>

Авторы:

Владислав Андреевич Павловский – аспирант кафедры теории функций механико-математического факультета. Научный руководитель – И. Л. Васильев.

Игорь Леонидович Васильев – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Authors:

Vladislav A. Pavlovsky, postgraduate student at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
pavlad95@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-2916-1241>

Igor L. Vasiliev, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.

vassilyevl@bsu.by

Введение

Пусть $\mathbb{C}_h$ – множество всех h -комплексных чисел [1–6]. Любое число из множества $\mathbb{C}_h$ представимо в алгебраической форме:

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = a \cdot (1; 0) + b \cdot (0; 1) = a + jb = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Hyp} z,$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – вещественная часть числа z , а $b = \operatorname{Hyp} z$ – гиперболическая часть числа z . Как показано в работе [7], множество h -комплексных чисел $\mathbb{C}_h$ есть кольцо с делителями нуля, каковыми являются числа вида $a \pm aj$.

Норма элемента в кольце $\mathbb{C}_h$ определяется по формуле $\|z\| = |a| + |b|$, а модуль h -комплексного числа имеет вид $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ [7].

Пусть D – область в $\mathbb{C}_h$, тогда любая h -комплексная функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}_h$ представима в алгебраической форме:

$$f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется h -голоморфной в точке $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$, если функции u и v имеют непрерывные вторые частные производные и выполнены условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функция $f(z)$ h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, если она h -голоморфна в каждой точке этой области.

Теорема о локальной обратимости h -голоморфных функций

Пусть $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ – функция, h -голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}_h$. Тогда всюду в D $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, $f'(z) = u'_x + jv'_x$ [7]. В отличие от классических голоморфных функций условие $f'(z) \neq 0$ не является достаточным даже для локальной обратимости h -голоморфных функций. Например, для функции $f(z) = (1 + j)z$ производная $f'(z) = 1 + j \neq 0$ всюду в $\mathbb{C}_h$, однако эта функция ни в одной точке локально не обратима. Покажем, что при более сильных ограничениях локальная обратимость h -голоморфных функций имеет место. Верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, $z_0 = a + jb \in D$. Если $|u'_x(a, b)| \neq |u'_y(a, b)|$, то существуют открытая окрестность U точки z_0 и открытая окрестность V точки $w_0 = f(z_0)$ такие, что функция $f: U \rightarrow V$ имеет обратную функцию $f^{-1}: V \rightarrow U$, которая непрерывно h -дифференцируема в V , и, следовательно,

$$\{f^{-1}\}'(w) = \{f'(z)\}^{-1}. \quad (1)$$

Если $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ в некоторой окрестности точки z_0 , то f не обратима в этой окрестности.

Доказательство. 1. Функции f поставим в соответствие непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ согласованное отображение

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J} = \det F'(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ u'_y & -u'_x \end{vmatrix} = (u'_x)^2 - (u'_y)^2 \neq 0.$$

По теореме об обратном отображении существуют открытая окрестность U^* точки $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ и открытая окрестность V^* точки $F(a; b) \in \mathbb{R}^2$ такие, что отображение $F: U^* \rightarrow V^*$ имеет обратное отображение $F^{-1}: V^* \rightarrow U^*$. Это отображение также непрерывно дифференцируемо и, таким образом,

$$\{F^{-1}\}'(u, v) = \{F'(x, y)\}^{-1}. \quad (2)$$

Отображению $F^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$ поставим в соответствие функцию $z = f^{-1}(w) = x(u, v) + jy(u, v)$. Окрестностям U^* и V^* соответствуют окрестности U и V точек $z_0 = a + jb$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда функции $f: U \rightarrow V$ и $f^{-1}: V \rightarrow U$ являются обратными друг другу.

2. Докажем формулу (1). Имеем

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ u'_y & u'_x \end{bmatrix},$$

тогда

$$\{F'(x, y)\}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{u'_x}{\mathbf{J}} & -\frac{u'_y}{\mathbf{J}} \\ -\frac{u'_y}{\mathbf{J}} & \frac{u'_x}{\mathbf{J}} \end{bmatrix}, \quad \{F^{-1}\}'(u, v) = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}.$$

Из выражения (2) получаем $x'_u = \frac{u'_x}{\mathbf{J}}$, $x'_v = -\frac{u'_y}{\mathbf{J}}$, $y'_u = -\frac{u'_y}{\mathbf{J}}$, $y'_v = \frac{u'_x}{\mathbf{J}}$. Для функции $z = f^{-1}(w) = x(u, v) + jy(u, v)$ имеем

$$x'_u = y'_v = \frac{u'_x}{\mathbf{J}}, \quad x'_v = y'_u = -\frac{u'_y}{\mathbf{J}}.$$

Следовательно, функция f^{-1} h -голоморфна в V , и тогда

$$\{f^{-1}\}'(w) = x'_u + jy'_u = \frac{u'_x - ju'_y}{\mathbf{J}} = \frac{u'_x - jv'_x}{\mathbf{J}} = \frac{1}{u'_x + jv'_x} = \{f'(z)\}^{-1}.$$

3. Пусть $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ в некоторой окрестности U точки z_0 . Введем характеристические координаты $\xi = \frac{1}{2}(x + y)$, $\eta = \frac{1}{2}(x - y)$. Имеем

$$\begin{cases} u'_\xi = u'_x + u'_y, & v'_\xi = v'_x + v'_y, \\ u'_\eta = u'_x - u'_y, & v'_\eta = v'_x - v'_y. \end{cases}$$

Если $u'_x = u'_y$, то с учетом $u'_x = v'_y$, $u'_y = v'_x$ выводим

$$u'_\xi = v'_\xi = 2u'_x, \quad u'_\eta = v'_\eta = 0.$$

Отсюда

$$u = u(\xi) = u\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad v = v(\eta) = v\left(\frac{x+y}{2}\right) = u\left(\frac{x+y}{2}\right) + C,$$

где $C \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f(z) = u\left(\frac{x+y}{2}\right) + jv\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1+j) \cdot u\left(\frac{x+y}{2}\right) + jC.$$

Пусть $z_0 \in D$, $z_0 = a + jb$. Все точки интервала $\gamma = \{x + y = a + b | z = x + jy \in U\}$ переходят в точку $w_0 = (1+j) \cdot u\left(\frac{a+b}{2}\right) + jC$, лежащую на прямой $y = x + C$. Если $u'_x = -u'_y$, то $u'_\xi = v'_\xi = 0$, $u'_\eta = -v'_\eta = 2u'_x$. Отсюда

$$u = u(\eta) = u\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad v = v(\eta) = v\left(\frac{x-y}{2}\right) = -u\left(\frac{x-y}{2}\right) + C.$$

Тогда

$$f(z) = u\left(\frac{x-y}{2}\right) + j\left(-u\left(\frac{x-y}{2}\right) + C\right) = (1-j) \cdot u\left(\frac{x-y}{2}\right) + jC,$$

где $C \in \mathbb{R}$. В этом случае для любой точки $z_0 \in D$ и ее окрестности U все точки интервала $\bar{\gamma} = \{x - y = a - b | z = x + jy \in U\}$ переходят в точку $w_0 = (1 - j) \cdot u\left(\frac{a - b}{2}\right) + jC$, лежащую на прямой $y = -x + C$.

Таким образом, при $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ всюду в D функция f локально не обратима ни в одной точке области D . Теорема доказана.

Замечание 1. В отличие от классического комплексного анализа условие $f'(z) \neq 0$ не является необходимым для локальной обратимости h -голоморфных функций в окрестности точки z . Например, $f(z) = z^3$ обратима в любой окрестности точки $z = 0$, в то время как $f'(0) = 0$.

Принцип сохранения области

Для h -голоморфных функций обычный принцип сохранения области не имеет места. Например, образом открытого h -круга $D = \{\|z\| < 1\}$ при отображении $f(z) = (1 + j) \cdot u(x + y)$ будет интервал $\gamma = \{w = (1 + j) \cdot u(x + y) | -1 < x + y < 1\}$, который не является областью в $\mathbb{C}_h$. Для h -голоморфных функций верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, а функции $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$ непрерывны в области $D^* = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | z = x + jy \in D\}$. Если $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ всюду в D^* , то множество $E = f(D)$ является областью. Если $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ всюду в D , то $f(D)$ – открытый интервал вида

$$\gamma = \left\{ w = (1 \pm j) \cdot u\left(\frac{x \pm y}{2}\right) + jC | C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^* \right\}.$$

Доказательство. 1. Пусть $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$. Докажем, что множество $E = f(D)$ открыто. Выберем произвольную точку $w_0 = f(z_0) \in E$, $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. В силу теоремы 1 существуют такие открытые окрестности U и V точек z_0 и w_0 соответственно, что функция $f: U \rightarrow V$ имеет обратную функцию $f^{-1}: V \rightarrow U$. Тогда для любой точки $w_1 \in V$ существует такая точка $z_1 \in U$, что $z_1 = f^{-1}(w_1) \in D$, $w_1 = f(z_1) \in E$. Следовательно, множество E открытое.

2. Докажем, что E связно. Для открытых множеств связность эквивалентна линейной связности [8]. Пусть $w_1, w_2 \in E$, $z_1 \in D$ – один из прообразов w_1 , $z_2 \in D$ – один из прообразов w_2 . Существует путь $\gamma: z = z(t)$, $t \in [0, 1]$, связывающий в D точки z_1 и z_2 . Из непрерывности f вытекает, что образ $\gamma^* = f[z(t)]$, $t \in [0, 1]$, будет путем, связывающим в E точки w_1 и w_2 . Очевидно, что $\gamma^* \in E$, следовательно, множество E связное. Таким образом, при $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ всюду в D множество $E = f(D)$ есть область.

3. Пусть $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ для любой точки $(x; y) \in D^*$. Если $u'_x = u'_y$, то $f(z) = (1 + j) \cdot u\left(\frac{x + y}{2}\right) + jC$ и для любой точки $z \in D$ точка $w = f(z)$ лежит на интервале $\gamma = \left\{ w = (1 + j) \cdot u\left(\frac{x + y}{2}\right) + jC | C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^* \right\}$. Если $u'_x = -u'_y$, то $f(z) = (1 - j) \cdot u\left(\frac{x - y}{2}\right) + jC$ и образы любой точки $z \in D$ лежат на интервале $\bar{\gamma} = \left\{ w = (1 - j) \cdot u\left(\frac{x - y}{2}\right) + jC | C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^* \right\}$. Указанные интервалы не являются областями в $\mathbb{C}_h$. Теорема доказана.

Принцип максимума нормы

Теорема 3. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, а функции $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$ непрерывны в области $D^* = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | z = x + jy \in D\}$. Если $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ всюду в D^* , то функция $\|f(z)\|$, $f(z) \neq \text{const}$, не может достигать локального максимума во внутренней точке области D .

Доказательство. В силу теоремы 2 множество $E = f(D)$ является областью. Пусть $\|f(z)\|$ достигает локального максимума в точке $z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0) \in E$. Тогда существуют такие открытые окрест-

ности U и V точек z_0 и w_0 соответственно, что функция $f : U \rightarrow V$ обратима. В окрестности V найдется такая точка w_1 , что $\|w_1\| > \|w_0\|$. Это противоречит тому, что $\|f(z)\|$ достигает максимума в точке z_0 . Теорема доказана.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 3 $f \in C(\bar{D})$, то функция $\|f(z)\|$ достигает максимума на границе ∂D .

Следствие 2. Если в условиях теоремы 3 $f(z) \neq 0$ для любой точки $z \in D$, то $\|f(z)\|$ не может достигать локального минимума внутри D .

Библиографические ссылки

1. Ивлев ДД. О двойных числах и их функциях. В: Бронштейн ИН, Варпаховский ФЛ, редакторы. *Математическое просвещение. Серия: Математика, ее преподавание, приложения и история. Выпуск 6*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1961. с. 197–203.
2. Розенфельд БА. *Неевклидовы геометрии*. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1955. 744 с.
3. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.
4. Khrennikov A. An introduction to hyperbolic analysis. arXiv:math-ph/0507053v2 [Preprint]. 2005 [cited 2021 March 15]: [42 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053v2>.
5. Зверович ЭИ, Павловский ВА. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h -комплексного переменного. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2020;56(2):189–193. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.
6. Павловский ВА. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце h -комплексных чисел. *Весті БДПУ. Серія 3. Фізика. Математика. Інформатика. Біологія. Географія*. 2020;4:25–31.
7. Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On h -holomorphy and h -analyticity of functions of an h -complex variable. *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series*. 2020;4:19–27. DOI: 10.32523/2616-7182/2020-133-4-19-27.
8. Шабат БВ. *Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного*. 5-е издание. Москва: Ленанд; 2015. 336 с. (Классический университетский учебник).

References

1. Ivlev DD. [On double numbers and their functions]. In: Bronshtein IN, Varpakhovskii FL, editors. *Matematicheskoe prosveshchenie. Seriya: Matematika, ee prepodavanie, prilozheniya i istoriya. Vypusk 6* [Mathematical education. Series: Mathematics, its teaching, applications and history. Issue 6]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1961. p. 197–203. Russian.
2. Rosenfeld BA. *Neevklidovy geometrii* [Non-Euclidean geometries]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1955. 744 p. Russian.
3. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.
4. Khrennikov A. An introduction to hyperbolic analysis. arXiv:math-ph/0507053v2 [Preprint]. 2005 [cited 2021 March 15]: [42 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053v2>.
5. Zverovich EI, Pavlovsky VA. Finding the areas of convergence and calculating the sums of power series from an h -complex variable. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2020;56(2):189–193. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.
6. Pavlovsky VA. Algebraic equations with material coefficients in the ring of h -complex numbers. *BSPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography*. 2020;4:25–31. Russian.
7. Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On h -holomorphy and h -analyticity of functions of an h -complex variable. *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series*. 2020;4:19–27. DOI: 10.32523/2616-7182/2020-133-4-19-27.
8. Shabat BV. *Vvedenie v kompleksnyi analiz. Chast' 1. Funktsii odnogo peremennogo* [Introduction to complex analysis. Part 1. Functions of one variable]. 5th edition. Moscow: Lenand; 2015. 336 p. (Klassicheskii universitetskii uchebnik). Russian.

Получена 23.04.2021 / исправлена 09.02.2022 / принята 18.02.2022.
Received 23.04.2021 / revised 09.02.2022 / accepted 18.02.2022.

ЮБИЛЕИ

JUBILEES



**Анатолий Борисович
АНТОНЕВИЧ**

**Anatolii Borisovich
ANTONEVICH**

Исполнилось 80 лет известному белорусскому ученому – доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Борисовичу Антоневичу.

А. Б. Антоневи́ч родился 9 января 1942 г. в с. Меловатка Волгоградской области. В 1963 г. окончил математический факультет БГУ. Начал работать в БГУ с 1967 г., с 1990 г. является профессором кафедры функционального анализа и аналитической экономики. Докторскую диссертацию защитил в 1989 г. в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Первые научные работы А. Б. Антоневи́ча, принесшие ему известность среди ученых-математиков, были связаны с проблемой индекса нелокальных операторов. В 1969 г. Анатолием Борисовичем получена формула, которая выражает индекс псевдодифференциального оператора с конечной группой сдвигов через топологические инварианты, называемые числами Лефшеца эквивариантного оператора. Это была одна из первых работ в СССР, в которых использовалась K -теория, незадолго до этого построенная известным английским математиком М. Атьей и имевшая широкий международный резонанс.

Основные научные интересы А. Б. Антоневи́ча связаны с теорией функциональных операторов и порожденных ими операторных алгебр. Функциональные операторы являются существенно нелокальными операторами, включение которых в различные классы уравнений принципиально усложняет исследование, так как стандартные методы, разработанные для анализа локальных операторов, неприменимы в такой ситуации.

Для исследования функциональных операторов и соответствующих нелокальных уравнений в общем случае А. Б. Антоневи́ч разработал подход, базирующийся на исследовании специфики операторных алгебр, порожденных функциональными операторами. Основопологающими результатами, полученными А. Б. Антоневи́чем в этом направлении, являются теоремы об изоморфизме C^* -алгебр, порожденных динамическими системами, теорема о гиперболичности линейного расширения, ассоциированного с операторами взвешенного сдвига, конструкция символа функционально-дифференциального оператора, аналог условия Лопатинского для нелокальных краевых задач. Данные результаты были опубли-

ликованы в топовых научных журналах, а также систематизированы в монографиях, изданных не только в Беларуси, но и за ее пределами ведущими мировыми издательствами¹.

В последние годы А. Б. Антоневицем впервые получены условия односторонней обратимости и описаны существенные спектры функциональных операторов, обнаружено новое свойство нечеткой дихотомии, связанное с существованием корректных краевых задач для функциональных и дифференциальных уравнений, описаны квазипериодические обобщенные функции и их приложения к теории квазикристаллов, новые формулы для подсчета спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига (аналогами или частными случаями этих формул являются известные в термодинамике и статистической физике вариационные принципы).

С 1990 г. круг научных интересов Анатолия Борисовича расширился за счет тематики, связанной с проблемой умножения обобщенных функций, современные подходы к решению которой базируются на введении вместо обобщенных функций новых объектов, называемых мнемофункциями, допускающих корректное задание произведения и при этом сохраняющих основные свойства обобщенных функций. Совместно с Я. В. Радыно разработан общий подход к построению алгебр мнемофункций, сконструирован ряд новых алгебр. Даны приложения к исследованию уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом и приложения сингулярных решений (типа бесконечно узкого солитона и типа ударной волны) для некоторых нелинейных уравнений с частными производными. Составлена таблица умножения (в смысле теории мнемофункций) базовых обобщенных функций. Часть результатов разработки этого направления представлены в монографии А. Б. Антоневица и Т. А. Романчук «Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций» (2012).

А. Б. Антоневиц опубликовал свыше 200 научных работ, среди его соавторов более 50 специали-

тов из разных стран. Он подготовил 27 кандидатов наук и продолжает активно работать с аспирантами (готовы к защите еще две кандидатские диссертации). В числе учеников А. Б. Антоневица есть граждане Беларуси, России, Вьетнама, Польши, Сенегала, Сербии, трое из них (А. В. Лебедев, Данг Суан Тхань, Данг Хань Хой) стали докторами наук.

Анатолий Борисович является не только выдающимся ученым, но и замечательным педагогом. Совместно с Я. В. Радыно и П. Н. Князевым еще в 1978 г. им был написан первый в СССР задачник по функциональному анализу, переизданный четыре раза и переведенный на испанский язык. Неослабевающей популярностью как в Беларуси, так и на постсоветском пространстве пользуется написанный в соавторстве с Я. В. Радыно учебник по функциональному анализу, издававшийся трижды (1984, 2003, 2006), а также ряд других учебных пособий по функциональному анализу, теории меры и интегральным уравнениям, в совокупности составляющих учебно-методический комплекс по функциональному анализу.

Профессор А. Б. Антоневиц – лауреат премии имени А. Н. Севченко БГУ (1995). Он удостоен званий «Заслуженный работник БГУ», «Отличник народного образования», «Соросовский профессор», награжден почетными грамотами БГУ, Министерства образования Республики Беларусь, Президиума НАН Беларуси.

Математика не единственное увлечение Анатолия Борисовича. Он является мастером спорта СССР по классической (греко-римской) борьбе, был чемпионом республики и победителем молодежного чемпионата СССР. А. Б. Антоневицу покорялись не только научные высоты, но и труднопроходимые крутые маршруты в горах Кавказа, Памира, Тянь-Шаня, Алтая, Саян, Камчатки, Урала, Хибин и хребта Черского, за что ему присвоено также звание мастера спорта СССР по горному туризму.

Сердечно поздравляем Анатолия Борисовича с 80-летием и желаем ему крепкого здоровья, большого счастья и покорения новых научных высот.

Коллеги и ученики

¹ Антоневиц А. Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск : Университетское, 1988. 232 с. (переведена на английский язык: *Antonevich A. B. Linear functional equations. Operator approach.* Basel ; Boston ; Berlin : Birkhäuser Verl., 1996. VIII, 179 p. (Operator theory: advances and applications ; vol. 83)) ; *Antonevich A. Functional differential equations: I. C*-theory* / A. Antonevich, A. Lebedev. Harlow : Longman Sci. & Tech. ; New York : John Wiley & Sons, 1994. 504 p. (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics ; vol. 70) ; *Antonevich A. Functional differential equations: II. C*-applications : [in 2 parts]. Part 1. Equations with continuous coefficients* / A. Antonevich, M. Belousov, A. Lebedev. Harlow : Addison Wesley Longman Ltd., 1998. 384 p. (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics ; vol. 94) ; *Antonevich A. Functional differential equations: II. C*-applications : [in 2 parts]. Part 2. Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems* / A. Antonevich, M. Belousov, A. Lebedev. Harlow : Addison Wesley Longman Ltd., 1998. 414 p. (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics ; vol. 95) ; *Dolićanin C. B. Dynamical systems generated by linear maps* / C. B. Dolićanin, A. B. Antonevich. 2nd ed. Cham [etc.] : Springer, 2014. XII, 203 p.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 330.4(075.8)

Альсевич В. В. **Математическая экономика** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)» / В. В. Альсевич, Н. С. Павленок ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2021. 128 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 128. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/272363>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 02.12.2021, № 012202122021.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальности 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)». Содержание ЭУМК предполагает применение математического аппарата и методов оптимизации к исследованию задач микро- и макроэкономики.

УДК 510.51(075.8)(076.1)

Котов В. М. **Сборник задач по теории алгоритмов. Организация перебора и приближенные алгоритмы** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 04 «Информатика» / В. М. Котов, Е. П. Соболевская, Г. П. Волчкова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2021. 144 с. : ил. Библиогр.: с. 143–144. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/272717>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 08.12.2021, № 013508122021.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Теория алгоритмов» («Модели и алгоритмы задач дискретной оптимизации») предназначен для студентов специальности 1-31 03 04 «Информатика». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, наборы тестов для проверки правильности программ, задания эвристического типа, список литературы.

УДК 510.51(075.8)

Котов В. М. **Сборник задач по теории алгоритмов** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 07-01 «Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем)» / В. М. Котов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2021. 172 с. : ил. Библиогр.: с. 171–172. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/274229>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 14.01.2022, № 000114012022.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Алгоритмы и структуры данных» предназначен для студентов специальностей «Информатика», «Прикладная информатика (по направлениям)», «Прикладная математика (по направлениям)». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, наборы тестов для проверки правильности программ, задания эвристического типа, список литературы.

УДК 004(075.8)

Велько О. А. **Современные информационные технологии** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2021. 181 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 180–181. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/274771>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 26.01.2022, № 000226012022.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Современные информационные технологии» предназначен для студентов специальности 1-23 01 05 «Социология». ЭУМК включает лекционный материал, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные промежуточные контрольные работы, вопросы для подготовки к зачету, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 51(075.8)+519.2(075.8)

Моисеева Н. А. Основы высшей математики и теории вероятностей [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2021. 239 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 238–239. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/274772>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 26.01.2022, № 000326012022.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы высшей математики и теории вероятностей» предназначен для студентов специальности 1-23 01 15 «Социальные коммуникации». ЭУМК включает лекционный материал, задания для практических занятий, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, тестовые задания, контрольные работы, задания эвристического типа, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 519.67(075.8)

Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» / Л. Л. Голубева [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2021. 250 с. : ил. Библиогр.: с. 247–250. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/276777>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 21.03.2022, № 002421032022.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Компьютерная математика» предназначен для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направление специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 519.67(075.8)

Компьютерная математика. Числовой пакет MATLAB [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» / Л. Л. Голубева [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2021. 88 с. : ил. Библиогр.: с. 85–88. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/276778>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 21.03.2022, № 002521032022.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Компьютерная математика» предназначен для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направление специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

- Жук А. И., Защук Е. Н.* Об ассоциированных решениях систем неавтономных дифференциальных уравнений в пространствах Лебега 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

- Бондаренко А. А.* Бирациональная композиция произвольной квадратичной формы с бинарной квадратичной формой..... 14

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

- Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л.* О вложении Ω -насыщения топологического пространства... 21

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

- Волошко В. А., Трубей А. И.* О мощностях тестов многомерной дискретной равномерности, используемых для статистического анализа генераторов случайных последовательностей 26
- Задорожнюк А. О.* Монотонность вероятностей состояний случайного блуждания на конечных решетках..... 38
- Эгверидо Дж. Т.* Вероятностная модель Маршалла – Олкина, порожденная распределением Тейссье, для описания данных времени жизни..... 46

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

- Агиевич С. В.* Оценка сверху для биномиальных коэффициентов в форме Муавра – Лапласа 66

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

- Никитин А. В., Михасев Г. И.* Оценка эффективного модуля Юнга пористого титана с открытыми порами на основе трехмерного массива ячеек Гибсона – Эшби 75

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

- Сенько О. В., Кузнецова А. В., Воронин Е. М., Кравцова О. А., Борисова Л. Р., Кирилюк И. Л., Акимкин В. Г.* Методы интеллектуального анализа данных в исследованиях эпидемии COVID-19..... 83

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

- Ваткин М. Е., Воробей Д. А., Яковлев М. В., Кривова М. Г.* Функция потерь, учитывающая семантику пространства, для синтеза эмбедингов на транзакционных данных 97
- Павловский В. А., Васильев И. Л.* О локальной обратимости функций h -комплексного переменного..... 103

ЮБИЛЕИ

- Анатолий Борисович Антоневиц..... 108
- Аннотации депонированных в БГУ работ..... 110

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

<i>Zhuk A. I., Zashchuk H. N.</i> On associated solutions of the system of non-autonomous differential equations in the Lebesgue spaces	6
---	---

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

<i>Bondarenko A. A.</i> The birational composition of arbitrary quadratic form with binary quadratic form.....	14
--	----

GEOMETRY AND TOPOLOGY

<i>Biadrytski A. S., Timokhovich V. L.</i> On the embedding of the Ω -saturation of a topological space.....	21
---	----

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Voloshko V. A., Trubey A. I.</i> On the power of tests of multidimensional discrete uniformity used for statistical analysis of random number generators	26
<i>Zadorozhnuyk A. O.</i> Monotonicity of random walks' states on finite grids	38
<i>Eghwerido J. T.</i> The Marshall – Olkin Teissier generated model for lifetime data	46

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

<i>Agievich S. V.</i> An upper bound on binomial coefficients in the de Moivre – Laplace form.....	66
--	----

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

<i>Nikitsin A. V., Mikhasev G. I.</i> Estimation of the effective Young's modulus for open cell porous titanium based on 3D Gibson – Ashby cell array	75
---	----

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Senko O. V., Kuznetsova A. V., Voronin E. M., Kravtsova O. A., Borisova L. R., Kirilyuk I. L., Akimkin V. G.</i> Methods of intellectual data analysis in COVID-19 research.....	83
---	----

SHORT COMMUNICATIONS

<i>Vatkin M. E., Vorobey D. A., Yakovlev M. V., Krivova M. G.</i> Space semantic aware loss function for embedding creation in case of transaction data.....	97
<i>Pavlovsky V. A., Vasiliev I. L.</i> On local invertibility of functions of an h -complex variable	103

JUBILEES

<i>Anatolii Borisovich Antonevich</i>	108
Indicative abstracts of the papers deposited in BSU.....	110

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, РИНЦ.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 1. 2022**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Семенец, М. А. Подголина*
Технический редактор *В. В. Пишкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 31.03.2022.
Тираж 100 экз. Заказ 2425.

Издательско-полиграфическое частное
унитарное предприятие «Донарит».
Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/289 от 17.04.2014.
Ул. Октябрьская, 25, 220030,
г. Минск, Республика Беларусь.

© БГУ, 2022

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 1. 2022**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Semenets, M. A. Podgolina*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 31.03.2022.
Edition 100 copies. Order number 2425.

Publishing and printing private
unitary enterprise «Donarit».
Certificate of state registration of the publisher,
manufacturer, distributor of printed publications
No. 1/289 dated 17.04.2014.
25 Kastyryčnickaja Str.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.

© BSU, 2022