



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

1

2021

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Бухштабер В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головко В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демидо Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Донской В. И. Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.

- Княжице Л. Б.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Кожанов А. И.** Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никоноров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Тузиков А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

- Editor-in-chief** **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by
- Deputy editors-in-chief** **KROTOV V. G.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: krotov@bsu.by
- DUDIN A. N.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: dudin@bsu.by
- Executive secretary** **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by
- Ablameyko S. V.* Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H. Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M. Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Vabishchevich P. N. Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Volkov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Gladkov A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W. University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Goginava U. Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A. Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Dzemyda G. Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Donskoy V. I. V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia.
Egorov A. D. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A. Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Zoladek H. Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
Zhuravkov M. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zalesskii P. A. University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
Zubkov A. M. Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Kaplunov J. D. Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H. University of Graz, Graz, Austria.
Knyazhishche L. B. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Kotov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.

- Krasnoproshin V. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Laurinchikas A. P.** Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
- Madani K.** Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
- Makarov E. K.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Matus P. P.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Medvedev D. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Mikhasev G. I.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Nesterenko Y. V.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Trofimov V. A.** Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Filzmoser P.** Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
- Chernousov V. I.** University of Alberta, Edmonton, Canada.
- Chizhik S. A.** National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.9

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М. П. ДЫМКОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь

В работе исследуется линейная дифференциально-разностная система с запаздывающим аргументом. Такие системы имеют различные сферы применения, в том числе и повторяющиеся процессы с обучением. Для определения условий оптимальности управления в задаче приведения траектории системы в состояние покоя за минимальное время использовалась теорема об отделимости выпуклых множеств. Аналитические выражения для оптимального управления выведены для специального случая интегральных ограничений на управление. В целях демонстрации полученных результатов приведен иллюстративный пример с детальным вычислением основных элементов оптимального управления.

Ключевые слова: дифференциально-разностные системы; запаздывающий аргумент; задача оптимального быстрогодействия.

Образец цитирования:

Дымков МП. Задача оптимизации для одного класса дифференциально-разностных систем с запаздыванием. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:6–17 (на англ.).
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-6-17>

For citation:

Dymkov MP. Optimisation problem for some class of hybrid differential-difference systems with delay. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:6–17.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-6-17>

Автор:

Михаил Пахомович Дымков – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры высшей математики факультета цифровой экономики.

Author:

Michael P. Dymkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of higher mathematics, faculty of digital economy.
dymkov_m@bseu.by

OPTIMISATION PROBLEM FOR SOME CLASS OF HYBRID DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEMS WITH DELAY

M. P. DYMKOV^a

^aBelarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus

In the paper, the linear differential-difference dynamic systems with delayed arguments are considered. Such systems have a lot of application areas, in particular, processes with repetitive and learning structure. We apply the method of the separation hyperplane theorem for convex sets to establish optimality conditions for the control function to drive the trajectory to zero equilibrium state in the fastest possible way. For the special case of the integral control constraints, the proposed method is detailed to establish an analytical form of the optimal control function. The illustrative example is given to demonstrate the obtained results with the step-by-step calculation of the basic elements of the optimal control.

Keywords: differential-difference system; delayed argument; time optimal control problem.

Introduction

The time delayed dynamic is frequently encountered in modern control system theory [1]. Differential-difference processes with delayed arguments (hybrid continuous-discrete) are a class of systems of both theoretic and applications interest [2]. Application areas include a lot of physical [3] and industrial processes [4], especially, with repetitive and learning structure [5] and others. Moreover, it is already known that [6] links between some types of linear repetitive processes and delay systems, which can, where appropriate, be used to great effect in the control related analysis of these processes. This paper is based on the work [7] and gives some new results on optimisation theory for delayed differential-difference linear processes. There are only a few research works in the literature devoted to optimisation theory (see, for example [8], and references therein). In this paper, we have adopted the method [9] based on the separation theorem for the convex sets to establish optimality conditions for the time optimal control problem. Then, we applied the classic approach from calculus of variations theory to study the structure of the optimal control for the sub-class of the delayed hybrid differential-algebraic processes. Furthermore, the proposed method is detailed for the special case of the integral control constraints where the applicable form of the optimal control function to drive the process dynamics to zero equilibrium state in the fastest possible way is established. It has been conjectured that such a setting is appropriate for development of the numerical methods for optimal control problems and related studies on for which very little work has been reported to date. The illustrative example, given in the paper, demonstrates the main stages and the step-by-step calculation to realise the analytical solution based on the obtained results to design the time optimal control function. This fact is interesting from theoretical and, as well, practical viewpoints. Some areas for short to medium term further research are also briefly discussed.

Notation. R^n denotes the n – dimensional Euclidean space, g^T and A^T mean transposed vector and matrix, respectively, I_n is the $n \times n$ identity matrix. Matrices, if not explicitly stated, are assumed to have compatible dimensions.

Optimisation problem for delayed differential-difference system

In the paper, we consider the linear system described by the pair of time delay differential and difference equations

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_{-1}x(t-h) + B_0y(t) + B_{-1}y(t-h) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + C_{-1}x(t-h) + D_{-1}y(t-h) + Du(t), \quad t \in [0, \alpha] \quad (2)$$

with initial conditions

$$x(t) = f(t), \quad t \in [-h, 0), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0] \quad (3)$$

and $x \in R^n$, $y \in R^m$, $u \in R^r$, where α , h are given real numbers such that $h < \alpha$, $f(t)$, $g(t)$ are given continuous functions, A , A_{-1} , B , B_0 , B_{-1} , C , C_{-1} , D , D_{-1} are given matrixes of the appropriate dimensions. The class $U(\cdot)$ of the admissible control vectors $u(t)$, $t \in [0, \alpha]$, is the set of the all piecewise continuous functions such that $u(t) \in \Omega$, $t \in [0, \alpha]$, where Ω is a compact convex set in R^r . The pair of the functions $(x(t), y(t))$ is termed the solution of the system (1)–(3) for the given control vector $u(t)$, if they satisfy the differential equation (1)

almost everywhere on the interval $[0, \alpha]$, $t \neq kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$ and the difference equation (2) for all $t \in [0, \alpha]$. (Here the right-hand derivative is assumed at the moment $t = 0$.) Under the assumptions made here, it can be shown that the solution $x(t)$ is absolutely continuous and also that $y(t)$ is piecewise continuous on the interval $[0, \alpha]$.

Consider the following time optimal control problem for the process (1)–(3). For the given initial data $x(t) = f(t)$, $t \in [-h, 0)$, $x(0) = x_0$, $y(t) = g(t)$, $t \in [-h, 0]$, it is required to find the minimal time T , $T \in [0, \alpha]$, and the control function $u(t)$, $t \in [0, T]$, such that the corresponding solution of the system (1)–(3) satisfies the following condition:

$$x(t) \equiv 0, t \in [T - h, T]. \quad (4)$$

We assume, in addition, that the set of the admissible controls $U(\cdot)$ is non-empty. We say that the control function $u(\cdot) \in U(\cdot)$ is T -admissible control for the system (1)–(3) if the corresponding trajectory satisfies the condition (4). The solution of the system (1)–(3) can be constructed (see, for example, [6; 7] and references therein) using the step-by-step, or recurrent, procedure for each sub-interval of the form $[ih, (i + 1)h)$, $i = 0, 1, \dots, q_\alpha$, where $q_\alpha = \left[\frac{\alpha}{h} \right]$ denotes the integer part of the fraction $\frac{\alpha}{h}$. For this purpose, function $F(t, \tau)$ is introduced as a solution of the following differential equation

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = - \sum_{j=1}^{q_t+1} F(t, \tau + (j-1)h)H_j, F(t, \tau) \equiv 0, \forall \tau > t, F(t, t-0) = I_n. \quad (5)$$

It can be shown that the following formula for the solutions of the system (1)–(3) is true:

$$x(t) = s(t, f, g, x_0) + \int_0^t S(t, \tau)u(\tau)d\tau, t \in [0, \alpha], \quad (6)$$

where

$$s(t, f, g, x_0) = F(t, 0)x_0 + \int_{-h}^0 F(t, \tau + (q_t + 1)h) [P_{q_t+1}f(\tau) + Q_{q_t+1}g(\tau)]d\tau + \\ + \sum_{j=1}^{q_t+1} \int_{-h}^0 F(t, \tau + (j-1)h)H_j f(\tau)d\tau, S(t, \tau) = \sum_{j=1}^{q_t+1} F(t, \tau + (j-1)h)V_j,$$

and

$$y(t) = CF(t, 0)x_0 + \int_{-h}^0 CF(t, \tau)H_1 f(\tau)d\tau + \int_{-h}^0 CF(t, \tau + h) [P_1 f(\tau) + Q_1 g(\tau)]d\tau + \\ + \int_0^t CF(t, \tau)V_1 u(\tau)d\tau + C_{-1}f(t-h) + D_{-1}g(t-h) + Du(t), \forall t \in [0, h),$$

$$y(t) = CF(t, 0)x_0 + \sum_{j=0}^{q_t-1} M_{j+1}F(t - (j+1)h, 0)x_0 + \sum_{l=0}^{q_t-1} \sum_{j=0}^{q_t-l} \int_{-h}^0 M_l F(t - lh, \tau + jh)H_{j+1}f(\tau)d\tau + \\ + \sum_{l=0}^{q_t} \int_{-h}^0 M_l F(t - lh, \tau + (q_t + 1 - l)h) [P_{q_t+1-l}f(\tau) + Q_{q_t+1-l}g(\tau)]d\tau + \\ + \int_0^t R(t, \tau)u(\tau)d\tau + W_{q_t-1}f(t - q_t h) + \sum_{j=0}^{q_t} G_j u(t - jh) + K_{q_t-1}g(t - q_t h), \forall t \geq h,$$

where

$$H_j = (B_0 D_{-1}^{j-1} + B_{-1} D_{-1}^{j-2})(C_{-1} + D_{-1}C), j = 3, \dots, q_t + 1, H_1 = A + B_0 C, \\ H_2 = A_{-1} + B_0(C_{-1} + D_{-1}C) + B_{-1}C, V_j = (B_0 D_{-1}^{j-1} + B_{-1} D_{-1}^{j-2})D, j = 2, \dots, q_t + 1, \\ V_1 = B + B_0 D, Q_i = (B_0 D_{-1} + B_{-1})D_{-1}^{i-1}, P_i = (B_0 D_{-1} + B_{-1} D_{-1}^{i-2})C_{-1}, P_1 = A_{-1} + B_0 C_{-1},$$

$$R(t, \tau) = \sum_{l=0}^{q_t-1} \sum_{j=0}^{q_t-l} M_l F(t-lh, \tau + jh) V_{j+1}, \quad q_t = \left\lceil \frac{t}{h} \right\rceil,$$

$$M_{j+1} = D_{-1}^j (C_{-1} + D_{-1} C), \quad M_0 = C, \quad G_j = D_{-1}^j D, \quad K_i = D_{-1}^i C_{-1}, \quad W_i = D_{-1}^{i+1}, \quad j = 0, 1, \dots, q_t.$$

Let $C^n[-h, 0]$, $h > 0$, denote the vector space of the continuous n vector function $f: [-h, 0] \rightarrow R^n$. Put

$$Z = \left\{ x \in R^n \mid x = s(T-h, f, g, x_0) \text{ for all } (f, g, x_0) \in C_{[-h, 0]} \times C_{[-h, 0]} \times \mathbb{R}^n \right\}$$

and

$$\mathcal{R} = \{s \in Z \mid \text{such that for } x = s \text{ there is } T\text{-admissible control } u(\cdot)\}. \quad (7)$$

In fact, the set \mathcal{R} is the reachability set [7; 10] for the system (1)–(3) with the additional condition. We assume that \mathcal{R} is not empty, which is true if the system is controllable. In other words, we suppose that there exists at least one collection of the initial data

$$x(t) = f(t), \quad t \in [-h, 0], \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0],$$

for which there exists the T -admissible control function. Additionally, we will assume next that $r = n$ and the matrices B, B_0, D such that there exist B^{-1} and $[E + DB^{-1}B_0]^{-1}$ (this can be guaranteed, for example, by the appropriate spectrum assumptions for these matrices). Note that in this case the T -admissible control functions on the last interval $[T-h, T]$ is represented in the feedback form. Indeed, from (1) we have

$$u(t) = -B^{-1} [A_{-1}x(t-h) + B_0y(t) + B_{-1}y(t-h)].$$

Substituting this into (2) yields

$$u(t) = Nx(t-h) + My(t-h), \quad t \in [T-h, T], \quad (8)$$

where

$$N = [I + DB^{-1}B_0]^{-1} [C_{-1} - DB^{-1}A_{-1}], \quad M = [I + DB^{-1}B_0]^{-1} [D_{-1} - DB_{-1}^2]. \quad (9)$$

Thus, the considered problem is to determine the optimal control on the interval $[0, T-h]$.

We denote by $U_T(\cdot)$ the set of the all T -admissible control functions for the system (1)–(3) corresponding to the set \mathcal{R} in (7). By analogy with [9; 10] it can be shown that \mathcal{R} is the convex set.

Theorem 1. *For the given initial data $f(t)$, $t \in [-h, 0]$, $x(0) = x_0$, $g(t)$, $t \in [-h, 0]$, the T -admissible control function for the system (1)–(3) exists if, and only if, the following inequality is fulfilled:*

$$\max_{\|g\|=1} \left\{ g^T s(T-h, f, g, x_0) + \inf_{u(\cdot) \in U_T(\cdot)} \int_0^{T-h} g^T S(T-h, \tau) u(\tau) d\tau \right\} \leq 0. \quad (10)$$

Proof. Necessity. Let T be the moment such that $u(t)$, $t \in [0, T]$, is a T -admissible control function for the system (1)–(3). This means that the corresponding trajectory at the moment $t = T-h$ satisfies the condition $x(T-h) = 0$. Therefore,

$$s(T-h, f, g, x_0) + \int_0^{T-h} S(T-h, \tau) u(\tau) d\tau = 0. \quad (11)$$

Multiplying both sides of the last equality (11) by the vector $g \in R^n$ yields

$$g^T s(T-h, f, g, x_0) + \int_0^{T-h} g^T S(T-h, \tau) u(\tau) d\tau = 0.$$

Therefore,

$$g^T s(T-h, f, g, x_0) + \inf_{u \in U_T(\cdot)} \int_0^{T-h} g^T S(T-h, \tau) u(\tau) d\tau \leq 0. \quad (12)$$

Obviously, from (12) it follows (10).

Sufficiency. Let the inequality (10) hold for the given initial data (f, g, x_0) . On contrary, assume that for this data there is no T -admissible control $u(\cdot)$, which solves the problem. This means that the corresponding vector $s^* = s^*(T-h, f, g, x_0)$ does not belong to the set \mathcal{R} , i. e. $s^*(T-h, f, g, x_0) \notin \mathcal{R}$. Since \mathcal{R} is a convex set, there exists a supporting hyperplane with the non-trivial normal vector $g^* \in R^n$, $\|g^*\|=1$ such that the following inequality

$$g^{*T}s^* > g^{*T}s, \quad \forall s \in \mathcal{R}, \quad (13)$$

holds. Since $s \in \mathcal{R}$, there exists a T -admissible control function $u(t)$, $t \in [0, T-h]$, such that the corresponding trajectory at moment $t = T-h$ satisfies the condition $x(T-h) = 0$:

$$s + \int_0^{T-h} S(T-h, \tau)u(\tau)d\tau = 0.$$

Then $s = - \int_0^{T-h} S(T-h, \tau)u(\tau)d\tau$ and from (13) follows

$$g^{*T}s^* + \int_0^{T-h} g^{*T}S(T-h, \tau)u(\tau)d\tau > 0.$$

Since s is an arbitrary vector from the set \mathcal{R} , the last inequality is true for all $u(\cdot) \in U_T(\cdot)$. Therefore,

$$g^{*T}s^*(T-h, f, g, x_0) + \inf_{u \in U_T(\cdot)} \int_0^{T-h} g^{*T}S(T-h, \tau)u(\tau)d\tau > 0,$$

which contradicts (10). The theorem is proved.

Next, denote

$$\Lambda(T) = \max_{\|g\|=1} \left\{ g^T s(T-h, f, g, x_0) + \inf_{u \in U_T(\cdot)} \int_0^{T-h} g^T S(T-h, \tau)u(\tau)d\tau \right\}. \quad (14)$$

It can be shown that $\Lambda(T)$ is a non-decreasing lower semicontinuous function, and hence we have the result bellow.

Theorem 2. *Given initial data $f(t)$, $t \in [-h, 0)$, $x(0) = x_0$, $g(t)$, $t \in [-h, 0]$, the moment T^0 is optimal if, and only if, T^0 is a minimal root of the equation*

$$\Lambda(T) = 0. \quad (15)$$

Proof. Necessity. Let T^0 and $u^0(\cdot)$ be the optimal solution for the optimisation problem. Then theorem 1 gives $\Lambda(T^0) \leq 0$. At the first, suppose that $\Lambda(T^0) < 0$. Since $\Lambda(T)$ is a non-decreasing and continuous function than $\exists \hat{T}$, $\hat{T} < T^0$, such that $\Lambda(T^0) \leq \Lambda(\hat{T}) \leq 0$. Then in accordance with theorem 1, the optimisation problem is solvable with $\hat{T} < T^0$ which is impossible. Thus, T^0 is the root of the equation (15). The minimality of T^0 can be shown analogously.

Sufficiency. Let the moment T^0 be the minimal root of $\Lambda(T) = 0$ for the control function $u^0(t)$, $t \in [0, T^0 - h]$. Suppose this control function is not optimal for the given initial data. Hence, there is the \hat{T} -admissible control function $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T} - h]$, where $\hat{T} < T^0$. Then theorem 1 yields $\Lambda(\hat{T}) \leq 0$. However, noting non-decreasing function $\Lambda(T)$, we have $\Lambda(\hat{T}) \geq \Lambda(T^0) = 0$, which contradicts the minimality of the root T^0 , which completes the proof.

Finally, the optimal time T^0 is given by the equality (15) and the optimal control function $u^0(t)$ is determined as

$$\min_{u \in U_T(\cdot)} \int_0^{T-h} g^{0T}S(T-h, \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^{T-h} g^{0T}S(T-h, \tau)u^0(\tau)d\tau, \quad (16)$$

where g^0 is the vector which maximises the expression (14).

$$\Psi(\tau) = \begin{cases} \left[S^T(\theta, \tau)N^T + R^T(\theta, \tau)M^T \right] MG_0, \tau \in (T - 2h, T - h], \\ \left[S^T(\theta + h, \tau)N^T + R^T(\theta + h, \tau)M^T \right] MG_1, \tau \in (T - 3h, T - 2h], \\ \dots \\ \left[S^T(\theta + (q_T - 1)h, \tau)N^T + R^T(\theta + (q_T - 1)h, \tau)M^T \right] MG_{q_T - 1}, \tau \in [0, h]. \end{cases}$$

Here e^{-kph} denotes the shift operator such that $(e^{-kph}u)(\tau) = u(\tau - kh)$. Then, using the Lagrange multiplier method for (18), (19) leads to the functional

$$\begin{aligned} \Pi(u) = & \int_0^{T-h} g^T S(T-h, \tau)u(\tau)d\tau + \lambda \left\{ Y + \int_0^{T-h} u^T(\tau)[I_m + \mathcal{G}(\tau)]^T u(\tau)d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^{T-h} [\Psi(\tau) + \varphi(\tau)]^T u(\tau)d\tau + \int_0^{T-h} \int_0^{T-h} u^T(\tau)[\Psi(\tau, \theta) + \Phi(\tau, \theta)]u(\theta)d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

which is subject of minimisation with respect to unknowns λ and $u(t)$. Then the first variation $\delta\Pi$ for $\Pi(u)$, given by (21) can be represented as

$$\begin{aligned} \delta\Pi(u) = & \frac{\delta\Pi(u + \alpha v)}{\partial\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_0^{T-h} v(\tau)S(T-h, \tau)gd\tau + \\ & + \int_0^{T-h} \lambda \left\{ u^T(\tau)[I + \mathcal{G}(\tau)]^T d\tau + [\Psi(\tau) + \varphi(\tau)]^T + \int_0^{T-h} u(\tau)K(\theta, \tau)u(\theta)d\theta \right\}^T v(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$K(\theta, \tau) = (\Psi(\tau, \theta) + \Phi(\tau, \theta)) + (\Psi^T(\tau, \theta) + \Phi^T(\tau, \theta)).$$

The Lagrange multiplier method yields that the optimal solutions satisfy to the equality $\delta\Pi(u) = 0$ for all functions $v(\tau)$. Hence, from (22) it follows

$$S^T(T-h, \tau)g + \lambda \left\{ 2[I_m + \mathcal{G}(\tau)]u(\tau) + \Psi(\tau) + \varphi(\tau) + \int_0^{T-h} K(\theta, \tau)u(\theta)d\theta \right\} = 0. \quad (23)$$

The solution of (23) can be represented as

$$u_g(t) = u_1(t) + u_2(t), \text{ where } u_2(t) = \frac{1}{\lambda} L(t)g. \quad (24)$$

Here the vector $u_1(t)$ and the $(n \times r)$ -matrix $L(t)$ satisfy the following integral equations

$$\int_0^{T-h} K(\theta, t)u_1(\theta)d\theta + 2u_1(t)(I + \mathcal{G}(t)) + \Psi(t) + \varphi(t) = 0, \quad 2L(t) + S(T-h, t) + \int_0^{T-h} K(\theta, t)L(\theta)d\theta = 0.$$

To show this it is sufficient to substitute (24) into (23), which gives

$$\begin{aligned} S^T(T-h, \tau)g + \lambda \left\{ 2 \left(u_1(t) + \frac{L(t)g}{\lambda} \right) [I_m + \mathcal{G}(\tau)] + \int_0^{T-h} u(\tau)K(\theta, \tau) \left(u_1(\theta) + \frac{L(\theta)g}{\lambda} \right) d\theta \right\} + \\ + \Psi(\tau) + \varphi(\tau) = \left(S^T(T-h, \tau) + L(\tau) + \int_0^{T-h} K(\theta, \tau)L(\theta)d\theta \right) g + \\ + \lambda \left[2u_1(\tau)(I_m + \mathcal{G}(\tau)) + \Psi(\tau) + \varphi(\tau) + \int_0^{T-h} u^T(\tau)K(\theta, \tau)u_1(\theta) \right] = 0. \end{aligned}$$

The unknown multiplier λ can be determined by the fact that the required control function satisfies the condition $\int_0^T u^T(\tau)u(\tau)d\tau = 1$. Hence, using (20) yields

$$Y + \int_0^{T-h} \left[\left[u_1(\tau) + \frac{1}{\lambda} L(\tau)g \right]^T (I_m + \mathcal{G}(\tau)) \left[u_1(\tau) + \frac{1}{\lambda} L(\tau)g \right] \right] d\tau + \\ + \int_0^{T-h} (\Psi(\tau) + \Phi(\tau))^T \left[u_1(\tau) + \frac{1}{\lambda} L(\tau)g \right] d\tau + \\ + \int_0^{T-h} \int_0^{T-h} \left[u_1(\tau) + \frac{1}{\lambda} L(\tau)g \right]^T (\Psi(\theta, \tau) + \Phi(\theta, \tau)) \left[u_1(\tau) + \frac{1}{\lambda} L(\tau)g \right] d\theta d\tau = 1.$$

This leads to the following equation for λ : $a\frac{1}{\lambda^2} + 2b\frac{1}{\lambda} + c = 0$, where the required coefficients are

$$a = \int_0^{T-h} g^T L(\tau)^T L(\tau) g d\tau + \int_0^{T-h} \int_0^{T-h} g^T L^T(\tau) K(\theta, \tau) L(\theta) d\theta d\tau, \quad (25)$$

$$b = \int_0^{T-h} u_1^T(\tau) L(\tau) g d\tau + \int_0^{T-h} [\Psi(\tau) + \Phi(\tau)] L(\tau) g d\tau + \int_0^{T-h} \int_0^{T-h} g^T L^T(\tau) K(\theta, \tau) u_1(\theta) d\tau d\theta,$$

$$c = Y - 1 + \int_0^{T-h} u_1^T(\tau) (I + \mathcal{G}(\tau)) u_1(\tau) d\tau + 2 \int_0^{T-h} (\Psi(\tau) + \Phi(\tau)) u_1(\tau) d\tau + \\ + \int_0^{T-h} \int_0^{T-h} u_1^T(\tau) [\Phi(\theta, \tau) + \Psi(\theta, \tau)] u_1(\theta) d\tau d\theta. \quad (26)$$

Thus, the required λ is the positive root of this equation, and the optimal control for the given T is defined by the formula (24). Substituting the obtained control function $u_g(t)$ of (24) into (14) and noting theorem 2 we have shown that the optimal control function for the considered integral constraints (17) and the given above assumptions can be presented by the following theorem.

Theorem 3. *Optimal time T^0 for the optimisation problem (1)–(3) with integral constraints (17) is the minimal root of the equality*

$$\max_{\|g\|=1} \left\{ g^T s(T-h, f, g, x_0) + \int_0^{T-h} g^T S(T-h, \tau) u_g(\tau) d\tau \right\} = 0 \quad (27)$$

and the corresponding optimal control is given as

$$u^0(t) = \begin{cases} u_{g^0}(t), & t \in [0, T^0 - h), \\ Nx^0(t-h) + My^0(t-h), & t \in [T^0 - h, T^0], \end{cases} \quad (28)$$

where $u_g(t)$ is given by (24), the vector g^0 realises maximum in (27) and the matrices M, N are defined by formulas (8) and (9).

It should be noted that the proposed method can be applied for solution of constrained optimisation problems with different types of the cost functional. The following example demonstrates the possibility of such application.

Example. The given illustrative example shows the practical steps to realise the analytical calculations based on the obtained results to solve the optimisation problem with an energy cost functional. In order to demonstrate the main stages of these calculations we consider the following equation with control input

$$\dot{x}(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + u(t), \quad t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right], \quad (29)$$

and the initial data

$$x(t) \equiv 0, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right), x(0) = 1. \quad (30)$$

The considered example is a particular case of the system (1)–(3), where

$$A_{-1} = 1, B = 1, h = \frac{\pi}{2}, T = \frac{3\pi}{2}, U = R^1, r = 1$$

and other coefficients are trivial.

Consider the following problem: minimise the cost functional

$$J(u) \rightarrow \min_u, J(u) = \int_0^{3\pi/2} u^2(t) dt \quad (31)$$

over the solutions of (29), (30) subject to the constraints of the form

$$\int_0^T u^T(\tau) u(\tau) d\tau \leq 1, x(t) \equiv 0, t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]. \quad (32)$$

Let $M^0 = J(u^0)$ be the optimal cost value for the problem (29), (30). Consider the following time optimal problem: minimise

$$T \rightarrow \min \quad (33)$$

over the solutions of the control system

$$\dot{x}(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + u(t), t \in [0, T], \quad (34)$$

with the initial conditions (30) and the constraints of the form

$$\int_0^T u^2(t) dt \leq M^0, x(t) \equiv 0, t \in \left[T - \frac{\pi}{2}, T\right]. \quad (35)$$

It is easy to show that the optimal solution for the problem (33)–(35) is $T^0 = \frac{3}{2}\pi$. Thus, the optimisation problems (29)–(32) and (33)–(35) are equivalent. Hence, the proposed method can be used for solution of the given problem (29)–(32).

Step 1: representation of equation solution.

In our case, the function $F(t, \tau)$ from the formula (5) satisfies the equation

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = F\left(t, \tau + \frac{\pi}{2}\right), F(t, \tau) \equiv 0, \tau > t, F(t, t) = 1. \quad (36)$$

It is easy to check that the function

$$F(t, \tau) = \begin{cases} e^{-i(t-\tau)}, & \text{if } \tau \leq t, \\ 0, & \text{if } \tau > 0, \end{cases} \quad (37)$$

is the solution of the equation (36), where i in (37) means imaginary unit ($i^2 = -1$). Thus, the solution of the system (29) with the initial data (30) for $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ is given as

$$x(t) = F(t, 0)x(0) + \int_0^t F(t, \tau)u(\tau) d\tau = e^{-it} + \int_0^t e^{-i(t-\tau)}u(\tau) d\tau = e^{-it} \left(1 + \int_0^t e^{i\tau}u(\tau) d\tau\right). \quad (38)$$

The problem statement says that we exploit the real valued functions. Using the known formula for $e^{i\theta}$ the corresponding real part of $x(t)$ in (38) can be extracted when it is necessary.

Step 2: structure of the optimal control.

In order to determine the optimal control function, we need to calculate the functions $\Phi(\tau, \theta)$, $K(\tau, \theta)$ and other constants γ, a, b, c which are required in (28). Note that in our case $H_1 = 0, H_2 = 1, H_j = 0, V_1 = 1, V_j = 0, M_j = 0, \varphi(\tau) = 0, \psi(t) = \int_{\pi/2}^t e^{-i(t-\tau)}x(0)e^{-i\tau} d\tau = -ie^{it}$. Since the problem is given in real valued terms, we are needed to pick the real parts in the obtained functions $\text{Re}\psi(\tau) = \sin \tau, \text{Im}\psi(\tau) = -\cos \tau$. Further,

$$K(\tau, \theta) = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} F(t, \tau) F(t, \theta) dt = \begin{cases} i \cos \theta \sin \tau - \sin \theta \sin \tau, & \tau \geq \theta, \frac{\pi}{2} \leq \tau, \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \\ i \cos \tau \sin \theta - \sin \tau \sin \theta, & \tau > \theta, \frac{\pi}{2} \leq \tau, \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & 0 \leq \tau, \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Thus, the real part of the function K is $K(\tau, \theta) = -\sin \theta \sin \tau$ for $\frac{\pi}{2} \leq \tau, \theta \leq \frac{3\pi}{2}$. It is easy to see that $K(\tau, \theta) = K(\theta, \tau)$. According to the formula (28), the optimal control function for $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ is represented as follows

$$u_g(t) = v(t) + w(t), \text{ where } w(t) = \frac{1}{\lambda} L(t)g. \quad (39)$$

Step 3: solution of integral equations.

The scalar function $v(t)$, $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, from (39) satisfies the following integral equation

$$2v(\tau) + 2\psi(\tau) + \int_0^{\pi} K(\tau, \theta)v(\theta)d\theta = 0. \quad (40)$$

If $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ then $K(\tau, \theta) \equiv 0$ and hence from (40) it follows that $v(\tau) = -\psi(\tau) = -\sin \tau$, $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. If $\tau \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ then for the unknown function $v(\tau)$ we have the following integral equation

$$\sin \tau \int_0^{\pi} \sin \theta v(\theta) d\theta - v(\tau) = \sin \tau. \quad (41)$$

Denote $\int_0^{\pi} \sin \theta v(\theta) d\theta \doteq W$. Multiplying (41) by $\sin \tau$ and integrating the obtained relation with respect to τ over the interval $[0, \pi]$, we have

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \tau d\tau \int_0^{\pi} \sin \theta v(\theta) d\theta - \int_0^{\pi} \sin \tau v(\tau) d\tau = \int_0^{\pi} \sin^2 \tau d\tau.$$

Noting that $\int_0^{\pi} \sin^2 \tau d\tau = \frac{\pi}{2}$ and $\int_0^{\pi} \sin \tau v(\tau) d\tau = W$ we have the following algebraic equation with respect to the unknown value W : $W \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{2}$ and hence $W = \frac{\pi}{\pi - 2}$. Then from (41) we have $v(\tau) = W \sin \tau - \sin \tau =$

$$= \frac{2}{\pi - 2} \sin \tau \text{ and } v(\tau) = \begin{cases} -\sin \tau, & \tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{2}{\pi - 2} \sin \tau, & \tau \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

The function $L(\tau)$ of (39) satisfies to the following integral equation:

$$2L(\tau) + \int_0^{\pi} K(t, \theta)L(\theta)d\theta + S(\pi, \tau) = 0.$$

$$\text{In our case } S(\pi, \tau) = \begin{cases} -\cos \tau, & \tau \leq \pi, \\ 0, & \tau > \pi. \end{cases}$$

Analogously to $v(\tau)$ it can be shown that the required function is $L(\tau) = \begin{cases} \cos \tau, & \tau \in [0, \pi], \\ 0, & \tau \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$

Hence, the optimal control function is given as $u_g(t) = v(t) + \frac{1}{\lambda}L(t)g$. Here, the parameter λ is determined as the positive solution of the following algebraic equation $a\frac{1}{\lambda^2} + 2b\frac{1}{\lambda} + c = 0$, where

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{2} \int_0^{T-h} S(T-h, \tau)L(\tau)d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 \tau d\tau = \frac{1}{4}\pi, \quad c = \gamma - 1 + \int_0^{T-h} (\psi(\tau) + \varphi(\tau))v(\tau)d\tau = \\ &= \gamma - 1 + \int_0^{\pi/2} \sin \tau 2 \sin \tau d\tau + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \tau \frac{2}{\pi-2} \sin \tau d\tau = \gamma + \frac{\pi-1}{2}, \quad b = 0. \end{aligned}$$

Here, $\gamma = \int_{T-h}^T [Ns(\tau-h, x_0) + Mr(\tau-h)]^T [Ns(\tau-h, x_0) + Mr(\tau-h)] dt$, where the coefficients M, N are given by (9). Since $r(\tau) = 0$, $s(t, x_0) = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-it} e^{it} dt = i$, $\gamma = i$ then the required in (25), (26) parameters are $c = \frac{\pi-1}{2}$, $b = 0$, $a = -\frac{\pi}{4}$. Hence, the required positive root is $\lambda^* = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi-2}}$. Thus, the optimal control function is given as

$$u_g(t) = \begin{cases} \sin t + \frac{g}{\lambda^*} \cos t, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{\pi}{\pi-2} \sin t + \frac{g}{\lambda^*} \cos t, & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ \frac{\pi}{\pi-2} \sin t + 0, & t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Step 4: minimal root of the equality (27).

According to (28), the unknown g is determined as the maximising element in the equality $\max_{\|g\|=1} \mathcal{L}(g, T) = 0$, where $\mathcal{L}(g, T) = gs(T-h, x_0) + \int_0^{T-h} gF(T-h, \tau)u_g(\tau)d\tau$. In our case, we have $\max_{g \neq 0} \left\{ g \cos \pi + \int_0^{\pi} gF(\pi, \tau)u_g(\tau)d\tau \right\} = 0$. After simplifying, we have

$$\begin{aligned} \max_{g \neq 0} \left\{ -g + \int_0^{\pi/2} g(-\cos \tau) \left(\sin \tau + \frac{g}{\lambda^*} \cos \tau \right) d\tau + \int_{\pi/2}^{\pi} g(-\cos \tau) \left(\frac{\pi}{\pi-2} \sin \tau + \frac{g}{\lambda^*} \cos \tau \right) d\tau \right\} = \\ = \max_{g \neq 0} \left\{ g \left(-\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2(\pi-2)} \right) - g^2 \left(\frac{\pi}{2\lambda^*} \right) \right\} = \max_{\|g\|=1} \left\{ -g^2 \sqrt{1 + \frac{2}{\pi}} - g \frac{2\pi-6}{2\pi-4} \right\} = 0. \end{aligned}$$

The maximising element for this equality is $g^0 = \frac{6-2\pi}{2\pi-4} \sqrt{\frac{\pi}{\pi+2}}$. Finally, the optimal control is given as

$$u_g^0(t) = \begin{cases} \sin t + \frac{6-2\pi}{2\pi-4} \sqrt{\frac{2\pi-2}{\pi+2}} \cos t, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{\pi}{\pi-2} \sin t + \frac{6-2\pi}{2\pi-4} \sqrt{\frac{2\pi-2}{\pi+2}} \cos t, & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ \frac{\pi}{\pi-2} \sin t, & t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Conclusion

This work covers only the first attempts to investigate the optimisation problems for the considered hybrid processes, and hence a rich material to be the subject for further work. In particular, our interest is the optimal control problem where the state variables at the final interval $[\alpha, \alpha + h]$ are equal to the pre-assigned functions $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \alpha + h]$ (see, also, [11]). Also, it is worth mentioning here that the approach of the supporting control functions setting described in [12] can be used for the design of the numerical algorithms with good conditioning properties. These problems are subject of ongoing work and will be reported in due course.

References

1. Wang J, He M, Xi J, Yang X. Suboptimal output consensus for time-delayed singular multi-agent systems. *Asian Journal of Control*. 2018;20(11):721–734. DOI: 10.1002/asjc.1592.
2. Hale JK, Lunel SMV. *Introduction to functional differential equations*. New York: Springer-Verlag; 1993. 450 p. (Bloch A, Epstein CL, Goriely A, Greengard L, editors. Applied mathematical sciences; volume 99). DOI: 10.1007/978-1-4612-4342-7.
3. Grigorieva EV, Kaschenko SA. *Asymptotic representation of relaxation oscillations in lasers*. Switzerland: Springer International Publishing; 2017. 230 p. DOI: 10.1007/978-3-319-42860-4.
4. Zhang C, Wang X, Wang C, Zhou W. Synchronization of uncertain complex networks with time-varying node delay and multiple time-varying coupling delays. *Asian Journal of Control*. 2018;20(1):186–195. DOI: 10.1002/asjc.1539.
5. Rogers E, Galkowski K, Owens DH. *Control systems theory and applications for linear repetitive processes*. Berlin: Springer Verlag; 2007. 456 p. (Allgöwer F, Morari M, editors. Lecture notes in control and information sciences; volume 349). DOI: 10.1007/978-3-540-71537-5.
6. Dymkou S, Rogers E, Dymkov M, Galkowski K, Owens DH. Delay systems approach to linear differential repetitive processes. *IFAC Proceedings Volumes*. 2003;36(19):333–338. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)33348-7.
7. Dymkou S, Rogers E, Dymkov M, Galkowski K, Owens DH. An approach to controllability and optimization problems for repetitive processes. In: *Stability and control processes (SCP-2005). Proceedings of international conference, Saint Petersburg, Russia. Volume II*. [S. l.]: Saint Petersburg University; 2005. p. 1504–1516.
8. Dymkou S. Graph and 2-D optimization theory and their application for discrete simulation of gas transportation networks and industrial processes with repetitive operations [dissertation]. Aachen: RWTH; 2006. 147 p.
9. Marchenko VM. Hybrid discrete-continuous systems. II. Controllability and reachability. *Differential Equations*. 2013;49(1):112–125.
10. Gabasov R, Kirillova FM. *The qualitative theory of optimal processes*. New York: M. Dekker; 1976. 640 p.
11. Dymkou S, Dymkov M, Rogers E, Galkowski K. Optimal control of non-stationary differential linear repetitive processes. *Integral Equations and Operator Theory*. 2008;60:201–216.
12. Dymkov M, Rogers E, Dymkou S, Galkowski K. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2008;47(1):396–420. DOI: 10.1137/060668298.

Received by editorial board 06.10.2020.

УДК 517.956

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Впервые получена явная формула единственного и устойчивого классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью в части первой четверти плоскости, где заданы граничное и начальные условия. Доказана корректность первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости. Существование классического решения установлено методом продолжения по параметру с помощью теорем о повышении гладкости сильных решений. Единственность этого решения выведена из энергетического неравенства для сильных решений. Установлена устойчивость решения и получены необходимые и достаточные условия гладкости граничного и начальных данных и три условия их согласования с правой частью уравнения. Для правой части уравнения указаны достаточные требования гладкости.

Ключевые слова: общее телеграфное уравнение; переменные коэффициенты; неявные характеристики; критическая характеристика; смешанная задача; классическое решение.

THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS ON THE HALF-LINE

F. E. LOMAUTSAU^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

For the first time, an explicit formula is obtained for the unique and stable classical solution of the inhomogeneous model telegraph equation with variable velocity in the part of the first quarter of the plane, where the boundary and initial conditions are specified. The correctness of the first mixed problem for the general inhomogeneous telegraph equation in the first quarter of the plane is proved. The existence of a classical solution was established by the continuation method with respect to a parameter using theorems on increasing the smoothness of strong solutions. The uniqueness of this solution is derived from the energy inequality for strong solutions. The stability of the solution is established and necessary and sufficient smoothness conditions of the boundary and initial data and three their matching conditions with the right-hand side of the equation are derived. Sufficient smoothness requirements are indicated for the right-hand side of the equation.

Keywords: general telegraph equation; variable coefficients; implicit characteristics; critical characteristic; mixed problem; classical solution.

Образец цитирования:

Ломовцев Ф.Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:18–38. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38>

For citation:

Lomautsau FE. The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:18–38. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38>

Автор:

Федор Егорович Ломовцев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Author:

Fiodar E. Lomautsau, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics. lomovcev@bsu.by

Введение

В настоящей работе обобщаются результаты кандидатской диссертации С. Н. Барановской [1] на неоднородное телеграфное уравнение в случае полупрямой без периодических продолжений входных данных первой смешанной задачи и переменных коэффициентов уравнения вне области их первоначального задания. Областью задания рассматриваемой задачи служит первая четверть плоскости. Из [1] автором воспроизведена формула Даламбера классического решения первой смешанной задачи для неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью в той части первой четверти, в которой задаются только начальные условия. В представленной работе впервые найдена явная формула единственного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью в другой части первой четверти плоскости, где задаются граничное и начальные условия. Эта формула, естественно, отличается от обычной формулы Даламбера (см. теорему 1). Новая формула вместе с известной формулой Даламбера позволила автору доказать существование классического решения первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости (см. теорему 2) с помощью метода продолжения по параметру и теорем о повышении гладкости сильных обобщенных решений этой смешанной задачи. Единственность классического решения была выведена из энергетического неравенства сильных решений задачи в первой четверти плоскости. По теореме Банаха о замкнутом графике отсюда следует устойчивость такого решения по входным данным (см. теорему 2). Кроме того, в настоящей работе выведены необходимые и достаточные требования гладкости граничного и начальных данных и три условия их согласования с правой частью телеграфного уравнения при ее достаточной гладкости (см. теорему 2). Позже полученные результаты и «метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [2] будут использованы для аналогичной задачи на отрезке.

В диссертации [1] методом продолжений доказано существование классического решения первой смешанной задачи для общего однородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке при условиях на начальные данные, совпадающих с необходимыми. В ней главная идея решения такой задачи в полуполосе плоскости заключалась в сведении ее к задаче Коши в верхней полуплоскости за счет периодических продолжений входных данных и коэффициентов уравнения с полуполосы на верхнюю полуплоскость и применения формулы Даламбера. Однако нет доказательства эквивалентности этих двух краевых задач.

Если для простейшего телеграфного уравнения с потенциалом Дирака в [3; 4] найдены формулы единственных классических и (или) обобщенных решений задачи Коши и некоторых смешанных задач, а в [5] при нулевом потенциале и разрывных коэффициентах действительно получено обобщение формулы Даламбера единственного обобщенного решения задачи Коши, то в [6–14] формулы обобщенных (почти классических) решений смешанных задач так же, как в [1], продолжают считать и называть (обобщенной) формулой Даламбера. Например, в [14] говорится: «В случае нулевого потенциала полученный ряд переходит в обычную формулу Даламбера» [14, с. 124]. Здесь полученный ряд Фурье выражает обобщенное решение некоторой смешанной задачи для простейшего телеграфного уравнения на отрезке. Автор указанной статьи утверждает: «Методом А. П. Хромова построен ряд – обобщенная формула Даламбера» [14, с. 124]. Под методом Хромова понимается модификация метода Фурье в [6; 9; 11] путем использования резольвентного метода, идеи Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и идеи Эйлера о расходящихся рядах. Впервые формула Даламбера была выведена Л. Эйлером в 1748 г. В настоящей работе решение смешанной задачи с полуразностью значений начального смещения (см. теорему 1, функцию (12)) не соответствует обычной формуле Даламбера.

Одномерное волновое уравнение с переменной скоростью $a(x, t)$

В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ изучается смешанная задача

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}u \equiv u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) - a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t(x, t) - \\ - a(x, t)a_x(x, t)u_x(x, t) = \hat{f}(x, t), (x, t) \in \dot{G}_\infty, \end{aligned} \quad (1)$$

$$l_0u \equiv u(x, 0) = \varphi(x), l_1u \equiv u_t(x, 0) = \psi(x), x > 0, \quad (2)$$

$$\mathcal{G}u \equiv u(0, t) = \mu(t), t > 0, \quad (3)$$

где \hat{f} , φ , ψ , μ – заданные вещественные функции своих переменных x и t ; коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, и $a \in C^2(G_\infty)$. Число нижних индексов функций соответствует порядку

их частных производных. Здесь $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$, $R =]-\infty, +\infty[$, и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

которые имеют общие интегралы $g_i(x, t) = C_i$, $C_i \in R$, $i = 1, 2$. Если коэффициент a строго положителен, т. е. $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, то переменная t на характеристиках $g_1(x, t) = C_1$, $C_1 \in R$, строго убывает, а на характеристиках $g_2(x, t) = C_2$, $C_2 \in R$, строго возрастает вместе с увеличением x . Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x, t) = C_i$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, обладают строго монотонными обратными функциями $x = h_i\{y_i, t\}$, $t \geq 0$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$, $x \geq 0$, $i = 1, 2$. По определению обратных отображений они удовлетворяют следующим тождествам обращения:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, \quad \forall y_i, \quad h_i\{g_i(x, t), t\} = x, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \quad \forall y_i, \quad h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

В правых частях тождеств (5)–(7) вместе со взаимобратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, даже если в левых частях указанных тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, то функции $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2$ по x, t, y_i , $i = 1, 2$ [15].

В случае $a(x, t) = a = \text{const} > 0$ ими являются функции $g_1(x, t) = x + at$, $g_2(x, t) = x - at$, $h_1\{y_1, t\} = y_1 - at$, $h_2\{y_2, t\} = y_2 + at$, $h^{(1)}[x, y_1] = \frac{y_1 - x}{a}$, $h^{(2)}[x, y_2] = \frac{x - y_2}{a}$.

Определение 1. Классическим решением задачи (1)–(3) называется функция $u \in C^2(G_\infty)$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле в \dot{G}_∞ , а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле значений соответствующих пределов функции $u(\dot{x}, \dot{t})$ или ее производной $u_t(\dot{x}, \dot{t})$ по t для внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$, стремящихся к граничным точкам (x, t) , указанным в (2) и (3).

Найдем в явном виде классическое решение и критерий (необходимые и достаточные условия) корректности (по Адамару – существования, единственности решения и его устойчивости по исходным данным $\hat{f}, \varphi, \psi, \mu$) первой смешанной задачи (1)–(3) на полупрямой.

Из постановки первой смешанной задачи (1)–(3) и определения 1 ее классических решений вытекают очевидные необходимые требования гладкости:

$$\hat{f} \in C(G_\infty), \quad \varphi \in C^2[0, +\infty[, \quad \psi \in C^1[0, +\infty[, \quad \mu \in C^2[0, +\infty[. \quad (8)$$

Ниже будут установлены дополнительные и только достаточные требования гладкости на \hat{f} . Полагая $t = 0$ в граничном режиме (3), его первой и второй производных по t соответственно, с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $x = t = 0$ выводим необходимые условия согласования:

$$\varphi(0) = \mu(0), \quad \psi(0) = \mu'(0), \quad (9)$$

$$\hat{S} \equiv \hat{f}(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) + a^{-1}(0, 0)a_t(0, 0)\psi(0) + a(0, 0)a_x(0, 0)\varphi'(0) = \mu''(0).$$

Количество штрихов над функциями одной переменной соответствует порядку их обыкновенных производных по этим переменным.

Пусть критическая характеристика $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ делит четверть плоскости G_∞ на два множества: $G_- = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) > g_2(0, 0)\}$ и $G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) \leq g_2(0, 0)\}$.

Теорема 1. Пусть коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, и $a \in C^2(G_\infty)$. Тогда для существования единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (1)–(3) в \dot{G}_∞ достаточно требований гладкости (8),

$$H_i(x, t) \equiv \int_0^t \frac{\hat{f}(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), i=1, 2, \quad (10)$$

и условий согласования (9), а также необходимо выполнение требований гладкости (8) и условий согласования (9). Этим классическим решением задачи (1)–(3) служит функция

$$\hat{u}_-(x, t) = \frac{\varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}) + \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\})}{2} + \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{\Psi(v)}{a(v, 0)} dv + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\hat{f}(s, \tau)}{a(s, \tau)} ds, (x, t) \in G_-, \quad (11)$$

$$\hat{u}_+(x, t) = \frac{\varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\}) - \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{\Psi(v)}{a(v, 0)} dv + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\hat{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds + \mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)]) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{h^{(2)}[0, g_2(x, t)]} d\tau \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, \tau\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tau\}} \frac{\hat{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds, (x, t) \in G_+. \quad (12)$$

Доказательство. Достаточность. Вычислим общий интеграл классических решений уравнения (1) в G_∞ . Заменой

$$\xi = g_1(x, t), \eta = g_2(x, t) \quad (13)$$

с невырожденным якобианом $J(x, t) = \xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x \neq 0$ в G_∞ , потому что $a(x, t) \geq a_0 > 0$ в G_∞ , уравнение (1) приводится к виду

$$\left[(\xi_t)^2 - a^2 (\xi_x)^2 \right] \tilde{u}_{\xi\xi} + 2aJ(x, t) \tilde{u}_{\xi\eta} + \left[(\eta_t)^2 - a^2 (\eta_x)^2 \right] \tilde{u}_{\eta\eta} + \\ + \left[\xi_{tt} - a^2 \xi_{xx} - a^{-1} a_t \xi_t - a a_x \xi_x \right] \tilde{u}_\xi + \left[\eta_{tt} - a^2 \eta_{xx} - a^{-1} a_t \eta_t - a a_x \eta_x \right] \tilde{u}_\eta = \\ = \tilde{f}(\xi, \eta) = \hat{f}(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) \quad (14)$$

относительно функции $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) \in C^2(\tilde{G}_\infty)$, где \tilde{G}_∞ – образ множества G_∞ при замене переменных (13). Согласно (4) полные дифференциалы равны нулю:

$$dg_i = (g_i)_x dx + (g_i)_t dt = \left[(g_i)_t + (-1)^i a(x, t) (g_i)_x \right] dt \equiv 0, (x, t) \in G_\infty, i=1, 2,$$

и, следовательно, ввиду (13) имеем соотношения

$$(g_i)_t \equiv (-1)^{i+1} a(x, t) (g_i)_x, (x, t) \in G_\infty, i=1, 2, \quad (15)$$

$$\xi_t - a(x, t) \xi_x = 0, \eta_t + a(x, t) \eta_x = 0, (x, t) \in G_\infty. \quad (16)$$

Каждое из уравнений (16) однократно дифференцируем по t и x , результаты дифференцирования по t складываем с произведением на коэффициент a результатов дифференцирования по x , в полученных суммах соответственно применяем эти же уравнения (16) и получаем

$$\xi_{tt} - a^2 \xi_{xx} = a^{-1} a_t \xi_t + a a_x \xi_x, \eta_{tt} - a^2 \eta_{xx} = a^{-1} a_t \eta_t + a a_x \eta_x, (x, t) \in G_\infty. \quad (17)$$

В силу тождеств (16), (17) уравнение (14) становится уравнением

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{\hat{f}(\xi, \eta)}{2a(x, t)J(x, t)}, (\xi, \eta) \in \tilde{G}_\infty. \quad (18)$$

Только ради упрощения изложения для $t \geq 0$ функции a, \hat{f} продолжаем чётно по x с G_∞ на все $x < 0$. В плоскости Ost берем криволинейный характеристический треугольник ΔMPQ с любой вершиной $M(x, t) \in \tilde{G}_\infty$ и вершинами основания $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$ и $Q(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)$ – точками пересечения характеристик $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$ и $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$ с осью Os . Интегрируем уравнение (18) по $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ из \tilde{G}_∞ – образу ΔMPQ из G_∞ при переменных (s, τ) , делаем обратную замену переменных к (13), двойной интеграл по ΔMPQ сводим к повторным интегралам и для уравнения (1) в G_∞ находим общий интеграл

$$u(x, t) = \tilde{f}_1(g_1(x, t)) + \tilde{f}_2(g_2(x, t)) + F(x, t), (x, t) \in G_\infty, \quad (19)$$

где любые дважды непрерывно дифференцируемые функции \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 переменных ξ, η [16]

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0, 0)), \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0, 0)), \quad (20)$$

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta MPQ} \frac{\hat{f}(|x|, t)}{a(|x|, t)} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\hat{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds. \quad (21)$$

Ниже будет доказано, что функция $F \in C^2(G_\infty)$ благодаря (10) для $\hat{f} \in C(G_\infty)$ из (8).

Вычислим формулу пока формального решения \hat{u}_- в G_- исходной смешанной задачи. Решением задачи (1)–(3) в G_- служит решение задачи Коши (1), (2). Подставляя общий интеграл (19) в начальные условия (2), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(g_1(x, 0)) + \tilde{f}_2(g_2(x, 0)) = \varphi(x), \\ \left[\frac{\partial \tilde{f}_1(g_1(x, t))}{\partial g_1} (g_1)_t \right]_{t=0} + \left[\frac{\partial \tilde{f}_2(g_2(x, t))}{\partial g_2} (g_2)_t \right]_{t=0} = \psi(x), x \geq 0, \end{cases} \quad (22)$$

так как производная $F_t(x, t)|_{t=0} = 0$ благодаря свойству $h_i\{g_i(x, t), t\} = x, x \geq 0, i = 1, 2$, из (5). Поскольку $(g_1)_t = \xi_t = a(x, t)\xi_x$ и $(g_2)_t = \eta_t = -a(x, t)\eta_x$ согласно (13), то система (22) равна системе

$$\begin{cases} [\tilde{f}_1(\xi) + \tilde{f}_2(\eta)]_{t=0} = \varphi(x), \\ \left[(\tilde{f}_1(\xi))_\xi \xi_x - (\tilde{f}_2(\eta))_\eta \eta_x \right]_{t=0} = \left[(\tilde{f}_1(\xi))_x - (\tilde{f}_2(\eta))_x \right]_{t=0} = \frac{\psi(x)}{a(x, 0)}. \end{cases}$$

Используя коммутруемость операции дифференцирования по x и взятия следа при $t = 0$, интегрируем по x от 0 до x второе уравнение этой системы и в результате имеем

$$[\tilde{f}_1(\xi) - \tilde{f}_2(\eta)]_{t=0} = \int_0^x \frac{\psi(v)}{a(v, 0)} dv + C, C \in R.$$

Если это уравнение сначала прибавить к первому уравнению последней системы и потом вычесть из него, то при $y_i = g_i(x, 0), i = 1, 2$, из (13) в силу вторых тождеств из (5) при $i = 1, 2$ последовательно находим решения системы (22):

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(y_1) &= \frac{\varphi(h_1\{y_1, 0\})}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{h_1\{y_1, 0\}} \frac{\psi(v)}{a(v, 0)} dv + C, \\ \tilde{f}_2(y_2) &= \frac{\varphi(h_2\{y_2, 0\})}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{h_2\{y_2, 0\}} \frac{\psi(v)}{a(v, 0)} dv - C. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляем функции (23) при $y_i = g_i(x, t)$, $i = 1, 2$, в общий интеграл (19) и получаем единственное формальное решение \hat{u}_- вида (11) из теоремы 1.

Ищем формальное решение \hat{u}_+ смешанной задачи (1)–(3) на G_+ как решение задачи Пикара для уравнения (1) при равенстве функций видов (19) и (11) на характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ и граничном режиме (3) при $x = 0$. Нам известно, что неявная функция $y_2 = g_2(x, t)$ при $y_2 = g_2(0, 0)$ имеет обратную функцию $x = h_2\{g_2(0, 0), t\}$ при $y_2 = g_2(0, 0)$. Поэтому на критической характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ разность функции (19) и непрерывного продолжения функции (11) с G_- на эту характеристику равна

$$\begin{aligned} & \left[u - \hat{u}_- \right]_{g_2(x,t)=g_2(0,0)} = \tilde{f}_1(g_1(x, t))_{x=h_2\{g_2(0,0),t\}} + \tilde{f}_2(g_2(0, 0)) - \\ & - \frac{\varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\})_{x=h_2\{g_2(0,0),t\}} + \varphi(h_2\{g_2(0, 0), 0\})}{2} - \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(0,0),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}_{x=h_2\{g_2(0,0),t\}}} \frac{\Psi(v)}{a(v, 0)} dv = \\ & = \tilde{f}_1(g_1(h_2\{g_2(0, 0), t\}, t)) - \frac{\varphi(h_1\{g_1(h_2\{g_2(0, 0), t\}, t), 0\}) + \varphi(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{h_1\{g_1(h_2\{g_2(0,0),t\},t),0\}} \frac{\Psi(v)}{a(v, 0)} dv = 0, \end{aligned}$$

так как $\tilde{f}_2(g_2(0, 0)) = 0$ ввиду (20) и $h_2\{g_2(0, 0), 0\} = 0$ в силу второго тождества из (5) при $i = 2$, $x = 0$.

Отсюда при $z_1 = g_1(h_2\{g_2(0, 0), t\}, t)$ находим первую функцию:

$$\tilde{f}_1(z_1) = \frac{\varphi(h_1\{z_1, 0\}) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{h_1\{z_1, 0\}} \frac{\Psi(v)}{a(v, 0)} dv. \quad (24)$$

Подставляем общий интеграл (19) в граничный режим (3):

$$\tilde{f}_1(g_1(0, t)) + \tilde{f}_2(g_2(0, t)) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\tau\}} \frac{\hat{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds = \mu(t), \quad t \geq 0.$$

Отсюда и из выражения (24) выводим вторую функцию:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(g_2(0, t)) &= \mu(t) - \frac{\varphi(h_1\{g_1(0, t), 0\}) + \varphi(0)}{2} - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{h_1\{g_1(0,t),0\}} \frac{\Psi(v)}{a(v, 0)} dv - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\tau\}} \frac{\hat{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds. \end{aligned}$$

Здесь, полагая $z_2 = g_2(0, t)$ и тем самым $t = h^{(2)}[0, z_2]$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(z_2) &= \mu(h^{(2)}[0, z_2]) - \frac{\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, z_2]), 0\}) + \varphi(0)}{2} - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, z_2]), 0\}} \frac{\Psi(v)}{a(v, 0)} dv - \frac{1}{2} \int_0^{h^{(2)}[0, z_2]} d\tau \int_{h_2\{z_2, \tau\}}^{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, z_2]), \tau\}} \frac{\hat{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds, \end{aligned} \quad (25)$$

так как $g_2(0, h^{(2)}[0, z_2]) = z_2$ ввиду первого тождества из (6) при $i = 2$, $x = 0$. Подставляем функции (24) при $z_1 = g_1(x, t)$ и (25) при $z_2 = g_2(x, t)$ в общий интеграл (19) и получаем формальное решение \hat{u}_+ вида (12) на G_+ .

Сначала покажем дважды непрерывную дифференцируемость функций u_- на G_- и u_+ на G_+ . Гладкости $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2, i = 1, 2$, и гладкости на φ, ψ, μ из (8) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости всех слагаемых, которые их содержат в функциях (11) на G_- и (12) на G_+ . Убедимся в том, что гладкости $\hat{f} \in C(G_\infty)$ из (8) и гладкости (10) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости остальных слагаемых функций (11) на G_- и (12) на G_+ .

Вычислим производную от F вдоль характеристик $g_i(x, t) = C_i, i = 1, 2$. Поскольку градиенты $\overline{\text{grad}} g_i(x, t) = \{(g_i)_x, (g_i)_t\}$ направлены по нормальям в точках этих характеристик, то векторы $\bar{v}_i = \{-(g_i)_t, (g_i)_x\}$ ориентированы вдоль характеристик $g_i(x, t) = C_i, i = 1, 2$, потому что их скалярные произведения $(\overline{\text{grad}} g_i(x, t), \bar{v}_i) = -(g_i)_x (g_i)_t + (g_i)_t (g_i)_x = 0, (x, t) \in G_\infty, i = 1, 2$. Ввиду тождеств из (5) первые частные производные от функции F вида (21) равны

$$F_t = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{\hat{f}(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} - \frac{\hat{f}(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

$$F_x = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{\hat{f}(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - \frac{\hat{f}(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau.$$

Поэтому производными от F вдоль характеристик служат функции

$$(g_1)_x F_t - (g_1)_t F_x = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\hat{f}(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \left[(g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} - (g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

$$(g_2)_x F_t - (g_2)_t F_x = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\hat{f}(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \left[(g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} - (g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau,$$

так как для частных производных от функций $h_i = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$ справедливы соотношения

$$(g_i)_t \frac{\partial h_i\{\cdot\}}{\partial x} - (g_i)_x \frac{\partial h_i\{\cdot\}}{\partial t} = (g_i)_t \frac{\partial h_i\{\cdot\}}{\partial g_i} (g_i)_x - (g_i)_x \frac{\partial h_i\{\cdot\}}{\partial g_i} (g_i)_t \equiv 0, i = 1, 2,$$

где символом $\{\cdot\}$ обозначены указанные выше переменные функций $h_i = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$.

Более того, согласно замене (13) этими производными являются функции

$$K_2(x, t) \equiv (g_1)_x F_t - (g_1)_t F_x = -\frac{1}{2} J(x, t) \int_0^t \frac{\hat{f}(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial g_2} d\tau, \quad (26)$$

$$K_1(x, t) \equiv (g_2)_x F_t - (g_2)_t F_x = -\frac{1}{2} J(x, t) \int_0^t \frac{\hat{f}(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1} d\tau. \quad (27)$$

Из формул (26) и (27) выводим, что если $\hat{f} \in C(G_\infty)$ и для H_i верны включения (10), то

$$F_t(x, t) = \frac{[\eta_t K_2(x, t) - \xi_t K_1(x, t)]}{J(x, t)} \in C^1(G_\infty),$$

$$F_x(x, t) = \frac{[\eta_x K_2(x, t) - \xi_x K_1(x, t)]}{J(x, t)} \in C^1(G_\infty),$$

так как якобиан $J(x, t) \neq 0$ в G_∞ и $J \in C^2(G_\infty)$. Эти равенства и включения подтверждают дважды непрерывную дифференцируемость функции F вида (21) в формулах (11) и (12) на G_∞ .

Благодаря гладкости функций $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2, i=1, 2$, для доказательства дважды непрерывной дифференцируемости на G_+ последнего повторного интеграла из (12) достаточно убедиться в непрерывной дифференцируемости производной по z_2 от последнего интеграла функции $\tilde{f}_2(z_2)$ из (25), который без коэффициента $-\frac{1}{2}$ ниже обозначен через $F_0(z_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(z_2)}{\partial z_2} = & \frac{\partial h^{(2)}[0, z_2]}{\partial z_2} \int_{h_2\{z_2, h^{(2)}[0, z_2]\}}^{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, z_2]), h^{(2)}[0, z_2]\}} \frac{\hat{f}(|s|, h^{(2)}[0, z_2])}{a(|s|, h^{(2)}[0, z_2])} ds + \\ & + \int_0^{h^{(2)}[0, z_2]} \left[\frac{\hat{f}(|h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, z_2]), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, z_2]), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial z_2} - \frac{\hat{f}(|h_2\{z_2, \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{z_2, \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{\cdot\}}{\partial z_2} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь первый интеграл равен нулю, поскольку пределы интегрирования $h_1\{g_1(0, t), t\} = 0$ и $h_2\{z_2, h^{(2)}[0, z_2]\} = 0$ ввиду (5) при $i=1, t=h^{(2)}[0, z_2]$ и (7) при $i=2, y_2=z_2$ соответственно. Производная (28) при $\tilde{t}=h^{(2)}[0, z_2]$ равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(z_2)}{\partial z_2} = & \frac{\partial g_1(0, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial z_2} \int_0^{\tilde{t}} \frac{\hat{f}(|h_1\{g_1(0, \tilde{t}), \tau\}|, \tau)}{a(|h_1\{g_1(0, \tilde{t}), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(0, \tilde{t}), \tau\}}{\partial g_1} d\tau - \\ & - \int_0^{\tilde{t}} \frac{\hat{f}(|h_2\{g_2(0, \tilde{t}), \tau\}|, \tau)}{a(|h_2\{g_2(0, \tilde{t}), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(0, \tilde{t}), \tau\}}{\partial g_2} d\tau = \frac{\partial g_1(0, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial z_2} H_1(0, \tilde{t}) - H_2(0, \tilde{t}) \in C^1[0, +\infty[, \end{aligned}$$

потому что если $\tilde{t}=h^{(2)}[0, z_2]$, то $z_2=g_2(0, h^{(2)}[0, z_2])=g_2(0, \tilde{t})$ из (6) при $i=2, y_2=z_2$. Таким образом, непрерывная дифференцируемость производной $\frac{\partial F_0}{\partial z_2}$ по \tilde{t} и, значит, по z_2 следует из интегральных требований гладкости (10) при $x=0$.

Осталось проверить дважды непрерывную дифференцируемость функций (11) в замыкании $\overline{G_-}$ множества G_- и (12) в G_+ на общей характеристике $g_2(x, t)=g_2(0, 0)$. Первое условие согласования из (9) обеспечивает их непрерывность на этой характеристике:

$$\begin{aligned} \left[\hat{u}_- - \hat{u}_+ \right]_{g_2(x, t)=g_2(0, 0)} = & \frac{\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(0, 0)]\}, 0) + \varphi(h_2\{g_2(0, 0), 0\})}{2} - \\ & - \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(0, 0)]\}, 0}^{h_2\{g_2(0, 0), 0\}} \frac{\Psi(v)}{a(v, 0)} dv - \mu(h^{(2)}[0, g_2(0, 0)]) - \frac{1}{2} F_0(z_2) \Big|_{z_2=g_2(0, 0)} = \varphi(0) - \mu(0), \end{aligned} \quad (29)$$

так как $h^{(2)}[0, g_2(0, 0)]=0$ в (6) при $i=2, t=0$ и $h_i[g_i(0, 0), 0]=0$ в (5) при $i=1, 2, x=0$.

Вычисляем первую производную по t разности функций (11) в $\overline{G_-}$ и (12) в G_+ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_-}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}_+}{\partial t} = & \frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{dh_2} \frac{\partial h_2\{\cdot\}}{\partial t} + \frac{d\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)}{dh_1} \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial t} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{\Psi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{a(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)} \frac{\partial h_2\{\cdot\}}{\partial t} - \frac{\Psi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)}{a(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)} \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial t} \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{d\mu\left(h^{(2)}\left[0, g_2(x, t)\right]\right)}{dh^{(2)}} \frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[H_1(0, \tilde{t}) \frac{\partial g_1(0, \tilde{t})}{\partial t} - H_2(0, \tilde{t}) \frac{\partial g_2(0, \tilde{t})}{\partial t} \right], \quad x, t \geq 0, \quad (30)$$

где старым символом $\{\bullet\}$ обозначены переменные функции $h_1 = h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}$, а новым символом $[\bullet]$ – переменные функции $h^{(2)} = h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$.

Дифференцируем один раз по t как сложную функцию, используем дифференциальные уравнения характеристик (15) и приходим к тождествам

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), 0\}}{\partial t} &= \frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial g_i}(g_i)_t = (-1)^{i+1} a(x, t) \frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial g_i}(g_i)_x = \\ &= (-1)^{i+1} a(x, t) \frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial x}, \quad x, t \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (31)$$

В силу вторых формул обращения из (5) при $i = 1, 2, t = 0$ находим

$$\left. \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), 0\}}{\partial x} \right|_{t=0} = 1, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

и, следовательно, из (31) имеем

$$\left. \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), 0\}}{\partial t} \right|_{t=0} = (-1)^{i+1} a(x, 0), \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (33)$$

так как в правых частях тождеств (31) взятие следа при $t = 0$ перестановочно с дифференцированием по x . Ввиду второй формулы обращения из (6) при $i = 2, x = 0$ из $h^{(2)}[0, g_2(0, t)] = t$ и равенства (33) при $i = 1, x = 0$ выводим

$$\left. \frac{\partial h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial t} \right|_{x=0} = 1, \quad t \geq 0, \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}}{\partial t} \right|_{x=t=0} = a(0, 0), \quad (35)$$

потому что здесь взятие следа при $x = 0$ перестановочно с дифференцированием по t .

В тождестве (30) полагаем $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$, т. е. $x = t = 0$, и на основе значений (33) при $i = 2$, (34), (35), а также второго условия согласования из (9) приходим к равенству

$$\left[\frac{\partial u_-}{\partial t} - \frac{\partial u_+}{\partial t} \right]_{g_2(x, t) = g_2(0, 0)} = \Psi(0) - \mu'(0) = 0, \quad (36)$$

так как $\tilde{t} = h^{(2)}[0, g_2(0, 0)] = 0$ ввиду вторых формул обращения из (6) для $i = 2, x = t = 0$ и $h_i\{g_i(0, 0), 0\} = 0$ ввиду вторых формул обращения из (5) для $i = 1, 2, x = t = 0$.

Находим первую производную по x разности функций (11) в $\overline{G_-}$ и (12) в G_+ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_-}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_+}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi\left(h_2\{g_2(x, t), 0\}\right)}{dh_2} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial x} + \frac{d\varphi\left(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}\right)}{dh_1} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial x} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{\Psi\left(h_2\{g_2(x, t), 0\}\right)}{a\left(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0\right)} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial x} - \frac{\Psi\left(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}\right)}{a\left(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0\right)} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial x} \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{d\mu\left(h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\right)}{dh^{(2)}} \frac{\partial h^{(2)}[\cdot]}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[H_1(0, \tilde{t}) \frac{\partial g_1(0, \tilde{t})}{\partial x} - H_2(0, \tilde{t}) \frac{\partial g_2(0, \tilde{t})}{\partial x} \right], \quad x, t \geq 0. \quad (37)$$

След при $x = 0$ левой части равенства (32) для $i = 1$ нельзя внести под производную по x от h_1 и, значит, невозможно получить аналог формулы (35) для производной по x от h_1 из (32) для $i = 1$. Поэтому берем первую производную по x от более сложной функции, чем функция $h_1 = h_1\{g_1(x, t), 0\}$, и благодаря уравнению характеристики из (15) для $i = 2$ находим

$$\frac{\partial h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}}{\partial x} = \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial g_2}(g_2)_x = -\frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial g_2} \frac{(g_2)_t}{a(x, t)} = -\frac{1}{a(x, t)} \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial t}, \quad x, t \geq 0. \quad (38)$$

Из тождества (38) при $x = t = 0$ с помощью равенства (34) имеем

$$\left. \frac{\partial h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}}{\partial x} \right|_{x=t=0} = -1. \quad (39)$$

Аналогичное однократное дифференцирование по x дает тождество

$$\frac{\partial h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial x} = \frac{\partial h^{(2)}[\cdot]}{\partial g_2}(g_2)_x = -\frac{\partial h^{(2)}[\cdot]}{\partial g_2} \frac{(g_2)_t}{a(x, t)} = -\frac{1}{a(x, t)} \frac{\partial h^{(2)}[\cdot]}{\partial t}, \quad x, t \geq 0. \quad (40)$$

Согласно равенству (34) из тождества (40) при $x = 0$ находим

$$\left. \frac{\partial h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{a(0, t)}, \quad t \geq 0. \quad (41)$$

С помощью соотношений (32) при $i = 2$, (39), (41) и второго условия согласования в (9) из тождества (37) для $x = t = 0$ аналогично формуле (36) получаем

$$\left[\frac{\partial \hat{u}_-}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_+}{\partial x} \right]_{g_2(x, t) = g_2(0, 0)} = \frac{\mu'(0) - \psi(0)}{a(0, 0)} = 0. \quad (42)$$

Дифференцируем еще раз по t выражение (30) и для всех $x, t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 \varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{dh_2^2} \left(\frac{\partial h_2\{\cdot\}}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})}{dh_1^2} \left(\frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial t} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{dh_2} \frac{\partial^2 h_2\{\cdot\}}{\partial t^2} + \frac{d\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})}{dh_1} \frac{\partial^2 h_1\{\cdot\}}{\partial t^2} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\psi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{a(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)} \right)_t \frac{\partial h_2\{\cdot\}}{\partial t} - \left(\frac{\psi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})}{a(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)} \right)_t \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial t} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left[\frac{\Psi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{a(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)} \frac{\partial^2 h_2\{\cdot\}}{\partial t^2} - \frac{\Psi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})}{a(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)} \frac{\partial^2 h_1\{\cdot\}}{\partial t^2} \right] - \\
 & - \frac{d^2 \mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])}{dh^{(2)2}} \left(\frac{\partial h^{(2)}[\cdot]}{\partial t} \right)^2 - \frac{d\mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])}{dh^{(2)}} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\cdot]}{\partial t^2} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[H_1(0, \tilde{t}) \frac{\partial^2 g_1(0, \tilde{t})}{\partial t^2} - H_2(0, \tilde{t}) \frac{\partial^2 g_2(0, \tilde{t})}{\partial t^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H_1(0, \tilde{t})}{\partial t} \frac{\partial g_1(0, \tilde{t})}{\partial t} - \frac{\partial H_2(0, \tilde{t})}{\partial t} \frac{\partial g_2(0, \tilde{t})}{\partial t} \right]. \quad (43)
 \end{aligned}$$

Первая производная по t от левой и правой частей тождества (31) равна

$$\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x, t), 0\}}{\partial t^2} = (-1)^{i+1} \left[a_t(x, t) \frac{\partial h_i\{\cdot\}}{\partial x} + a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h_i\{\cdot\}}{\partial t} \right) \right], \quad x, t \geq 0, i = 1, 2,$$

где мы поменяли порядок следования частных производных по x и t . Здесь первые производные от h_i по t заменяем правыми частями тождеств (31) и для $x, t \geq 0$ имеем тождества

$$\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x, t), 0\}}{\partial t^2} = (-1)^{i+1} \left[a_t(x, t) \frac{\partial h_i\{\cdot\}}{\partial x} + (-1)^{i+1} a(x, t) \left(a_x(x, t) \frac{\partial h_i\{\cdot\}}{\partial x} + a(x, t) \frac{\partial^2 h_i\{\cdot\}}{\partial x^2} \right) \right], \quad i = 1, 2,$$

в которых используем равенства (32) с $t = 0$ и приходим к равенствам

$$\left. \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x, t), 0\}}{\partial t^2} \right|_{t=0} = (-1)^{i+1} \left[a_t(x, 0) + (-1)^{i+1} a(x, 0) a_x(x, 0) \right], \quad x \geq 0, i = 1, 2. \quad (44)$$

Поскольку в левой части этих равенств след при $x = 0$ и вторая производная по t перестановочны, то так же, как при выводе (35), из (44) при $i = 1, x = 0, t = h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$ получаем

$$\left. \frac{\partial^2 h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}}{\partial t^2} \right|_{x=t=0} = a_t(0, 0) + a(0, 0) a_x(0, 0). \quad (45)$$

Ниже нам понадобятся выражения следующих производных из (43):

$$\left(\frac{\Psi(h_i\{g_i(x, t), 0\})}{a(h_i\{g_i(x, t), 0\}, 0)} \right)_t = \frac{\left[\frac{d\Psi(\cdot)}{dh_i} a(\cdot) - \Psi(\cdot) \frac{da(\cdot)}{dh_i} \right] \frac{dh_i\{\cdot\}}{dt}}{a^2(\cdot)}, \quad x, t \geq 0, i = 1, 2, \quad (46)$$

где символ (\cdot) у Ψ и a означает переменные $h_i\{g_i(x, t), 0\}$ и $h_i\{g_i(x, t), 0\}, 0$ соответственно,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_i(0, \tilde{t})}{\partial t} &= \frac{\hat{f}(0, \tilde{t})}{a(0, \tilde{t})} \frac{\partial h_i\{g_i(0, \tilde{t}), \tilde{t}\}}{\partial g_i} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}, \quad \tilde{t} = h^{(2)}[0, g_2(x, t)], \quad x, t \geq 0, i = 1, 2, \\
 & \left. \frac{\partial H_i(0, \tilde{t})}{\partial t} \frac{\partial g_i(0, \tilde{t})}{\partial t} \right|_{x=t=0} = \\
 & = \left. \frac{\hat{f}(0, \tilde{t})}{a(0, \tilde{t})} \frac{\partial h_i\{g_i(0, \tilde{t}), \tilde{t}\}}{\partial t} \frac{\partial h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial t} \right|_{x=t=0} = (-1)^{i+1} \hat{f}(0, 0), \quad i = 1, 2,
 \end{aligned} \quad (47)$$

благодаря значениям (33) для $i = 2$, (34) и (35) для $i = 1$.

Итак, в тождестве (43) полагаем $x = t = 0$ и в силу значений (34), (35), (44), (46), (47), а также третьего условия согласования из (9) по аналогии с (36) имеем

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial t^2} \right]_{g_2(x,t)=g_2(0,0)} = \hat{S} - \mu''(0) = 0. \quad (48)$$

Дифференцируем второй раз по x выражение (37) и для всех $x, t \geq 0$ находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial x^2} = & \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 \varphi(h_2\{g_2(x,t), 0\})}{dh_2^2} \left(\frac{\partial h_2\{\cdot\}}{\partial x} \right)^2 + \frac{d^2 \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0)}{dh_1^2} \left(\frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi(h_2\{g_2(x,t), 0\})}{dh_2} \frac{\partial^2 h_2\{\cdot\}}{\partial x^2} + \frac{d\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0)}{dh_1} \frac{\partial^2 h_1\{\cdot\}}{\partial x^2} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\psi(h_2\{g_2(x,t), 0\})}{a(h_2\{g_2(x,t), 0\}, 0)} \right)_x \frac{\partial h_2\{\cdot\}}{\partial x} - \left(\frac{\psi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0)}{a(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0)} \right)_x \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial x} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{\psi(h_2\{g_2(x,t), 0\})}{a(h_2\{g_2(x,t), 0\}, 0)} \frac{\partial^2 h_2\{\cdot\}}{\partial x^2} - \frac{\psi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0)}{a(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0)} \frac{\partial^2 h_1\{\cdot\}}{\partial x^2} \right] - \\ & - \frac{d^2 \mu(h^{(2)}[0, g_2(x,t)])}{dh^{(2)2}} \left(\frac{\partial h^{(2)}[\cdot]}{\partial x} \right)^2 - \frac{d\mu(h^{(2)}[0, g_2(x,t)])}{dh^{(2)}} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\cdot]}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1}{2} \left[H_1(0, \tilde{t}) \frac{\partial^2 g_1(0, \tilde{t})}{\partial x^2} - H_2(0, \tilde{t}) \frac{\partial^2 g_2(0, \tilde{t})}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H_1(0, \tilde{t})}{\partial x} \frac{\partial g_1(0, \tilde{t})}{\partial x} - \frac{\partial H_2(0, \tilde{t})}{\partial x} \frac{\partial g_2(0, \tilde{t})}{\partial x} \right]. \quad (49) \end{aligned}$$

Дифференцирование еще раз по x в левой части тождества (39) под знаком следа при $x = 0$ неверно, так как эти операции не коммутируют. Первые производные по t и x от тождества (38) равны

$$\frac{\partial^2 h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0\}}{\partial t \partial x} = \frac{a_t(x,t)}{a^2(x,t)} \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial t} - \frac{1}{a(x,t)} \frac{\partial^2 h_1\{\cdot\}}{\partial t^2}, \quad x, t \geq 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0\}}{\partial x^2} = \frac{a_x(x,t)}{a^2(x,t)} \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial t} - \frac{1}{a(x,t)} \frac{\partial^2 h_1\{\cdot\}}{\partial t \partial x}, \quad x, t \geq 0,$$

соответственно. В последнем выражении применяем предыдущее тождество (50) и приходим к тождеству

$$\frac{\partial^2 h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0\}}{\partial x^2} = \left(\frac{a_x(x,t)}{a^2(x,t)} - \frac{a_t(x,t)}{a^3(x,t)} \right) \frac{\partial h_1\{\cdot\}}{\partial t} + \frac{1}{a^2(x,t)} \frac{\partial^2 h_1\{\cdot\}}{\partial t^2}, \quad x, t \geq 0,$$

из которого при $x = t = 0$ ввиду равенств (35) и (45) находим

$$\left. \frac{\partial^2 h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0\}}{\partial x^2} \right|_{x=t=0} = \frac{2a_x(0,0)}{a(0,0)}. \quad (51)$$

Продифференцировав по t и x обе части тождества (41), аналогично предыдущему имеем

$$\frac{\partial^2 h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial t \partial x} = \frac{a_t(x, t) \partial h^{(2)}[\bullet]}{a^2(x, t) \partial t} - \frac{1}{a(x, t)} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial t^2}, \quad x, t \geq 0, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial x^2} &= \frac{a_x(x, t) \partial h^{(2)}[\bullet]}{a^2(x, t) \partial t} - \frac{1}{a(x, t)} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial t \partial x} = \\ &= \left(\frac{a_x(x, t)}{a^2(x, t)} - \frac{a_t(x, t)}{a^3(x, t)} \right) \frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t} + \frac{1}{a^2(x, t)} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Согласно равенству (34) с $x = 0$ отсюда при $x = 0$ получаем

$$\left. \frac{\partial^2 h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \frac{a(0, t) a_x(0, t) - a_t(0, t)}{a^3(0, t)}, \quad t \geq 0. \quad (53)$$

Справедливы следующие тождества, аналогичные тождествам (46) и (47):

$$\left(\frac{\psi(h_i\{g_i(x, t), 0\})}{a(h_i\{g_i(x, t), 0\}, 0)} \right)_x = \frac{\left[\frac{d\psi(\bullet)}{dh_i} a(\bullet) - \psi(\bullet) \frac{da(\bullet)}{dh_i} \right] \frac{dh_i\{\bullet\}}{dx}}{a^2(\bullet)}, \quad x, t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (54)$$

$$\frac{\partial H_i(0, \tilde{t})}{\partial x} = \frac{\hat{f}(0, \tilde{t})}{a(0, \tilde{t})} \frac{\partial h_i\{g_i(0, \tilde{t}), \tilde{t}\}}{\partial g_i} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x}, \quad \tilde{t} = h^{(2)}[0, g_2(x, t)], \quad x, t \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_i(0, \tilde{t})}{\partial x} \frac{\partial g_i(0, \tilde{t})}{\partial x} \right|_{x=t=0} &= \left. \frac{\hat{f}(0, \tilde{t})}{a(0, \tilde{t})} \frac{\partial h_i\{g_i(0, \tilde{t}), \tilde{t}\}}{\partial x} \frac{\partial h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial x} \right|_{x=t=0} = \\ &= (-1)^{i+1} \frac{\hat{f}(0, 0)}{a^2(0, 0)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (55)$$

согласно значениям (32) для $i = 2$, (39) для $i = 1$ и (41).

На основании равенств (32) для $i = 2$, $x = 0$, (39) для $i = 1$, (41), (51), (53)–(55) из тождества (49) при $x = t = 0$ благодаря второму и третьему условиям согласования из (9) получаем

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial x^2} \right]_{g_2(x, t) = g_2(0, 0)} = \frac{\hat{S} - \mu''(0)}{a^2(0, 0)} + \frac{a(0, 0) a_x(0, 0) - a_t(0, 0)}{a^3(0, 0)} [\psi(0) - \mu'(0)] = 0. \quad (56)$$

Продифференцировав (30) один раз по x , видим, что разность $\frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial x \partial t}$ равна

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[\frac{d^2 \varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{dh_2^2} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial t} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial x} + \frac{d^2 \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)}{dh_1^2} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{dh_2} \frac{\partial^2 h_2\{\bullet\}}{\partial x \partial t} + \frac{d\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)}{dh_1} \frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial x \partial t} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\psi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{a(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)} \right)_x \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial t} - \left(\frac{\psi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)}{a(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)} \right)_x \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left[\frac{\Psi(h_2\{g_2(x, t), 0\})}{a(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)} \frac{\partial^2 h_2\{\cdot\}}{\partial x \partial t} - \frac{\Psi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})}{a(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)} \frac{\partial^2 h_1\{\cdot\}}{\partial x \partial t} \right] - \\
 & - \frac{d^2 \mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])}{dh^{(2)2}} \frac{\partial h^{(2)}[\cdot]}{\partial t} \frac{\partial h^{(2)}[\cdot]}{\partial x} - \frac{d\mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])}{dh^{(2)}} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\cdot]}{\partial x \partial t} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[H_1(0, \tilde{t}) \frac{\partial^2 g_1(0, \tilde{t})}{\partial x \partial t} - H_2(0, \tilde{t}) \frac{\partial^2 g_2(0, \tilde{t})}{\partial x \partial t} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H_1(0, \tilde{t})}{\partial x} \frac{\partial g_1(0, \tilde{t})}{\partial t} - \frac{\partial H_2(0, \tilde{t})}{\partial x} \frac{\partial g_2(0, \tilde{t})}{\partial t} \right]. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Продифференцировав один раз по x равенство (33) для $i = 2$, находим

$$\left. \frac{\partial^2 h_2\{g_2(x, t), 0\}}{\partial x \partial t} \right|_{t=0} = -a_x(x, 0), \quad x \geq 0, \quad (58)$$

так как операции следа при $t = 0$ и дифференцирования по x перестановочны. В силу равенств (35) и (45) из тождества (50) при $x = t = 0$ выводим

$$\left. \frac{\partial^2 h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}}{\partial x \partial t} \right|_{x=t=0} = -a_x(0, 0). \quad (59)$$

Из тождества (52) при $x = t = 0$ ввиду равенства (34) и производной от (34) еще раз по t имеем

$$\left. \frac{\partial^2 h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial t \partial x} \right|_{x=t=0} = \frac{a_t(0, 0)}{a^2(0, 0)}, \quad (60)$$

поскольку в (34) взятие следа при $x = 0$ коммутирует с дифференцированием по t .

В тождестве (57) при $x = t = 0$ применяем равенства (32) и (33) для $i = 2$, (35) и (39) для $i = 1$, (34), (41), (54), (58) – (60) и значения

$$\left. \frac{\partial H_i(0, \tilde{t})}{\partial x} \frac{\partial g_i(0, \tilde{t})}{\partial t} \right|_{x=t=0} = \frac{\hat{f}(0, \tilde{t})}{a(0, \tilde{t})} \frac{\partial h_i\{g_i(0, \tilde{t}), \tilde{t}\}}{\partial t} \frac{\partial h^{(2)}[0, g_2(x, t)]}{\partial x} \Big|_{x=t=0} = (-1)^i \frac{\hat{f}(0, 0)}{a(0, 0)}, \quad i = 1, 2,$$

согласно равенствам (33) для $i = 2$, (35) для $i = 1$ и (41). В результате применения этих равенств, значений и двух последних условий согласования из (9) убеждаемся в том, что

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial x \partial t} \right]_{g_2(x, t) = g_2(0, 0)} = \frac{\mu''(0) - \hat{S}}{a(0, 0)} + \frac{a_t(0, 0)}{a^2(0, 0)} [\Psi(0) - \mu'(0)] = 0. \quad (61)$$

Установленные выше значения (29), (36), (42), (48), (56) и (61) указывают на дважды непрерывную дифференцируемость единственного решения задачи (1)–(3) и на характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$. Единственность решения обеспечивается алгоритмом его поиска.

Из формулы (11) при любом $T > 0$ легко выводится непрерывная зависимость решения \hat{u}_- в банаховом пространстве $X^{(1)} = C^2(G_T^-)$ от исходных данных φ, Ψ, \hat{f} в произведении $Y^{(1)}$ банаховых пространств $C^2[0, +\infty[, C^1[0, +\infty[, \hat{C}(G_T^-)$ этих исходных данных, где множества $G_T^- = G_T \cap G_-$, $G_T = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$, с нормами

$$\begin{aligned}
 \|\hat{u}_-\|_{C^2(G_T^-)} &= \sup_{(x, t) \in G_T^-} \sum_{0 \leq k+l \leq 2} |\partial_x^k \partial_t^l u(x, t)|, \quad \partial_x^k \partial_t^l = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l}, \quad \|\varphi\|_{C^2[0, +\infty[} = \sup_{0 \leq x < +\infty} \left(\sum_{k=0}^2 |\varphi^{(k)}(x)| \right), \\
 \|\Psi\|_{C^1[0, +\infty[} &= \sup_{0 \leq x < +\infty} \left(\sum_{k=0}^1 |\Psi^{(k)}(x)| \right), \quad \|\hat{f}\|_{\hat{C}(G_T^-)} = \sup_{(x, t) \in G_T^-} \left(|\hat{f}(x, t)| + \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq k+l \leq 1} |\partial_x^k \partial_t^l H_i(x, t)| \right). \quad (62)
 \end{aligned}$$

При любом $T > 0$ из (12) следует непрерывная зависимость решения \hat{u}_+ в банаховом пространстве $X^{(2)} = C^2(G_T^+)$ от данных $\varphi, \psi, \mu, \hat{f}$ в произведении $Y^{(2)}$ банаховых пространств $C^2[0, X_a], C^1[0, X_a], C^2[0, T], \hat{C}(G^T)$ этих данных, где $G_T^+ = G^T \cap G_+, G^T = \{(x, t) \in G_\infty : g_1(x, t) \leq g_1(h_2\{g_2(0, 0), T\}, T), 0 \leq t \leq T\}$ и $X_a = h_1\{g_1(h_2\{g_2(0, 0), T\}, T), 0\}$, с нормами

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_+\|_{C^2(G_T^+)} &= \max_{(x,t) \in G_T^+} \sum_{0 \leq k+l \leq 2} |\partial_x^k \partial_t^l u(x, t)|, \\ \|\varphi\|_{C^2[0, X_a]} &= \max_{0 \leq x \leq X_a} \sum_{k=0}^2 |\varphi^{(k)}(x)|, \quad \|\psi\|_{C^1[0, X_a]} = \max_{0 \leq x \leq X_a} \sum_{k=0}^1 |\psi^{(k)}(x)|, \\ \|\mu\|_{C^2[0, T]} &= \max_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{k=0}^2 |\mu^{(k)}(t)| \right), \quad \|\hat{f}\|_{\hat{C}(G^T)} = \max_{(x,t) \in G^T} \left(|\hat{f}(x, t)| + \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq k+l \leq 1} |\partial_x^k \partial_t^l H_i(x, t)| \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Необходимость требований гладкости (8) и условий согласования (9) доказана нами уже перед формулировкой теоремы 1. Для непрерывных правых частей $\hat{f} \in C(G_\infty)$ мы показали лишь достаточность требований гладкости интегралов H_1, H_2 в (10). Поскольку согласно формулам (26) и (27) произведения интегралов H_1, H_2 на минус половину якобиана $J(x, t) \neq 0$ служат производными вдоль двух семейств характеристик $g_i(x, t) = C_i, i = 1, 2$, то для доказательства необходимости требований гладкости (10) на $\hat{f} \in C(G_\infty)$ не хватает обоснования того, что в (21) функция $F \in C^2(G_\infty)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Для коэффициента $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty, a \in C^2(G_\infty)$ интегральные требования гладкости (10) на непрерывную часть $\hat{f} \in C(G_\infty)$ равносильны интегральным требованиям

$$\int_0^t \hat{f} \left(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau \right) \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2.$$

Чтобы подтвердить необходимость этих интегральных требований гладкости для правой части $\hat{f} \in C(G_\infty)$ уравнения (1), надо обобщить метод корректировки пробных решений из [17] для постоянной скорости $a_1 = a_2 = a > 0$ на переменные скорости $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty$.

Общее телеграфное уравнение с переменными коэффициентами

В первой четверти плоскости \dot{G}_∞ рассматривается общее телеграфное уравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_t(x, t) + \\ + c(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \end{aligned} \quad (64)$$

с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами при первых производных и потенциалом $b, c, q \in C^1(G_\infty)$, которые для упрощения доказательств продолжаем четно по x на $x < 0$.

Исследуем корректность по Адамару первой смешанной задачи в \dot{G}_∞ для этого телеграфного уравнения при начальных условиях (2) и граничном режиме (3).

Полагая $t = 0$ во второй производной по t от граничного режима (3), из начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (64) при $x = t = 0$ имеем необходимое условие согласования:

$$S \equiv f(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) - b(0, 0)\psi(0) - c(0, 0)\varphi'(0) - q(0, 0)\varphi(0) = \mu''(0). \quad (65)$$

Верна следующая теорема существования классических решений задачи (64), (2), (3).

Теорема 2. Пусть в уравнении (64) коэффициенты $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty, a \in C^2(G_\infty), b, c, q \in C^1(G_\infty)$. Тогда при достаточных предположениях (8)–(10) теоремы 1, но при условии согласования (65) вместо третьего условия согласования в (9) классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (64), (2), (3) в \dot{G}_∞ существует, единственно и устойчиво. При этом условия (8) при $\hat{f} = f$ и $\varphi(0) = \mu(0), \psi(0) = \mu'(0), S = \mu''(0)$ необходимы.

Доказательство. Существование классического решения смешанной задачи (64), (2), (3) в \dot{G}_∞ доказывается с помощью известного метода продолжения по параметру Шаудера [18–21] и теорем повышения гладкости сильного обобщенного решения [21; 22]. Для любого времени $T > 0$ этой смешанной

задаче соответствует операторное уравнение $Lu(x, t) = \mathfrak{S}(x, t)$, где $L = \{\mathcal{L}, l_0, l_1, \mathcal{G}\} : E \supset D(L) \rightarrow F$ – линейный оператор, действующий из области определения $D(L) = W_2^2(G_T)$ банахова пространства E в банахово пространство F . Банахово пространство E – пополнение функций пространства Соболева $D(L) = W_2^2(G_T)$ по норме

$$\|u\|_E = \left\{ \sup_{0 < t < T} \int_0^{+\infty} \left[|u_t(s, t)|^2 + |u_s(s, t)|^2 + |u(s, t)|^2 \right] ds \right\}^{1/2}.$$

Пространство $F = L_2(]0, T[\times]0, +\infty[) \times W_2^1(0, +\infty) \times L_2(0, +\infty) \times W_2^1(0, T)$ – декартово произведение пространств Лебега и Соболева – представляет собой множество функций $\mathfrak{S} = \{f, \varphi, \psi, \mu\}$ с конечной нормой

$$\|\mathfrak{S}\|_F = \left\{ \int_0^{T+\infty} \int_0^{+\infty} |f(s, \tau)|^2 ds d\tau + \int_0^{+\infty} (|\varphi'(s)|^2 + |\varphi(s)|^2) ds + \int_0^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds + \int_0^T (|\mu'(\tau)|^2 + |\mu(\tau)|^2) d\tau \right\}^{1/2}.$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1, здесь мы заменяем дифференциальное выражение $\mathcal{L}u$ уравнения (64) на равное выражение

$$\mathcal{L}u(x, t) = \hat{\mathcal{L}}u(x, t) + \hat{b}(x, t)u_t(x, t) + \hat{c}(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)u(x, t), \quad (x, t) \in G_\infty,$$

где дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{L}}$ взят из (1) и коэффициенты $\hat{b} = a^{-1}a_t + b$, $\hat{c} = aa_x + c$.

Смешанной задаче (1)–(3) в G_T соответствует аналогичное операторное уравнение $\hat{\mathcal{L}}u(x, t) = \hat{\mathfrak{S}}(x, t)$, где линейный оператор $\hat{L} = \{\hat{\mathcal{L}}, l_0, l_1, \mathcal{G}\} : E \supset D(\hat{L}) \rightarrow F$ действует из той же области определения $D(\hat{L}) = W_2^2(G_T)$ банахова пространства E в банахово пространство F функций $\hat{\mathfrak{S}} = \{\hat{f}, \varphi, \psi, \mu\}$.

Воспользуемся сильными замыканиями этих операторов $L, \hat{L} : E \supset W_2^2(G_T) \rightarrow F$ из банахова пространства E с плотной в нем областью определения $D(L) = D(\hat{L}) = W_2^2(G_T)$ в банахово пространство F . Стандартным образом доказывается, что линейные операторы L и \hat{L} допускают сильные замыкания \bar{L} и $\bar{\hat{L}}$ соответственно, т. е. замыкания их графиков не содержат пар функций вида $\{0, \mathfrak{S}\}$, $\mathfrak{S} \neq 0$, и $\{0, \hat{\mathfrak{S}}\}$, $\hat{\mathfrak{S}} \neq 0$, соответственно. Согласно критерию замыкаемости линейных операторов для этого надо убедиться в том, что если последовательность $u_n(x, t) \in W_2^2(G_T)$ сходится ($u_n(x, t) \rightarrow 0$) в E и сходятся последовательности $Lu_n(x, t) \rightarrow \mathfrak{S}(x, t)$, $\hat{L}u_n(x, t) \rightarrow \hat{\mathfrak{S}}(x, t)$ в F при $n \rightarrow +\infty$, то функции $\mathfrak{S}(x, t) = \hat{\mathfrak{S}}(x, t) = 0$. Действительно, в вектор-функциях $\mathfrak{S}(x, t)$, $\hat{\mathfrak{S}}(x, t)$ предельные начальные данные $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ и предельное граничное данное $\mu = 0$ обращаются в нуль, потому что операторы l_0, l_1 и \mathcal{G} непрерывны из E в F на области определения $W_2^2(G_T)$. Чтобы показать, что в вектор-функциях $\mathfrak{S}(x, t)$, $\hat{\mathfrak{S}}(x, t)$ предельные правые части $f(x, t)$ и $\hat{f}(x, t)$ уравнений (64) и (1) равны нулю, достаточно сначала проинтегрировать один раз по частям под двойными интегралами произведения $\mathcal{L}u(x, t)$ и $\hat{\mathcal{L}}u(x, t)$ соответственно на любые функции $v(x, t)$ вида произведений функций с компактным носителем из $C_0^\infty(G_T)$ и срезок (функций из $C^\infty[0, +\infty[$, равных нулю при всех больших x). Потом в полученном результате перейти к пределу при $n \rightarrow +\infty$ и в пределе получить нули. Отсюда вытекают равенства $f = 0$ и $\hat{f} = 0$, так как множество всех таких функций v плотно в пространстве Лебега $L_2(]0, +\infty[\times]0, T[)$ [19; 23, с. 24–27]. Поскольку линейные операторы L и \hat{L} отличаются лишь младшими слагаемыми, то равны области определения их сильных замыканий \bar{L} и $\bar{\hat{L}}$ соответственно, т. е. $D(\bar{L}) = D(\bar{\hat{L}})$.

Определение 2. Сильными обобщенными решениями смешанных задач (1)–(3) и (64), (2), (3) в \dot{G}_∞ называют решения $u \in E$ операторных уравнений

$$\bar{\mathcal{L}}u = \hat{\mathfrak{S}}, \quad \bar{L}u = \mathfrak{S}, \quad \hat{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S} \in F, \quad u(x, t) \in D(\bar{\hat{L}}),$$

соответственно.

Известным способом выводится априорная оценка (энергетическое неравенство):

$$\|u(x, t)\|_E \leq \hat{C} \left\| \widehat{L}u(x, t) \right\|_F, \quad u(x, t) \in D(\widehat{L}), \quad i=1, 2, \quad (66)$$

где постоянная $\hat{C} > 0$ не зависит от x, t, u . С этой целью для любых $0 < \tau \leq T$ и $u(x, t) \in W_2^2(G_T)$ умножаем уравнение (1) на $e^{c(\tau-t)}u$, $c \geq 0$, интегрируем результат умножения по t от 0 до τ и по x , вычисляем удвоенную вещественную часть интегрированием по частям один раз по t и два раза по x , делаем соответствующие оценки, приводим подобные слагаемые за счет больших $c > 0$ и так же, как, например, в [19–21], сначала получаем неравенства (66) для гладких функций $u \in W_2^2(G_T)$. Причем здесь можно не использовать сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)$ из [21], так как в смешанной задаче (1)–(3) неограниченный операторный коэффициент $A(t)$ уравнения (1) с граничным режимом (3) зависит от t , но имеет не зависящую от t соответствующую область определения $D(A)$. Затем это неравенство (66) распространяется предельным переходом с более гладких функций $u \in W_2^2(G_T)$ на функции $u \in D(\widehat{L})$. Из априорной оценки (66) всегда следуют равенства $R(\widehat{L}) = \overline{R(\widehat{L})}$, т. е. множество значений $R(\widehat{L})$ сильного замыкания \widehat{L} равно сильному замыканию в F множества значений $R(\widehat{L})$ оператора \widehat{L} [21]. Поскольку в силу теоремы 1 функции из F аппроксимируются значениями $\widehat{L}u$ на решениях $u \in C^2(G_\infty)$ в [19; 23], то оценка (66) дает существование обратного оператора $(\widehat{L})^{-1} \in \mathbb{L}(F, E)$. Символ $\mathbb{L}(Y, X)$ обозначает множество линейных ограниченных операторов из банахова пространства Y в банахово пространство X .

Введем семейство линейных операторов с параметром ρ :

$$\overline{L}_\rho = \widehat{L} + \rho(\overline{L} - \widehat{L}), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (67)$$

из которого видим, что при $\rho = 0$ отображение $\overline{L}_0 = \widehat{L}$ – сильное замыкание линейного оператора смешанной задачи (1)–(3), а при $\rho = 1$ отображение $\overline{L}_1 = \overline{L}$ – сильное замыкание линейного оператора смешанной задачи (64), (2), (3). Умножаем уравнение

$$\overline{L}_\rho u(x, t) = \mathfrak{S}(x, t), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (68)$$

на линейный ограниченный оператор $(\widehat{L})^{-1} \in \mathbb{L}(F, E)$ и приходим к уравнению

$$u(x, t) + \rho(\widehat{L})^{-1}(\overline{L} - \widehat{L})u(x, t) = (\widehat{L})^{-1} \mathfrak{S}(x, t).$$

Для параметра $\frac{0 < \rho_0 < 1}{\|P_0\|_{\mathbb{L}(E, E)}}$, где оператор $P_0 = (\widehat{L})^{-1}(\overline{L} - \widehat{L}) \in \mathbb{L}(E, E)$ ограничен как произведение ограниченных операторов $\overline{L} - \widehat{L} \in \mathbb{L}(E, F)$ и $(\widehat{L})^{-1} \in \mathbb{L}(F, E)$, это уравнение при $\rho = \rho_0$ имеет решение в виде ряда Неймана [21; 24, с. 105]

$$u(x, t) = (I + \rho_0 P_0)^{-1} (\widehat{L})^{-1} \mathfrak{S}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\rho_0 P_0)^k (\widehat{L})^{-1} \mathfrak{S}(x, t) \in E.$$

Если $\rho_0 \geq 1$, то сильная разрешимость уравнения (68) при $\rho = 1$ на F установлена.

В противном случае берем другое семейство линейных операторов с параметром ρ :

$$\overline{L}_\rho \equiv \overline{L}_{\rho_0} + (\rho - \rho_0)(\overline{L} - \widehat{L}), \quad \rho_0 \leq \rho \leq 1, \quad (69)$$

которое является разностью семейства (67) при ρ и $\rho = \rho_0$. Умножив уравнение (69) на линейный ограниченный обратный оператор $(\overline{L}_{\rho_0})^{-1} \in \mathbb{L}(F, E)$, приходим к уравнению

$$u(x, t) + (\rho - \rho_0)(\overline{L}_{\rho_0})^{-1}(\overline{L} - \widehat{L})u(x, t) = (\overline{L}_{\rho_0})^{-1} \mathfrak{S}(x, t),$$

которое для значения ρ_1 параметра $\frac{\rho_0 < \rho_1 < 1}{\|P_1\|_{\mathbb{L}(E, E)}} + \rho_0$, где $P_1 = (\overline{L_{\rho_0}})^{-1}(\overline{L} - \widehat{L}) \in \mathbb{L}(E, E)$, тоже имеет решение в виде ряда Неймана

$$u(x, t) = (I + (\rho_1 - \rho_0)P_1)^{-1}(\widehat{L}_{\rho_0})^{-1} \mathfrak{Z}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} ((\rho_0 - \rho_1)P_1)^k (\overline{L_{\rho_0}})^{-1} \mathfrak{Z}(x, t) \in E$$

и т. д. Уравнения (1) и (64) отличаются лишь младшими членами, т. е. функцией u и ее первыми производными u_t, u_x . Поэтому так же, как и выше, выводится аналог неравенства (66):

$$\|u(x, t)\|_E \leq C \|\overline{L_{\rho}} u(x, t)\|_F, \quad u(x, t) \in D(\overline{L_{\rho}}) = D(\overline{L}), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (70)$$

где постоянная $C \geq \widehat{C} > 0$ не зависит от x, t, u, ρ , из которого имеем равномерную ограниченность операторов $\|(\overline{L_{\rho}})^{-1}\|_{\mathbb{L}(F, E)} \leq C$ по $0 \leq \rho \leq 1$ и норм $\|P_n\|_{\mathbb{L}(E, E)}$ по n . Поэтому на конечном шаге n находим $\rho_n = 1$, при котором уравнение (68) на F имеет решение

$$u(x, t) = (I + (\rho_n - \rho_{n-1})P_n)^{-1}(\overline{L_{\rho_{n-1}}})^{-1} \mathfrak{Z}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} ((\rho_{n-1} - \rho_n)P_n)^k (\overline{L_{\rho_{n-1}}})^{-1} \mathfrak{Z}(x, t) \in E,$$

где равномерно по n ограничены операторы $P_n = (\overline{L_{\rho_{n-1}}})^{-1}(\overline{L} - \widehat{L}) \in \mathbb{L}(E, E)$.

Смешанной задаче (64), (2), (3) соответствуют два операторных уравнения $L^{(i)}u^{(i)}(x, t) = \mathfrak{Z}^{(i)}(x, t)$, где $L^{(i)}$ – линейные операторы, действующие из банаховых пространств $X^{(i)}$ в банаховы пространства $Y^{(i)}$, $i = 1, 2$. Эти банаховы пространства указаны выше в (62) и (63). Здесь берутся операторы $L^{(1)} = \{\mathcal{L}, l_0, l_1\}$, $L^{(2)} = \{\mathcal{L}, l_0, l_1, \mathcal{G}\}$ и правые части $\mathfrak{Z}^{(1)} = \{f, \varphi, \psi\} \in Y^{(1)}$, $\mathfrak{Z}^{(2)} = \{f, \varphi, \psi, \mu\} \in Y^{(2)}$ в задаче Коши на G_- и задаче Пикара на G_+ соответственно для телеграфного уравнения (64). Из теоремы 1 и теоремы Банаха о замкнутом графике (или об открытом отображении) следует существование ограниченных линейных обратных операторов $(\widehat{L}^{(i)})^{-1} \in \mathbb{L}(Y^{(i)}, X^{(i)})$ к линейным операторам $\widehat{L}^{(i)}: X^{(i)} \rightarrow Y^{(i)}$, $i = 1, 2$ [24, с. 112, 116]. Далее с помощью теорем повышения гладкости сильных решений $u \in D(\overline{L})$ смешанной задачи (64), (2), (3) на \dot{G}_{∞} из [21; 22] показывается, что сужения этого сильного решения $u \in D(\overline{L_{\rho_n}}) = D(\overline{L})$ на G_- и G_+ имеют гладкость $u \in X^{(i)}$, $i = 1, 2$. Чем больше гладкость исходных данных $\mathfrak{Z}^{(i)}$, тем больше гладкость сильных решений $u^{(i)}$, $i = 1, 2$. Кроме того, выше для $\rho = 0$ обосновано, что $(\overline{L_0}^{(i)})^{-1} \in \mathbb{L}(Y^{(i)}, X^{(i)})$, т. е. $u^{(i)} \in X^{(i)}$, а для $\rho < 1$ это можно доказать аналогично предыдущему методом продолжения по параметру ρ непосредственно в шкалах пространств $\mathbb{L}(Y^{(i)}, X^{(i)})$, $i = 1, 2$.

По построению решения u_- и u_+ дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{G_-}$ и G_+ соответственно и, очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы на характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$, потому что необходимые и достаточные первое и второе условия согласования из (9), которые дают непрерывность первых частных производных от \widehat{u}_- и \widehat{u}_+ на $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ в доказательстве теоремы 1, не зависят от уравнения (1). Более того, необходимое третье условие согласования (65) вместо третьего условия согласования из (9) обеспечивает непрерывность вторых частных производных от u_- и u_+ на $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$, так как в семействе (67) при $\rho = 1$ операторы $\overline{L_1}^{(i)} = \overline{L}^{(i)}$, $i = 1, 2$, соответствуют задаче (64), (2), (3).

Единственность классического решения смешанной задачи (64), (2), (3) вытекает из неравенства (70). Пусть она имеет два различных классических решения $u_1 \neq u_2$, $u_1, u_2 \in C^2(G_{\infty})$. Тогда их разность $\widehat{u} = u_1 - u_2 \in C^2(G_{\infty})$ является классическим решением однородной смешанной задачи (64), (2), (3), т. е. при $f = \varphi = \psi = \mu = 0$. Из неравенства (70) при $\rho = 1$ имеем, что $\widehat{u} = 0$ в пространстве левой части этого неравенства и тем самым $u_1 \equiv u_2$ в $C^2(G_{\infty})$.

Наконец, устойчивость классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ смешанной задачи (64), (2), (3) в \dot{G}_∞ по исходным данным f, φ, ψ, μ вытекает из его существования и единственности в силу, например, теоремы Банаха о замкнутом графике [24, с. 116]. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Теорема 2 обобщает те результаты работ [6–14], где обобщенные (непрерывно дифференцируемые) решения имеют необходимые и достаточные условия на начальные данные. Поскольку в них обобщенные решения удовлетворяют простейшим телеграфным уравнениям почти всюду на G_∞ , то в теореме 2 для непрерывно дифференцируемых решений задачи (64), (2), (3) гладкость коэффициентов уравнения (64) и данных f, φ, ψ, μ , а также число условий согласования в (9) можно ослабить (например, до $b, c, q \in L_\infty(G_\infty)$ и первых двух условий из (9)).

Библиографические ссылки

1. Барановская СН. *О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения* [диссертация]. Минск: БГУ; 1991. 59 с.
2. Ломовцев ФЕ. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. В: Красовский СГ, редактор. *Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Материалы Международной математической конференции; 7–10 декабря 2015 г.; Минск, Беларусь. Часть 2. Теория устойчивости и управления движением. Стохастические дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения в частных производных. Методика преподавания математики.* Минск: Институт математики НАН Беларуси; 2015. с. 74–75.
3. Моисеев ЕИ, Юрчук НИ. Классические и обобщенные решения задач для телеграфных уравнений с потенциалом Дирака. *Дифференциальные уравнения.* 2015;51(10):1338–1344. DOI: 10.1134/S0374064115100088.
4. Барановская СН, Новиков ЕН, Юрчук НИ. Задача с косо́й производной в граничном условии для телеграфного уравнения с потенциалом Дирака. *Дифференциальные уравнения.* 2018;54(9):1176–1183. DOI: 10.1134/S0374064118090030.
5. Аниконов ДС, Коновалова ДС. Обобщенная формула Даламбера для волнового уравнения с разрывными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения.* 2019;55(2):265–268. DOI: 10.1134/S0374064119020134.
6. Хромов АП. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2016;56(10):1795–1809. DOI: 10.7868/S0044466916100112.
7. Корнев ВВ, Хромов АП. Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2016;16(4):403–413. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.
8. Хромов АП. Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом и ненулевой начальной скоростью. *Доклады Академии наук.* 2017;474(6):668–670.
9. Хромов АП. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2019;19(3):280–288. DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288.
10. Хромов АП, Корнев ВВ. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2019;59(2):286–300. DOI: 10.1134/S0044466919020091.
11. Хромов АП. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала. *Дифференциальные уравнения.* 2019;55(5):717–731. DOI: 10.1134/S0374064119050121.
12. Хромов АП, Корнев ВВ. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения. *Доклады Академии наук.* 2019;484(1):18–20. DOI: 10.31857/S0869-5652484118-20.
13. Корнев ВВ, Хромов АП. Расходящиеся ряды и обобщенное решение одной смешанной задачи для волнового уравнения. В: *Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXI»; 3–9 мая 2020 г.; Воронеж, Россия.* Воронеж: Наука-Юнипресс; 2020. с. 99–102.
14. Ломов ИС. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения в случае существенно несамосопряженного оператора. В: *Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXI»; 3–9 мая 2020 г.; Воронеж, Россия.* Воронеж: Наука-Юнипресс; 2020. с. 124–126.
15. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* Вентцель ТД, переводчик; Олейник ОА, редактор. Москва: Мир; 1964. 830 с.
16. Ломовцев ФЕ, Лысенко ВВ. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. *Вестник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта.* 2019;3:5–17.
17. Ломовцев ФЕ. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;3:38–52.
18. Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Mathematische Zeitschrift.* 1934;38:257–282. DOI: 10.1007/BF01170635.
19. Ладыженская ОА. *Краевые задачи математической физики.* Москва: Наука; 1973. 408 с.
20. Юрчук НИ. Частично характеристическая граничная задача для одного вида уравнений в частных производных. II. *Дифференциальные уравнения.* 1969;5(3):531–542.

21. Ломовцев ФЕ. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов. *Дифференциальные уравнения*. 1992;28(5):873–886.
22. Ломовцев ФЕ. Гладкость сильных решений полных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов. *Дифференциальные уравнения*. 2001;37(2):276–278.
23. Лионс Ж-Л, Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. Франк ЛС, переводчик; Грушин ВВ, редактор. Москва: Мир; 1971. 371 с.
24. Иосида К. *Функциональный анализ*. Волосов ВМ, переводчик. Москва: Мир; 1967. 623 с.

References

1. Baranovskaya SN. *O klassicheskom reshenii pervoi smeshannoi zadachi dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya* [On the classical solution of the first mixed problem for a one-dimensional hyperbolic equation] [dissertation]. Minsk: Belarusian State University; 1991. 59 p. Russian.
2. Lomovtsev FE. [The method of auxiliary mixed problems for a semi-infinite string]. In: Krasovskii SG, editor. *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam. Materialy Mezhdunarodnoi matematicheskoi konferentsii; 7–10 dekabrya 2015 g.; Minsk, Belarus'. Chast' 2. Teoriya ustoychivosti i upravleniya dvizheniem. Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya. Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh. Metodika prepodavaniya matematiki* [The 6th Bogdanov readings on ordinary differential equations. Materials of the International mathematical conference; 2015 December 7–10; Minsk, Belarus. Part 2. The theory of stability and motion control. Stochastic differential equations. Partial differential equations. Methods of teaching mathematics]. Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus; 2015. p. 74–75. Russian.
3. Moiseev EI, Yurchuk NI. [Classical and generalized solutions to problems for telegraph equations with the Dirac potential]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2015;51(10):1338–1344. Russian. DOI: 10.1134/S0374064115100088.
4. Baranovskaya SN, Novikov EN, Yurchuk NI. [The oblique derivative problem in the boundary condition for the telegraph equation with the Dirac potential]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2018;54(9):1176–1183. Russian. DOI: 10.1134/S0374064118090030.
5. Anikonov DS, Konovalova DS. [Generalized d'Alembert formula for the wave equation with discontinuous coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2019;55(2):265–268. Russian. DOI: 10.1134/S0374064119020134.
6. Khromov AP. [On the convergence of the formal Fourier solution of the wave equation with a summable potential]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 2016;56(10):1795–1809. Russian. DOI: 10.7868/S0044466916100112.
7. Kornev VV, Khromov AP. Resolvent approach to Fourier method in a mixed problem for non-homogeneous wave equation. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2016;16(4):403–413. Russian. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.
8. Khromov AP. [Mixed problem for wave equation with summable potential and nonzero initial velocity]. *Doklady Akademii nauk*. 2017;474(6):668–670. Russian.
9. Khromov AP. On classic solution of the problem for a homogeneous wave equation with fixed end-points and zero initial velocity. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2019;19(3):280–288. Russian. DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288.
10. Khromov AP, Kornev VV. [Classical and generalized solutions of a mixed problem for a non-homogeneous wave equation]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 2019;59(2):286–300. Russian. DOI: 10.1134/S0044466919020091.
11. Khromov AP. [Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with an integrable potential]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2019;55(5):717–731. Russian. DOI: 10.1134/S0374064119050121.
12. Khromov AP, Kornev VV. Classical and generalized of a mixed problem – solutions for a non-homogeneous wave equation. *Doklady Akademii nauk*. 2019;484(1):18–20. Russian. DOI: 10.31857/S0869-5652484118-20.
13. Kornev VV, Khromov AP. Divergent series and generalized solution of a mixed problem for wave equation. In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach. Materialy mezhdunarodnoi konferentsii. Voronezhskaya vesenniyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskies chteniya – XXXI»; 3–9 maya 2020 g.; Voronezh, Rossiya* [Modern methods of the theory of boundary value problems. Materials of the International conference. Voronezh spring mathematical school «Pontryagin readings – XXXI»; 2020 May 3–9; Voronezh, Russia]. Voronezh: Nauka-Yunipress; 2020. p. 99–102. Russian.
14. Lomov IS. d'Alembert generalized formula for the telegraph equation in case of a substantially non-self-adjoint operator. In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach. Materialy mezhdunarodnoi konferentsii. Voronezhskaya vesenniyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskies chteniya – XXXI»; 3–9 maya 2020 g.; Voronezh, Rossiya* [Modern methods of the theory of boundary value problems. Materials of the International conference. Voronezh spring mathematical school «Pontryagin readings – XXXI»; 2020 May 3–9; Voronezh, Russia]. Voronezh: Nauka-Yunipress; 2020. p. 124–126. Russian.
15. Courant R, Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Volume II. Partial differential equations*. New York: Wiley; 1962. XXII, 830 p.
Russian edition: Courant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*. Venttsel' TD, translator; Oleinik OA, editor. Moscow: Mir; 1964. 830 p.
16. Lomovtsev FE, Lysenko VV. Non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. *Vesnik Vitebskaga dzjarzhavnaga wuniversityeta*. 2019;3:5–17. Russian.
17. Lomautsau FE. Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;3:38–52. Russian.
18. Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Mathematische Zeitschrift*. 1934;38:257–282. DOI: 10.1007/BF01170635.
19. Ladyzhenskaya OA. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka; 1973. 408 p. Russian.
20. Yurchuk NI. [Partially characteristic boundary value problem for one kind of partial differential equations. II]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1969;5(3):531–542. Russian.

21. Lomautsau FE. [On necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the Cauchy problem for second-order hyperbolic differential equations with a variable domain of definition of operator coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1992;28(5): 873–886. Russian.

22. Lomautsau FE. [Smoothness of strong solutions of complete hyperbolic second-order differential equations with variable domains of operator coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2001;37(2):276–278. Russian.

23. Lions J-L, Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Volume 1*. Paris: Dunod; 1968. XIX, 372 p.

Russian edition: Lions J-L, Magenes E. *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya*. Frank LS, translator; Grushin VV, editor. Moscow: Mir; 1971. 371 p.

24. Yosida K. *Functional analysis*. Berlin: Springer-Verlag; 1965. XI, 458 p.

Russian edition: Yosida K. *Funktsional'nyi analiz*. Volosov VM, translator. Moscow: Mir; 1967. 623 p.

Статья поступила в редакцию 20.06.2020.

Received by editorial board 20.06.2020.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОЛУДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Б. С. КАЛИТИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается задача о неустойчивости замкнутого положительно инвариантного множества M полудинамической системы на произвольном метрическом пространстве X . Второй метод Ляпунова для таких задач разработан достаточно полно в случае, когда множество M компактно, а пространство X локально компактно. Получены достаточные условия неустойчивости в терминах функций Ляпунова в двух ситуациях: M обладает окрестностью положительно устойчивых по Лагранжу полутраекторий; пространство X асимптотически компактно в некоторой окрестности множества M .

Ключевые слова: полудинамическая система; замкнутое множество; неустойчивость; функция Ляпунова.

ON SOME PROBLEMS OF INSTABILITY IN SEMI-DYNAMICAL SYSTEMS

B. S. KALITINE^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The problem of instability of a closed positively invariant set M of a semi-dynamical system on an arbitrary metric space X is considered. The Lyapunov's direct method for such problems has been developed quite completely in the case when M is compact and X is locally compact. In this article, we obtain sufficient conditions for instability in terms of Lyapunov functions in two situations: M has a neighbourhood of positive Lagrange stable semi-trajectories; the space X is asymptotically compact in some neighbourhood of M .

Keywords: semi-dynamical system; closed set; instability; Lyapunov function.

Введение

А. М. Ляпунов [1] оставил в наследие две широко известные теоремы о неустойчивости равновесия неавтономных дифференциальных уравнений с использованием вспомогательных функций (первая теорема о неустойчивости и вторая теорема о неустойчивости). Н. Г. Четаев [2, с. 34] обобщил их, сформулировав теорему, из которой обе теоремы Ляпунова следуют как частный случай. Позднее усиление первой теоремы Ляпунова – Четаева получено для периодических [3, с. 84] и почти периодических [4] дифференциальных уравнений. Развитие первой теоремы о неустойчивости для неавтономных дифференциальных уравнений связано с использованием теории предельных уравнений [5; 6] и идей [7], основанной на привлечении дополнительной функции, оценивающей скорость сходимости решений к множеству, на котором функция Ляпунова обращается в нуль.

Образец цитирования:

Калитин БС. О некоторых проблемах неустойчивости в полудинамических системах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1: 39–45.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-39-45>

For citation:

Kalitone BS. On some problems of instability in semi-dynamical systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:39–45. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-39-45>

Автор:

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:

Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.
kalitine@yandex.by

Свойству неустойчивости замкнутых множеств динамической или полудинамической системы посвящен ряд работ (см. [8–14]), в которых используются арсенал качественных методов топологической динамики и метод функций Ляпунова. Так, например, В. И. Зубов [8, с. 49] предложил обобщение второй теоремы Ляпунова о неустойчивости для замкнутых множеств динамических систем в виде необходимых и достаточных условий.

В данной работе представлены новые результаты, относящиеся к развитию первой теоремы о неустойчивости. В отличие от утверждений монографий [13; 14], где рассматриваются свойства компактных множеств, в настоящей статье получены достаточные условия неустойчивости в терминах функций Ляпунова для замкнутых множеств полудинамических систем на произвольном метрическом пространстве.

Используем обозначения и определения монографий [9; 13–16]:

• \mathbb{R}, \mathbb{R}^+ и \mathbb{N} – множества вещественных, вещественных неотрицательных и натуральных чисел соответственно;

• \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$;

• $B_\alpha = \{x \in X : \|x\| < \alpha\}$, $\alpha > 0$;

• $C^k(U, W)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций $f : U \rightarrow W$;

• \mathbf{K} – множество непрерывных возрастающих функций $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ таких, что $a(0) = 0$;

• $\mathbf{K}^\infty \subset \mathbf{K}$ – подмножество функций $a \in \mathbf{K}$ таких, что если $a(r) \rightarrow +\infty$, то $r \rightarrow +\infty$;

• X – метрическое пространство с метрикой $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$;

• $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$ для $N \subset X$ и $\alpha > 0$;

• (x_n) – последовательность;

• $x_n \rightarrow x$ – последовательность (x_n) сходится к x ;

• (X, \mathbb{R}^+, π) – полудинамическая система с фазовым отображением $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$;

• $\pi(x, t) = xt \quad \forall x \in X$ и $\forall t \in \mathbb{R}^+$;

• аксиомы полудинамической системы:

(I) $x0 = x$ для каждого $x \in X$;

(II) $xt(\tau) = x(t + \tau)$ для каждого $x \in X$ и $t, \tau \in \mathbb{R}^+$;

(III) π непрерывно;

• $\pi_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ (или $x : t \rightarrow xt$) – движение (из $x \in X$);

• если $I \subset \mathbb{R}^+$, $Y \subset X$, $x \in Y$, $t \in I$, то $xI = \{xt : t \in I\}$, $YI = \{xt \in X : x \in Y, t \in I\}$;

• Y из X положительно инвариантно, если $Y\mathbb{R}^+ = Y$;

• $\text{Fr}Y$ и \bar{Y} – граница и замыкание множества Y в X соответственно;

• $\gamma^\pm(x) = x\mathbb{R}^\pm$ – положительная (отрицательная) полутраектория точки $x \in X$;

• $L^+(x) = \{y \in X : xt_n \rightarrow y, t_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty\}$ – множество ω -предельных точек для $x \in X$;

• (X, \mathbb{R}, π) – динамическая система, движения определены при всех $t \in \mathbb{R}$.

Если метрическое пространство X локально компактно, то полудинамическую (динамическую) систему называют локально компактной.

Определение 1. Замкнутое множество M из X называется:

• устойчивым, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall m \in M)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, m) > 0) : B(m, \delta)\mathbb{R}^+ \subset B(M, \varepsilon);$$

• неустойчивым, если оно не является устойчивым, т. е.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists m \in M)(\forall \delta > 0)(\exists p \in B(m, \delta))(\exists t^* > 0) : d(M, pt^*) = \varepsilon.$$

Замечание. Если замкнутое множество M не является положительно инвариантным, то оно очевидно неустойчиво. Поэтому в формулировках представленных ниже утверждений о неустойчивости речь идет лишь о положительно инвариантном замкнутом множестве M .

Метод функций Ляпунова

Сформулируем и докажем в этом разделе ряд новых утверждений о неустойчивости, дополняющих результаты работ [3; 13; 14]. Предварительно напомним следующее.

Лемма [9, р. 66]. Пусть X – произвольное метрическое пространство, K – подмножество X , $\gamma^+(x) \subset K$ (или $\gamma^-(x) \subset K$). Предположим $V \in C(K, \mathbb{R})$ – некоторая функция такая, что $V(xt)$ монотонно изменяется при всех $t \geq 0$ (соответственно при всех $t \leq 0$). Тогда если $L^+(x) \neq \emptyset$ ($L^-(x) \neq \emptyset$), то имеет место равенство $V(y) = V(z) \forall y, z \in L^+(x)$ (соответственно $V(y) = V(z) \forall y, z \in L^-(x)$).

Представим вариант развития теоремы Красовского о неустойчивости [3, с. 84], используя свойство положительной устойчивости по Лагранжу [17] для отдельных движений в окрестности замкнутого множества M полудинамической системы. Смысл новой идеи состоит в том, что, в отличие от теоремы в [3], на множестве, где производная функции Ляпунова равна нулю, можно допустить существование положительных полутраекторий, но только таких, которые подчинены определенным условиям.

Теорема 1. Пусть X – произвольное метрическое пространство, M – замкнутое подмножество X . Предположим, что существуют число $\sigma > 0$, окрестность $B(M, \sigma)$ для M , функция $V \in C(B(M, \sigma), \mathbb{R})$ и функция $a \in \mathbf{K}$ такая, что выполняются следующие условия:

- 1) $V(x) \leq a(d(M, x)) \forall x \in B(M, \sigma)$;
- 2) существует $t \in \text{Fr}M$ такое, что для любого $\alpha > 0$ найдется точка $p \in B(t, \alpha)$, для которой $V(p) > 0$ и $\gamma^+(p)$ – относительно компактная полутраектория;
- 3) $V(xt) \geq V(x) \forall x[0, t] \subset B(M, \sigma) \setminus M$ при $t > 0$;
- 4) если полутраектория $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$ и $V(\gamma^+(y)) \equiv V(y)$, то либо $d(M, yt) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, либо $d(\text{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0$.

Тогда M неустойчиво.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$, меньшее σ . В силу предположения 2) можно указать точки $t \in \text{Fr}M$ и $p \in B(t, \delta) \setminus M$ для $0 < \delta < \varepsilon$ такие, что $V(p) > 0$, а полутраектория $\gamma^+(p)$ относительно компактна.

С учетом непрерывности функции V и требования 1) существует число $\mu > 0$, для которого $|V(x)| < V(p)$, если только $d(M, x) < \mu$. Очевидно, можно считать $\mu < \varepsilon$. Отсюда на основании предположения 3), в частности, следует, что движение π_p не может оказаться во множестве $B(M, \mu)$, т. е. $d(pt, x) \geq \mu$ при всех $t > 0$.

Покажем, что точка pt покинет множество $\overline{B(M, \varepsilon)}$ при $t > 0$, что и будет соответствовать неустойчивости M . Действительно, если это не так, то $d(M, pt) < \varepsilon \forall t > 0$. Следовательно, с учетом предыдущих построений и условия $0 < \mu < \varepsilon$ имеем оценки

$$\mu \leq d(M, pt) \leq \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

По предположению замыкание $\overline{\gamma^+(p)}$ есть компактное множество. Значит, на основании утверждения [15, р. 41] ω -предельное множество $L^+(p)$ для полутраектории $\gamma^+(p)$ непусто, компактно, связно и положительно инвариантно. Более того, существует полутраектория $\gamma^+(y) \subset L^+(p)$ для любой точки $y \in L^+(p)$. Так как по построению $L^+(p) \subset \overline{B(M, \varepsilon) \setminus B(M, \mu)} \subset B(M, \sigma)$, то согласно лемме при $y \in L^+(p)$ имеем тождество $V(\gamma^+(y)) \equiv V(y)$ и при этом $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$. Более того, по построению выполняется условие

$$\mu \leq d(M, \gamma^+(y)) \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Далее согласно предположению 4) будем иметь один из случаев:

$$d(M, yt) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \text{ либо } d(\text{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0.$$

Однако и то и другое невозможно на основании (1) и предположения $\varepsilon < \sigma$. Полученное противоречие и доказывает неустойчивость множества M .

Укажем на возможную модификацию теоремы 1 в пользу практических приложений.

Определение 2. Пусть G – открытое подмножество X , функция $V: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ принадлежит к классу $C(\overline{G}, \mathbb{R}^+)$. Будем говорить, что функция $V(x)$ дифференцируема вдоль движения $\pi_x, x \in G$, полудинамической системы (X, \mathbb{R}^+, π) (или имеет производную по времени вдоль движения), если для каждой точки $x \in G$ величина $V(xt) - V(x)$ определена для всех достаточно малых $|t| > 0$ и если существует предел

$$\dot{V}(x) = \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{V(xt) - V(x)}{t}.$$

При этом функцию $\dot{V}(x)$ называют производной по времени функции $V(x)$ вдоль движения π_x в точке x (или просто производной по времени). Более того, функция $V(xt)$ оказывается дифференцируемой по t , и мы будем писать $\dot{V} \in C(B(M, \sigma), \mathbb{R})$.

Если функция Ляпунова является дифференцируемой, то требование 4) теоремы 1 можно модифицировать, а именно из нее вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения и условия 1), 2) теоремы 1. Тогда если $\dot{V} \in C(B(M, \sigma), \mathbb{R})$ и имеют место условия:

1) $\dot{V}(x) \geq 0 \quad \forall x \in B(M, \sigma) \setminus M;$

2) если полутраектория $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$ и $\dot{V}(\gamma^+(y)) \equiv 0$, то либо $d(M, yt) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, либо $d(\text{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0$, то множество M неустойчиво.

Пример. Пусть динамическая система определяется дифференциальным уравнением Льенара следующего вида:

$$\ddot{x} - 3ax^2\dot{x} - b(\dot{x} - ax^3)^{2p-1} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Покажем, что инвариантное множество $M = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x = \dot{x} = 0\}$ этого уравнения неустойчиво для всех значений параметров $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$. Перейдем от уравнения (2) к соответствующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 3ax^2y + b(y - ax^3)^{2p-1}. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию Ляпунова

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(y - ax^3)^2,$$

для которой производная по времени в силу системы (3)

$$\dot{V}(x, y) = b(y - ax^3)^{2p}, \quad b > 0.$$

Видим, что функция \dot{V} неотрицательна и выполнены условия 1), 2) теоремы 1, а также условие 1) теоремы 2. Покажем, что имеет место оставшееся для проверки условие 2) теоремы 2. С этой целью выпишем множество

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^3\}.$$

Нетрудно проверить, что Y – инвариантное множество системы (3). При этом всякое решение $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, расположенное на этом множестве, удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению $\dot{x} = ax^3$.

Если $a < 0$, то ясно, что $|x(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, а значит, и $|y(t)| \equiv |ax^3(t)| \rightarrow 0$. Поэтому условие 2) теоремы 2 выполняется для первого из вариантов.

Если же $a > 0$, то $|x(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$, поэтому условие 2) теоремы 2 выполняется для второго из вариантов.

Следовательно, на основании теоремы 2 нулевое решение системы (3) неустойчиво при $a \neq 0$, $b > 0$, что влечет неустойчивость множества M дифференциального уравнения (2).

Наконец, если $a = 0$, то неустойчивость нулевого решения устанавливается непосредственным интегрированием системы (3).

Заметим, что поскольку для данного примера множество Y содержит нетривиальные целые положительные траектории, то теорема Красовского о неустойчивости [3, с. 84] с функцией $V(x, y)$ здесь не может быть использована.

Напомним следующие понятия.

Свойство интегральной непрерывности [17, с. 14]. Для любой точки $x \in X$, любого числа $T > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d(xt, yt) < \varepsilon$ при всех $y \in X$ и $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам $d(x, y) < \delta$ и $0 \leq t \leq T$ ($-T \leq t \leq 0$).

Определение 3 [18]. Полудинамическая система (X, \mathbb{R}^+, π) называется асимптотически компактной на множестве W , если для любой пары последовательностей $(x_n) \subset W$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такой, что $x_n[0, t_n] \in W$ и $t_n \rightarrow +\infty$, последовательность $(x_n t_n)$ относительно компактна.

Примеры асимптотически компактных полудинамических систем для произвольных метрических пространств (не обязательно локально компактных) приведены в [18; 19].

Докажем теперь аналог теоремы о неустойчивости [3, с. 77] для полудинамических систем.

Теорема 3. Пусть X – произвольное метрическое пространство, M – замкнутое положительно инвариантное подмножество X . Предположим, что существуют число $\Delta > 0$, функция $\dot{V} \in C(B(M, \Delta), \mathbb{R})$, функции $a \in \mathbf{K}^\infty$ и $b \in \mathbf{K}$ такие, что выполняются следующие условия:

$$1) V(x) \leq a(d(M, x)) \quad \forall x \in B(M, \Delta) \text{ и } V(x) = 0 \quad \forall x \in M;$$

2) множество $G = \{x \in B(M, \Delta) \setminus M : V(x) \geq 0\}$ содержит последовательность $(q_n) \subset B(M, \Delta) \setminus M$ такую, что $V(q_n) = 0$ и $d(M, q_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

$$3) \dot{V}(x) > b(d(M, x)) \quad \forall x \in B(M, \Delta) \setminus M.$$

Тогда M неустойчиво.

Если, кроме того, полудинамическая система (X, \mathbb{R}^+, π) асимптотически компактна в $\overline{B(M, \Delta)}$, то в области G существует отрицательная полутраектория $\gamma^-(y)$ такая, что:

$$a) d(M, \gamma^-(y)) = 0;$$

$$б) V(yt) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Доказательство. Докажем, что M неустойчиво при выполнении требований 1)–3). Пусть $(q_n) \subset B(M, \Delta) \setminus M$ – последовательность точек, для которых

$$V(q_n) = 0 \text{ и } d(M, q_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В силу предположения 3) имеем $V(q_n t) > 0$ для тех t , при которых $q_n(0, t) \subset B(M, \Delta)$. Покажем, что существует последовательность моментов времени $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такая, что

$$d(M, q_n t) < \Delta \text{ при } 0 \leq t < t_n \text{ и } d(M, q_n t_n) = \Delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

что и будет соответствовать неустойчивости M . Для этого зафиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и число $\tau > 0$. Если $d(M, q_n \tau) > \Delta$, то очевидно, что искомое значение t_n , удовлетворяющее (4), найдется, причем $0 < t_n < \tau$.

Предположим теперь, что $d(M, q_n \tau) < \Delta$. По условию 3) теоремы вдоль движения $q_n : t \rightarrow q_n t$ при $t \geq \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$, имеем

$$\dot{V}(q_n t) \geq b(d(M, q_n t)). \quad (5)$$

Поскольку функция $V(x)$ непрерывна, причем $V(x) = 0 \quad \forall x \in M$, то для числа $V(q_n \tau) = \alpha_n > 0$ на основании предположения 1) существует положительное число $\delta_n > 0$, для которого имеет место условие

$$|V(x)| < \alpha_n \text{ при } d(M, x) < \delta_n. \quad (6)$$

С учетом (5) производная $\dot{V}(q_n t)$ неотрицательная, поэтому $V(q_n t) \geq V(q_n \tau)$ при $t \geq \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$. На основании (6) это означает, что $d(M, q_n t) \geq \delta_n$ при $t \geq \tau$, т. е. можем записать

$$b(d(M, q_n t)) \geq b(\delta_n) > 0 \text{ при } t \geq \tau \text{ таких, что } d(M, q_n t) < \Delta.$$

Следовательно, при $t \geq \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$, выполняются соотношения

$$V(q_n t) = V(q_n \tau) + \int_{\tau}^t \dot{V}(q_n s) ds \geq V(q_n \tau) + \int_{\tau}^t b(d(M, q_n s)) ds \geq V(q_n \tau) + b(\delta_n)(t - \tau).$$

Отсюда следует, что при фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$ правая часть неограниченно возрастает по времени $t > \tau$. С учетом предположения 1) это означает, что при увеличении $t > \tau$ неограниченно

возрастает величина $a(d(M, q_n t))$. Более того, если $a(d(M, q_n t)) \rightarrow +\infty$, то по свойству функции a имеем $d(M, q_n t) \rightarrow +\infty$. В частности, наступит момент $t_n > \tau$, удовлетворяющий (4). Таким образом, последовательность (t_n) со свойствами (4) существует. Все в совокупности соответствует свойству неустойчивости множества M .

Предположим теперь, что полудинамическая система (X, \mathbb{R}^+, π) асимптотически компактна в $\overline{B(M, \Delta)}$. Положим $p_n = q_n t_n$ и рассмотрим последовательность точек $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Эта последовательность обладает некоторой предельной точкой y на основании свойства асимптотической компактности. Более того, при выполнении равенства (4) имеем $d(M, y) = \Delta$. Покажем, что полутраектория $\gamma^-(y)$ и является искомой в области G . Для этого покажем сначала, что она принадлежит множеству G .

Пусть это не так. Тогда можно указать момент $s < 0$ такой, что $ys \notin G$. Поскольку по построению $t_n \rightarrow +\infty$ на основании положительной инвариантности M , то для достаточно большого натурального числа $N \in \mathbb{N}$ будем иметь неравенство $t_n + s > 0 \forall n \geq N$. С учетом сходимости $q_n t_n \rightarrow y$ и свойства интегральной непрерывности движений динамических систем для достаточно больших $n \geq N$ точки $q_n(t_n + s)$ также покидают множество G . Но последнее невозможно в силу (4), поскольку имеет место условие $0 < t_n + s < t_n$. Полученное противоречие показывает, что $\gamma^-(y) \subset G$.

Докажем теперь утверждение *a*, т. е. что существует последовательность $(s_n) \subset \mathbb{R}^-$, $s_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что

$$d(M, ys_n) \rightarrow 0 \text{ при } s_n \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

Действительно, если это не так, то можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$d(M, yt) \geq \delta > 0 \quad \forall t \leq 0. \quad (8)$$

Положим в неравенстве (5) $t = t_n$ и перейдем затем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда получим неравенство $\dot{V}(y) \geq b(d(M, y))$. Поскольку $\gamma^-(y) \subset B(M, \Delta) \setminus M$, то с учетом (8) будет

$$\dot{V}(yt) \geq b(d(M, yt)) \geq b(\delta) > 0 \quad \forall t \leq 0. \quad (9)$$

Воспользуемся теперь формулой

$$V(ys_n) = V(y) + \int_0^t \dot{V}(y\tau) d\tau.$$

Оценим правую часть этого равенства, используя (9) и тот факт, что $t < 0$. Имеем

$$V(yt) = V(y) + \int_0^t \dot{V}(ys) ds \leq V(y) + tb(\delta) \quad \forall t < 0.$$

Отсюда следует, что при $t \rightarrow -\infty$ величина $V(yt)$ становится отрицательной. Однако по построению полутраектория $\gamma^-(y) \subset G$, а значит, $V(yt) \geq 0 \forall t \leq 0$, и мы приходим к противоречию. Таким образом, для некоторой последовательности $(s_n) \subset \mathbb{R}^-$ выполняется условие (7).

Наконец, докажем утверждение *б*. Используя построенную выше последовательность $(s_n) \subset \mathbb{R}^-$, $s_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, рассмотрим последовательность величин $(V(ys_n)) \subset \mathbb{R}^+$. На основании (7), а также условия $V(\gamma^-(y)) \geq 0$ и предположения 1) имеем $V(ys_n) \rightarrow 0$. Кроме того, из условия 3) следует, что при заданном y функция $V(yt)$ (из \mathbb{R}^- в \mathbb{R}^+) монотонная, а значит, при $t \rightarrow -\infty$ она имеет единственный предел. Это означает, что из предела $V(ys_n) \rightarrow 0$ следует предел $V(yt) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Условие *б* доказано.

Теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что примером приложения теоремы 3 может служить известная теорема 12.1 [3, с. 77], поскольку любое движение в шаре $B(M, \Delta)$ с компактным инвариантным множеством M локально компактной динамической системы удовлетворяет определению асимптотической компактности.

Библиографические ссылки

1. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения*. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1950. 472 с.
2. Четаев НГ. *Устойчивость движения*. 2-е издание. Москва: Гостехиздат; 1955. 207 с.

3. Красовский НН. *Некоторые задачи теории устойчивости движения*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1959. 211 с.
4. Kalitine BS, Kalitine PB. On the stability of almost periodic systems. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2014;1:78–82.
5. Андреев АС. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем. *Прикладная математика и механика*. 1979;43(5):796–805.
6. Калитин БС. Устойчивость неавтономных динамических систем. В: *Актуальные задачи теории динамических систем управления*. Минск: Наука и техника; 1989. с. 37–46.
7. Калитин БС. О решении задач устойчивости прямым методом Ляпунова. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2017;6:33–43.
8. Зубов ВИ. *Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение)*. 2-е издание. Москва: Высшая школа; 1984. 232 с.
9. Bhatia NP, Szegő GP. *Stability theory of dynamical systems*. Berlin: Springer-Verlag; 1970. XII, 225 p.
10. Kelllett CM. Classical converse theorems in Lyapunov's second method. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B*. 2015;20(8):2333–2360. DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2333.
11. Калитин БС. В-устойчивость и проблема Флорио – Сейберта. *Дифференциальные уравнения*. 1999;35(4):453–463.
12. Калитин БС. Неустойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова. *Математические заметки*. 2009;85(3):382–394. DOI: 10.4213/mzm4115.
13. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Качественная теория)*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 258 с.
14. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 с.
15. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces*. New York: Springer-Verlag; 1981. 474 p. (Applied mathematical sciences; volume 37). DOI: 10.1007/978-1-4612-5977-0.
16. Сибирский КС, Шубь АС. *Полудинамические системы (Топологическая теория)*. Кишинев: Штиинца; 1987. 272 с.
17. Сибирский КС. *Введение в топологическую динамику*. Кишинев: Редакционно-издательский отдел Академии наук Молдавской ССР; 1970. 144 с.
18. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matemáticas. Serie: Comunicaciones*. 2001;29:11–16.
19. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 73 p.

References

1. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* [General problem on stability of motion]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1950. 472 p. Russian.
2. Chetaev NG. *Ustoichivost' dvizheniya* [Stability of motion]. 2nd edition. Moscow: Gostekhizdat; 1955. 207 p. Russian.
3. Krasovskii NN. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of stability of motion]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1959. 211 p. Russian.
4. Kalitine BS, Kalitine PB. On the stability of almost periodic systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2014;1:78–82.
5. Andreev AS. [On the asymptotic stability and instability of non-autonomous systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1979;43(5):796–805. Russian.
6. Kalitine BS. [Stability of non-autonomous dynamic systems]. In: *Aktual'nye zadachi teorii dinamicheskikh sistem upravleniya* [Actual problems of the theory of dynamic control systems]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1989. p. 37–46. Russian.
7. Kalitine BS. On solving the problems of stability by Lyapunov's direct method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 2017;6:33–43. Russian.
8. Zubov VI. *Ustoichivost' dvizheniya (metody Lyapunova i ikh primeneniye)* [Stability of motion (the methods of Lyapunov and their application)]. 2nd edition. Moscow: Vysshaya shkola; 1984. 232 p. Russian.
9. Bhatia NP, Szegő GP. *Stability theory of dynamical systems*. Berlin: Springer-Verlag; 1970. XII, 225 p.
10. Kelllett CM. Classical converse theorems in Lyapunov's second method. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B*. 2015;20(8):2333–2360. DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2333.
11. Kalitine BS. [B-stability and the Florio – Seibert problem]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1999;35(4):453–463. Russian.
12. Kalitine BS. [Instability of closed invariant sets of semi-dynamical systems. The method of semi-definite Lyapunov functions]. *Matematicheskie zametki*. 2009;85(3):382–394. Russian. DOI: 10.4213/mzm4115.
13. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem (Kachestvennaya teoriya)* [Stability of dynamical systems (Qualitative theory)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 258 p. Russian.
14. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem (Metod znakovostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of dynamical systems (Method of semi-definite Lyapunov functions)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 p. Russian.
15. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces*. New York: Springer-Verlag; 1981. 474 p. (Applied mathematical sciences; volume 37). DOI: 10.1007/978-1-4612-5977-0.
16. Sibirskii KS, Shube AS. *Poludinamicheskie sistemy (Topologicheskaya teoriya)* [Semi-dynamic systems (Topological theory)]. Kishinev: Shtiintsa; 1987. 272 p. Russian.
17. Sibirskii KS. *Vvedenie v topologicheskuyu dinamiku* [Introduction to topological dynamics]. Kishinev: Redaktsionno-izdatel'skii otdel Akademii nauk Moldavskoi SSR; 1970. 144 p. Russian.
18. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matemáticas. Serie: Comunicaciones*. 2001;29:11–16.
19. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 73 p.

УДК 515.12

О СЧЕТНОКОМПАКТИФИЦИРУЕМОСТИ В СМЫСЛЕ МОРИТА

Г. О. КУКРАК¹⁾, В. Л. ТИМОХОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается расширение Y топологического пространства X , которое канонически вкладывается в воlmэнновское расширение ωX , при этом в нем замкнуто любое счетно-компактное замкнутое в X множество и имеет предельную точку любое лежащее в X бесконечное множество. Такое расширение названо насыщением пространства X . Находится необходимое и достаточное условие счетнокомпактности пространства Y . Тем самым решается проблема существования счетнокомпактификации в смысле Морита определенного типа.

Ключевые слова: счетнокомпактификация в смысле Морита; компактификация Волмэна; насыщение топологического пространства.

ON THE COUNTABLY-COMPACTIFIABILITY IN THE SENSE OF MORITA

H. O. KUKRAK^a, V. L. TIMOKHOVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: H. O. Kukrak (kukrak@bsu.by)

We consider an extension Y of a topological space X that is canonically embedded in the Wallman extension ωX , in which any countably compact set closed in X is closed and such that any infinite set contained in X has a limit point in it.

Образец цитирования:

Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О счетнокомпактифицируемости в смысле Морита. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:46–53.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-46-53>

For citation:

Kukrak HO, Timokhovich VL. On the countably-compactifiability in the sense of Morita. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:46–53. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-46-53>

Авторы:

Глеб Олегович Кукрак – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:

Hleb O. Kukrak, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
kukrak@bsu.by

Vladimir L. Timokhovich, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
timvlaleo@gmail.com

This extension is called saturation of the space X . We find a necessary and sufficient condition for the countable compactness of the space Y . Thus the problem of existence of countably-compactification in the sense of Morita of certain type is solved.

Keywords: countably-compactification in the sense of Morita; Wallman compactification; saturation of topological space.

Введение

Понятия перистого паракомпакта (А. В. Архангельский [1]) и M -пространства (К. Морита [2]) появились почти одновременно. Сразу же обращает на себя внимание схожесть их внешних характеристик. В классе хаусдорфовых пространств перистые паракомпакты и только они допускают метризуемый образ при совершенном отображении. И аналогично, M -пространства и только они допускают метризуемый образ при квазисовершенном отображении. Когда перистые паракомпакты были охарактеризованы как замкнутые подпространства произведений метризуемых пространств на компакты (Дж. Нагата [3]), возник вопрос о возможности аналогичной характеристики M -пространств. Вскоре было доказано (К. Морита [4]), что представимость M -пространства X в виде замкнутого подпространства произведения метризуемого пространства на вполне регулярное счетно-компактное (аналог полученной в [3] характеристики перистого паракомпакта) равносильна его счетнокомпактифицируемости, т. е. существованию для X вполне регулярного счетно-компактного расширения, в котором замкнуто любое замкнутое в X счетно-компактное множество. Как оказалось, даже не все нормальные локально компактные M -пространства счетно-компактифицируемы [5]. Но и при наличии полученных контрпримеров задача нахождения необходимых и достаточных условий счетнокомпактифицируемости (не обязательно M -пространства) представляет определенный интерес (см., например, [6–8]).

В предлагаемой работе для произвольного T_1 -пространства X строится расширение, в котором X относительно счетно-компактно (т. е. любое лежащее в X бесконечное множество имеет в этом расширении предельную точку) и в котором замкнуто любое счетно-компактное замкнутое в X множество (в [7] такое расширение названо насыщением). Для этого расширения (в случае регулярности пространства X) находится необходимое и достаточное условие его счетнокомпактности (см. теорему 5). В классе вполне регулярных δ -хаусдорфовых пространств (см. определение 5) это позволяет решить вопрос о существовании счетнокомпактификации определенного типа (см. теорему 7), что отчасти дополняет работу [6]. В плане использования в качестве отправной точки некоторых построений волмэновского расширения ωX настоящая статья примыкает к работам [7; 8].

Кратко об обозначениях. Под пространством понимаем произвольное топологическое T_1 -пространство (если иное не оговорено). Пусть X – пространство, $A \subset X$, α – семейство некоторых множеств в X . Обозначим $[A]_X$ и $|A|$ замыкание и мощность множества A соответственно; $St_\alpha(A) = \cup\{U \in \alpha \mid U \cap A \neq \emptyset\}$; $ST_\alpha(A) = \{U \in \alpha \mid U \cap A \neq \emptyset\}$; $Cov(X)$ – семейство всех открытых покрытий пространства X ; $C(X, I)$ – множество всех непрерывных отображений пространства X в отрезок $I = [0; 1]$; \mathbb{N} – натуральный ряд. Будем использовать запись вида $A \underset{op}{\subset} X$ ($A \underset{cl}{\subset} X$), если A открыто (замкнуто соответственно) в X ; $A \underset{dense}{\subset} X$, если $[A]_X = X$; $A \underset{\omega-dense}{\subset} X$, если для любой точки $x \in X$ найдется не более чем счетное множество $B \subset A$ такое, что $x \in [B]_X$. Наконец, множество A назовем дискретом в X , если A счетно, дискретно (как подпространство) и замкнуто в X .

Предварительные рассуждения

Пусть X и Y – произвольные пространства и $X \subset Y$ (т. е. X – подпространство в Y).

Определение 1 [9]. Пространство Y называют звезднокомпактным (X -звезднокомпактным), если для любого покрытия $\alpha \in Cov(Y)$ найдется конечное множество $A \subset Y$ ($A \subset X$ соответственно) такое, что $ST_\alpha(A) \in Cov(Y)$ (т. е. $St_\alpha(A) = Y$).

Понятия звезднокомпактности и счетнокомпактности тесно связаны.

Теорема 1 [9]. Если пространство Y счетно-компактно, то оно и звезднокомпактно.

Теорема 2 [10]. Если пространство Y является хаусдорфовым и звезднокомпактным, то оно и счетно-компактно.

Теорему 1 можно дополнить следующим образом.

Теорема 3. Пусть $X \underset{\omega-dense}{\subset} Y$. Тогда если Y счетно-компактно, то оно и X -звезднокомпактно.

Доказательство. Допустим от противного, что существует покрытие $\alpha \in \text{Cov}(Y)$ такое, что $St_\alpha(A) \neq Y$ для любого конечного $A \subset X$. Покажем, что тогда $St_\alpha(A) \neq Y$ и для любого счетного $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Действительно, так как $St_\alpha(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} St_\alpha(\{a_1, \dots, a_n\})$, то из равенства $St_\alpha(A) = Y$ и счетнокомпактности пространства Y следовало бы, что $St_\alpha(\{a_1, \dots, a_n\}) = Y$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит допущению. Выберем далее множество $B = \{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ так, чтобы $St_\alpha(B) = Y$ (см. теорему 1). Согласно условию для каждой точки y_i подберем не более чем счетное множество $K_i \subset X$ такое, что $y_i \in [K_i]_Y$, и обозначим $A = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Поскольку $St_\alpha(A) = St_\alpha([A]_Y)$ и $St_\alpha([A]_Y) \supset St_\alpha(B)$, то $St_\alpha(A) = Y$. Но $A \subset X$ и A не более чем счетно. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следующая теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3, вытекает очевидным образом из теоремы 2.

Теорема 4. Пусть пространство Y хаусдорфово. Если Y X -звезднокомпактно, то оно и счетнокомпактно.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Для произвольных $U \subset X$ и $\alpha \in \text{Cov}(X)$ обозначим $\hat{U} = \bigcup_{op} \{G \subset Y | G \cap X = U\}$ (т. е. \hat{U} – максимальное открытое раздутие U в Y , или, другими словами, $\hat{U} = Y \setminus [X \setminus U]_Y$), $\hat{\alpha} = \{\hat{U} | U \in \alpha\}$ и далее $\text{COV}_Y(X) = \{\alpha \in \text{Cov}(X) | \hat{\alpha} \in \text{Cov}(Y)\}$.

Следующие предложения 1 и 2 очевидны.

Предложение 1. Если пространство Y X -звезднокомпактно, то для любого покрытия $\alpha \in \text{COV}_Y(X)$ можно выбрать конечное множество $A \subset X$, для которого $ST_\alpha(A) \in \text{COV}_Y(X)$.

Предложение 2. Пусть $X \subset Y$, множества вида \hat{U} , где $U \subset X$, составляют базу топологии в пространстве Y , а для любого покрытия $\alpha \in \text{COV}_Y(X)$ можно выбрать конечное множество $A \subset X$ так, что $ST_\alpha(A) \in \text{COV}_Y(X)$. Тогда пространство Y X -звезднокомпактно.

Непосредственно из теорем 3, 4 и предложений 1, 2 вытекает приведенное ниже следствие.

Следствие 1. Пусть $X \subset_{\omega\text{-dense}} Y$, Y хаусдорфово и множества вида \hat{U} , где $U \subset X$, составляют базу топологии в Y . Пространство Y тогда и только тогда счетно-компактно, когда для любого покрытия $\alpha \in \text{COV}_Y(X)$ можно выбрать конечное множество $A \subset X$ таким образом, что $ST_\alpha(A) \in \text{COV}_Y(X)$.

Насыщение и его счетнокомпактность

Рассматриваем те же пространства X и Y , $X \subset Y$.

Определение 2 [11]. Скажем, что пространство X относительно счетно-компактно в Y , если любое бесконечное множество $A \subset X$ имеет в Y предельную точку.

Определение 3 [7]. Пространство Y назовем насыщением пространства X , если $X \subset_{dense} Y$, X относительно счетно-компактно в Y и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто и в Y .

Отметим, что если Y – насыщение для X и $A \subset X$, то $[A]_Y$ – насыщение для A .

Рассмотрим далее волмэновское компактное расширение ωX пространства X . Напомним, что на рост $X^* = \omega X \setminus X$ составляют замкнутые (т. е. состоящие из замкнутых в X множеств) свободные (т. е. имеющие пустое пересечение) ультрафильтры и базу топологии в ωX образуют множества вида $W(U) = U \cup \{\xi \in X^* | U \supset F \text{ для некоторого } F \in \xi\}$, где $U \subset X$ (подробнее см. [12, с. 272]). Отметим, что $W(U) = \bigcup_{op} \{G \subset \omega X | G \cap X = U\}$, и если $F \subset X$ и $F \subset_{cl} U \subset X$, то $[F]_{\omega X} = F \cup \{\xi \in X^* | F \in \xi\}$ и $[F]_{\omega X} \subset W(U)$. Также отметим выполнение соотношений $W(U_1 \cup \dots \cup U_n) = W(U_1) \cup \dots \cup W(U_n)$ и $[F_1 \cap \dots \cap F_n]_{\omega X} = [F_1]_{\omega X} \cap \dots \cap [F_n]_{\omega X}$, где $U_i \subset X$, $F_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$ (см. там же). И наконец, для $F \subset X$ обозначим $F^* = [F]_{\omega X} \setminus F = \{\xi \in X^* | F \in \xi\}$.

Далее через Δ обозначим семейство всех дискретов в X , т. е. счетных дискретных (как подпространство) замкнутых в X множеств. Подсемейство $\beta \subset \Delta$ назовем Δ -базой (семейства Δ), если для любого $A \in \Delta$ можно выбрать $B \in \beta$ такое, что $B \subset A$. Зафиксируем некоторую Δ -базу β и положим $Y_\beta = X \cup$

$\cup \{ \xi \in X^* \mid \xi \cap \beta \neq \emptyset \}$. Ясно, что $X \subset Y_\beta \subset \omega X$, $Y_\beta = X \cup \left(\cup \{ A^* \mid A \in \beta \} \right)$ и $W(U) \cap Y_\beta = \hat{U}$ для любого $U \subset X$ (здесь, как и выше, $\hat{U} = \cup \left\{ G \subset Y_\beta \mid G \cap X = U \right\}$). Отметим также, что если β_1 и β_2 – Δ -базы и $\beta_1 \subset \beta_2$, то $Y_{\beta_1} \subset Y_{\beta_2} \subset Y_\Delta$.

Предложение 3. *Пространство Y_β – насыщение для пространства X , причем выполняются условия:*

- 1) $X \underset{\omega\text{-dense}}{\subset} Y_\beta$;
- 2) множества \hat{U} , где $U \subset X$, образуют базу топологии в Y_β ;
- 3) если $A \in \beta$, то $[A]_{Y_\beta} = [A]_{\omega X}$ и $[A]_{Y_\beta}$ компактно;
- 4) если $F \subset X$ и $F \subset U \subset X$, то $[F]_{Y_\beta} \subset \hat{U}$;
- 5) если $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$, то $\hat{U} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$, если $F = F_1 \cap \dots \cap F_n$, то $[F]_{Y_\beta} = [F_1]_{Y_\beta} \cap \dots \cap [F_n]_{Y_\beta}$, где $U_i \subset X$, $F_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$;
- б) если X регулярно, то Y_β хаусдорфово.

Доказательство следует непосредственно из построения. Остановимся кратко лишь на п. 6. Достаточно рассмотреть ультрафильтры $\xi, \psi \in Y_\beta \setminus X$, $\xi \neq \psi$. Свойства ультрафильтров (см. [12, с. 271]) позволяют выбрать дизъюнктные множества $F_1 \in \xi$ и $F_2 \in \psi$. Пусть $A \in \xi \cap \beta$ и $B \in \psi \cap \beta$. Обозначим $A' = A \cap F_1$, $B' = B \cap F_2$. Очевидно, что A' и B' дизъюнктны, $A' \in \xi$, $B' \in \psi$ и $A' \cup B' \in \Delta$. Если пространство X регулярно, то любой дискрет из Δ (в частности, $A' \cup B'$) можно раздуть до дизъюнктного семейства окрестностей его точек. Таким образом, для A' и B' найдутся дизъюнктные окрестности U и V , $A' \subset U \subset X$ и $B' \subset V \subset X$. Имеем далее $\xi \in [A']_{Y_\beta} \subset \hat{U}$, $\psi \in [B']_{Y_\beta} \subset \hat{V}$ (см. п. 4) и $\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$. Предложение доказано.

Перейдем к вопросу о счетнокомпактности насыщения Y_β .

Определение 4. Покрытие $\alpha \in \text{Cov}(X)$ назовем β -крупным, если любой дискрет $A \in \beta$ покрывается конечным числом элементов α . Семейство всех β -крупных покрытий обозначим $BCov_\beta(X)$.

Лемма. *Покрытие $\alpha \in \text{Cov}(X)$ является β -крупным тогда и только тогда, когда $\alpha \in COV_{Y_\beta}(X)$ (т. е. $BCov_\beta(X) = COV_{Y_\beta}(X)$).*

Доказательство. Сначала докажем *необходимость*. Пусть $\alpha \in BCov_\beta(X)$ и $\xi \in Y_\beta \setminus X$. Выберем дискрет $A \in \xi \cap \beta$, затем множества $U_1, \dots, U_n \in \alpha$, покрывающие A . Имеем $A \subset U$, где $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$, откуда $\xi \in [A]_{Y_\beta} \subset \hat{U}$ (см. предложение 3, п. 4). Но $\hat{U} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$ (см. предложение 3, п. 5), а следовательно, $\xi \in \hat{U}_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq n$. Итак, $\alpha \in COV_{Y_\beta}(X)$.

Докажем *достаточность*. Пусть $\alpha \in COV_{Y_\beta}(X)$ и $A \in \beta$. Поскольку множество $[A]_{Y_\beta}$ компактно (см. предложение 3, п. 3), то можно выбрать множества $U_1, \dots, U_n \in \alpha$ такие, что $\hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n \supset [A]_{Y_\beta}$. Но тогда $U_1 \cup \dots \cup U_n \supset A$. Таким образом, $\alpha \in BCov_\beta(X)$. Лемма доказана.

Из следствия 1, предложения 3 и леммы вытекает приведенная ниже теорема.

Теорема 5. *Пусть пространство X регулярно. Насыщение Y_β счетно-компактно тогда и только тогда, когда для любого покрытия $\alpha \in BCov_\beta(X)$ можно выбрать конечное множество $A \subset X$ так, что $ST_\alpha(A) \in BCov_\beta(X)$.*

Остановимся более подробно на отделимости пространства Y_β .

Определение 5 [13]. Пространство X называют δ -хаусдорфовым, если оно хаусдорфово и из любого множества $A \in \Delta$ можно выделить бесконечное подмножество $B \subset A$, допускающее раздутие до дискретного семейства $\{U_b \mid b \in B\}$, где $b \in U_b \subset X$, $b \in B$.

Напомним некоторые схожие определения. В [14] пространство X названо хорошо отделимым (*well separated*), если любое множество $A \in \Delta$ допускает раздутие до локально конечного семейства $\{U_a \mid a \in A\}$, где $a \in U_a \subset X$, $a \in A$. Чуть позже в [6] появилось определение свойства *ss-дискретности* (*ss-discrete property*), а именно: пространство X имеет это свойство, если из любого множества $A \in \Delta$ можно выбрать бесконечное подмножество $B \subset A$, допускающее раздутие до локально конечного семейства $\{U_b \mid b \in B\}$, где $b \in U_b \subset X$, $b \in B$. Очевидно, что все хорошо отделимые, а также все δ -хаусдорфовы пространства обладают свойством *ss-дискретности*. В [6] приведен пример вполне регулярного пространства

со свойством ss -дискретности, которое не является хорошо отделимым. Несложно проверить, что в классе регулярных пространств свойства ss -дискретности и δ -хаусдорфовости равносильны.

Через δ обозначим семейство всех дискретов $A \in \Delta$, допускающих раздутье до дискретного семейства окрестностей своих точек, Δ -базу β назовем δ -базой, если $\beta \subset \delta$. Отметим, что если пространство X δ -хаусдорфово, то из любой Δ -базы можно выбрать δ -базу и само семейство δ является одной из Δ -баз. И обратно, если X хаусдорфово и хотя бы одна Δ -база является δ -базой, то X δ -хаусдорфово.

Следующее предложение дополняет п. 6 из предложения 3.

Предложение 4. Если насыщение Y_β регулярно (для некоторой Δ -базы β), то X δ -хаусдорфово и $\beta \subset \delta$ (т. е. β является δ -базой). Обратно, если X регулярно и δ -хаусдорфово, то Y_β регулярно для любой δ -базы β .

Доказательство фактически содержится в [15, лемма 2, теорема 5].

Предложение 5. Пусть X вполне регулярно и δ -хаусдорфово. Тогда и Y_β вполне регулярно для любой δ -базы β .

Доказательство. Ограничимся рассмотрением точки $\xi \in Y_\beta \setminus X$. Пусть $\xi \in \hat{U}$, где $U \subset X$. Покажем, что существует функция $\varphi \in C(Y_\beta, I)$ такая, что $\varphi(\xi) = 1$ и $\varphi(y) = 0$ при $y \in Y_\beta \setminus \hat{U}$. В силу op -устройства Y_β можно выбрать дискрет $A \in \xi \cap \delta$ такой, что $A \subset U$. Раздуюм A до дискретного семейства окрестностей $U_a, a \in U_a \subset X, a \in A$. Можно считать, что $U_a \subset U$ для всех $a \in A$. Далее для каждой точки $a \in A$ зафиксируем функцию $f_a \in C(X, I), f_a(a) = 1, f_a(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_a$, и положим $f(x) = \max \{f_a(x) | a \in A\}$. Легко проверить, что $f \in C(X, I), f(A) = \{1\}$ и $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus U$. Функция f однозначно продолжается до функции $F \in C(\omega X, I)$ (см. [12, с. 272]), для которой имеем $F(\xi) \in F([A]_{\omega X}) = \{1\}, F(z) = 0$ при $z \in \omega X \setminus W(U)$. Осталось положить $\varphi = F|_{Y_\beta}$. Предложение доказано.

ω -Насыщение пространства X

Возвращаемся к пространствам X и $Y, X \subset Y$.

Определение 6. Пусть β – Δ -база и выполняются условия:

а) для любой точки $z \in Y \setminus X$ найдется дискрет $A \in \beta$ такой, что $z \in [A]_Y$, и обратно, $[A]_Y \cap (Y \setminus X) \neq \emptyset$ для любого $A \in \beta$;

б) если $B \subset A \in \beta$ и $B \subset U \subset X$, то $[B]_Y \subset \hat{U}$ (или, другими словами, если $A \in \beta$ и $F \subset_{cl} X$, то $[F]_Y \cap [A \setminus F]_Y = \emptyset$);

в) множества вида \hat{U} , где $U \subset X$, образуют базу топологии пространства Y .

Тогда пространство Y назовем ω -насыщением (или насыщением типа ω) для пространства X , а Δ -базу β – ω -допустимой для Y . Если Y является ω -насыщением и для некоторой ω -допустимой Δ -базы β компактны все множества $[A]_Y$, где $A \in \beta$, то Y назовем Ω -насыщением (или насыщением типа Ω) для X , а Δ -базу β – Ω -допустимой.

Замечание. Любое ω -насыщение является насыщением. Действительно, в силу условия а пространство X относительно счетно-компактно в Y , а в силу условия б любое замкнутое в X счетно-компактное множество замкнуто и в Y . Отметим также, что при регулярности пространства Y условие в выполняется автоматически.

Очевидно, что все рассмотренные в предыдущем разделе насыщения вида Y_β являются Ω -насыщениями и любая Δ -база β Ω -допустима для Y_β . Докажем, что в определенном смысле верно и обратное. Для этого зафиксируем произвольное ω -насыщение Y (для X), ω -допустимую (для Y) Δ -базу β и определим каноническое (т. е. тождественное на X) вложение $j: Y \rightarrow \omega X$ (т. е. $Y \rightarrow j(Y)$ – гомеоморфизм) следующим образом. Положим $j(x) = x$ при $x \in X$. Для $z \in Y \setminus X$ зафиксируем $A \in \beta$ такое, что $z \in [A]_Y$, и рассмотрим множество $\kappa(z, A) = \bigcap \left\{ [A \cap O]_{\omega X} \mid z \in O \subset_{op} Y \right\}$. Ясно, что $\emptyset \neq \kappa(z, A) \subset X^*$.

Пусть $\xi \in \kappa(z, A)$. Допустим, что $\xi' \in \kappa(z, A)$ и $\xi' \neq \xi$. Выберем $F \in \xi$ и $F' \in \xi'$ так, чтобы $F \cap F' = \emptyset$ (свойства ультрафильтров см. в [12, с. 271]). Поскольку $F \cap A \cap O \neq \emptyset$ и $F' \cap A \cap O \neq \emptyset$ для любой окрестности O точки z , то $z \in [F \cap A]_Y$ и $z \in [F' \cap A]_Y$, что невозможно (см. условие б в определении б).

Таким образом, $\kappa(z, A) = \{\xi\}$. Если $z \in [B]_Y$, где $B \in \beta$, и $\kappa(z, B) = \{\xi'\}$, то, рассуждая аналогичным образом, получаем $\xi = \xi'$. Итак, множество $\kappa(z, A)$ одноточечно и не зависит от выбора A . Полагаем $j(z) = \xi$. Отображение $j: Y \rightarrow \omega X$ определено. Проверим инъективность. Пусть $z, z' \in Y \setminus X, z \neq z'$,

$z \in [A]_Y$, $z' \in [B]_Y$, где $A, B \in \beta$, $j(z) = \xi$, $j(z') = \xi'$, и допустим, что $\xi = \xi'$. Но тогда, как несложно заметить, $z \in [A \cap B \cap O \cap O']_Y$ и $z' \in [A \cap B \cap O \cap O']_Y$ для любых окрестностей O точки z и O' точки z' . Выберем окрестность \hat{U} точки z , где $U \subset X$, так, чтобы $z' \notin \hat{U}$ (см. условие ϵ в определении б), и обозначим $C = A \cap U$. Имеем $z' \in [C]_Y$ (см. выше). С другой стороны, $C \subset U$, а следовательно, $[C]_Y \subset \hat{U}$ (см. условие б в определении б), что противоречит соотношению $z' \notin \hat{U}$. Инъективность проверена. Для доказательства непрерывности j и $j^{-1}: j(Y) \rightarrow Y$ достаточно показать, что если $z \in Y \setminus X$ и $j(z) = \xi$, то соотношения $z \in \hat{U}$ и $\xi \in W(U)$ равносильны для произвольного $U \subset X$. Зафиксируем дискрет $A \in \beta$, для которого $z \in [A]_Y$. Пусть $\xi \in W(U)$. Тогда $F \cap A \cap O \subset U$ для некоторых $F \in \xi$ и окрестности O точки z , а следовательно, $z \in [F \cap A \cap O]_Y \subset \hat{U}$. И обратно, пусть $z \in \hat{U}$. Тогда $\hat{U} \cap A = U \cap A \in \xi$, откуда $\xi \in W(U)$. Итак, отображение $j: Y \rightarrow j(Y)$ – гомеоморфизм, причем, как легко заметить, $j(Y) \subset Y_\beta$. Если же Y – Ω -насыщение и Δ -база β Ω -допустима, то $j(Y) = Y_\beta$, поскольку $j([A]_Y) = [A]_{\omega X}$ при $A \in \beta$, что вытекает из непрерывности j и того факта, что $[F]_{\omega X}$ и ωF канонически гомеоморфны для любого $F \subset X$ [11, с. 70]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. Для любого ω -насыщения Y пространства X с ω -допустимой Δ -базой β существует каноническое вложение пространства Y в Y_β , причем если Y – Ω -насыщение, а Δ -база β Ω -допустима, то Y и Y_β канонически гомеоморфны.

Учитывая предложение 4, получаем приведенное ниже следствие.

Следствие 2. Любое пространство, допускающее регулярное насыщение типа Ω , является δ -хаусдорфовым.

Счетнокомпактификация типа Ω

По-прежнему рассматриваем пространства X и Y , $X \subset Y$. Напомним следующее определение.

Определение 7 [4]. Пространство Y называют счетнокомпактификацией пространства X , если $X \subset \overset{\text{dense}}{Y}$, Y вполне регулярно и счетно-компактно и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто в Y .

Проведенные нами рассуждения служат достаточной мотивацией выделения в отдельный тип счетнокомпактификаций, являющихся Ω -насыщениями.

Определение 8. Пространство Y назовем счетнокомпактификацией типа Ω для пространства X , если Y – вполне регулярное счетно-компактное Ω -насыщение пространства X .

Отметим, что если описанное в определении 8 пространство Y существует, то в силу теоремы 6 и предложения 4 можно считать, что $Y = Y_\beta$, где β – некоторая Δ -база, пространство X δ -хаусдорфово и β является δ -базой. С другой стороны, если X вполне регулярно и δ -хаусдорфово, а β – δ -база, то Y_β вполне регулярно (см. предложение 5).

Итак, вопрос о существовании счетнокомпактификации типа Ω свелся к вопросу о счетнокомпактности Y_β , где β – некоторая δ -база, а пространство X вполне регулярно и δ -хаусдорфово. Теорема 5 позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 7. Пусть пространство X вполне регулярно и δ -хаусдорфово. Пространство X допускает счетнокомпактификацию типа Ω тогда и только тогда, когда для некоторой δ -базы β выполняется условие: для любого покрытия $\alpha \in BCov_\beta(X)$ существует конечное множество $A \subset X$ такое, что $ST_\alpha(A) \in BCov_\beta(X)$.

В завершение приведем сравнительно простой, но достаточно интересный пример, использующий стоун-чеховскую (она же волмэновская) компактификацию натурального ряда \mathbb{N} .

Пример. Положим $X = \mathbb{N}$. Зафиксируем некоторый ультрафильтр $\xi_0 \in \mathbb{N}^*$ и рассмотрим Δ -базы $\beta = \Delta \setminus \xi_0$ (здесь ξ_0 понимается как семейство множеств в \mathbb{N}) и Δ , а также соответствующие Ω -насыщения $Y_\beta = \omega\mathbb{N} \setminus \{\xi_0\}$ и $Y_\Delta = \omega\mathbb{N}$. Имеем: Y_Δ компактно, в то время как Y_β счетно-компактно, но не компактно (см. [12, с. 309]). Далее зафиксируем счетные множества $S_i \subset \mathbb{N}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \mathbb{N}$ и $S_i \cap S_j = \emptyset$ при

$i \neq j$, и обозначим $\gamma_0 = \{A \in \Delta \mid A \subset S_i \text{ для некоторого } i \in \mathbb{N}\}$, $\gamma_1 = \{A \in \Delta \mid |A \cap S_i| \leq 1 \text{ для любого } i \in \mathbb{N}\}$, $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$, $K_0 = \{\xi \in \mathbb{N}^* \mid \xi \cap \gamma_0 \neq \emptyset\}$ и $K_1 = \{\xi \in \mathbb{N}^* \mid \xi \cap \gamma_1 \neq \emptyset\}$. Простая проверка показывает, что

γ - Δ -база, $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ и $Y_\gamma = \mathbb{N} \cup K_0 \cup K_1$. Докажем, что Ω -насыщение Y_γ не счетно-компактно. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ зафиксируем ультрафильтр $\xi_i \in S_i^*$. Множество $D = \{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ замкнуто в $\mathbb{N} \cup K_0$ и дискретно. Пусть $\xi \in K_1$ и $A \in \xi \cap \gamma_1$. Рассмотрим окрестность $W(A)$ ультрафильтра ξ . Допустим, что $\xi_i \in W(A)$. Но тогда $A \in \xi_i$ и в то же время $S_i \in \xi_i$, откуда $A \cap S_i \in \xi_i$, что невозможно, поскольку $|A \cap S_i| \leq 1$. Таким образом, D бесконечно и не имеет в Y_γ предельной точки, откуда следует, что Y_γ не счетно-компактно. Итак, уже при $X = \mathbb{N}$ для Ω -насыщения реализуются три возможности: быть компактификацией, являться не компактной счетнокомпактификацией типа Ω , не быть счетно-компактным. И наконец, построим для \mathbb{N} счетно-компактное ω -насыщение Y , которое не является Ω -насыщением. Для каждого дискрета $A \in \Delta$ зафиксируем некоторый ультрафильтр $\xi_A \in A^*$ и обозначим $D = \{\xi_A \mid A \in \Delta\}$. Поскольку $|D| \leq |\Delta| = \mathfrak{c}$ (\mathfrak{c} – мощность континуума), а для любого дискрета A мощность $|A^*| = |[A]_{\omega\mathbb{N}}| = |\omega\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$ (см. [12, с. 268]), то $\emptyset \neq A^* \setminus D \neq A^*$. Полагая $Y = \omega\mathbb{N} \setminus D$, получаем ω -насыщение (для \mathbb{N}), для которого никакой Ω -допустимой Δ -базы не существует. В качестве ω -допустимой Δ -базы, очевидно, подходит само семейство Δ . Проверим счетнокомпактность пространства Y . Пусть $M \subset Y$ и M счетно. Ясно, что $[M]_Y = [M]_{\omega\mathbb{N}} \setminus D$. А поскольку $[M]_{\omega\mathbb{N}} = 2^{\mathfrak{c}}$ (см. [12, с. 269]), то $[M]_Y \neq M$, что показывает существование в Y предельных точек для M .

Библиографические ссылки

1. Архангельский АВ. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства. *Математический сборник*. 1965;67(1):55–88.
2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen*. 1964;154(4):365–382.
3. Nagata Jun-iti. A note on M-spaces and topologically complete spaces. *Proceedings of the Japan Academy*. 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.
4. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A*. 1973;12(313/328):7–15.
5. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact M-spaces. *Set-Theoretic Topology*. 1977:81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
6. Isiwata T. On closed countably-compactifications. *General Topology and its Applications*. 1974;4(2):143–167. DOI: 10.1016/0016-660X(74)90017-8.
7. Голдовт ИЮ, Тимохович ВЛ. Насыщения топологических пространств и проблема Морита. *Доклады Академии наук БССР*. 1977;21(9):777–780.
8. Левин МА, Тимохович ВЛ. M-пространства и сильная счетнокомпактифицируемость. *Доклады Академии наук БССР*. 1979;23(3):213–216.
9. Fleischman WM. A new extension of countable compactness. *Fundamenta Mathematicae*. 1970;67(1):1–9.
10. van Douwen EK, Reed GM, Roscoe AW, Tree IJ. Star covering properties. *Topology and its Applications*. 1991;39(1):71–103. DOI: 10.1016/0166-8641(91)90077-Y.
11. Архангельский АВ. Компактность. В: *Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 50*. Москва: ВИНТИ; 1989. с. 5–128.
12. Энгелькинг Р. *Общая топология*. Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 752 с.
13. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О пределе обратного спектра экспоненциальных пространств. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2001;1:51–55.
14. Hansard JD. Function space topologies. *Pacific Journal of Mathematics*. 1970;35(2):381–388.
15. Фролова ДС. О секвенциально собственных топологиях пространства отображений. *Труды Института математики*. 2013;21(1):102–108.

References

1. Arkhangel'skii AV. [One class of spaces containing all metric and all locally compact spaces]. *Matematicheskii sbornik*. 1965; 67(1):55–88. Russian.
2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen*. 1964;154(4):365–382.
3. Nagata Jun-iti. A note on M-spaces and topologically complete spaces. *Proceedings of the Japan Academy*. 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.
4. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A*. 1973;12(313/328):7–15.
5. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact M-spaces. *Set-Theoretic Topology*. 1977:81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
6. Isiwata T. On closed countably-compactifications. *General Topology and its Applications*. 1974;4(2):143–167. DOI: 10.1016/0016-660X(74)90017-8.
7. Goldovt IYu, Timokhovich VL. [Saturation of topological spaces and the Morita problem]. *Doklady Akademii nauk BSSR*. 1977; 21(9):777–780. Russian.
8. Levin MA, Timokhovich VL. [M-spaces and the strong countably-compactifiability]. *Doklady Akademii nauk BSSR*. 1979; 23(3):213–216. Russian.

9. Fleischman WM. A new extension of countable compactness. *Fundamenta Mathematicae*. 1970;67(1):1–9.
10. van Douwen EK, Reed GM, Roscoe AW, Tree IJ. Star covering properties. *Topology and its Applications*. 1991;39(1):71–103. DOI: 10.1016/0166-8641(91)90077-Y.
11. Arkhangel'skii AV. [Compactness]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya. Tom 50* [Results of science and technology. Series: Modern problems of mathematics. Fundamental directions. Volume 50]. Moscow: VINITI; 1989. p. 5–128. Russian.
12. Engelking R. *General topology*. Warszawa: Polish Scientific Publishers; 1977. 626 p.
Russian edition: Engelking R. *Obshchaya topologiya*. Antonovskii MYa, Arkhangel'skii AV, translators. Moscow: Mir; 1986. 752 p.
13. Kukrak GO, Timokhovich VL. [On the limit of the inverse spectrum of exponential spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2001;1:51–55. Russian.
14. Hansard JD. Function space topologies. *Pacific Journal of Mathematics*. 1970;35(2):381–388.
15. Frolova DS. On the family of sequentially proper topologies on the space of maps. *Trudy Instituta matematiki*. 2013;21(1):102–108. Russian.

Статья поступила в редколлегию 12.02.2021.
Received by editorial board 12.02.2021.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.172.4+519.178

ГРАФЫ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ ЗАМКНУТЫХ ЛОМАНЫХ

Н. П. ПРОХОРОВ¹⁾, Е. Н. ДУЛЬ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Введен и изучен такой подкласс струнных графов, как графы самопересечений замкнутых ломаных (класс *CPC*-графов). Указаны необходимые условия принадлежности графа к классу *CPC*, запрещенные подграфы данного класса, операции над графами, сохраняющие их принадлежность к классу *CPC*. Рассмотрен вопрос о существовании k -регулярных *CPC*-графов, в частности найдены пары (k, n) и приведены оценки на количество значений k , при которых существует k -регулярный граф на n вершинах, показано существование бесконечного числа k -регулярных *CPC*-графов для любого $k \in \mathbb{N}$. Исследованы алгоритмические вопросы в классе *CPC*-графов. Доказано, что задачи о доминирующем множестве, раскраске, независимости и наибольшем цикле в классе *CPC*-графов являются *NP*-трудными, а задача распознавания *CPC*-графов принадлежит к классу *PSPACE*.

Ключевые слова: граф пересечений; граф самопересечений замкнутой ломаной; регулярный граф; *NP*-полнота; полиномиальная сводимость.

Образец цитирования:

Прохоров НП, Дуль ЕН. Графы самопересечений замкнутых ломаных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;1:54–68. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-54-68>

For citation:

Prochorov NP, Dul EN. Graphs of intersections of closed polygonal chains. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;1:54–68. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-54-68>

Авторы:

Николай Петрович Прохоров – магистрант кафедры дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, доцент М. М. Васьковский.
Екатерина Николаевна Дуль – студентка факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – М. М. Васьковский.

Authors:

Nikolai P. Prochorov, master's degree student at the department of discrete mathematics and algorithmics, faculty of applied mathematics and computer science.
nprohorovmink@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0001-9725-299X>
Ekaterina N. Dul, student at the faculty of applied mathematics and computer science.
ekaterina.dul@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9073-7855>

GRAPHS OF INTERSECTIONS OF CLOSED POLYGONAL CHAINS

N. P. PROCHOROV^a, E. N. DUL^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: N. P. Prochorov (nprochorovminsk@mail.ru)

In the paper such subclass of string graphs as intersection graphs of closed polygonal chains (class of *CPC*-graphs) was considered, necessary conditions for belonging to that class, forbidden subgraphs and operations with graphs which preserve belonging to the *CPC* class were found. Considered question about the existence of k -regular *CPC*-graphs, particularly, pairs (k, n) , such that there exists k -regular *CPC*-graph on n vertexes were found, proved that there are infinitely many k -regular *CPC*-graphs for any $k \in \mathbb{N}$, estimations for the number of k , such that k -regular graph on n vertexes exists, were given. Algorithmic questions in the class of *CPC*-graphs were investigated. It was proved that independent and dominating set problems, coloring problem and the problem about maximal cycle are *NP*-hard in the class of *CPC*-graphs, and problem of recognition of the *CPC*-graphs belongs to the *PSPACE* class.

Keywords: intersection graph; intersection graph of closed polygonal chains; regular graph; *NP*-completeness; polynomial-time reduction.

Введение

Струнным графом назовем граф пересечений конечного набора жордановых кривых на плоскости. Каждой кривой сопоставлена вершина графа, две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им кривые пересекаются. Изначально интерес к данной конструкции возник в связи с ее применением для разработки печатных схем и электрических сетей [1], математическое изучение струнных графов началось со статьи Г. Эрлиха, С. Ивена и Р. Тарьяна [2]. Собственным подмножеством струнных графов является класс *SEG*-графов, а именно графов пересечений набора отрезков [2]. Исследование свойств и описание струнных графов, а также их подклассов до сих пор остается открытой задачей. Одним из последних результатов по классу *SEG*-графов стало доказательство гипотезы Шейнермана [3], которая утверждает, что любой планарный граф является *SEG*-графом. Также в статьях [4; 5] исследован сложностной статус задач распознавания *SEG*-графов и струнных графов и показано, что они принадлежат к классу *NP*-трудных задач.

В данной работе введен и исследован класс *CPC*-графов (от англ. *closed polygonal chain*), а именно графов самопересечений замкнутых ломаных. Будем считать, что любые два звена ломаной имеют не более одной общей точки и никакие три звена не пересекаются в одной точке. Под графом самопересечений ломаной R будем понимать граф, множество вершин которого есть множество звеньев ломаной R . Две его вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им звенья пересекаются вне узлов R .

Получены необходимые условия принадлежности графа к классу *CPC*, в частности ограничение на количество ребер, запрещенные порожденные подграфы. Предложены некоторые операции над графами, сохраняющие их принадлежность к *CPC*-графам.

Подробно изучено существование k -регулярных графов в классе *CPC*. Доказано, что при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много k -регулярных *CPC*-графов, а также приведены достаточные условия существования k -регулярного *CPC*-графа на n вершинах. Получены верхние и нижние оценки на количество регулярных *CPC*-графов на n вершинах.

Показано, что задачи о доминирующем множестве, раскраске, независимости и наибольшем цикле в классе *CPC*-графов являются *NP*-трудными, задача распознавания *CPC*-графа принадлежит к классу *PSPACE*, а построение ломаной с фиксированным графом самопересечений $G \in \text{CPC}$ представляет собой алгоритмически разрешимую задачу.

Вспомогательные результаты

Утверждение 1. Если G является *CPC*-графом, то \bar{G} содержит гамильтонов цикл.

Доказательство. Достаточно заметить, что соседние звенья ломаной не пересекаются вне узлов ломаной, следовательно, соответствующие им вершины графа самопересечений не могут быть смежными.

Представление на плоскости. Через $\mathcal{R}(G)$ обозначим множество всех замкнутых ломаных на плоскости, которые имеют граф самопересечений $G \in \text{CPC}$. Далее ломаную $R \in \mathcal{R}(G)$ для краткости будем называть реализацией *CPC*-графа G .

Теорема 1. В любой реализации *CPC*-графа $G(V, E)$ количество областей, на которые разбивается плоскость, фиксированно и равно $2 + |E|$.

Доказательство. Рассмотрим реализацию $R \in \mathcal{R}(G)$. Ей соответствует плоский граф $P(V_0, E_0)$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) множество вершин V_0 есть множество узлов и точек самопересечений ломаной;
- 2) вершины $x, y \in V_0$ смежны тогда и только тогда, когда они соединены отрезком $[x, y]$ на плоскости таким, что никакая вершина $v \in V_0$ не лежит на (x, y) .

Множество областей, на которые реализация R разбивает плоскость, – это множество граней плоского графа P . Количество вершин графа P равно $|V_0| = |V| + |E|$, т. е. суммарному количеству узлов и точек пересечений ломаной. Степень вершины-узла – 2, а вершины, соответствующей точке пересечения, – 4.

Значит, количество ребер графа P равно $|E_0| = \frac{2|V| + 4|E|}{2} = |V| + 2|E|$.

По формуле Эйлера [6] для графа $P(V_0, E_0)$ получаем искомое количество граней.

Запрещенные подграфы. Граф H будем называть запрещенным подграфом для класса графов A в том случае, когда выполнено следствие: если граф G содержит H в качестве порожденного подграфа, то G не принадлежит к классу графов A .

Теорема 2. Граф H является запрещенным подграфом для класса *CPC* тогда и только тогда, когда H не является *SEG*-графом.

Доказательство. Любой порожденный подграф *CPC*-графа является *SEG*-графом. Следовательно, любой запрещенный подграф для класса *SEG* не может быть порожденным подграфом *CPC*-графа.

Если $H \in \text{SEG}$, то пусть H – граф самопересечений набора отрезков $[A_i B_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Последовательно проведем отрезки $[B_i A_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, и отрезок $[B_n A_1]$. Полученная фигура является замкнутой ломаной, а ее граф самопересечений содержит H в качестве порожденного подграфа.

Замечание 1. Существуют бесконечные серии запрещенных подграфов для класса *SEG*, а следовательно, и для *CPC*-графов. Примеры представлены в статьях [2; 7; 8].

Наиболее известный пример не струнного графа – граф на 15 вершинах, полученный из полного графа на 5 вершинах (K_5) подразбиением каждого его ребра [2].

Замечание 2. Почти все графы не являются *CPC*-графами.

Доказательство. Утверждение о том, что почти все графы не являются графами некоторого класса A , равносильно тому, что вероятность выбрать помеченный граф на n вершинах, принадлежащий к классу A , стремится к нулю, при условии, что каждое ребро в графе проводится с вероятностью $\frac{1}{2}$.

Пусть H – некоторый запрещенный подграф класса *CPC и $|V(H)| = k$. Рассмотрим граф G на n вершинах, где $n = mk + r$, $0 \leq r < k$. Произвольным образом выберем m непересекающихся подмножеств мощности k множества вершин графа G . Вероятность того, что $G \in \text{CPC}$, не превосходит вероятности того, что в каждом из выбранных m множеств не реализуется граф H . Пусть вероятность того, что на множестве из k вершин не реализуется граф H , равна α , очевидно, что $\alpha < 1$. Значит, вероятность того, что H не реализуется ни в одном из выбранных m множеств, равна α^m и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а следовательно, графов класса *CPC* почти нет.*

Количество ребер. Приведенная ниже теорема содержит достижимые оценки на количество ребер *CPC*-графов.

Теорема 3 [9]. Пусть $G(V, E)$ принадлежит к классу *CPC*, тогда выполнены следующие неравенства:

$$|E| \leq |V| \frac{|V| - 3}{2} \quad (\text{для нечетного } |V|),$$

$$|E| \leq |V| \frac{|V| - 4}{2} + 1 \quad (\text{для четного } |V|).$$

Оценки достигаются для любого количества вершин $|V|$.

Следствие 1. *CPC*-графы $\not\subseteq$ *SEG*-графы $\not\subseteq$ струнные графы.

Операции над *CPC*-графами

Теорема 4. Если графы G_1 и G_2 являются *CPC*-графами, то их дизъюнктивное объединение $G_1 \sqcup G_2$ также принадлежит к классу *CPC*.

Доказательство. $OA_2 \dots A_n O$ и $OB_2 \dots B_m O$ – ломаные, графами самопересечений которых являются G_1 и G_2 соответственно. Пусть O принадлежит границам выпуклых оболочек наборов точек $\{O, A_2, \dots, A_n\}$ и $\{O, B_2, \dots, B_m\}$, лежащих в разных полуплоскостях относительно фиксированной прямой $l \ni O$.

Пусть отрезки $[O'A_2], [O''A_n], [O'B_2], [O''B_m]$ попарно не пересекаются, а точки $O', O'' \in l$. Возьмем O', O'' достаточно близкими к O так, что каждую пару

$$\{[OA_2], [O'A_2]\}, \{[OA_n], [O''A_n]\}, \{[OB_2], [O'B_2]\}, \{[OB_m], [O''B_m]\}$$

пересекает один и тот же набор звеньев исходных ломаных.

Графом самопересечений замкнутой ломаной $O'A_2 A_3 \dots A_n O'' B_m B_{m-1} \dots B_3 B_2 O'$ является дизъюнктное объединение графов самопересечений ломаных $OA_2 \dots A_n O$ и $OB_2 \dots B_m O$.

Для графа $G(V, E)$ построим граф G' следующим образом: каждую вершину $v_i \in V$ заменим на долю α_i из t не смежных между собой вершин. Две вершины $u \in \alpha_i, w \in \alpha_j$ смежны тогда и только тогда, когда в исходном графе $\{v_i, v_j\} \in E$.

Теорема 5. Если граф G принадлежит к классу СРС, то G' также является СРС-графом.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую ломаную $A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_n^{(1)} A_0^{(1)}$ с графом самопересечений G . Для каждого $i = \overline{0, n}$ обозначим точку B_i , лежащую на биссектрисе ориентированного угла $\sphericalangle A_{i-1}^{(1)} A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}$, так, что длина отрезка $[A_i^{(1)} B_i]$ равна $\varepsilon > 0$.

Зафиксируем достаточно малое значение $\varepsilon > 0$ так, что для каждого $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, n}$ и любых точек $P_1 \in [A_i^{(1)} B_i], Q_1 \in [A_{i+1}^{(1)} B_{i+1}]$ и $P_2 \in [A_j^{(1)} B_j], Q_2 \in [A_{j+1}^{(1)} B_{j+1}]$ выполнены следующие условия:

- (i) каждый из отрезков $[P_1 Q_1], [A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}]$ пересекает один и тот же набор звеньев ломаной $A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_n^{(1)} A_0^{(1)}$;
- (ii) отрезки $[P_2 Q_2], [A_j^{(1)} A_{j+1}^{(1)}]$ пересекают один и тот же набор звеньев ломаной $A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_n^{(1)} A_0^{(1)}$;
- (iii) $[P_1 Q_1]$ и $[P_2 Q_2]$ пересекаются тогда и только тогда, когда звенья $[A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}]$ и $[A_j^{(1)} A_{j+1}^{(1)}]$ исходной ломаной пересекаются.

Для каждого $i = \overline{0, n}$ на отрезке $[A_i^{(1)} B_i]$ последовательно отметим точки $A_i^{(2)}, \dots, A_i^{(t)}$.

Далее для краткости для последовательностей $A = (a_i)_{i=1}^n$ и $B = (b_i)_{i=1}^m$ обозначим через $A + B$ последовательность $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$.

Случай нечетного t (рис. 1, а). Рассмотрим замкнутую ломаную на последовательности вершин $S = S_1 + S_3 + \dots + S_t$, которая задана следующим способом: для нечетных $i = 1, 3, \dots, t - 2$ подряд идут подпоследовательности вида

$$S_i = \left(A_0^{((t+i)/2)}, A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \dots, A_0^{((i+1)/2)}, A_n^{(i+1)}, A_{n-1}^{(i+1)}, \dots, A_1^{(i+1)} \right),$$

а последовательность S_t определена как $\left(A_0^{(t)}, A_1^{(t)}, \dots, A_n^{(t)}, A_0^{((t+1)/2)} \right)$.

Случай четного t (см. рис. 1, б). Расположим точки $A_0^{(t/2+1)}, A_0^{(t/2+2)}, \dots, A_0^{(t)} \in [A_0^{(1)} B_0]$ достаточно близко к B_0 так, что набор точек

$$\{A_0^{(t/2+1)}, A_0^{(t/2+2)}, \dots, A_0^{(t)}, B_0, O\}, \tag{1}$$

где O – точка пересечения лучей $A_n^{(1)} A_0^{(t/2+1)}$ и $A_n^{(t)} B_0$, лежит внутри окружности ω радиусом $\delta > 0$. Отметим, что прямые $A_0^{(1)} B_0, A_n^{(1)} B_n$ не совпадают в силу того, что они являются биссектрисами углов $\sphericalangle A_n^{(1)} A_0^{(1)} A_1^{(1)}$ и $\sphericalangle A_{n-1}^{(1)} A_n^{(1)} A_0^{(1)}$, которые имеют общую сторону $A_n A_0$. Значит, точку O можно всегда выбрать указанным способом.

Нетрудно заметить, что возможно выбрать достаточно малое значение $\delta > 0$, при котором точки отрезков, чьи обе крайние точки не принадлежат множеству (1), лежат вне окружности ω .

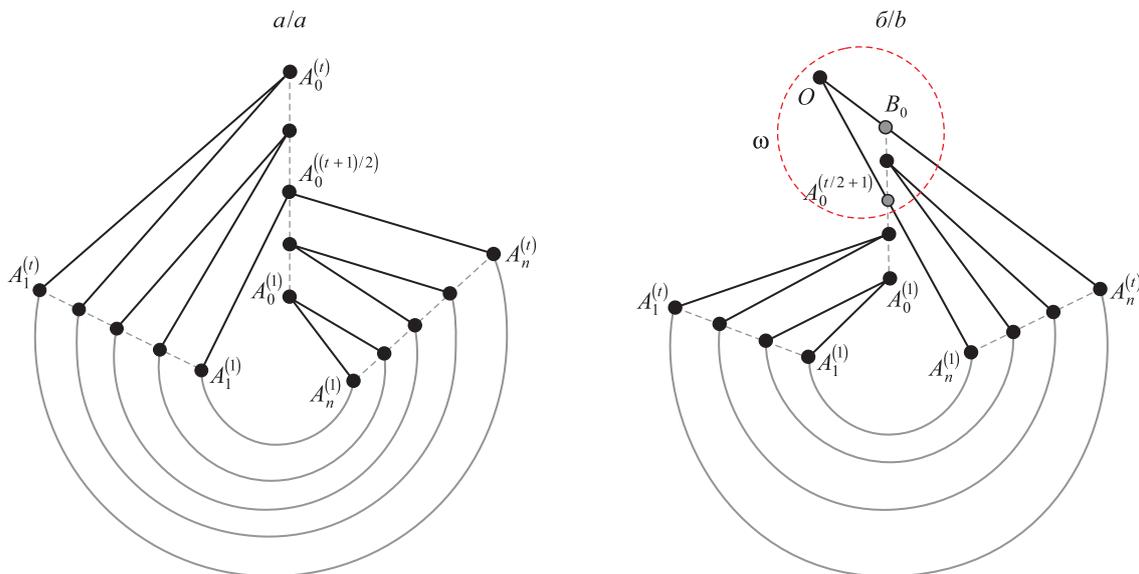


Рис. 1. Преобразование ломаной
 Fig. 1. Polygonal chain transformation

Рассмотрим ломаную на последовательности вершин $S = (O) + S_1 + S_3 + \dots + S_{t-1} + (O)$, для которой подпоследовательности S_i определены следующим образом: для нечетных $i = 1, 3, \dots, t-1$

$$S_i = \left(A_n^{(i)}, A_{n-1}^{(i)}, \dots, A_1^{(i)}, A_0^{((i+1)/2)}, A_1^{(i+1)}, A_2^{(i+1)}, \dots, A_n^{(i+1)}, A_0^{((t+i+1)/2)} \right).$$

В полученной ломаной каждому исходному звену $[A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}]$, $i = \overline{0, n-1}$, соответствуют ровно t не пересекающихся между собой звеньев. Покажем, что два звена построенной ломаной пересекаются только в том случае, если соответствующие им звенья исходной ломаной пересекаются.

Нетрудно видеть, что для нечетного t вышеуказанное утверждение выполнено в силу условия (iii).

В случае четного t данное утверждение справедливо для звеньев новой ломаной, соответствующих звеньям $[A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}]$, $i = \overline{0, n}$, исходя из условия (iii). Рассмотрим множество из оставшихся t звеньев, соответствующих звену $[A_n^{(1)} A_0^{(1)}]$ ломаной $A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_n^{(1)} A_0^{(1)}$:

$$\left\{ [A_n^{(1)} O], [A_n^{(2)} A_0^{(t/2+2)}], [A_0^{(t/2+2)} A_n^{(3)}], \dots, [A_n^{(t-2)} A_0^{(t)}], [A_0^{(t)} A_n^{(t-1)}], [A_n^{(t)} O] \right\}. \quad (2)$$

Так как окружность ω содержит только точки, принадлежащие звеньям из множества (2), то точки пересечения звеньев из множества (2) с другими звеньями построенной ломаной лежат внутри или на границе многоугольника $A_n^{(1)} A_0^{(1)} B_0 B_n$. Тогда в силу условия (iii) звенья из множества (2) также удовлетворяют вышеописанному условию.

Таким образом, графом самопересечений построенных ломаных на последовательности вершин S является G' .

Пусть дан граф $G(V, E)$ и вершина $u \in V$, смежная с вершинами $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ($\deg u = k \geq 1$). Заменим u на набор вершин $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ степени 1 так, что пары вершин $\{u_i, v_j\}$ смежны в полученном графе G'' тогда и только тогда, когда $i = j$.

Теорема 6. Пусть граф G принадлежит к классу СРС, тогда G'' также является СРС-графом.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую ломаную на вершинах $A_1 A_2 \dots A_n A_1$, графом самопересечений которой является граф $G(V, E)$. На звене $[A_1 A_2]$, соответствующем вершине $u \in V$, последовательно отметим точки X_i для $i = 1, 2, \dots, k-1$ так, что на каждом отрезке $[A_1 X_1]$, $[X_1 X_2]$, \dots , $[X_{k-1} A_2]$ лежит ровно одна точка пересечения.

Получим замкнутую ломаную на вершинах $A_1 X_1 X_2 \dots X_{k-1} A_2 A_3 \dots A_n A_1$. В ее графе самопересечений звеньям $[A_1 X_1]$, $[X_1 X_2]$, \dots , $[X_{k-1} A_2]$ соответствуют вершины $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ степени 1, с которыми была смежна вершина u .

В графе $G(V, E)$ заменим вершину $u \in V$ на состоящую из нечетного количества вершин доле $\alpha_u = \{u_1, u_2, \dots, u_{2t+1}\}$ так, что

- (i) никакие две вершины в доле α_u не являются смежными;
- (ii) в полученном графе G''' существует ребро $\{u_i, v\} \in E(G''')$ тогда и только тогда, когда $\{u_i, v\} \in E$.

Теорема 7. Пусть граф G принадлежит к классу СРС, тогда G''' также является СРС-графом.

Доказательство. Пусть G – граф самопересечений замкнутой ломаной на вершинах $A_1 A_2 \dots A_n A_1$. На биссектрисах ориентированных углов $\sphericalangle A_2 A_1 A_n$ и $\sphericalangle A_3 A_2 A_1$ отметим соответственно точки D_1 и D_2 так, что D_1 и D_2 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $A_1 A_2$.

Возможно выбрать достаточно маленькое расстояние $d(A_1 D_1) = d(A_2 D_2) = \varepsilon > 0$ такое, что любой отрезок $[PQ]$, $P \in [A_1 D_1]$, $Q \in [A_2 D_2]$, пересекает набор звеньев, пересекающих $[A_1 A_2]$, а также само звено $[A_1 A_2]$.

Последовательно отметим $2t$ точек (рис. 2):

$$\begin{cases} X_2, X_4, \dots, X_{2t} \in [A_1 D_1], \\ X_1, X_3, \dots, X_{2t-1} \in [A_2 D_2]. \end{cases}$$

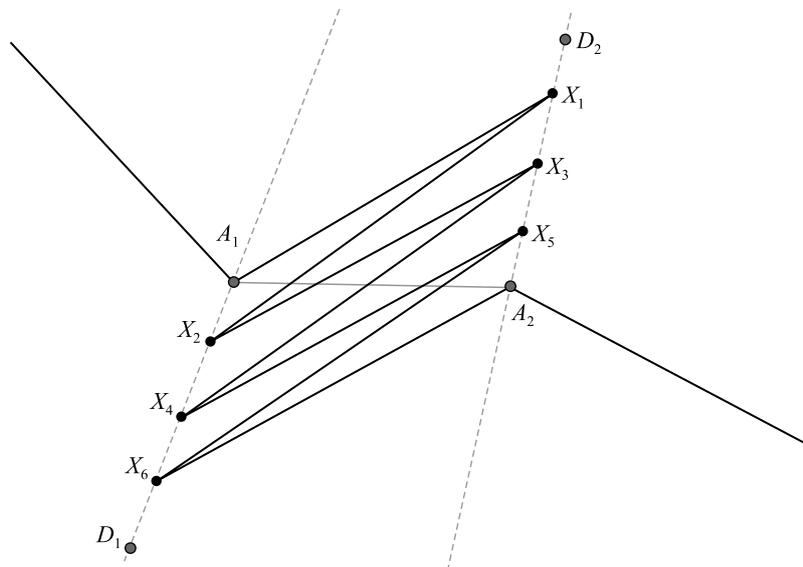


Рис. 2. Преобразование звена $[A_1 A_2]$

Fig. 2. Transformation of segment $[A_1 A_2]$

Таким образом, звено $[A_1 A_2]$, соответствующее вершине u , можно заменить на $2t + 1$ не пересекающихся между собой звеньев $[A_1 X_1]$, $[X_1 X_2]$, \dots , $[X_{2t} A_2]$. Получаем замкнутую ломаную на вершинах $A_1 X_1 X_2 \dots X_{2t+1} A_2 A_3 \dots A_n A_1$, графом самопересечений которой является G''' .

Регулярные СРС-графы

Определения. Далее замкнутую n -звенную ломаную L , граф самопересечений которой k -регулярен, при этом $k \in \mathbb{N}$, будем называть (n, k) -ломаной.

Определим $F(n)$ как множество всех натуральных $k \in \mathbb{N}$ таких, что существует k -регулярный СРС-граф на n вершинах (т. е. существует (n, k) -ломаная):

$$F(n) = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists (n, k)\text{-ломаная}\}.$$

Общие результаты. Нетрудно заметить, что при $n \leq 4$ (n, k) -ломаной не существует, поэтому далее будем считать, что количество вершин в рассматриваемых регулярных СРС-графах не меньше пяти.

Также если $k \in F(n)$, то количество ребер в графе равно $\frac{nk}{2} \in \mathbb{N}$, а значит, произведение nk обязано быть четным.

Утверждение 2. Если $k \in F(n)$ и $k \in F(m)$, то $k \in F(m+n)$.

Доказательство. Данное утверждение следует из теоремы 4.

Утверждение 3. Если $k \in F(n)$, то $tk \in F(tn)$ для любого $t \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Данное утверждение следует из теоремы 5.

Утверждение 4. Если для $t, k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $tk \in F(n)$, то $k \in F(tn)$.

Доказательство. На каждом звене исходной ломаной отметим $t-1$ новых вершин, не совпадающих с точками самопересечений и узлами (n, tk) -ломаной, таким образом, что любой из tn полученных отрезков пересекает ровно k других, не имеющих общей крайней точки с ним. Построенная фигура является (tn, k) -ломаной.

Теорема 8. Пусть для $r \in \mathbb{N}$, $1 < r < \frac{n}{2}$, выполнено условие $\gcd(n, r) = 1$. Тогда $2r - 2 \in F(n)$.

Доказательство. Последовательно расположим точки A_1, A_2, \dots, A_n на окружности. Рассмотрим ломаную на вершинах $A_1 A_{1+r} A_{1+2r} A_{1+3r} \dots A_{1+(n-1)r} A_1$, где индексы считаются по $\text{mod } n$. Так как $\gcd(n, r) = 1$, полученная последовательность индексов точек представляет собой перестановку $\{1, 2, \dots, n\}$, и построенная фигура действительно является замкнутой ломаной.

Поскольку $r < \frac{n}{2}$, то для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ между точками $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{i+r-1}$ отсутствуют ребра. Следовательно, каждое выходящее из них ребро (всего таких $2r-2$) пересекает ребро $[A_i A_{i+r}]$. Таким образом, данная ломаная является $(n, 2r-2)$ -ломаной.

Теорема 9. Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $n \in \mathbb{N}$ таких, что существует (n, k) -ломаная.

Доказательство. По теореме 8 выполнено включение $2k \in F(2k+3)$, откуда по утверждению 4 получаем, что $k \in F(4k+6)$. Тогда из утверждения 2 следует, что для любого $t \in \mathbb{N}$ выполнено включение $k \in F(t(4k+6))$.

Теорема 10. Рассмотрим произвольное $k \in \mathbb{N}$. Если k четное, то включение $k \in F(n)$ выполнено для каждого $n \geq k^2 + 5k + 7$. Соответственно, при нечетном k включение $k \in F(n)$ верно для нечетного $n \geq 2(4k^2 + 10k + 7)$.

Доказательство. По теореме 8 для любого $i \in \mathbb{N}$ и четного $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $k \in F(i(k+2)+1)$. Любое число $n \geq k^2 + 5k + 7$ представимо в виде $n = j(k+3) + i(k+2) + 1$, где $i \in \{1, 2, \dots, k+3\}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Отсюда из утверждения 2 следует, что $k \in F(j(k+3) + i(k+2) + 1) = F(n)$.

Было доказано, что для любого $k \in \mathbb{N}$, если $n \geq 4k^2 + 10k + 7$, то $2k \in F(n)$. Значит, из утверждения 4 получаем, что $k \in F(2n)$ для любого $n \geq 4k^2 + 10k + 7$.

Исследование $|F(n)|$. Представленные здесь результаты содержат верхние и нижние оценки на $|F(n)|$.

Следствие 2. Для четного $n \geq 14$ количество нечетных $k \in F(n)$ не меньше, чем $\left\lfloor \frac{\sqrt{2n-3}-5}{8} \right\rfloor$.

Доказательство. По теореме 10 для каждого четного n и нечетного k , удовлетворяющих неравенству $n \geq 2(4k^2 + 10k + 7)$, существует (n, k) -ломаная. Откуда вытекает, что для $n \geq 14$ все натуральные четные k , удовлетворяющие неравенству, лежат на отрезке $\left[1; \frac{\sqrt{2n-3}-5}{4}\right]$.

Следствие 3. Для любого n количество четных $k \in F(n)$ не меньше, чем $\frac{\varphi(n)}{2}$, где $\frac{\varphi(n)}{2}$ – значение функции Эйлера для $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как $\gcd(n, r) = \gcd(n, n-r)$, то на отрезках $\left[1; \frac{n}{2}-1\right]$ и $\left[\frac{n}{2}+1; n-1\right]$ количества чисел, взаимно простых с n , одинаковы. Значит, количество натуральных r , удовлетворяющих условиям $r < \frac{n}{2}$ и $\gcd(n, r) = 1$, равно $\frac{\varphi(n)}{2}$. По теореме 8 для каждого рассматриваемого r выполнено включение $2r-2 \in F(n)$.

Следствие 4. Количество различных $k \in F(n)$ для фиксированного n удовлетворяет следующим неравенствам.

1. Рассмотрим нечетное $n \geq 5$. Так как не существует нечетных $k \notin F(n)$ и, исходя из теоремы 3, k не превосходит $n - 3$, то из следствия 3 получаем

$$\frac{\varphi(n)}{2} \leq |F(n)| \leq \frac{n-3}{2}.$$

2. Рассмотрим четное $n \geq 14$. По теореме 3 для каждого $k \in F(n)$ справедливо $k \leq n - 4$. Из следствий 2 и 3 получаем следующую оценку снизу:

$$\frac{\varphi(n)}{2} + \left\lceil \frac{\sqrt{2n-3}-5}{8} \right\rceil \leq |F(n)| \leq n-4.$$

Алгоритмические аспекты

Задачи о раскраске, доминирующем множестве и наибольшем цикле. В качестве задачи о доминирующем множестве рассмотрим вопрос о существовании доминирующего множества мощности не более k в заданном графе G . Под задачей о раскраске в фиксированное количество цветов k будем понимать проверку того, что вершины графа можно раскрасить в k цветов так, чтобы никакие вершины одного цвета не были смежны. Задачу о наибольшем цикле определим как вопрос о существовании цикла длины не менее k в графе G .

Круговым графом будем называть SEG -граф, который является графом пересечений множества хорд некоторой окружности.

Утверждение 5. Пусть G – круговой граф на n вершинах, тогда $G \sqsubset O_{3n}$ принадлежит к классу СРС.

Доказательство. Сразу отметим, что добавление и удаление изолированных вершин не меняет принадлежности G к классу круговых графов. Далее докажем исходное утверждение индукцией по n .

Предположение индукции: последовательно обозначим точки A_1, A_2, \dots, A_{2n} на окружности ω . Пусть круговой граф G является графом самопересечений набора n хорд с вершинами в отмеченных точках. Далее отрезок α , не пересекающий другие отрезки и хорды, будем называть изолированным, если он удовлетворяет одному из следующих условий:

- (i) целиком лежит вне окружности ω , за исключением одной крайней точки;
- (ii) является хордой окружности ω и делит ее на две дуги, одна из которых не содержит ни одной точки, принадлежащей другим хордам или отрезкам.

Покажем, что некоторые из точек A_1, A_2, \dots, A_{2n} возможно соединить не более чем $3n$ -м изолированным отрезком так, что полученная фигура является замкнутой ломаной.

База: $n = 1$. Граф на 1 вершине представлен на окружности ω хордой $[A_1A_2]$. Касательные к ω в точках A_1 и A_2 пересекаются в B . Получим искомым граф самопересечений ломаной $A_1A_2BA_1$.

Шаг: предположим, утверждение верно для любого количества хорд не больше, чем n . Рассмотрим фиксированные $n + 1$ хорды, в частности две хорды $[A_{2n+1}A_i]$ и $[A_{2n+2}A_j]$ ($i \neq j$), а также набор из n хорд, где две хорды $[A_{2n+1}A_i]$, $[A_{2n+2}A_j]$ заменены на отрезок $[A_iA_j]$.

По предположению индукции мы можем провести не более $3n$ изолированных отрезков так, что на множестве всех отмеченных точек $\{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\}$ будет построена замкнутая ломаная

$$A_{k_1}A_{k_2} \dots \underline{A_jA_i} \dots A_{k_{2n-1}}A_{k_{2n}}A_{k_1}. \quad (3)$$

Хорду $[A_iA_j]$ не пересекает ни один изолированный отрезок. Значит, единственный изолированный отрезок, который может пересечь хорды $[A_iA_{2n+1}]$, $[A_jA_{2n+2}]$, – это $[A_1A_{2n}]$ при условии, что он является звеном ломаной (3).

Случай 1 (рис. 3, а). В ломаной (3) не было проведено изолированное ребро $[A_1A_{2n}]$. Значит, никакие изолированные ребра в ломаной (3) не пересекают отрезки $[A_{2n+1}A_i]$, $[A_{2n+2}A_j]$.

Поэтому замкнутая ломаная на последовательности вершин

$$A_{k_1}A_{k_2} \dots \underline{A_jA_{2n+2}A_{2n+1}A_i} \dots A_{k_{2n-1}}A_{k_{2n}}A_{k_1}$$

имеет граф самопересечений $G \sqsubset O_{3n+1}$, где изолированные вершины O_{3n+1} соответствуют проведенным изолированным отрезкам.

Случай 2 (см. рис. 3, б). Если в ломаной (3) проведено изолированное ребро $[A_1A_{2n}]$, рассмотрим замкнутую ломаную

$$BA_1 \dots A_j A_{2n+2} A_{2n+1} A_i \dots A_{2n} B, \quad (4)$$

где B – точка пересечения касательных к окружности ω в точках A_1, A_{2n} . Заметим, что отрезки $[BA_1]$, $[BA_{2n}]$, $[A_{2n+1}A_{2n+2}]$ являются изолированными. Поэтому графом самопересечений ломаной (4) выступает $G \sqcup O_{3(n+1)}$.

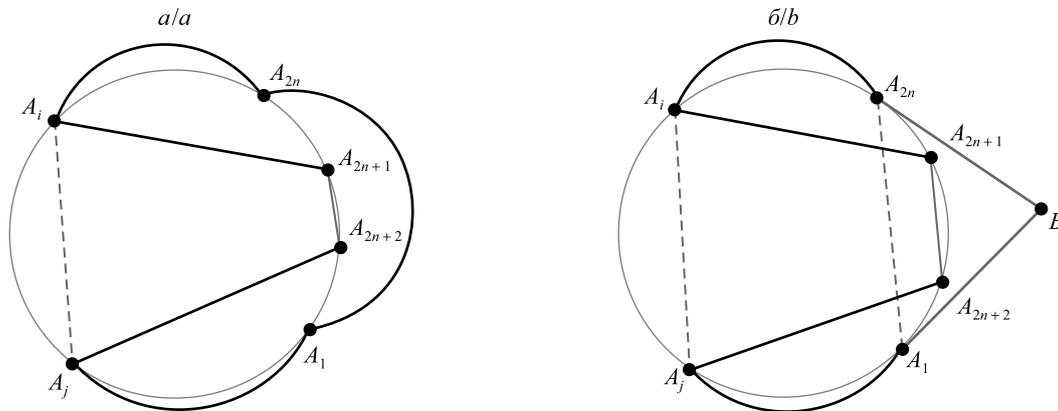


Рис. 3. Переход индукции
 Fig. 3. Induction step

Таким образом, в круговой граф G на n вершинах возможно добавить $3n$ изолированных вершин, получив граф $H \in CPC$.

Теорема 11. Задачи о доминирующем множестве, раскраске в $k \geq 4$ цветов, а также наибольшем цикле в классе CPC являются NP-полными.

Доказательство. Аналогичные задачи в классе круговых графов являются NP-полными, что доказано в статьях [10–12].

Покажем, что задача о доминировании в классе круговых графов полиномиально сводится к такой же задаче в CPC-графах. Действительно, для заданного кругового графа G по утверждению 5 за полиномиальное время можно построить граф $H = G \sqcup O_{3n}$, который будет являться CPC-графом.

Числа доминирования графов G и H отличаются на $3n$. Значит, в исходном графе есть доминирующее множество размером не более k тогда и только тогда, когда в полученном графе H существует доминирующее множество размером не более $k + 3n$. Таким образом, имеет место полиномиальная сводимость, и задача о доминирующем множестве NP-трудна в классе CPC-графов.

Аналогично, задачи о раскраске и наибольшем цикле в круговых графах, а следовательно, и в CPC-графах принадлежат к классу NP-полных задач.

Задача о независимости. Под задачей о независимости будем понимать вопрос о существовании независимого множества мощности не менее k в графе G . Данная задача является NP-полной даже в классе связанных кубических планарных графов [13].

Далее по аналогии с [14] степень графа будем называть максимальной степенью его вершин.

Утверждение 6. Задача о независимости в классе эйлеровых планарных графов степени не более 4 является NP-полной.

Доказательство. Построим полиномиальное сведение задачи о независимости в классе связанных кубических планарных графов к задаче, NP-полноту которой необходимо доказать.

Пусть $G(V, E)$ – связанный кубический планарный граф. Нетрудно видеть, что порядок такого графа является четным числом. Разобьем множество вершин G на неупорядоченные пары произвольным образом и далее для каждой пары $\{u, v\}$ применим операцию, представленную на рис. 4.

Полученный граф обозначим H . Заметим, что граф H является связанным планарным, степени его вершин равны 2 или 4, т. е. он эйлеров. Также нетрудно видеть, что $\alpha(H) = \alpha(G) + |V|$. Значит, в G существует независимое множество мощности не менее k тогда и только тогда, когда в H существует независимое множество порядка не менее $k + |V|$, из чего и следует необходимое утверждение.

Как известно, любой планарный граф степени не более 4 может быть уложен на решетку \mathbb{Z}^2 так, что его вершинам будут соответствовать узлы решетки, а ребрам – пути, проходящие по звеньям \mathbb{Z}^2 [14], причем такая укладка может быть получена за полиномиальное время.

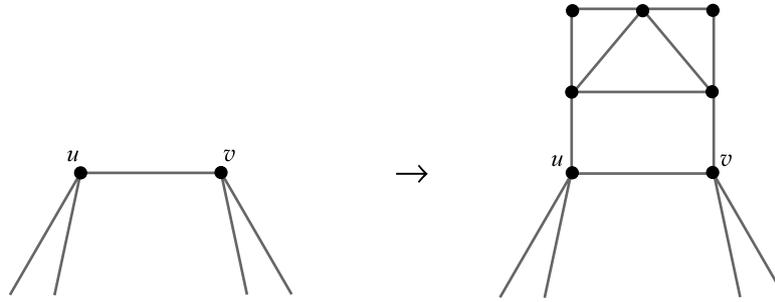


Рис. 4. Преобразование ребра $\{u, v\}$

Fig. 4. Transformation of edge $\{u, v\}$

Далее любой планарный граф степени не более 4 будем рассматривать вместе с соответствующей ему укладкой, описанной выше.

Рассмотрим некоторый граф $G(V, E)$, для которого выполнены условия утверждения 6. Пусть $v \in V$, $\deg v = 4$ и вершины u_1, u_2, u_3, u_4 смежны v , причем на укладке они расположены, как показано на рис. 5.

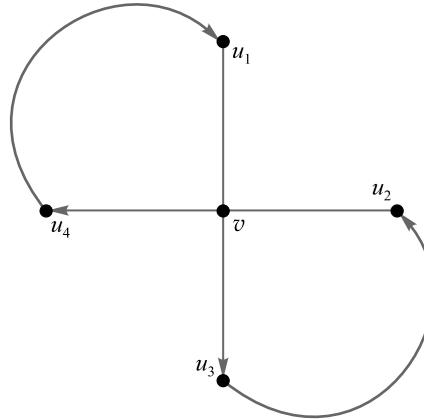


Рис. 5. Окрестность вершины v

Fig. 5. Neighbourhood of vertex v

Относительно вершины v все эйлеровы циклы можно разделить на два типа:

- меняющие направление при прохождении через вершину v , т. е. циклы вида $Au_1vu_2Bu_3vu_4C$, $Au_1vu_4Bu_3vu_2C$ и т. д.;
- не меняющие направление при прохождении через вершину v , т. е. циклы вида $Au_1vu_3Bu_2vu_4C$, $Au_3vu_1Bu_2vu_4C$ и т. д.

Будем называть эйлеров цикл такого графа $G(V, E)$ меняющим направление, если он меняет направление относительно любой вершины $v \in V$, $\deg v = 4$.

Утверждение 7. Для любого эйлерова планарного графа степени не более 4 существует меняющий направление эйлеров цикл.

Доказательство. Предположим, что некоторый эйлеров цикл K графа $G(V, E)$ не меняет направление при прохождении через вершину $v \in V$. Пусть, не нарушая общности, K имеет вид $u_1vu_3Au_2vu_4Bu_1$.

Нетрудно заметить, что цикл L вида $u_1vu_2Cu_3vu_4Bu_1$ (здесь C – это записанная в обратном порядке последовательность A) является эйлеровым и меняет либо не меняет направление во всех вершинах, за исключением v , так же как и цикл K , при этом в вершине v он меняет направление в отличие от K . Повторяя такие преобразования цикла, можно получить необходимый эйлеров цикл графа G .

Утверждение 8. Пусть $G(V, E)$ – эйлеров планарный граф степени не более 4. Тогда существуют $l, \{k_e | e \in E\}$ такие, что можно добавить l изолированных вершин к графу G и ровно k_e вершин на каждое его ребро $e \in E$ и полученный в результате граф будет CPC -графом. При этом для них выполняются следующие условия:

- 1) k_e является четным для любого $e \in E$;
- 2) значения l и $\{k_e | e \in E\}$ могут быть вычислены за полиномиальное время.

Доказательство. Рассмотрим соответствующую укладку графа G на решетку \mathbb{Z}^2 и некоторый меняющий направление цикл L . Нетрудно видеть, что такие укладка и цикл могут быть найдены за полиномиальное время.

Далее совершим следующие преобразования укладки. Для вершины степени 2 и участка пути на \mathbb{Z}^2 , соответствующего ребру G , преобразование укладки осуществляется, как показано на рис. 6. Аналогично оно выполняется и для других положений.

Для вершины степени 4 преобразование имеет вид, представленный на рис. 7.

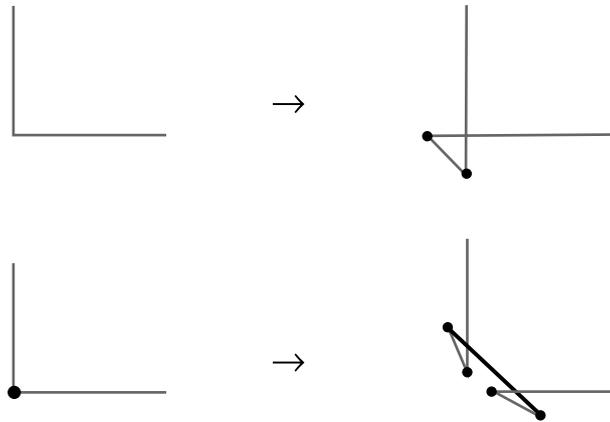


Рис. 6. Преобразование участка пути на \mathbb{Z}^2 и вершины степени 2
 Fig. 6. Transformation of part of the path in \mathbb{Z}^2 and vertex with degree 2

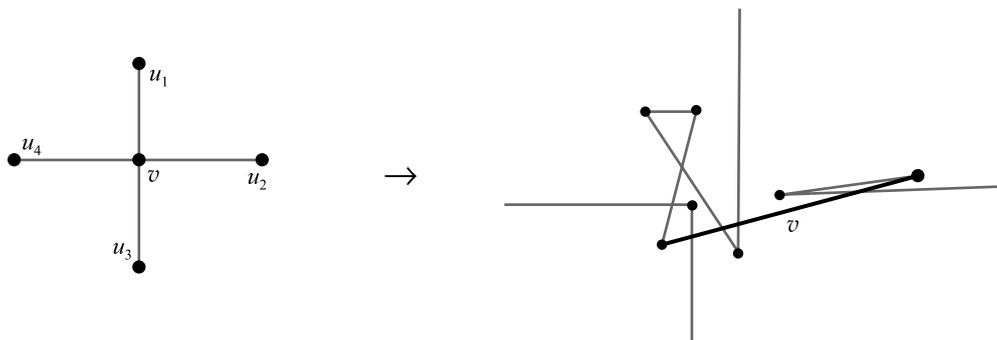


Рис. 7. Преобразование вершины степени 4
 Fig. 7. Transformation of vertex with degree 4

Такое преобразование производится, если в L есть подпоследовательность u_1vu_2 или u_2vu_1 , в противном случае (т. е. если есть подпоследовательность u_1vu_4 или u_4vu_1) осуществляется аналогичное преобразование с точностью до поворота на 90° .

Все преобразования совершаем так, чтобы избежать пересечений отрезков, помимо присутствующих на рисунках.

Заметим, что полученная конструкция является замкнутой ломаной. Действительно, обход последней может быть получен исходя из ее построения по эйлерову циклу L графа G . Также нетрудно видеть, что графом самопересечений ломаной L является граф G после добавления нескольких вершин на ребра и некоторого количества изолированных вершин. Вершинам исходного графа в графе самопересечений ломаной соответствуют звенья ломаной, выделенные черным цветом.

С помощью преобразования, представленного на рис. 8, можно сделать число новых вершин на каждом ребре четным.

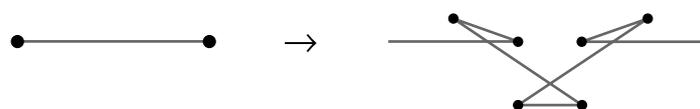


Рис. 8. Преобразование, добавляющее три вершины на одно из ребер графа самопересечений
 Fig. 8. Transformation that adds three vertices on one of the edges of the self-intersections graph

Заметим, что значения $\{k_e | e \in E\}$ и l могут быть вычислены за полиномиальное время для заданного графа G .

Теорема 12. *Задача о независимости в классе CPC-графов является NP-полной.*

Доказательство. Построим полиномиальную сводимость задачи о независимости в классе эйлеровых планарных графов степени не более 4 к рассматриваемой задаче.

Пусть $G(V, E)$ является эйлеровым планарным графом степени не более 4. За полиномиальное время можно добавить k_e вершин на каждое ребро e и l изолированных вершин, где k_e четны. Полученный граф H принадлежит к классу CPC по утверждению 8.

Исходя из четности k_e , выполнено равенство

$$\alpha(H) = \alpha(G) + l + \sum_{e \in E} \frac{k_e}{2},$$

из чего следует сводимость, а значит, и NP-полнота рассматриваемой задачи.

Распознавание CPC-графов. Под задачей *STRICT INEQ* будем понимать вопрос о разрешимости системы строгих полиномиальных неравенств с целыми коэффициентами, ограниченными по модулю некоторой константой. *STRICT INEQ* \in *PSPACE* [4; 15]. В статье [4] было доказано, что задача распознавания SEG-графа равносильна задаче *STRICT INEQ*, из чего следует, что она принадлежит к классу *PSPACE*.

Замечание 3. Граф G принадлежит к классу CPC тогда и только тогда, когда существует ломаная $R^* \in \mathcal{R}(G)$ такая, что никакие три ее узла не лежат на одной прямой.

Теорема 13. *Задача распознавания CPC-графа принадлежит к классу PSPACE.*

Покажем, что данная задача сводится к вопросу о разрешимости систем полиномиальных неравенств с целыми коэффициентами, ограниченными по модулю константой.

Утверждение 9. Пусть дан граф G , дополнение которого содержит гамильтонов цикл. Тогда принадлежность G к классу CPC равносильна разрешимости совокупности систем полиномиальных неравенств с целыми коэффициентами, ограниченными по модулю некоторой константой, причем размер записи указанной совокупности полиномиально ограничен размером записи графа G .

Доказательство. Пусть дан граф $G(V, E)$ на множестве вершин $V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Зафиксируем последовательность $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ (здесь σ – перестановка $\{1, 2, \dots, n\}$), которая является последовательностью вершин гамильтонового цикла \bar{G} .

Согласно замечанию 3 $G \in$ CPC тогда и только тогда, когда существует ломаная $R^* \in \mathcal{R}(G)$, любые три узла которой не коллинеарны. Покажем, что существование такой ломаной R^* , в которой последовательно идущим звеньям соответствует последовательность вершин $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$, равносильно разрешимости системы неравенств $\mathcal{S}_\sigma(G)$.

Для фиксированной перестановки σ последовательности вершин $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ соответствуют последовательно идущие ребра ломаной R^* . Каждому узлу R^* в системе $\mathcal{S}_\sigma(G)$ сопоставим две переменные $x_{\sigma(i)}$ и $y_{\sigma(i)}$, задающие координаты данной точки. Таким образом, каждой вершине $A_{\sigma(i)} \in V$ соответствует звено ломаной $\left[(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}), (x_{\sigma(i+1)}, y_{\sigma(i+1)}) \right]$. Также каждому ребру исходного графа $\{A_{\sigma(i)}, A_{\sigma(j)}\} \in E$ сопоставлены две переменные a_{ij}, b_{ij} .

Систему $\mathcal{S}_\sigma(G)$ задает нижеописанный набор неравенств.

1. Любые два узла ломаной R^* не совпадают, а следовательно, для каждой пары точек $(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)})$ и $(x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})$, где $i \neq j$, выполнено неравенство

$$(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})^2 + (y_{\sigma(i)} - y_{\sigma(j)})^2 > 0. \quad (5)$$

2. Любые три узла ломаной не коллинеарны, значит, для любых трех попарно различных узлов ломаной R^* $\left\{ (x_{\sigma(m)}, y_{\sigma(m)}), (x_{\sigma(k)}, y_{\sigma(k)}), (x_{\sigma(t)}, y_{\sigma(t)}) \right\}$ верно неравенство

$$\left((x_{\sigma(m)} - x_{\sigma(k)})(y_{\sigma(m)} - y_{\sigma(t)}) - (y_{\sigma(m)} - x_{\sigma(k)})(x_{\sigma(m)} - x_{\sigma(t)}) \right)^2 > 0. \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что звенья, соответствующие паре вершин вида $\{A_{\sigma(i)}, A_{\sigma(i+1)}\}$, пересекаются в единственной точке $(x_{\sigma(i+1)}, y_{\sigma(i+1)})$, являющейся крайней для данных отрезков.

3. Если $\{A_{\sigma(i)}, A_{\sigma(j)}\} \in E$, то конечные точки отрезков, соответствующих вершинам $A_{\sigma(i)}$ и $A_{\sigma(j)}$, попарно различны. При этом точки $(x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})$ и $(x_{\sigma(j+1)}, y_{\sigma(j+1)})$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей отрезок вершины $A_{\sigma(i)}$, а два рассматриваемых звена пересекаются в не крайней точке. То есть знаки скалярных произведений векторов $\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})}$, $\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(j+1)}, y_{\sigma(j+1)})}$ с вектором, ортогональным $\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(i+1)}, y_{\sigma(i+1)})}$, различны. Это равносильно системе неравенств

$$\left(\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})}, \bar{v} \right) \cdot \left(\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(j+1)}, y_{\sigma(j+1)})}, \bar{v} \right) < 0,$$

где $\bar{v} = \overline{(-x_{\sigma(i+1)}, -y_{\sigma(i+1)}) (x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)})}$ – вектор, ортогональный $\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(i+1)}, y_{\sigma(i+1)})}$.

4. Если $\{A_{\sigma(i)}, A_{\sigma(j)}\} \notin E$, где $j \neq i \pm 1$ по модулю n , то два соответствующих вершинам $A_{\sigma(i)}$ и $A_{\sigma(j)}$ отрезка не пересекаются тогда и только тогда, когда существует прямая $y = a_{ij}x + b_{ij}$ такая, что рассматриваемые звенья лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой. Данное условие задает система неравенств

$$\begin{cases} (a_{ij}x_{\sigma(i)} + b_{ij} - y_{\sigma(i)}) (a_{ij}x_{\sigma(j)} + b_{ij} - y_{\sigma(j)}) < 0, \\ (a_{ij}x_{\sigma(i)} + b_{ij} - y_{\sigma(i)}) (a_{ij}x_{\sigma(j+1)} + b_{ij} - y_{\sigma(j+1)}) < 0, \\ (a_{ij}x_{\sigma(i+1)} + b_{ij} - y_{\sigma(i+1)}) (a_{ij}x_{\sigma(j)} + b_{ij} - y_{\sigma(j)}) < 0, \\ (a_{ij}x_{\sigma(i+1)} + b_{ij} - y_{\sigma(i+1)}) (a_{ij}x_{\sigma(j+1)} + b_{ij} - y_{\sigma(j+1)}) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, для каждой пары вершин графа G в системе $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ описаны неравенства, задающие расположение соответствующих звеньев относительно друг друга. Нетрудно заметить, что размер записи системы $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ полиномиально ограничен размером записи графа G , а все коэффициенты по модулю не превосходят константы.

Рассмотрим все перестановки вершин σ , которые соответствуют последовательности вершин гамильтонова цикла в графе \bar{G} . Получаем, что граф G принадлежит к классу CPC тогда и только тогда, когда хотя бы одна из систем вида $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ разрешима.

Доказательство теоремы 13. Пусть дан фиксированный граф G в виде списка вершин и списка ребер. Тогда нижеприведенный алгоритм позволит узнать, принадлежит ли данный граф G к классу CPC .

Первой рассматриваемой перестановкой будет $\sigma = Id$. Далее при рассмотрении каждой перестановки вершин σ , если последовательность $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ не является последовательностью вершин гамильтонова цикла в \bar{G} , осуществляется переход к следующей после σ перестановке в лексикографическом порядке. В случае когда $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ соответствует вершинам гамильтонова цикла в \bar{G} , проверяется на разрешимость система $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$. Если она имеет решения, то $G \in CPC$. Иначе рассматривается следующая в лексикографическом порядке перестановка. В случае если все $n!$ перестановок были рассмотрены и ни одна система $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ не имеет решений, то $G \notin CPC$.

Так как вопрос о существовании решений совокупности систем $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ разрешим с полиномиальным ограничением пространства, то задача распознавания CPC -графа принадлежит к классу $PSPACE$.

Построение реализации CPC -графа. Назовем ориентацию треугольника (ABC) положительной, если точка C лежит по правую сторону от ориентированной прямой \overline{AB} . В противном случае ориентация (ABC) отрицательная [16].

Два конечных набора точек общего положения P и Q на плоскости имеют одинаковую ориентацию, если существует такая биекция $f: P \rightarrow Q$, что для любых трех точек $A, B, C \in P$ треугольники (ABC) и $(f(A)f(B)f(C))$ имеют одинаковую ориентацию. Нетрудно заметить, что одинаковая ориентация наборов точек является отношением эквивалентности.

Для двух конечных наборов точек общего положения P и Q биекцию $f: P \rightarrow Q$ назовем сохраняющей пересечения, если для любых различных точек $A, B, C, D \in P$ справедливо $[f(A)f(B)] \cap [f(C)f(D)] \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $[AB] \cap [CD] \neq \emptyset$. Такие наборы P и Q будем называть кросс-эквивалентными [16].

Согласно [16], если два набора точек кросс-эквивалентны, то они имеют одинаковую ориентацию. Поэтому из [17] следует нижеуказанное утверждение.

Утверждение 10. Для любого набора S из n точек общего положения на плоскости существует набор точек S' такой, что S и S' кросс-эквивалентны. Причем S' удовлетворяет следующим условиям:

(i) любая точка $T(x, y) \in S'$ имеет целочисленные координаты;

(ii) существует натуральное $N(n) \leq 2^{2^{cn}}$ для некоторой константы $c \in \mathbb{N}$ такое, что для каждой точки $T(x, y) \in S'$ выполнено неравенство

$$-N(n) \leq x, y \leq N(n).$$

Следствие 5. Из утверждения 10 следует, что любой СРС-граф на n вершинах имеет реализацию $R \in \mathcal{R}(G)$, в которой узлы ломаной имеют целочисленные координаты $|x|, |y| \leq 2^{2^{cn}}$.

Значит, перебором графов самопересечений n -звенных замкнутых ломаных с узлами, координаты которых $|x|, |y| \leq 2^{2^{cn}}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, возможно установить, принадлежит ли фиксированный граф G на n вершинах множеству СРС-графов. Таким образом, задача о построении реализации СРС-графа также алгоритмически разрешима.

Библиографические ссылки

1. Sinden FW. Topology of thin film RC circuits. *The Bell System Technical Journal*. 1966;45(9):1639–1662. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1966.tb01713.x.
2. Ehrlich G, Even S, Tarjan RE. Intersection graphs of curves in the plane. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1976; 21(1):8–20. DOI: 10.1016/0095-8956(76)90022-8.
3. Chalopin J, Gonçalves D. Every planar graph is the intersection graph of segments in the plane: extended abstract. In: *Proceedings of the Forty-first annual ACM symposium on theory of computing; 2009 May 31 – June 2; Bethesda, Maryland, USA*. New York: Association for Computing Machinery; 2009. p. 631–638. DOI: 10.1145/1536414.1536500.
4. Kratochvíl J, Matoušek J. Intersection graphs of segments. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1994;62(2):289–315. DOI: 10.1006/jctb.1994.1071.
5. Kratochvíl J. String graphs. II. Recognizing string graphs is NP-hard. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1991;52(1): 67–78. DOI: 10.1016/0095-8956(91)90091-W.
6. Оре О. *Графы и их применение*. Головина ЛИ, переводчик; Яглом ИМ, редактор. Москва: Мир; 1965. 174 с.
7. Kratochvíl J. String graphs. I. The number of critical nonstring graphs is infinite. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1991;52(1):53–66. DOI: 10.1016/0095-8956(91)90090-7.
8. Dangelmayr C. *Intersection graphs of pseudosegments* [dissertation]. Berlin: Freien Universität Berlin; 2010. 136 p.
9. Фукс ДБ. Самопересечения замкнутой ломаной. *Квант*. 1988;1:30–34.
10. Keil JM. The complexity of domination problems in circle graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1993;42(1):51–63. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90178-Q.
11. Unger W. On the k -colouring of circle-graphs. In: Cori R, Wirsing M, editors. *STACS 88. 5th Annual symposium on theoretical aspects of computer science; 1988 February 11–13; Bordeaux, France*. Berlin: Springer-Verlag; 1988. p. 61–72. (Lecture Notes in Computer Science; volume 294).
12. Damaschke P. The Hamiltonian circuit problem for circle graphs is NP-complete. *Information Processing Letters*. 1989;32(1): 1–2. DOI: 10.1016/0020-0190(89)90059-8.
13. Garey MR, Johnson DS. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. New York: W. H. Freeman and Company; 1979. X, 338 p.
14. Valiant LG. Universality considerations in VLSI circuits. *IEEE Transactions on Computers*. 1981;C-30(2):135–140. DOI: 10.1109/TC.1981.6312176.
15. Renegar J. On the computational complexity and geometry of the first-order theory of the reals. Part I: Introduction. Preliminaries. The geometry of semi-algebraic sets. The decision problem for the existential theory of the reals. *Journal of Symbolic Computation*. 1992;13(3):255–299. DOI: 10.1016/S0747-7171(10)80003-3.
16. Pilz A, Welzl E. Order on order types. In: Arge L, Pach J, editors. *31st International symposium on computational geometry (SoCG'2015); 2015 June 22–25; Eindhoven, The Netherlands*. Wadern: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik; 2015. p. 285–299. (LIPIcs; volume 34). DOI: 10.4230/LIPIcs.SOCG.2015.285.
17. Goodman JE, Pollack R, Sturmfels B. The intrinsic spread of a configuration in \mathbb{R}^d . *Journal of the American Mathematical Society*. 1990;3(3):639–651. DOI: 10.1090/S0894-0347-1990-1046181-2.

References

1. Sinden FW. Topology of thin film RC circuits. *The Bell System Technical Journal*. 1966;45(9):1639–1662. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1966.tb01713.x.
2. Ehrlich G, Even S, Tarjan RE. Intersection graphs of curves in the plane. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1976; 21(1):8–20. DOI: 10.1016/0095-8956(76)90022-8.

3. Chalopin J, Gonçalves D. Every planar graph is the intersection graph of segments in the plane: extended abstract. In: *Proceedings of the Forty-first annual ACM symposium on theory of computing; 2009 May 31 – June 2; Bethesda, Maryland, USA*. New York: Association for Computing Machinery; 2009. p. 631–638. DOI: 10.1145/1536414.1536500.
4. Kratochvíl J, Matoušek J. Intersection graphs of segments. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1994;62(2):289–315. DOI: 10.1006/jctb.1994.1071.
5. Kratochvíl J. String graphs. II. Recognizing string graphs is NP-hard. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1991;52(1):67–78. DOI: 10.1016/0095-8956(91)90091-W.
6. Ore O. *Graphs and their uses*. New York: Random House; 1963. VIII, 131 p.
Russian edition: Ore O. *Grafy i ikh primeneniye*. Golovina LI, translator; Yaglom IM, editor. Moscow: Mir; 1965. 174 p.
7. Kratochvíl J. String graphs. I. The number of critical nonstring graphs is infinite. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1991;52(1):53–66. DOI: 10.1016/0095-8956(91)90090-7.
8. Dangelmayr C. *Intersection graphs of pseudosegments* [dissertation]. Berlin: Freien Universität Berlin; 2010. 136 p.
9. Fuks DB. [Selfintersections of closed polygonal chains]. *Kvant*. 1988;1:30–34. Russian.
10. Keil JM. The complexity of domination problems in circle graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1993;42(1):51–63. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90178-Q.
11. Unger W. On the k-colouring of circle-graphs. In: Cori R, Wirsing M, editors. *STACS 88. 5th Annual symposium on theoretical aspects of computer science; 1988 February 11–13; Bordeaux, France*. Berlin: Springer-Verlag; 1988. p. 61–72. (Lecture Notes in Computer Science; volume 294).
12. Damaschke P. The Hamiltonian circuit problem for circle graphs is NP-complete. *Information Processing Letters*. 1989;32(1):1–2. DOI: 10.1016/0020-0190(89)90059-8.
13. Garey MR, Johnson DS. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. New York: W. H. Freeman and Company; 1979. X, 338 p.
14. Valiant LG. Universality considerations in VLSI circuits. *IEEE Transactions on Computers*. 1981;C-30(2):135–140. DOI: 10.1109/TC.1981.6312176.
15. Renegar J. On the computational complexity and geometry of the first-order theory of the reals. Part I: Introduction. Preliminaries. The geometry of semi-algebraic sets. The decision problem for the existential theory of the reals. *Journal of Symbolic Computation*. 1992;13(3):255–299. DOI: 10.1016/S0747-7171(10)80003-3.
16. Pilz A, Welzl E. Order on order types. In: Arge L, Pach J, editors. *31st International symposium on computational geometry (SoCG'2015); 2015 June 22–25; Eindhoven, The Netherlands*. Wadern: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik; 2015. p. 285–299. (LIPIcs; volume 34). DOI: 10.4230/LIPIcs.SOCG.2015.285.
17. Goodman JE, Pollack R, Sturmfels B. The intrinsic spread of a configuration in \mathbb{R}^d . *Journal of the American Mathematical Society*. 1990;3(3):639–651. DOI: 10.1090/S0894-0347-1990-1046181-2.

Статья поступила в редколлегию 08.09.2020.
Received by editorial board 08.09.2020.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 534/539:[57+61]

ОЦЕНКА ТОЛЩИНЫ ХРЯЩЕВОГО ТРАНСПЛАНТАТА ДЛЯ ТИМПАНАЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПРИ УДАЛЕНИИ РЕТРАКЦИОННОГО КАРМАНА (КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ)

С. М. БОСЯКОВ¹⁾, К. С. ЮРКЕВИЧ¹⁾,
Г. И. МИХАСЕВ¹⁾, Л. Г. ПЕТРОВА²⁾, М. М. МАЙСЮК³⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусская медицинская академия последипломного образования,
ул. П. Бровки, 3, корп. 3, 220013, г. Минск, Беларусь

³⁾Республиканский научно-практический центр оториноларингологии,
ул. Сухая, 8, 220004, г. Минск, Беларусь

Возникновение ретракционного кармана тимпанальной мембраны (барабанной перепонки) влечет за собой нарушение звуковой проводимости среднего уха. Хирургическое удаление фиксированных ретракционных карманов

Образец цитирования:

Босяков СМ, Юркевич КС, Михасев ГИ, Петрова ЛГ, Майсюк ММ. Оценка толщины хрящевого трансплантата для тимпанальной мембраны при удалении ретракционного кармана (конечно-элементное моделирование). *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:69–78.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-69-78>

For citation:

Bosiakov SM, Yurkevich KS, Mikhasev GI, Petrova LG, Maisyuk MM. Assessment of the cartilage transplant thickness after removing of the tympanic membrane retraction pocket (finite-element modelling). *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:69–78. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-69-78>

Авторы:

Сергей Михайлович Босяков – доктор физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Кирилл Сергеевич Юркевич – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.

Людмила Григорьевна Петрова – доктор медицинских наук, профессор; заведующий кафедрой оториноларингологии хирургического факультета.

Марина Михайловна Майсюк – кандидат медицинских наук; заведующий оториноларингологическим отделением для детей стационара.

Authors:

Sergei M. Bosiakov, doctor of science (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
bosiakov@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0003-4524-9304>

Kirill S. Yurkevich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

yurkevichks@bsu.by

Gennady I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

mikhasev@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-9409-9210>

Lyudmila G. Petrova, doctor of science (medicine), full professor; head of the department of otorhinolaryngology, faculty of surgery.
bsm21@mail.ru

Marina M. Maisyuk, PhD (medicine); head of the department of otorhinolaryngology for children in-patient hospital.

merylmmm@mail.ru

приводит к появлению перфораций, на место которых устанавливается хрящевой трансплантат. Целью работы являлось определение геометрических параметров хрящевого трансплантата, обеспечивающих звуковую проводимость колебательной системы среднего уха, соответствующую слуховым функциям среднего уха в норме. Определение геометрических параметров трансплантата осуществлялось на основании соответствующей конечно-элементной модели. В качестве величин, характеризующих слуховую проводимость колебательной системы среднего уха, рассматривались собственные частоты свободных колебаний. На основании сравнительного анализа спектров собственных частот свободных колебаний среднего уха в норме и среднего уха с хрящевыми трансплантатами различной толщины установлено, что толщина трансплантата, накладываемого на задневерхний квадрант после удаления фиксированного ретракционного кармана, составляет $0,193 \pm 0,031$ мм. Полученные результаты могут быть использованы при планировании хирургических операций по восстановлению целостности барабанной перепонки и улучшению слуховой проводимости.

Ключевые слова: среднее ухо; тимпанальная мембрана; конечно-элементное моделирование; хрящевой трансплантат; частота свободных колебаний; звуковая проводимость.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке гранта Президента Республики Беларусь в области науки.

ASSESSMENT OF THE CARTILAGE TRANSPLANT THICKNESS AFTER REMOVING OF THE TYMPANIC MEMBRANE RETRACTION POCKET (FINITE-ELEMENT MODELLING)

S. M. BOSIAKOV^a, K. S. YURKEVICH^a,
G. I. MIKHASEV^a, L. G. PETROVA^b, M. M. MAISYUK^c

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bBelarusian Medical Academy of Post-Graduate Education,
3 P. Broŭki Street, 3 building, Minsk 220013, Belarus

^cRepublican Scientific and Practical Centre of Otolaryngology,
8 Suhaja Street, Minsk 220004, Belarus

Corresponding author: S. M. Bosiakov (bosiakov@bsu.by)

The retraction pocket emergence of the tympanic membrane (eardrum) leads to the sound conduction disorder of the middle ear. Surgical removal of fixed retraction pockets leads to perforations. A cartilage grafts in the region of these perforations are installed. The aim of the study is to assess the geometric parameters of the cartilage graft, providing sound conductivity of the middle ear oscillatory system corresponding the auditory functions of the normal middle ear. The evaluation of the geometric parameters of the cartilage graft is carried out on the basis of the middle ear finite-element model. The eigenfrequencies are utilised as quantities characterising the auditory conductivity of the middle ear oscillatory system. The thickness of the graft attached on the posterosuperior quadrant after removal of the fixed retraction pocket is 0.193 ± 0.031 mm. It is evaluated on basis of comparative analysis of the middle ear eigenfrequency spectra in normal conditions, the middle ear with attached cartilaginous grafts of different thicknesses. The obtained results can be used for planning of surgical operations to restore the integrity of the tympanic membrane and improve auditory conductivity.

Keywords: middle ear; tympanic membrane; finite-element modelling; cartilage graft; eigenfrequency; auditory conductivity.

Acknowledgements. This study is supported by a grant from the President of the Republic of Belarus in the field of science.

Введение

Одним из нарушений звуковой проводимости среднего уха в сочетании с хроническим средним отитом является возникновение ретракционного кармана области *pars tensa* тимпанальной мембраны (патологическое выдувание барабанной перепонки в тимпанальной полости) [1]. Самый распространенный участок образования ретракционного кармана – задневерхний квадрант тимпанальной мембраны, поскольку средний фиброзный слой задневерхнего квадранта области *pars tensa* имеет наиболее ослабленную структуру по сравнению с более плотными передним и задненижним квадрантами [2]. Развитие такой патологии может привести к повреждению костной ткани молоточка и стремени, а также к возникновению холестеатомы [3]. Ранние или небольшие ретракционные карманы могут быть полностью устранены медикаментозным лечением, тогда как фиксированные ретракционные карманы обычно

требуют хирургического вмешательства, чтобы предотвратить дальнейшее развитие патологии и скорректировать анатомические или функциональные изменения. После удаления ретракционного кармана возникают перфорации тимпанальной мембраны, которые очень редко подвергаются самопроизвольному заживлению. В большинстве случаев на область перфорации устанавливается хрящевой трансплантат из козелка или ушной раковины [4; 5]. Использование такого трансплантата в реконструкции барабанной перепонки имеет ряд преимуществ перед применением мембранных трансплантатов, но может изменять акустические характеристики колебательной системы среднего уха.

Влияние геометрических параметров хрящевого трансплантата на звуковую проводимость колебательной системы среднего уха анализировалось в экспериментальных и теоретических работах [6–14].

В исследовании [6] определены амплитуды колебаний хрящевых трансплантатов различного типа (хрящевых пластин, хрящевых палисадов и островковых трансплантатов), возникающих при действии звукового давления. Для этого использована сканирующая лазерная доплеровская установка, позволяющая определить амплитуды вынужденных колебаний трансплантата в модели *ушной канал – барабанная перепонка*. На основании частотных характеристик и величин перемещений точек барабанной перепонки и трансплантатов сделан вывод, что предпочтительной с позиций акустики является установка сплошной хрящевой пластины толщиной менее 0,5 мм по сравнению с применением островковых трансплантатов и хрящевых палисадов.

В работе [7] на базе электроакустической модели проведен анализ влияния локализации протеза, устанавливаемого на реконструированной тимпанальной мембране, на усилие в сочленении протез – стремя, а также на смещение и поворот основания стремени косточки. Математические модели для расчета состояния барабанной перепонки, определения напряжений и собственных частот колебаний барабанной перепонки в норме и при патологии при различных значениях отрицательного звукового давления представлены в работе [8]. Здесь также приведены результаты анализа влияния на механические характеристики барабанной перепонки изменения жесткости обеих внутрибарабанных мышц и фенестрации перепонки.

Разработке метода биомеханического моделирования структур среднего уха в пакетах прикладных программ в норме, при патологических изменениях, коррекции и реконструкции посвящено исследование [9]. Апробация метода выполнена на конкретных примерах с использованием конечно-элементных пакетов прикладных программ *SolidWorks* и *COSMOSWorks*. В работах [12–14] с применением конечно-элементного моделирования определены акустические характеристики хрящевого трансплантата (хрящевой пластины), используемого при различных формах и расположениях областей перфорации тимпанальной мембраны. Установлено, что хрящевая пластина размером от 0,1 до 0,2 мм представляется оптимальной с точки зрения вибрации барабанной перепонки. Толщина трансплантата, равная 0,2 и 0,1 мм, является предпочтительной исходя из критерия механической жесткости и потерь при передаче звука на более низких и высоких частотах соответственно. Настоящая работа развивает это направление исследований, она посвящена определению геометрических параметров хрящевого трансплантата, устанавливаемого на область задневерхнего квадранта барабанной перепонки после удаления ретракционного кармана.

Материалы и методы исследования

Разработка твердотельных моделей тимпанальной мембраны, молоточка, наковальни и стремени на основании томографических данных описана в работах [15; 16] с учетом того, что тимпанальная мембрана имеет слоистую структуру [17]. Наиболее тонкая часть, соответствующая области *pars flaccida*, имеет толщину 30 мкм, толщина задневерхнего квадранта области *pars tensa* составляет 60 мкм, остальная часть области *pars tensa* равна 90 мкм. Тимпанальная мембрана закреплена в тимпанальном кольце, которое жестко заделано по контуру. Закрепление отсутствует в передней части тимпанальной мембраны, где тимпанальное кольцо разделяет ее на две области – *pars tensa* и *pars flaccida* [18]. Кроме того, в модели к костям среднего уха в соответствующих точках прикреплены тензорное сухожилие тимпанальной мембраны и стремени, латеральная, передняя и верхняя молоточковые связки, задняя и передняя наковальневые связки, кольцевая стапедиальная связка, а также тензорная тимпанальная и стапедиальная мышцы. Согласно [19] связки и сухожилия моделируются с использованием цилиндрических форм. Длина и радиус каждой из связок среднего уха составляют 0,8 и 0,5 мм соответственно. Длина тензорной мышцы барабанной перепонки равна 3,0 мм, радиус ее поперечного сечения – 0,5 мм, длина и радиус поперечного сечения стапедиальной мышцы – 2,0 и 0,43 мм соответственно [12; 13]. Моделирование жесткости кольцевой стапедиальной связки в плоскости основания (подножной пластинки) стремени выполнено с использованием равномерно распределенных по внешнему контуру 25 линейных пружинных элементов. Жесткость каждой пружины составляет 40 Н/м [20]. Твердотельная модель среднего уха представлена на рис. 1.

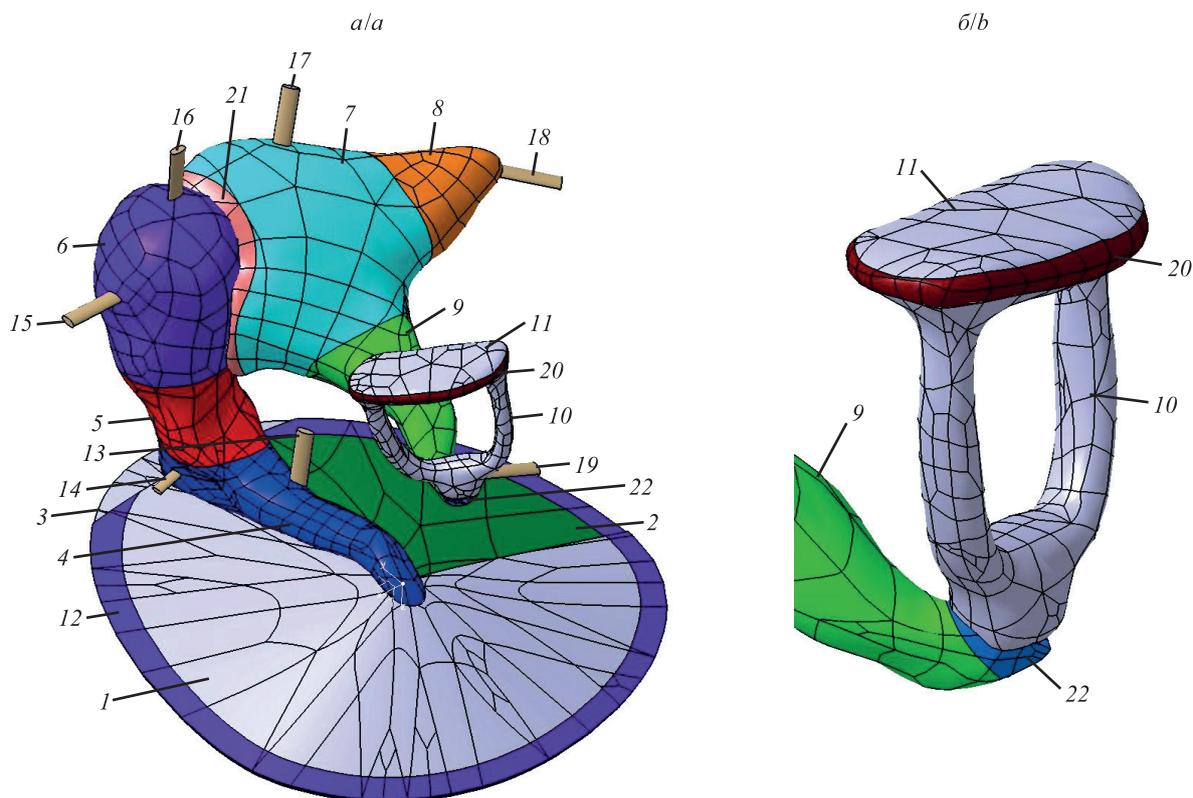


Рис. 1. Твёрдотельная модель среднего уха (а) и область наковально-стременистого сустава (б):
 1 – область *pars tensa* тимпанальной мембраны; 2 – задневерхний квадрант тимпанальной мембраны;
 3 – область *pars flaccida* тимпанальной мембраны; 4 – рукоятка молоточка;
 5 – шейка молоточка; 6 – головка молоточка; 7 – тело наковальни;
 8 – короткий отросток наковальни; 9 – длинный отросток наковальни; 10 – стремя;
 11 – основание (подножная пластинка) стремени; 12 – тимпанальное кольцо;
 13 – *tensor tympani* (сухожилие, натягивающее барабанную перепонку); 14 – передняя молоточковая связка;
 15 – задняя (латеральная) молоточковая связка; 16 – верхняя молоточковая связка;
 17 – передняя связка наковальни; 18 – задняя связка наковальни; 19 – сухожилие стремени;
 20 – кольцевая связка стремени; 21 – наковально-молоточковый сустав; 22 – наковально-стременистый сустав

Fig. 1. Biomechanical model of the middle ear (a) and the incudostapedial joint region (b):
 1 – *pars tensa*; 2 – posterosuperior quadrant of the tympanic membrane; 3 – *pars flaccida*; 4 – manubrium; 5 – malleus neck;
 6 – malleus head; 7 – incus body; 8 – short process of the incus; 9 – long process of the incus; 10 – stapes;
 11 – stapes footplate; 12 – tympanic annulus; 13 – *tensor tympani*; 14 – anterior malleolar ligament;
 15 – posterior (lateral) malleolar ligament; 16 – superior malleolar ligament; 17 – anterior incudal ligament;
 18 – posterior incudal ligament; 19 – stapedial tendon; 20 – stapedial annular ligament;
 21 – incudomalleolar joint; 22 – incudostapedial joint

Геометрические параметры элементов твёрдотельной модели среднего уха приведены в табл. 1. Они с высокой точностью соответствуют данным, принимаемым в работах [20–23] для аналогичных моделей.

Таблица 1

Характерные геометрические размеры
 твёрдотельной модели среднего уха

Table 1

Typical geometric parameters
 of the biomechanical model of the middle ear

Параметр	Значение
Диаметр тимпанальной мембраны вдоль рукоятки молоточка, мм	10,0
Диаметр тимпанальной мембраны, перпендикулярный рукоятке молоточка, мм	9,0
Высота конуса тимпанальной мембраны, мм	1,5
Площадь поверхности тимпанальной мембраны, мм ²	74,09

Окончание табл. 1
Ending table 1

Параметр	Значение
Диапазон толщин области <i>pars tensa</i> , мм	0,06–0,09
Длина рукоятки молоточка до конца бокового отростка, мм	4,36
Длина от бокового отростка до конца головки молоточка, мм	4,50
Длина длинного отростка наковальни, мм	7,54
Длина короткого отростка наковальни, мм	4,87
Высота стремени, мм	2,69
Длина основания стремени, мм	2,64
Ширина основания стремени, мм	1,30
Толщина основания стремени, мм	0,48

Модуль упругости и плотность биологических тканей приведены в табл. 2.

Таблица 2

Физико-механические характеристики материалов элементов среднего уха

Table 2

Mechanical properties for components of the middle ear

Элемент модели	Модуль упругости, МПа	Плотность, кг/м ³
Область <i>pars tensa</i> тимпанальной мембраны	33,4	1200
Область <i>pars flaccida</i> тимпанальной мембраны	11,1	1200
Задневерхний квадрант тимпанальной мембраны	33,4	1200
Головка молоточка	14 100	2550
Шейка молоточка	14 100	4530
Рукоятка молоточка	14 100	3700
Тело наковальни	14 100	2360
Короткий отросток наковальни	14 100	2260
Длинный отросток наковальни	14 100	5080
Стремя	14 100	2200
Тимпанальное кольцо	0,6	2500
Наковально-молоточковое соединение	14 100	3200
Наковально-стремненное соединение	0,6	1200
Тензорное тимпанальное сухожилие	2,6	2500
Задняя (латеральная) молоточковая связка	0,067	2500
Передняя молоточковая связка	21,0	2500
Верхняя молоточковая связка	0,049	2500
Задняя связка наковальни	0,65	2500
Передняя связка наковальни	0,049	2500
Сухожилие стремени	0,52	2500
Кольцевая связка стремени	0,02	2500

Источники: [20–24].

Коэффициент Пуассона для всех элементов модели принимался равным 0,3. Модуль упругости хрящевого трансплантата составляет 2,8 МПа [25]. Тимпанальное кольцо упруго закреплено по боковому контуру, торцы связок зафиксированы. Также жестко заделаны узлы, расположенные на внешней поверхности кольцевой связки стремени.

Конечно-элементное разбиение модели выполнено в полуавтоматическом режиме. Дискретная модель среднего уха в основном состоит из тетраэдрических конечных элементов типа SOLID187 (244 748 узлов и 148 871 элемент). Размер ребра конечного элемента для тимпанальной мембраны составляет 0,1 мм, а для остальных элементов модели равен 0,3 мм. Отметим, что размеры конечно-элементной сетки выбраны на основании исследования сеточной сходимости модели.

Проведение операции по восстановлению целостности тимпанальной мембраны моделируется удалением задневерхнего квадранта с последующим наложением хрящевого трансплантата различной толщины. Установка трансплантата осуществляется в соответствии с протоколом, применяемым в ходе проведения хирургической операции по устранению ретракционных карманов различной стадии. Участки трансплантата, содержащие прямолинейные грани, располагаются на ножке молоточка и на неповрежденной части тимпанальной мембраны (части области *pars flaccida*). Участок трансплантата, содержащий криволинейную грань, располагается на тимпанальном кольце. Толщина трансплантата принимает значения 150; 250; 500 и 750 мкм. На рис. 2 приведены модели среднего уха с удаленным задневерхним квадрантом и установленным на тимпанальную мембрану хрящевым трансплантатом, имеющим толщину 750 мкм.

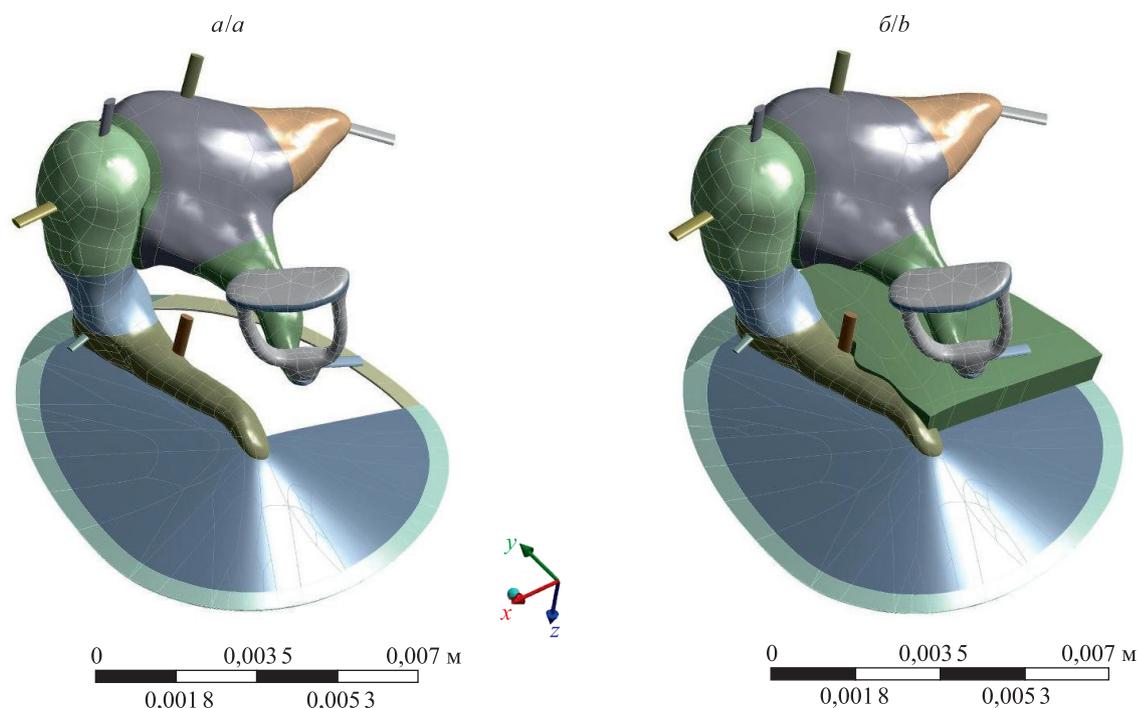


Рис. 2. Модели среднего уха с удаленным ретракционным карманом (а) и установленным хрящевым трансплантатом толщиной 750 мкм (б)

Fig. 2. Middle ear biomechanical models with removed retraction pocket (а) and attached cartilaginous graft with thickness of 750 μm (б)

Трансплантаты толщиной 150; 250 и 500 мкм располагаются аналогично тому, как установлен хрящевой трансплантат на рис. 2, б.

Размер ребра конечного элемента для хрящевых трансплантатов различной толщины составляет 0,3 мм. При установке трансплантата на тимпанальное кольцо, тимпанальную мембрану и ножку молоточка использовано контактное соединение типа Bonded.

Результаты и их обсуждение

На рис. 3 представлены значения собственных частот свободных колебаний среднего уха в норме и среднего уха с установленным трансплантатом толщиной 150; 250; 500 и 750 мкм в области задневерхнего квадранта. Заметим, что при модальном анализе спектра собственных частот свободных колебаний учитываются те частоты, для которых выполняется условие $\frac{w_p}{W_{\max}} > 0,05$ (w_p – амплитуда колебаний центра основания стремени; W_{\max} – максимальная амплитуда колебаний пупка тимпанальной мембраны). Согласно [26] собственные частоты свободных колебаний, для которых не выполняется это условие, отвечают режимам плоских колебаний или изгибным колебаниям с неподвижным стремением. Главные формы для различных мод свободных колебаний приведены на рис. 3.

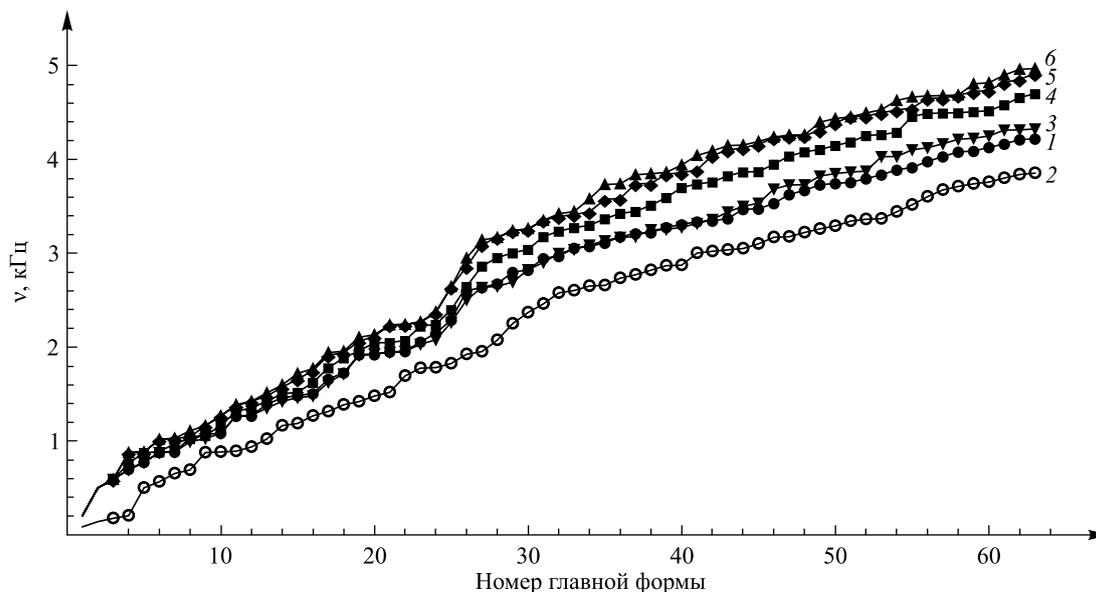


Рис. 3. Значения собственных частот свободных колебаний:
1 – среднее ухо в норме; 2, 3, 4, 5 и 6 – среднее ухо с установленным хрящевым трансплантатом толщиной 100; 150; 250; 500 и 750 мкм соответственно
Fig. 3. Eigenfrequency spectra: 1 – normal middle ear; 2, 3, 4, 5 and 6 – middle ear with attached cartilaginous graft of 100; 150; 250; 500 and 750 μm thick, respectively

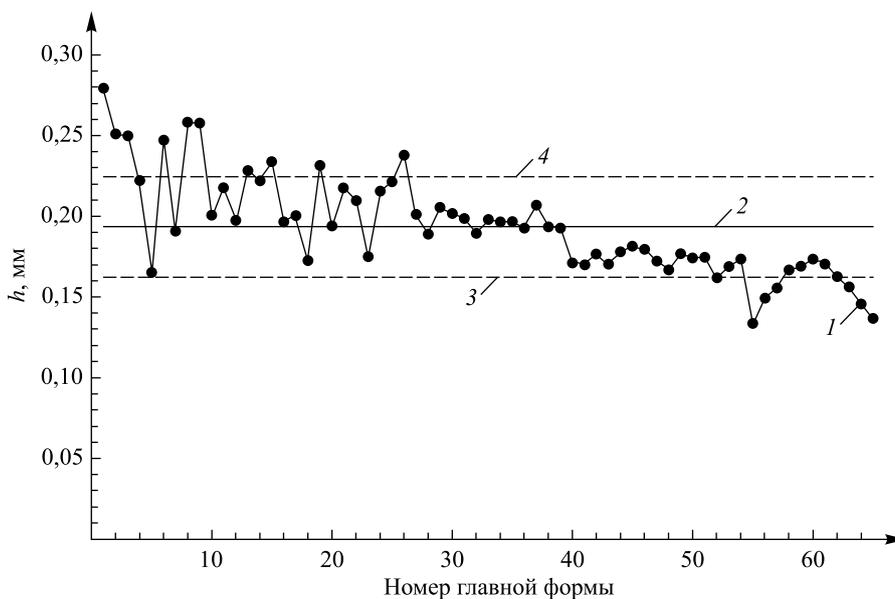


Рис. 4. Диаграмма, связывающая толщину хрящевого трансплантата с главной формой колебаний:
1 – ломаная, построенная на основании значений толщины хрящевого трансплантата, который необходимо установить на тимпанальную мембрану для приближенного совпадения спектра собственных частот среднего уха в норме и среднего уха с трансплантатом;
2 – линия, соответствующая среднему значению толщины хрящевого трансплантата;
3, 4 – линии, ограничивающие значения хрящевого трансплантата с учетом среднеквадратичного отклонения
Fig. 4. Diagram linking the cartilaginous graft thickness with the main mode of vibration:
1 – dot line plotted on the basis of thickness values of the cartilaginous graft must be attached on the tympanic membrane for approximate coincidence of the eigenfrequency spectra for normal middle ear and middle ear with the cartilaginous graft;
2 – line corresponding to the average value of the cartilage graft thickness;
3, 4 – lines limiting the values of the average cartilage graft thickness with account of standard deviation

Из рис. 3 видно, что нижние частоты для среднего уха в норме и среднего уха с установленным хрящевым трансплантатом различной толщины практически совпадают. Это соответствует результатам работы [15], согласно которым наблюдается совпадение собственных частот свободных колебаний среднего уха с патологическими изменениями тимпанальной мембраны, а также среднего уха с патологическими изменениями в области задневерхнего квадранта и установленным хрящевым трансплантатом. Для определения толщины трансплантата используем условия равенства частот свободных колебаний для соответствующих главных форм колебаний среднего уха в норме и среднего уха с установленным на задневерхний квадрант хрящевым трансплантатом, сформулированные на основании функций регрессии. В качестве аргумента функции регрессии для каждой моды выступали толщины хрящевых трансплантатов, значениями функции являлись значения частот свободных колебаний среднего уха с хрящевым трансплантатом соответствующей толщины. Регрессия осуществлялась на основании степенной функции, среднеквадратичная погрешность при этом не превышала 4 %.

В результате получено, что среднее значение толщины трансплантата составляет 0,193 мм, среднеквадратичное отклонение – 0,031 мм. Диаграмма, связывающая толщину хрящевого трансплантата, который следует установить на тимпанальную мембрану для приближенного совпадения спектра собственных частот среднего уха в норме и среднего уха с трансплантатом, с номером главной формы, визуализирована на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что наиболее эффективно использование трансплантата указанной толщины скажется на высоких частотах слухового диапазона, в частности на частотах, превышающих 2,5 кГц.

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что при удалении фиксированных ретракционных карманов и последующем проведении хирургической операции по восстановлению целостности тимпанальной мембраны наиболее эффективно использовать хрящевой трансплантат толщиной около 0,2 мм. Такая толщина трансплантата обеспечивает практически полное совпадение спектров собственных частот свободных колебаний среднего уха в норме и среднего уха после трансплантации. Исключение составляют низшие частоты свободных колебаний среднего уха (до 1,0 кГц), поскольку для этого диапазона частот соответствия между двумя указанными моделями среднего уха можно добиться установкой хрящевого трансплантата увеличенной толщины (около 0,25 мм). В то же время следует отметить, что использование хрящевого трансплантата толщиной 0,2 мм не приведет к существенному увеличению жесткости тимпанальной мембраны и не повлияет на изменение перемещений точек среднего уха, в частности рукоятки молоточка и основания стремени. Это подтверждается результатами экспериментальных работ [6; 24], посвященных определению частотно-амплитудной характеристики тимпанальной мембраны после установки различных трансплантатов (хрящевых пластин, хрящевых палисадов и островковых трансплантатов). Эти результаты показывают, что истонченные хрящевые пластины (в диапазоне толщин от 270 до 500 мкм) наиболее эффективны для улучшения слуховой проводимости реконструированной барабанной перепонки. Полученный в настоящей работе результат также соответствует выводам исследования [12], основанным на конечно-элементном моделировании вынужденных колебаний среднего уха с хрящевым трансплантатом различной конфигурации, установленным для устранения перфорации тимпанальной мембраны. Согласно [12] хрящевая пластина должна быть как можно более тонкой – в пределах от 0,1 до 0,2 мм. В то же время следует отметить, что результаты модального анализа моделей среднего уха в норме и среднего уха с установленным хрящевым трансплантатом толщиной 100 мкм, представленные на рис. 4 (ломаные 1, 2), показывают, что такая толщина хрящевого трансплантата не позволяет добиться совпадения спектров собственных частот свободных колебаний, причем отличия собственных частот для соответствующих главных форм достаточно существенные.

Библиографические ссылки

1. Mierzwiński J, Fishman AJ. Retraction pockets of tympanic membrane: protocol of management and results of treatment. *Otorhinolaryngologia*. 2014;13(2):114–121.
2. Cassano M, Cassano P. Retraction pockets of pars tensa in pediatric patients: clinical evolution and treatment. *International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology*. 2010;74(2):178–182. DOI: 10.1016/j.ijporl.2009.11.004.
3. Ching HH, Spinner AG, Ng M. Pediatric tympanic membrane cholesteatoma: systematic review and meta-analysis. *International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology*. 2017;102:21–27. DOI: 10.1016/j.ijporl.2017.08.027.
4. Couloigner V, Molony N, Viala P, Contencin P, Narcy P, Van Den Abbeele T. Cartilage tympanoplasty for posterosuperior retraction pockets of the pars tensa in children. *Otology and Neurotology*. 2003;24(2):264–269. DOI: 10.1097/00129492-200303000-00022.

5. Dornhoffer JL. Cartilage tympanoplasty. *Otolaryngologic Clinics of North America*. 2006;39(6):1161–1176. DOI: 10.1016/j.otc.2006.08.006.
6. Mürbe D, Zahnert T, Bornitz M, Hüttenbrink K-B. Acoustic properties of different cartilage reconstruction techniques of the tympanic membrane. *Laryngoscope*. 2002;112(10):1769–1776. DOI: 10.1097/00005537-200210000-00012.
7. Ермоченко СА, Михасев ГИ, Петрова ЛГ. Расчет напряженно-деформированного состояния среднего уха при его тотальной реконструкции с учетом влияния остатков тимпанальной мембраны. *Российский журнал биомеханики*. 2008;12(3):24–36.
8. Бегун ПИ, Грачев КВ, Ле Данг Као. Моделирование упругих свойств системы звукопроводения в норме и патологии. *Сенсорные системы*. 2004;18(3):206–210.
9. Бегун ПИ. Биомеханическое моделирование структур среднего уха в пакетах прикладных программ в норме, при патологических изменениях, коррекции и реконструкции. *Folia Otorhinolaryngologiae et Pathologiae Respiratoriae*. 2013;19(3):43–49.
10. Funnell WR, Khanna SM, Decraemer WF. On the degree of rigidity of the manubrium in a finite-element model of the cat eardrum. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1992;91(4):2082–2090. DOI: 10.1121/1.403694.
11. Beer H-J, Bornitz M, Hardtke HJ, Schmidt R, Hofmann G, Vogel U, et al. Modeling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behaviour. *Audiology and Neurotology*. 1999;4(3–4):156–162. DOI: 10.1159/000013835.
12. Lee C-F, Hsu L-P, Chen P-R, Chou Y-F, Chen J-H, Liu T-C. Biomechanical modeling and design optimization of cartilage myringoplasty using finite element analysis. *Audiology and Neurotology*. 2006;11(6):380–388. DOI: 10.1159/000095900.
13. Lee C-F, Chen J-H, Chou Y-F, Hsu L-P, Chen P-R, Liu T-C. Optimal graft thickness for different sizes of tympanic membrane perforation in cartilage myringoplasty: a finite element analysis. *Laryngoscope*. 2007;117(4):725–730. DOI: 10.1097/mlg.0b013e-318031f0e7.
14. Yu-Hsuan Wen, Lee-Ping Hsu, Peir-Rong Chen, Chia-Fone Lee. Design optimization of cartilage myringoplasty using finite element analysis. *Tzu Chi Medical Journal*. 2006;18(5):370–377. DOI: 10.6440/TZUCMJ.200610.0370.
15. Mikhasev G, Bosiakov S, Petrova L, Maisyuk M, Yurkevich K. Assessment of eigenfrequencies of the middle ear oscillating system: effect of the cartilage transplant. In: Awrejcewicz J, editor. *Dynamical systems: modeling; 2015 December 7–10; Łódź, Poland*. Cham: Springer; 2016. p. 243–254. (Springer proceedings in mathematics and statistics; volume 181). DOI: 10.1007/978-3-319-42402-6_21.
16. Михасев ГИ, Босьяков СМ, Юркевич КС, Дутина АА, Петрова ЛГ, Майсюк ММ. Выбор толщины хрящевого трансплантата для хирургического лечения ретракционного кармана тимпанальной мембраны на основании модального анализа колебательной системы среднего уха. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2017;2:52–58.
17. Мареев ГО. Современные представления о среднем ухе и его математические модели (обзор). *Саратовский научно-медицинский журнал*. 2012;8(1):96–100.
18. Aernouts J, Couckuyt I, Crombecq K, Dirckx JJJ. Elastic characterization of membranes with a complex shape using point indentation measurements and inverse modeling. *International Journal of Engineering Science*. 2010;48(6):599–611. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2010.02.001.
19. Pengpeng Xie, Yong Peng, Junjiao Hu, Shengen Yi. A study on the effect of ligament and tendon detachment on human middle ear sound transfer using mathematic model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part H: Journal of Engineering in Medicine*. 2019;233(8):784–792. DOI: 10.1177/0954411919853364.
20. Gan RZ, Feng B, Sun Q. Three-dimensional finite element modeling of human ear for sound transmission. *Annals of Biomedical Engineering*. 2004;32(6):847–859. DOI: 10.1023/B:ABME.0000030260.22737.53.
21. Sun Q, Chang K-H, Dormer KJ, Dyer RK Jr, Gan RZ. An advanced computer-aided geometric modeling and fabrication method for human middle ear. *Medical Engineering and Physics*. 2002;24(9):595–606. DOI: 10.1016/s1350-4533(02)00045-0.
22. Koike T, Wada H, Kobayashi T. Modeling of the human middle ear using the finite-element method. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2002;111(3):1306–1317. DOI: 10.1121/1.1451073.
23. Wever EG, Lawrence M. *Physiological acoustics*. Princeton: Princeton University Press; 2016. 476 p.
24. Areias B, Santos C, Jorge RMN, Gentil F, Parente MPL. Finite element modeling of sound transmission from outer to inner ear. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part H: Journal of Engineering in Medicine*. 2016;230(11):999–1007. DOI: 10.1177/0954411916666109.
25. Zahnert T, Hüttenbrink KB, Mürbe D, Bornitz M. Experimental investigation of the use of cartilage in tympanic membrane reconstruction. *American Journal of Otolaryngology*. 2000;21(3):322–328. DOI: 10.1016/s0196-0709(00)80039-3.
26. Mikhasev GI, Slavashovich I, Yurkevich K. Prediction of eigenfrequencies of the middle ear oscillating system after tympanoplasty and stapedotomy. In: Altenbach H, Mikhasev GI, editors. *Shell and membrane theories in mechanics and biology. From macro- to nanoscale structures*. Cham: Springer; 2015. p. 243–265. (Advanced structured materials; volume 45).

References

1. Mierzwiński J, Fishman AJ. Retraction pockets of tympanic membrane: protocol of management and results of treatment. *Otorhinolaryngologia*. 2014;13(2):114–121.
2. Cassano M, Cassano P. Retraction pockets of pars tensa in pediatric patients: clinical evolution and treatment. *International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology*. 2010;74(2):178–182. DOI: 10.1016/j.ijporl.2009.11.004.
3. Ching HH, Spinner AG, Ng M. Pediatric tympanic membrane cholesteatoma: systematic review and meta-analysis. *International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology*. 2017;102:21–27. DOI: 10.1016/j.ijporl.2017.08.027.
4. Couloigner V, Molony N, Viala P, Contencin P, Narcy P, Van Den Abbeele T. Cartilage tympanoplasty for posterosuperior retraction pockets of the pars tensa in children. *Otolaryngology and Neurotology*. 2003;24(2):264–269. DOI: 10.1097/00129492-200303000-00022.
5. Dornhoffer JL. Cartilage tympanoplasty. *Otolaryngologic Clinics of North America*. 2006;39(6):1161–1176. DOI: 10.1016/j.otc.2006.08.006.
6. Mürbe D, Zahnert T, Bornitz M, Hüttenbrink K-B. Acoustic properties of different cartilage reconstruction techniques of the tympanic membrane. *Laryngoscope*. 2002;112(10):1769–1776. DOI: 10.1097/00005537-200210000-00012.

7. Ermochenko SA, Mikhasev GI, Petrova LG. Calculation of the strain-stress state of the middle ear under its total reconstruction taking into account the influence of the tympanic membrane remnants. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*. 2008;12(3):24–36. Russian.
8. Begun PI, Grachev KV, Le Dang Kao. Modeling springy characteristic of the sound-transfer system in rate and pathology. *Sensornye sistemy*. 2004;18(3):206–210. Russian.
9. Begun PI. [Biomechanical modeling of middle ear structures in applied software in normal conditions, with pathological changes, after correction and reconstruction]. *Folia Otorhinolaryngologiae et Pathologiae Respiratoriae*. 2013;19(3):43–49. Russian.
10. Funnell WR, Khanna SM, Decraemer WF. On the degree of rigidity of the manubrium in a finite-element model of the cat eardrum. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1992;91(4):2082–2090. DOI: 10.1121/1.403694.
11. Beer H-J, Bornitz M, Hardtke HJ, Schmidt R, Hofmann G, Vogel U, et al. Modeling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behaviour. *Audiology and Neurotology*. 1999;4(3–4):156–162. DOI: 10.1159/000013835.
12. Lee C-F, Hsu L-P, Chen P-R, Chou Y-F, Chen J-H, Liu T-C. Biomechanical modeling and design optimization of cartilage myringoplasty using finite element analysis. *Audiology and Neurotology*. 2006;11(6):380–388. DOI: 10.1159/000095900.
13. Lee C-F, Chen J-H, Chou Y-F, Hsu L-P, Chen P-R, Liu T-C. Optimal graft thickness for different sizes of tympanic membrane perforation in cartilage myringoplasty: a finite element analysis. *Laryngoscope*. 2007;117(4):725–730. DOI: 10.1097/mlg.0b013e-318031f0e7.
14. Yu-Hsuan Wen, Lee-Ping Hsu, Peir-Rong Chen, Chia-Fone Lee. Design optimization of cartilage myringoplasty using finite element analysis. *Tzu Chi Medical Journal*. 2006;18(5):370–377. DOI: 10.6440/TZUCMJ.200610.0370.
15. Mikhasev G, Bosiakov S, Petrova L, Maisyuk M, Yurkevich K. Assessment of eigenfrequencies of the middle ear oscillating system: effect of the cartilage transplant. In: Awrejcewicz J, editor. *Dynamical systems: modeling; 2015 December 7–10; Łódź, Poland*. Cham: Springer; 2016. p. 243–254. (Springer proceedings in mathematics and statistics; volume 181). DOI: 10.1007/978-3-319-42402-6_21.
16. Mikhasev GI, Bosiakov SM, Yurkevich KS, Dutina AA, Petrova LG, Maisyuk MM. Graft thickness assessment for surgery of retraction pocket of the middle ear based on finite-element analysis of eigenfrequencies of the eardrum oscillating system. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;2:52–58. Russian.
17. Mareev GO. Modern mathematical models of middle ear (review). *Saratov Journal of Medical Scientific Research*. 2012; 8(1):96–100. Russian.
18. Aernouts J, Couckuyt I, Crombecq K, Dirckx JJJ. Elastic characterization of membranes with a complex shape using point indentation measurements and inverse modeling. *International Journal of Engineering Science*. 2010;48(6):599–611. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2010.02.001.
19. Pengpeng Xie, Yong Peng, Junjiao Hu, Shengen Yi. A study on the effect of ligament and tendon detachment on human middle ear sound transfer using mathematic model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part H: Journal of Engineering in Medicine*. 2019;233(8):784–792. DOI: 10.1177/0954411919853364.
20. Gan RZ, Feng B, Sun Q. Three-dimensional finite element modeling of human ear for sound transmission. *Annals of Biomedical Engineering*. 2004;32(6):847–859. DOI: 10.1023/B:ABME.0000030260.22737.53.
21. Sun Q, Chang K-H, Dormer KJ, Dyer RK Jr, Gan RZ. An advanced computer-aided geometric modeling and fabrication method for human middle ear. *Medical Engineering and Physics*. 2002;24(9):595–606. DOI: 10.1016/s1350-4533(02)00045-0.
22. Koike T, Wada H, Kobayashi T. Modeling of the human middle ear using the finite-element method. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2002;111(3):1306–1317. DOI: 10.1121/1.1451073.
23. Wever EG, Lawrence M. *Physiological acoustics*. Princeton: Princeton University Press; 2016. 476 p.
24. Areias B, Santos C, Jorge RMN, Gentil F, Parente MPL. Finite element modeling of sound transmission from outer to inner ear. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part H: Journal of Engineering in Medicine*. 2016;230(11):999–1007. DOI: 10.1177/0954411916666109.
25. Zahnert T, Hüttenbrink KB, Mürbe D, Bornitz M. Experimental investigation of the use of cartilage in tympanic membrane reconstruction. *American Journal of Otolaryngology*. 2000;21(3):322–328. DOI: 10.1016/s0196-0709(00)80039-3.
26. Mikhasev GI, Slavashevich I, Yurkevich K. Prediction of eigenfrequencies of the middle ear oscillating system after tympanoplasty and stapedotomy. In: Altenbach H, Mikhasev GI, editors. *Shell and membrane theories in mechanics and biology. From macro- to nanoscale structures*. Cham: Springer; 2015. p. 243–265. (Advanced structured materials; volume 45).

Статья поступила в редколлегию 02.10.2020.
Received by editorial board 02.10.2020.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004.942

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМЫ ОДНОГО ОКНА

Р. Е. ШАРЫКИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Предлагается подход, демонстрирующий разработку систем документооборота по принципу одного окна на раннем этапе их проектирования, основанный на применении формальных методов в части спецификации системы и метрик ее анализа, а также оценки значений метрик. Пример системы одного окна моделируется формально в рамках модели распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем (РООСГС) с помощью языка спецификации SHYMaude. Предлагаются несколько метрик, позволяющих оценить систему. Данные метрики специфицируются формально посредством языка QuaTEh. Система одного окна, представленная как спецификация переписывающей логики Maude, полученная трансляцией спецификации SHYMaude, анализируется статистически с помощью инструмента MultiVeStA. В процессе статистического анализа определяется количество сотрудников, необходимое для эффективного функционирования системы. Полученное значение используется как стартовое значение в расширенной системе, в которой присутствует управление количеством сотрудников в целях поддержания длины очереди пакетов документов в желаемом диапазоне. При статистическом исследовании расширенной системы обнаруживается недостаток, который устраняется доработкой системы, что показывает, как данный подход может быть использован для изучения и доработки систем подобного типа на раннем этапе построения самой модели системы.

Ключевые слова: математическое моделирование; стохастические системы; статистический анализ; спецификация моделей; документооборот; системы одного окна.

Образец цитирования:

Шарыкин РЕ. Применение формальных методов при проектировании системы одного окна. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:79–90.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-79-90>

For citation:

Sharykin RE. Application of formal methods in the design of a single window system. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:79–90. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-79-90>

Автор:

Роман Евгеньевич Шарыкин – соискатель кафедры технологий программирования факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор технических наук, профессор А. Н. Курбацкий.

Author:

Raman E. Sharykin, competitor at the department of software engineering, faculty of applied mathematics and computer science.
sharykin@gmail.com



APPLICATION OF FORMAL METHODS IN THE DESIGN OF A SINGLE WINDOW SYSTEM

R. E. SHARYKIN^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

This paper proposes an approach that demonstrates the development of single window document circulation systems at the early stage of their design, based on the use of formal methods in the specification of a system, the specification of metrics for its analysis and the estimation of metrics values. An example of a single window document circulation system is modelled formally within the framework of the distributed object-based stochastic hybrid systems (DOBSHS) model using the SHYMaude specification language. Several metrics are proposed to evaluate the system. These metrics are specified formally using the QuaTE_x language. The system is analysed statistically using the MultiVeStA tool, which analyses a single window document circulation system, represented as a rewriting logic Maude specification obtained by the translation of the SHYMaude system specification. In the process of the statistical analysis, the number of employees required for the effective system functioning is determined. The resulting value is used as a starting value in an extended system, in which there is an officer number management maintaining the length of the application queue in the desired range. A statistical study of the extended system reveals a drawback that is eliminated by adjusting the system, showing how this approach can be used to study and refine systems of this type at the early stage of designing the system model itself.

Keywords: mathematical modelling; stochastic systems; statistical analysis; model specification; document circulation; single window systems.

Введение

В настоящее время в организациях распространена система одного окна. При таком подходе клиент обращается с запросом в офис организации, его запрос классифицируется как одна из предоставляемых услуг и обрабатывается в соответствии с правилами оказания данной услуги. В процессе исполнения заказа сотрудниками организации осуществляются проверка документов, в случае необходимости запрос дополнительных документов у клиента и создание на основе полного и проверенного пакетов документов нового документа, являющегося результатом оказания услуги. В качестве простого примера может служить получение разрешения на перепланировку квартиры. В этом случае у клиента могут быть запрошены два дополнительных документа из других организаций. После получения этих документов производится экспертная оценка и выдается либо разрешение, либо отказ.

На данный момент имеется широкий спектр математических моделей для моделирования систем документооборота. Подробный обзор существующих моделей можно найти в [1]. Также в [1] авторы предлагают свою модель, учитывающую специфику рассматриваемой в статье области. В настоящей работе представлена модель, основанная на модели, предложенной в [1], но учитывающая специфику системы одного окна и предназначенная для спецификации на языке SHYMaude [2] в рамках модели распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем (РООГС) [3].

Модель системы одного окна исследуется статистически на заданном временном интервале симуляции в отношении четырех метрик, выбранных для оценки эффективности предложенного алгоритма: максимальной длины очереди, времени стабилизации максимальной длины очереди, среднего времени обработки пакета документов и загруженности сотрудника (времени, в течение которого сотрудник занят обработкой пакета документов). На основании полученных оценок определяется достаточное количество сотрудников, необходимое для достижения желаемых значений метрик. Далее строится расширенная модель с управлением количеством сотрудников, осуществляемым менеджером подразделения. Начальное значение количества сотрудников берется из предыдущего исследования, и задается желаемый диапазон для одной из метрик – максимальной длины очереди. При исследовании модели обнаруживается существенный недостаток в представленном алгоритме управления количеством сотрудников, который устраняется доработкой алгоритма, что показывает возможности предложенной методики.

Пример документооборота по принципу одного окна

В качестве примера рассмотрим обработку запросов одного типа в организации, использующей систему одного окна. При подобном подходе клиент подает заявку на получение некоторого результирующего документа от обслуживающей организации на основе предоставляемого им пакета документов. После подачи заявки может выясниться, что необходимы дополнительные документы, которые клиент также должен предоставить. Когда пакет оказывается полным, по нему выносится решение и возвращается клиенту как результирующий документ.

Для придания реалистичности данной модели используются случайные времена обработки на всех этапах прохождения заявки: время приема заявки, время обработки заявки, время уведомления клиента о необходимости дополнительных документов.

Принятые заявки ставятся в очередь, организованную по принципу «первый пришел – первый вышел». Работники организации извлекают документы из этой очереди, обрабатывают и выполняют необходимые действия: извещают клиента о недостающих документах, создают результирующие документы на основании предоставленного пакета документов.

Спецификация модели документооборота с помощью переписывающей логики

Далее будет представлена спецификация модели документооборота на языке SHYMaude [2] в рамках модели РООСГС [3]. Спецификация SHYMaude может быть легко транслирована в спецификацию переписывающей логики системы Maude и прямо симулирована в Maude [4].

Распределенная конфигурация транслированной системы моделируется в Maude как множество объектов и сообщений, действующих параллельно в соответствии со множеством правил перезаписи, описывающих поведение отдельных объектов. В любой конкретно взятый момент времени состояние системы содержит объекты, запланированные сообщения и, возможно, одно активное сообщение [3]. Состояние системы можно рассматривать как «суп» из вышеперечисленных элементов, являющийся коммутативным, ассоциативным и имеющий единичный элемент (отвечающий за пустое множество).

Динамику реализованной системы применительно к рассматриваемому случаю можно описать следующим образом: начальное состояние системы выбирается в соответствии с заданным распределением на всех возможных состояниях системы, не содержащих активного сообщения. Так как в системе нет стохастических дифференциальных уравнений, то можно считать, что она переходит к запланированному сообщению с ближайшим временем активации и делает его активным либо переходит на следующую временную точку, отстоящую от текущей на заданный максимальный шаг, если расстояние до следующей активации сообщения больше заданного максимального шага. Активное сообщение приводит к последовательному применению переписывающих правил по модулю уравнений спецификации. Когда ни одно из правил перезаписи более неприменимо либо активное сообщение отсутствует, система совершает временной переход к следующему запланированному сообщению или на заданный максимальный шаг.

Графическое представление алгоритма системы, на основе которого была разработана спецификация SHYMaude, приведено на рис. 1–3. На этих рисунках объект обозначен кругом с указанием внутри класса объекта, его id и при необходимости значений отдельных атрибутов, для которых применяется данный алгоритм. При спецификации переписывающих правил для объектов с указанными значениями атрибутов используются условные переписывающие правила, задающие значение атрибута. Объекты одного класса следуют одинаковому алгоритму. В начале работы системы выполняются действия, на которые указывает стрелка из входа «Старт». Стрелки, выходящие из объекта, подписаны активными сообщениями. Когда в процессе прогрессирования времени одно из запланированных сообщений становится активным, выполняется последовательность алгоритмических действий, которая указывается стрелкой, подписанной соответствующим сообщением.

Спецификация системы на языке SHYMaude и ее трансляция в язык Maude представлены в [5].

Метрики оценки примера системы документооборота

Для анализа системы и ее доводки можно выделить следующие метрики оценки: длину очереди пакетов документов, время стабилизации очереди после начала работы, ожидаемое время обработки пакета документов, степень загруженности сотрудников. Необходимо отметить, что длина очереди на заданный момент времени является стохастической колеблющейся величиной. По этой причине более подходящей метрикой выступает максимальное количество пакетов документов в очереди с начала работы и по заданный момент времени, являющееся стохастической неубывающей величиной. Запишем эти метрики по пунктам.

Метрика 1. Максимальная длина очереди с начала работы и по заданный момент времени.

Метрика 2. Время стабилизации максимальной длины очереди, измеренное как момент времени, после которого данная метрика больше не увеличивается до окончания симуляции.

Метрика 3. Среднее время обработки пакета документов, измеренное как среднее время на симуляциях между первоначальной подачей пакета и получением окончательного ответа от организации.

Метрика 4. Загруженность сотрудника, измеренная как сумма периодов, на протяжении которых сотрудник находится в состоянии обработки пакетов (атрибут state содержит значение busy).

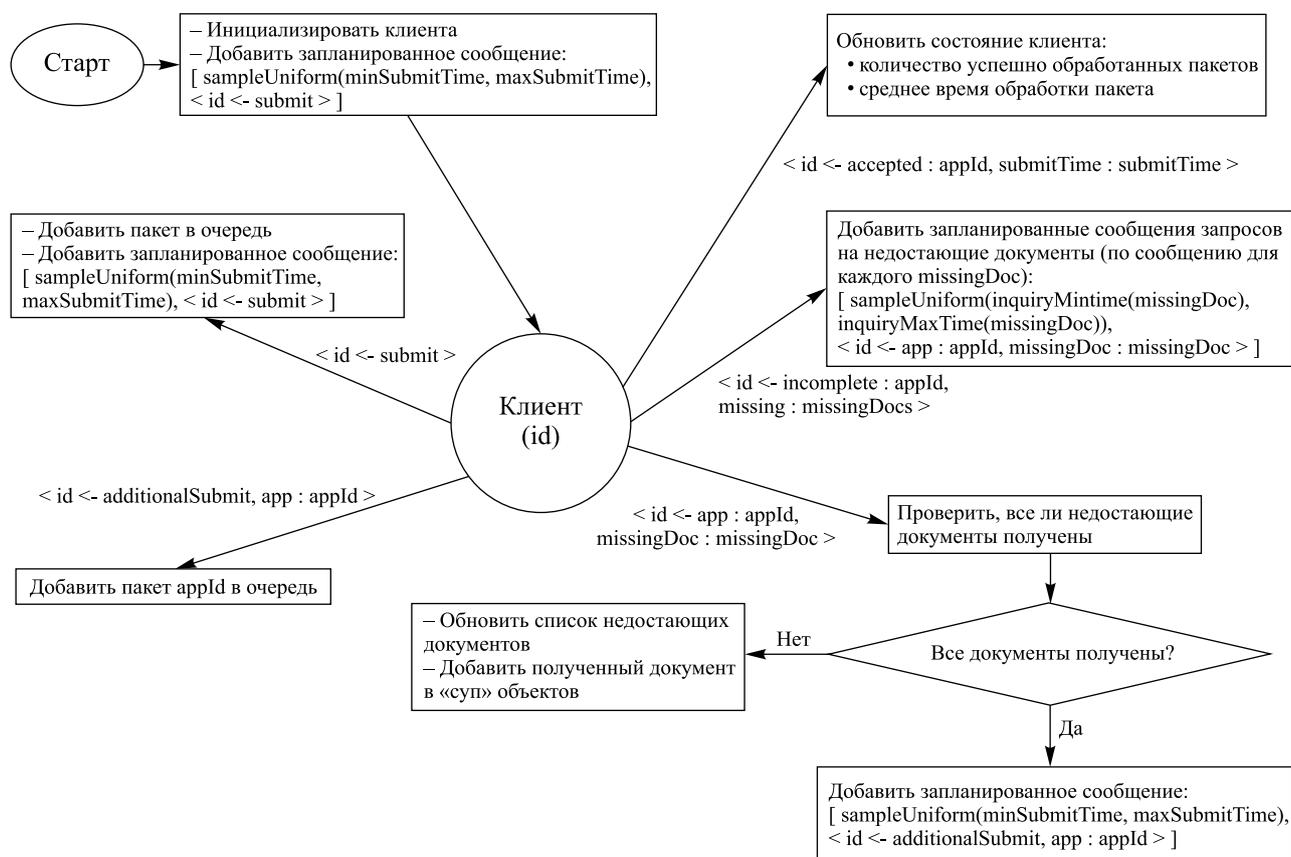


Рис. 1. Алгоритм клиента
 Fig. 1. Client's algorithm

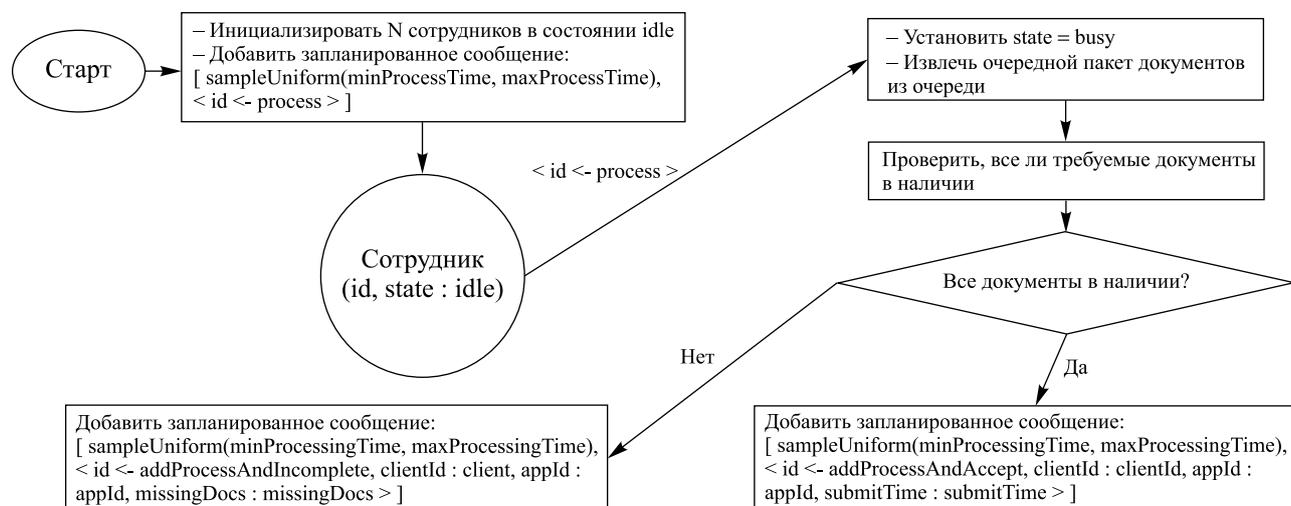


Рис. 2. Алгоритм сотрудника: инициализация, прием и обработка пакетов документов
 Fig. 2. Officer's algorithm: initialisation, accepting and processing of document packages

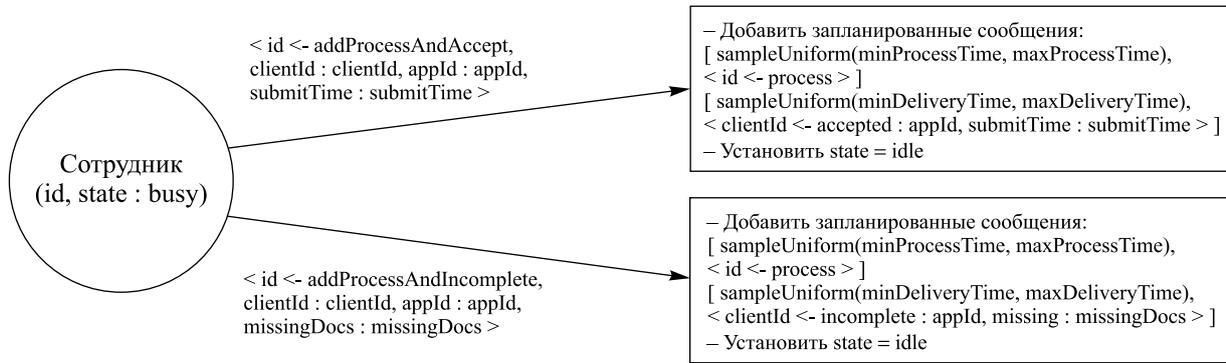


Рис. 3. Алгоритм сотрудника: ответ клиенту и планирование обработки следующего пакета документов
Fig. 3. Officer's algorithm: responding to the client and scheduling of the processing of the next document package

Статистический анализ

Спецификация SHYMaude транслируется в спецификацию Maude [2], выполняемую в системе Maude [4]. Метрики специфицируются с помощью языка QuaTEX [6]. Для проведения статистического анализа применяется инструмент MultiVeStA [7], принимающий спецификацию Maude системы и спецификацию MultiQuaTEX, являющуюся обобщением QuaTEX [7], и выполняющий симуляции Монте-Карло до достижения предустановленной точности результата. Инструмент реализует клиент-серверную архитектуру, позволяющую более полно использовать возможности параллельных вычислений.

Для задания точности результатов применялись параметр α , равный 0,01, и параметр δ , равный 0,05. Выбор параметра α гарантирует, что повторные вычисления значения будут лежать в доверительном интервале с вероятностью 99 %. Доверительный интервал рассчитывается по формуле

$$\left[v(1 - \delta), \frac{v}{1 - \delta} \right].$$

Параметры системы документооборота включают в себя количество задействованных сотрудников, время подачи заявки, интервал, необходимый сотруднику для того, чтобы приступить к обработке следующей заявки, время обработки заявки сотрудником, время доставки сообщений клиенту, период симуляции и шаг симуляции. Значения параметров представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры модели

Table 1

Model parameters

Параметр	Описание	Значение
N	Количество сотрудников	1–20
submitTime	Время подачи заявки	[0,1; 0,2]
processTime	Интервал между обработками заявок	[0,05; 0,10]
processingTime	Время обработки заявки	[0,5; 1,5]
deliveryTime	Время доставки сообщения	[0,1; 0,2]
T	Период симуляции	40
dt	Временной шаг	0,1

Если принять одну условную единицу времени за 1 ч, то симуляция охватывает одну рабочую неделю, максимальный шаг симуляции равен 6 мин.

Далее изучим четыре метрики, описанные в предыдущем разделе, для количества сотрудников N от 1 до 20 и построим графики зависимости метрик от N. Выражения MultiQuaTEX для этих четырех метрик можно найти в [5].

Максимальная длина очереди. Результаты экспериментов для количества сотрудников N от 1 до 20 представлены на рис. 4. Данный график показывает монотонное уменьшение максимальной наблюдаемой длины очереди с увеличением количества задействованных сотрудников.

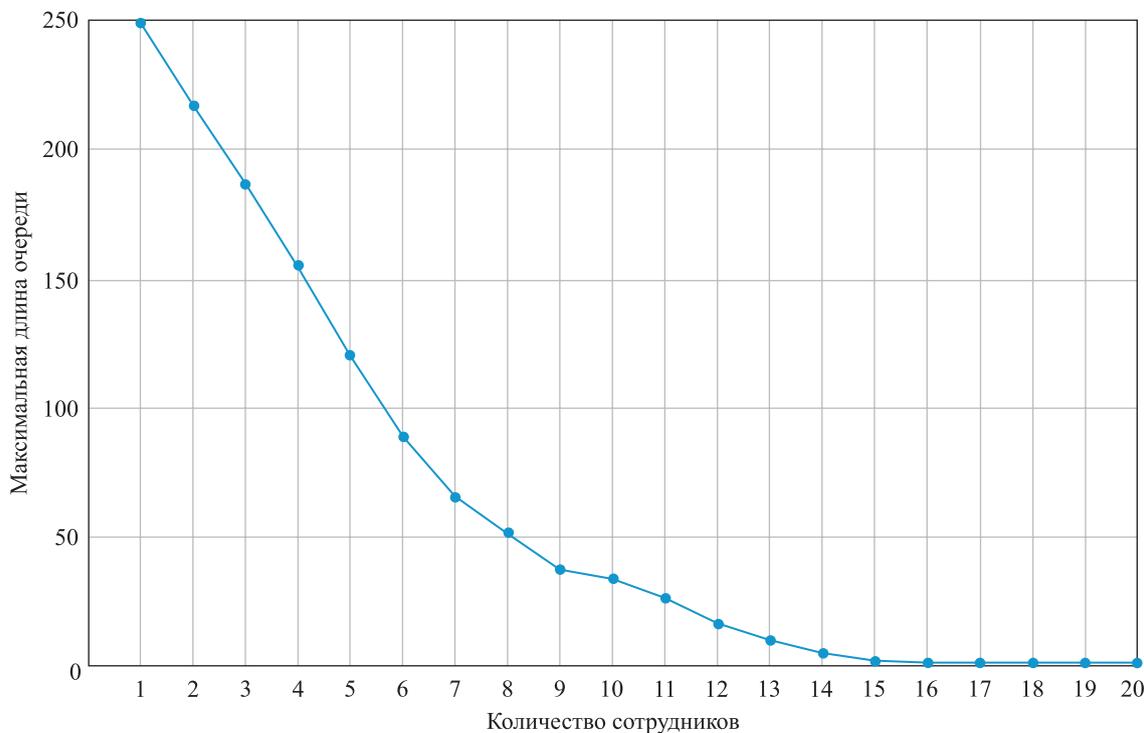


Рис. 4. Метрика 1. Максимальная длина очереди
Fig. 4. Metrics 1. Maximum queue length

Время стабилизации максимальной длины очереди. Результаты экспериментов для количества сотрудников N от 1 до 20 представлены на рис. 5. Данный график также показывает монотонное уменьшение максимальной наблюдаемой длины очереди с увеличением количества задействованных сотрудников.

Как видно из графика, при количестве сотрудников $N < 6$ значение времени стабилизации находится в районе предельного времени симуляции, из чего следует, что для $N < 6$ необходимо увеличить предельное время симуляции для получения оценки данной метрики. При количестве сотрудников с $N = 6$ по $N = 8$ резко падает время стабилизации максимальной длины очереди. Из этого можно сделать вывод, что $N = 6$ может рассматриваться как достаточное количество сотрудников, необходимое для того, чтобы стабилизировать максимальную длину очереди за рассматриваемый период.

Среднее время обработки пакета документов. Результаты экспериментов для количества сотрудников N от 1 до 20 представлены на рис. 6. Данный график показывает монотонное, без особенностей, уменьшение среднего времени обработки пакета с увеличением количества задействованных сотрудников.

Загруженность сотрудника. Результаты экспериментов для количества сотрудников N от 1 до 20 представлены на рис. 7.

Как видно из графика, при количестве сотрудников $N > 6$ отмечается падение времени, на протяжении которого сотрудник занят обработкой документов. При $N = 6$ мы имеем последнюю точку, в которой сотрудник занят обработкой документов максимальное время.

Анализ результатов статистического анализа и введение управления

На рис. 4 и 6 наблюдается монотонное уменьшение показателей, из чего можно сделать вывод, что большее количество сотрудников лишь улучшает значение метрик 1 и 3. Из рис. 5 видно, что при $N > 6$ начинается резкое уменьшение метрики 2. Однако при $N = 6$ расчет верхней границы доверительного интервала для данной метрики дает значение 40, исходя из этого, можно заключить, что время стабилизации может превышать 40 временных единиц при $N = 6$. Из рис. 7 видно, что при $N = 7$ время простоя сотрудников (40, метрика 4) невелико, но начинает быстро расти при $N > 7$.

На данном этапе необходимо рассмотрение дополнительных требований к системе, таких как требование на максимальную длину очереди, максимальное среднее время обработки документов, максимально возможное количество сотрудников. Ограничение на максимально возможное количество

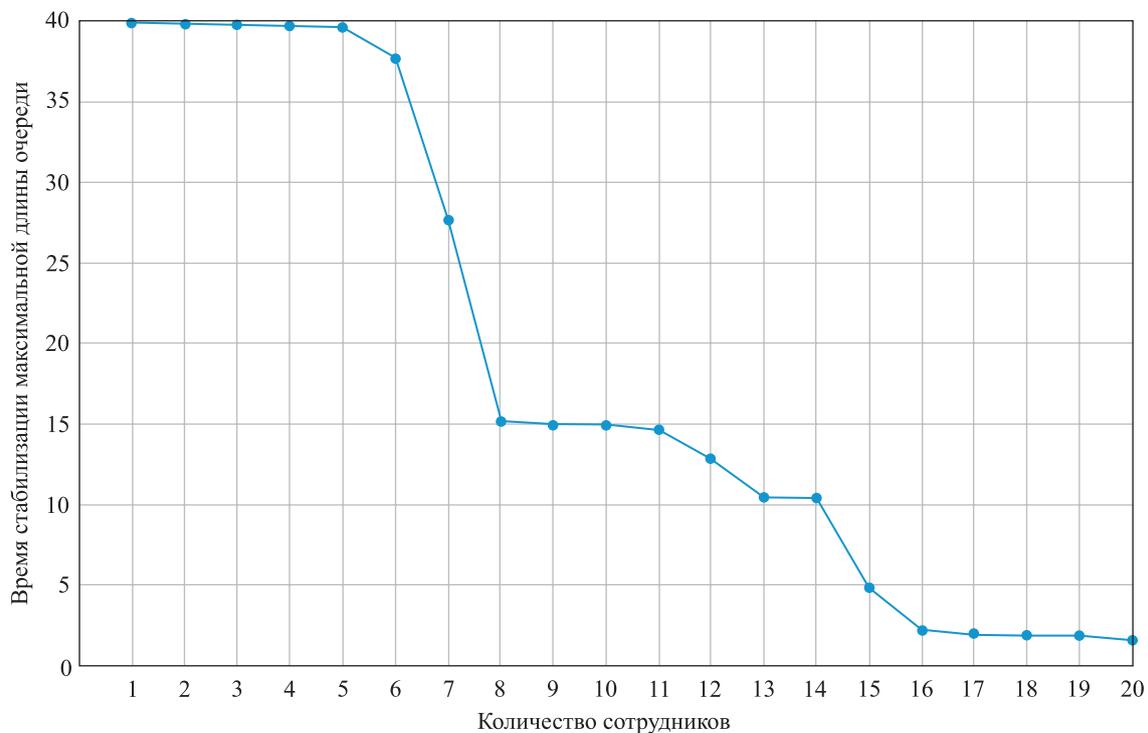


Рис. 5. Метрика 2. Время стабилизации максимальной длины очереди
Fig. 5. Metrics 2. Maximum queue length stabilisation time

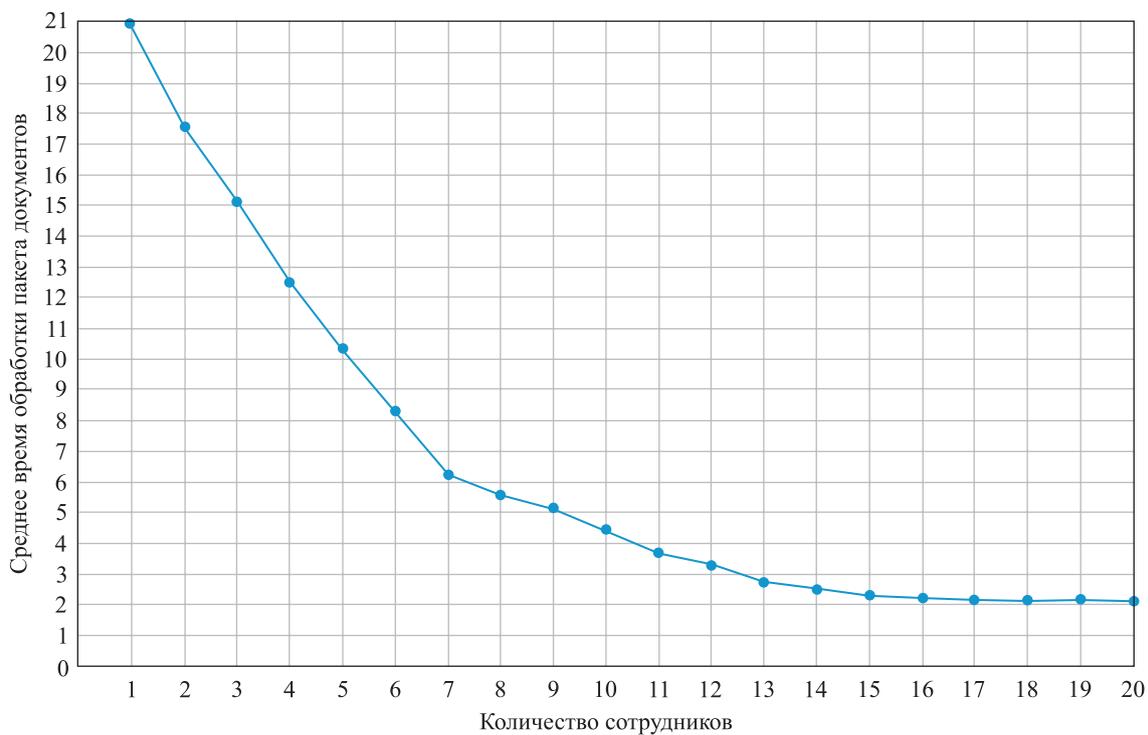


Рис. 6. Метрика 3. Среднее время обработки пакета документов
Fig. 6. Metrics 3. Average application processing time

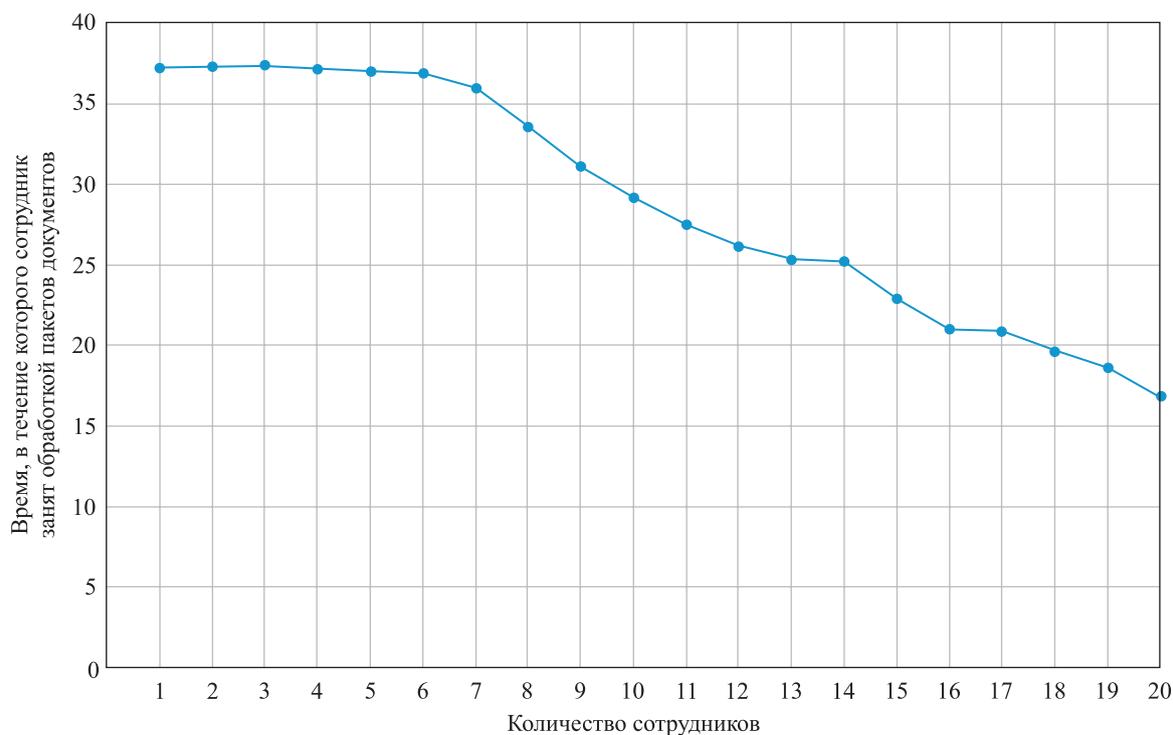


Рис. 7. Метрика 4. Время, в течение которого сотрудник занят обработкой пакетов документов

Fig. 7. Metrics 4. Officer busy time

сотрудников приводит к необходимости расширенного по времени симуляции исследования, так как время стабилизации при $N < 7$ может выходить за рамки 40 временных единиц. Для рассматриваемого примера положим, что мы не ограничены в количестве сотрудников, нас устраивает длина очереди, при которой среднее время обработки документов будет менее 8 временных единиц (один рабочий день). Также предположим, что мы стремимся к минимизации простоя сотрудников. С такими целевыми установками $N = 7$ видится оптимальным значением количества сотрудников ввиду наблюдений, сделанных в предыдущем разделе. В практической задаче на этом этапе может быть произведен дополнительный статистический анализ и применены более формальные методы для нахождения оптимального значения.

Для дальнейшего развития системы и приближения ее к реальной ситуации был принят во внимание тот факт, что в организации, как правило, существует менеджер, который может корректировать количество занятых сотрудников в зависимости от значения некоторого параметра. Допустим для рассматриваемого примера, что мы хотим держать длину очереди в определенном интервале. При $N = 7$ из рис. 4 мы имеем значение максимальной длины очереди, равное 65. Предположим, нашей целью является поддержание длины очереди в интервале $[50; 80]$.

Можно предложить алгоритм, аналогичный алгоритму термостата: менеджер проверяет длину очереди через каждые 4 временные единицы (дважды в день) и добавляет одного сотрудника, если длина очереди превышает 80 пакетов документов, и переводит одного сотрудника на другой участок работы, если длина очереди составляет менее 50 пакетов. Начальное количество сотрудников положим равным 7.

Данный алгоритм менеджера представлен графически на рис. 8. Для реализации алгоритма управления, описанного в предыдущем разделе, необходима доработка алгоритма сотрудника. В нашей реализации алгоритма менеджер отправляет сообщение сотруднику, когда он должен прекратить работу. Получив данное сообщение, сотрудник заканчивает обработку текущего пакета документов и прекращает работу. В спецификации для упрощения в этом случае объект клиента удаляется из состояния системы. Часть алгоритма сотрудника, представленная на рис. 9, замещает часть алгоритма, представленного на рис. 3.

Спецификация системы с управлением на языке SHYMaude и ее трансляция в язык Maude содержатся в [5].

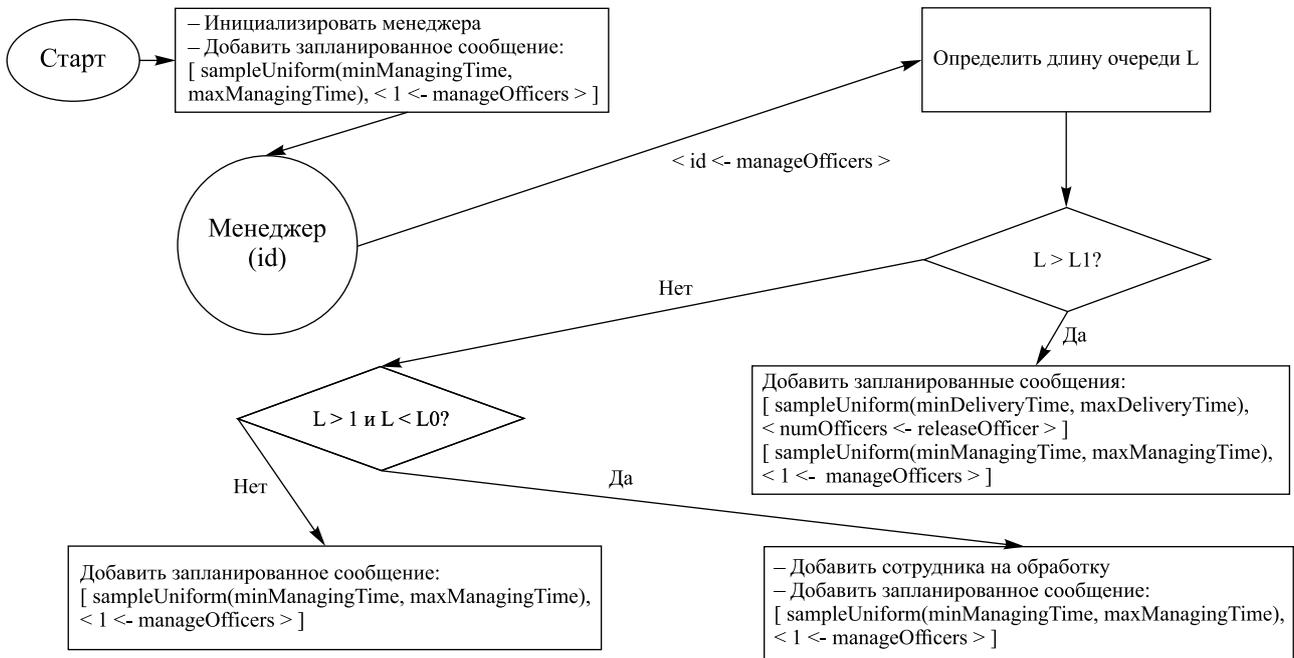


Рис. 8. Алгоритм менеджера
Fig. 8. Manager's algorithm

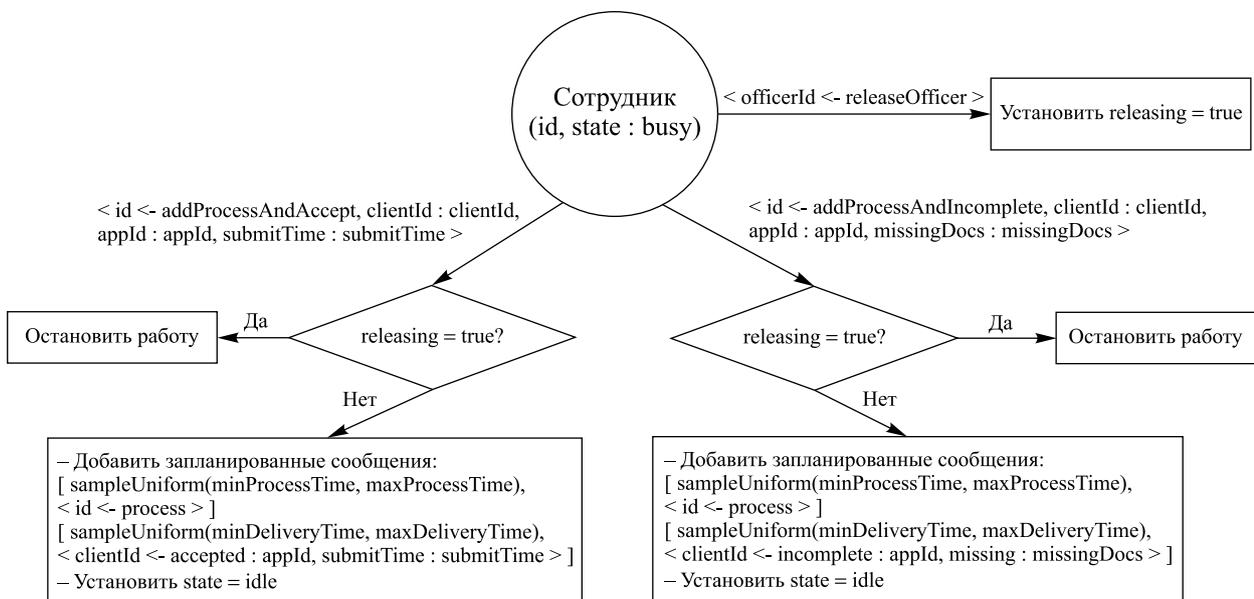


Рис. 9. Алгоритм сотрудника при наличии менеджера
Fig. 9. Client's algorithm with a manager present

Статистический анализ системы и коррекция управления

В табл. 2 приведены результаты статистического анализа системы одного окна с управлением количеством задействованных сотрудников.

Таблица 2

Результаты статистического анализа системы с управлением количеством задействованных сотрудников

Table 2

The results of the statistical analysis of the system with the officer number management

Метрика	Полученное значение	Доверительный интервал
Метрика 1. Максимальная длина очереди	158,9	[151,0; 167,3]
Метрика 2. Время стабилизации максимальной длины очереди	39,9	[37,9; 42,0]
Метрика 3. Среднее время обработки пакета документов	8,9	[8,4; 9,3]
Метрика 4. Загруженность сотрудника	36,8	[35,0; 38,8]

Как видно из табл. 2, значение максимальной длины очереди выходит за интервал [50; 80]. Анализ симуляции показал, что в начальный период времени длина очереди мала и менеджер, руководствуясь описанным алгоритмом, отстраняет сотрудников от работы, впоследствии добавляя их снова при превышении верхнего предела очереди. Так как добавление сотрудников происходит по одному и осуществляется раз в 4 временных интервала, получается наблюдаемое превышение максимального значения длины очереди. Это упущение исправлено путем введения правила, что менеджер начинает управлять количеством сотрудников только после того, как длина очереди достигла нижней границы – 50. Доработанный алгоритм менеджера представлен на рис. 10. Спецификация системы с доработанным управлением на языке SHYMaude и ее трансляция в язык Maude приведены в [5].

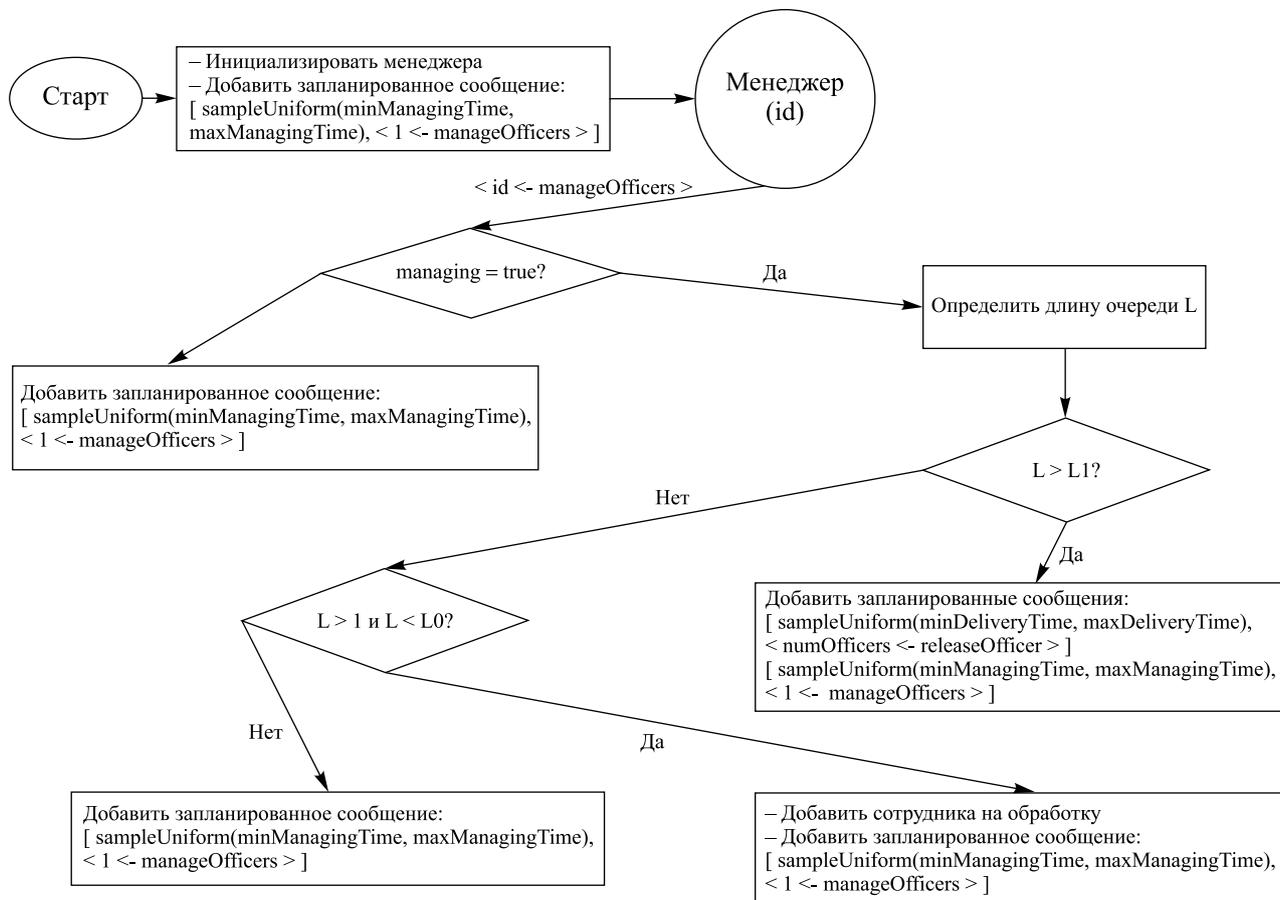


Рис. 10. Доработанный алгоритм менеджера

Fig. 10. Adjusted manager's algorithm

Реализовав это дополнение, мы получили результаты для доработанной системы управления, представленные в табл. 3.

Таблица 3

Результаты статистического анализа системы
с доработанным управлением количеством задействованных сотрудников

Table 3

The results of the statistical analysis of the system
with the adjusted officer number management

Метрика	Полученное значение	Доверительный интервал
Метрика 1. Максимальная длина очереди	65,8	[62,5; 69,3]
Метрика 2. Время стабилизации максимальной длины очереди	27,4	[26,1; 28,9]
Метрика 3. Среднее время обработки пакета документов	6,1	[5,8; 6,5]
Метрика 4. Загруженность сотрудника	36,0	[34,2; 37,9]

Как видно из результатов анализа, значения метрик улучшились, и максимальная длина очереди теперь попадает в желаемый интервал [50; 80]. Данный факт демонстрирует, как исследование модели на этапе ее конструирования помогает обнаружить неявные недоработки и устранить их до фиксации модели и проведения более тщательного анализа на последующих этапах разработки.

Заключение

В статье проиллюстрирована методика разработки систем одного окна на конкретном примере. Описанная система была специфицирована с помощью языка SHYMaude [2], разработанного для спецификации систем РООСГС [3]. Также сформулированы четыре метрики, позволяющие оценить эффективность предложенной системы. Для проведения статистического анализа данных метрик использован инструмент MultiVeStA [7], а сами метрики специфицированы с помощью языка MultiQuaTEx [7], являющегося обобщением языка QuaTEx [8].

Таким образом, применялся формальный подход в трех аспектах: для задания модели использовалась формальная математическая модель РООСГС, основанная на переписывающей логике, для задания метрик – язык MultiQuaTEx, являющийся минимальным обобщением языка QuaTEx, чья формальная семантика была представлена в [8] (для формальной спецификации интересующих нас метрик системы), и статистический метод, реализованный в инструменте MultiVeStA (для получения значимых оценок метрик).

Определено оптимальное значение количества сотрудников, задействованных в системе. При найденном количестве сотрудников сохраняется баланс в виде приемлемых максимальной наблюдаемой длины очереди, времени обработки документов и загруженности сотрудников.

Для того чтобы сделать систему более приближенной к практике, было введено управление количеством сотрудников, осуществляемое менеджером. В ходе этого обнаружено, что очевидная доработка имеет недостаток, заключающийся в том, что на раннем этапе работы системы предложенный алгоритм неудачно управляет количеством сотрудников, что приводит к значительному росту значения одной из целевых метрик, выводя ее из желаемого интервала. Предложено исправление, которое позволяет устранить найденную проблему. Этот опыт показывает, что методика, испытанная на этом примере, дает возможность своевременно исправлять грубые ошибки в проектировании систем одного окна.

Библиографические ссылки

1. Краснянский МН, Карпушкин СВ, Остроух АВ, Обухов АД, Касатонов ИС, Букреев ДВ и др. *Проектирование информационных систем управления документооборотом научно-образовательных учреждений*. Тамбов: Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; 2015. 216 с.
2. Шарыкин РЕ, Курбацкий АН. Верификация распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем. *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. 2019;9(3):123–132.
3. Шарыкин РЕ, Курбацкий АН. Модель распределенных объектно ориентированных стохастических гибридных систем. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;2:52–61.
4. Clavel M, Durán F, Eker S, Lincoln P, Martí-Oliet N, Meseguer J, et al. Maude: specification and programming in rewriting logic. *Theoretical Computer Science*. 2002;285(2):187–243. DOI: 10.1016/S0304-3975(01)00359-0.

5. Sharykin RE. SHYMaude specification of a single window document circulation system [Internet]. GitHub Inc., 2021 [cited 2020 November 1]. Available from: <https://github.com/shymaude/singleWindow>.
6. Sen K, Viswanathan M, Agha G. On statistical model checking of stochastic systems. In: Etesami K, Rajamani SK, editors. *Computer aided verification. Proceedings of the 17th International conference; 2005 July 6–10; Edinburgh, Scotland, UK*. Berlin: Springer-Verlag; 2005. p. 266–280. (Lecture notes in computer science; volume 3576). DOI: 10.1007/11513988_26.
7. Vandin A, Sebastio S. MultiVeStA: statistical model checking for discrete event simulators. In: Buchholz P, Cortellessa V, Horvath A, Muscariello L, Squillante M, editors. *Proceedings of the 7th International conference on performance evaluation methodologies and tools; 2013 December 10–12; Torino, Italy*. Brussels: Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering; 2013. p. 310–315. DOI: 10.4108/icst.valuetools.2013.254377.
8. Agha G, Meseguer J, Sen K. PMAude: rewrite-based specification language for probabilistic object systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. 2006;153(2):213–239. DOI: 10.1016/j.entcs.2005.10.040.

References

1. Krasnyanskii MN, Karpushkin SV, Ostroukh AV, Obukhov AD, Kasatonov IS, Bukreev DV, et al. *Proektirovanie informatsionnykh sistem upravleniya dokumentooborotom nauchno-obrazovatel'nykh uchrezhdenii* [Design of information systems for document management of scientific and educational institutions]. Tambov: Publishing house of FSBEI HPE «TSTU»; 2015. 216 p. Russian.
2. Sharykin RE, Kourbatski AN. Verification of distributed object-oriented stochastic hybrid systems. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhavnaga wniwersitjeta imja Janki Kupaly. Seryja 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjehnika i kiravanne*. 2019;9(3): 123–132. Russian.
3. Sharykin RE, Kourbatski AN. A model of distributed objectbased stochastic hybrid systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;2:52–61. Russian.
4. Clavel M, Durán F, Eker S, Lincoln P, Martí-Oliet N, Meseguer J, et al. Maude: specification and programming in rewriting logic. *Theoretical Computer Science*. 2002;285(2):187–243. DOI: 10.1016/S0304-3975(01)00359-0.
5. Sharykin RE. SHYMaude specification of a single window document circulation system [Internet]. GitHub Inc., 2021 [cited 2020 November 1]. Available from: <https://github.com/shymaude/singleWindow>.
6. Sen K, Viswanathan M, Agha G. On statistical model checking of stochastic systems. In: Etesami K, Rajamani SK, editors. *Computer aided verification. Proceedings of the 17th International conference; 2005 July 6–10; Edinburgh, Scotland, UK*. Berlin: Springer-Verlag; 2005. p. 266–280. (Lecture notes in computer science; volume 3576). DOI: 10.1007/11513988_26.
7. Vandin A, Sebastio S. MultiVeStA: statistical model checking for discrete event simulators. In: Buchholz P, Cortellessa V, Horvath A, Muscariello L, Squillante M, editors. *Proceedings of the 7th International conference on performance evaluation methodologies and tools; 2013 December 10–12; Torino, Italy*. Brussels: Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering; 2013. p. 310–315. DOI: 10.4108/icst.valuetools.2013.254377.
8. Agha G, Meseguer J, Sen K. PMAude: rewrite-based specification language for probabilistic object systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. 2006;153(2):213–239. DOI: 10.1016/j.entcs.2005.10.040.

Статья поступила в редколлегию 12.11.2020.
Received by editorial board 12.11.2020.

АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ ДЫМА ЛЕСНОГО ПОЖАРА НА ВИДЕОИЗОБРАЖЕНИИ

Р. П. БОГУШ¹⁾, С. В. АБЛАМЕЙКО^{2), 3)}

¹⁾Полоцкий государственный университет, ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

³⁾Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

Предлагается алгоритм обнаружения дыма лесного пожара на видеопоследовательностях, формируемых стационарными камерами наблюдения. На первом этапе улучшается контраст кадров. Затем на основе анализа динамических и статических признаков выполняется обнаружение областей с медленной скоростью движения на видео. Для этого используются адаптивное вычитание фона и цветовая сегментация. На третьем шаге осуществляется пространственно-временной анализ блоков малых размеров, которые формируются для сегментированных на предыдущем шаге областей. Для этого создаются наборы признаков на основе дескрипторов ковариации, а для дальнейшей классификации используется метод опорных векторов с радиальной базисной функцией ядра. Представлены результаты экспериментов на реальных видеопоследовательностях, подтверждающие эффективность применения алгоритма для раннего обнаружения возгораний в лесу.

Ключевые слова: лесной пожар; анализ изображений; фоновый кадр; ковариационные дескрипторы; метод опорных векторов.

ALGORITHM FOR FOREST FIRE SMOKE DETECTION IN VIDEO

R. P. BOHUSH^a, S. V. ABLAMEYKO^{b, c}

^aPolotsk State University, 29 Blachina Street, Navapolack 211440, Belarus

^bBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^cUnited Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus

Corresponding author: R. P. Bohush (bogushr@mail.ru)

In this paper, an efficient forest smoke detection algorithm in video sequences obtained from a stationary camera is proposed. The algorithm composed of three basic steps. At the first step, the frame contrast is improved. After that detection of slowly moving areas is performed based on dynamic and static features. For this we use adaptive background

Образец цитирования:

Богущ РП, Абламейко СВ. Алгоритм обнаружения дыма лесного пожара на видеоизображении. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;1:91–101.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-91-101>

For citation:

Bohush RP, Ablameyko SV. Algorithm for forest fire smoke detection in video. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;1:91–101. Russian.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-91-101>

Авторы:

Рихард Петрович Богущ – кандидат технических наук, доцент; заведующий кафедрой вычислительных систем и сетей факультета информационных технологий.

Сергей Владимирович Абламейко – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета²⁾, главный научный сотрудник отдела интеллектуальных информационных систем³⁾.

Authors:

Rykhard P. Bohush, PhD (engineering), docent; head of the department of computer systems and networks, faculty of information technology.

bogushr@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-6609-5810>

Sergey V. Ablameyko, academician of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics^b, and chief researcher at the department of intelligent information systems^c.

ablameyko@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0001-9404-1206>

subtraction and color segmentation. The detected areas are divided into small blocks. Spatio-temporal analysis is applied to them. Blocks are classified based on covariance descriptors and support vector machine with a radial basis kernel function. Experimental results for processing real video show effectiveness of our algorithm for early forest smoke detection.

Keywords: forest fire; image analysis; background; covariance descriptors; support vector machine.

Введение

Ключевой задачей современной интеллектуальной системы мониторинга леса является надежное обнаружение пожара на ранней стадии его возникновения. В сухом лесу пожар распространяется за минуты, поэтому чем раньше будет обнаружено возгорание, тем существеннее окажется снижение наносимого им урона. Однако детектирование признаков пожара в реальных условиях является нетривиальной задачей ввиду разнообразия характеристик дыма в зависимости от широкого спектра факторов окружающей среды (погодные условия, освещение, наличие сходных объектов в кадре).

Есть несколько способов обнаружения лесных пожаров: использование наземных наблюдательных пунктов, наземное патрулирование, воздушное и космическое наблюдение, применение систем мониторинга с интеллектуальными мобильными или стационарными специальными датчиками, которые фиксируют значения заданных параметров [1; 2].

Первый подход предполагает установку стационарных либо передвижных наблюдательных вышек в засушливые периоды пожароопасного сезона. Они располагаются на возвышенностях и оснащаются средствами визуального наблюдения, связи и спутниковой навигации. Очевидно, что данный метод требует постоянного присутствия наблюдателя. Ему необходимо непрерывно осуществлять визуальный контроль состояния лесных зон, что приводит к утомлению и, как следствие, снижает результативность данного метода именно в отношении раннего обнаружения пожара. Воздушный способ обнаружения лесных пожаров предполагает контроль с использованием вертолетов или беспилотных летательных аппаратов. Но в силу ряда экономических и организационных причин в настоящее время данный метод мониторинга леса требует еще слишком много затрат. В последние годы резко возросли оперативность использования спутниковой информации и разрешающая способность аппаратуры дистанционного зондирования Земли. Стало возможным получать снимки больших территорий с довольно высоким разрешением. Значительно увеличилось число действующих космических аппаратов, появились относительно недорогие станции приема данных со спутников. Однако, несмотря на все преимущества, данный подход имеет серьезный недостаток: он не позволяет осуществлять раннее обнаружение лесного пожара. Системы мониторинга с интеллектуальными мобильными или стационарными датчиками возможно применять в удаленных и труднодоступных районах с учетом наиболее опасных мест, но реализация таких систем предполагает большие затраты на их разработку и внедрение. Высокая актуальность задачи раннего обнаружения лесных пожаров требует развития и применения всех перечисленных методов мониторинга лесных массивов.

Одним из перспективных средств является видеонаблюдение с использованием видеокамер, характеристики которых непрерывно улучшаются, а стоимость снижается. Данный подход имеет свои преимущества по сравнению с рассмотренными выше методами, такие как возможность установки оборудования систем видеонаблюдения на уже существующие наблюдательные пункты, относительно невысокая стоимость оборудования, автоматическое обнаружение пожара и формирование сигнала тревоги, детектирование возгорания в начальной стадии и возможность определения местоположения очага пожара. Однако этот подход требует эффективного алгоритмического обеспечения [3], которое должно базироваться на современных методах искусственного интеллекта и машинного зрения.

В настоящее время разработаны и реализуются на рынке различные коммерческие системы по автоматическому обнаружению основных признаков лесного пожара, которые можно зафиксировать с помощью видеокамеры, – дыма и открытого пламени. Существуют системы (например, «Forest fire detection»¹ компании «Ксорекс-Сервис» и «Лесной дозор»² компании «ДиСиКон»), которые частично автоматизированы в целях снижения влияния человеческого фактора на эффективность работы системы.

Раннее обнаружение лесного пожара и низкая вероятность ложной тревоги, а также точное определение координат возгорания с использованием систем видеонаблюдения достигаются как аппаратной частью (в большей степени характеристиками видеокамер), так и алгоритмическим обеспечением. При этом основным признаком на начальной стадии пожара является дым, который может быть зафиксирован с помощью видеонаблюдения, если он поднимается выше кроны деревьев.

¹См.: <http://forestfiredetection.com/>.

²См.: <http://lesdozor.ru>.

К настоящему времени разработано значительное количество алгоритмов обнаружения дыма на видео. Но лесной пожар может возникнуть на значительном удалении от места наблюдения, в этом случае область дыма в кадре будет характеризоваться небольшими размерами. А при наличии ветра на начальной стадии отмечается достаточно высокая прозрачность из-за низкой оптической плотности дыма. Все это существенно затрудняет его обнаружение. Кроме того, в кадре, как правило, присутствуют мешающие факторы в виде тумана, облаков, световых бликов от солнца и др., поэтому существующие алгоритмы предполагают выделение нескольких признаков. В работе [4] предложено использовать анализ движения методом оптического потока, пространственных изменений границ с применением вейвлет-преобразования без дальнейшей классификации, что будет приводить к высокой вероятности ложного обнаружения. Оценка скорости движения пикселей серого цвета, фрактальный анализ, объединение движущихся областей и их кластеризация, применяемые в [5], позволяют отделять дым от облаков и деревьев. В [6] представлен алгоритм, который на первом шаге выделяет медленно движущиеся объекты путем сравнения пикселей яркостного канала пространства YUV двух фоновых кадров, полученных с разной частотой их обновления. Это позволяет обнаружить объекты на большом расстоянии от камеры, для них движение на видеопоследовательности будет более медленным. Далее выполняются сегментация серых регионов путем сравнения с пороговыми уровнями цветовых компонент в пространстве YUV, анализ роста обнаруженных регионов, выявление и удаление теней. Каждый этап формирует свои выходные числовые результаты. Они объединяются с использованием модифицированного метода наименьших квадратов (LMS), в котором оценивание математического ожидания выполняется на основе медианы, что позволяет повысить устойчивость к грубым ошибкам. В [7] отмечено, что частотный анализ для случая, когда дым лесных пожаров будет на значительном расстоянии от видеокamеры, недостаточно эффективен, вместо него предлагается использовать обнаружение движения методом сопоставления с фоном, цветовую сегментацию и дальнейший анализ областей по наличию резких краев, их разрастания и движения вверх. Алгоритм, выделяющий блоки размером 10×10 пк после оценки движения и цветовой сегментации в пространстве YUV и применяющий для их анализа дескрипторы ковариации, представлен в [8]. В [9] предложен подход, также использующий блочную обработку с учетом пространственных и временных изменений в видеопоследовательности. Для оценки пространственных характеристик применяются гистограммы ориентированных градиентов (HOG), а для временного анализа – гистограммы оптического потока (HOF). Для сформированных на их основе дескрипторов используется классификатор случайного леса (random forest). Данный подход позволил уменьшить количество ложных срабатываний, вызванных движением облаков дымчатого цвета. В работе [10] предлагается применение алгоритма Оцу и многопороговых оценок для выделения области мониторинга дыма на сцене за счет исключения неба и тумана. Для обнаружения движения используется модифицированный алгоритм на основе межкадровой разности, в качестве признаков выделяются HOG и LBP, классификация которых выполняется методом опорных векторов. В последнее время также ведутся исследования по применению сверточных нейронных сетей (СНС) для решения данной задачи. Так, в работе [11] представлены результаты исследований эффективности применения двух типов СНС – SSD и Faster R-CNN. Показано, что SSD работает более чем в два раза быстрее, но при этом точность намного хуже и количество ошибок в два раза больше. Специальная двухходовая структура, включающая две СНС VGGNet-16 для выделения признаков и корреляционный фильтр для объединения выходов двух каналов, предложена в [12]. На практике работа в реальном времени с применением обработки видео на основе СНС без высокопроизводительного графического процессора практически невозможна.

В настоящей статье рассматривается алгоритм раннего обнаружения лесного пожара, который позволяет детектировать области дыма малых размеров при значительной его прозрачности на видеопоследовательностях, полученных со стационарных камер, и обладает удовлетворительными вычислительными затратами.

Этапы алгоритма раннего обнаружения лесных пожаров

Обеспечение раннего обнаружения дыма на последовательностях изображений с низкой вероятностью ложной тревоги возможно только лишь при анализе их статических и динамических свойств. С учетом этого разработанный алгоритм включает предварительную обработку входных кадров, выделение медленно движущихся пикселей и областей, цветовую сегментацию, формирование пространственно-временных блоков и последующую их классификацию (рис. 1). Последовательные кадры I_{t-1} , I_t и I_{t+1} , полученные со стационарной камеры видеонаблюдения, подаются на вход блока предварительной обработки. Предобработка используется для повышения контраста. Далее применяется адаптивное вычитание фона для извлечения медленно движущихся областей и пикселей – так называемого переднего

плана. Такой подход учитывает, что дым постепенно смешивается с фоном, и позволяет эффективно выделять области, в которых присутствует движение. Затем выполняется цветовая сегментация в пространстве HSV. После данных этапов выявляются области, которые могут относиться к дыму. Эти области делятся на пространственно-временные блоки, далее для них определяются параметры ковариации. Наборы свойств, представляющие собой пространственные и временные характеристики областей дыма, используются для формирования ковариационных дескрипторов. Затем производится классификация пространственно-временных блоков методом опорных векторов. На заключительном этапе алгоритма блок классификации обрабатывает поступившую информацию и выдает сигнал тревоги в случае обнаружения дыма.

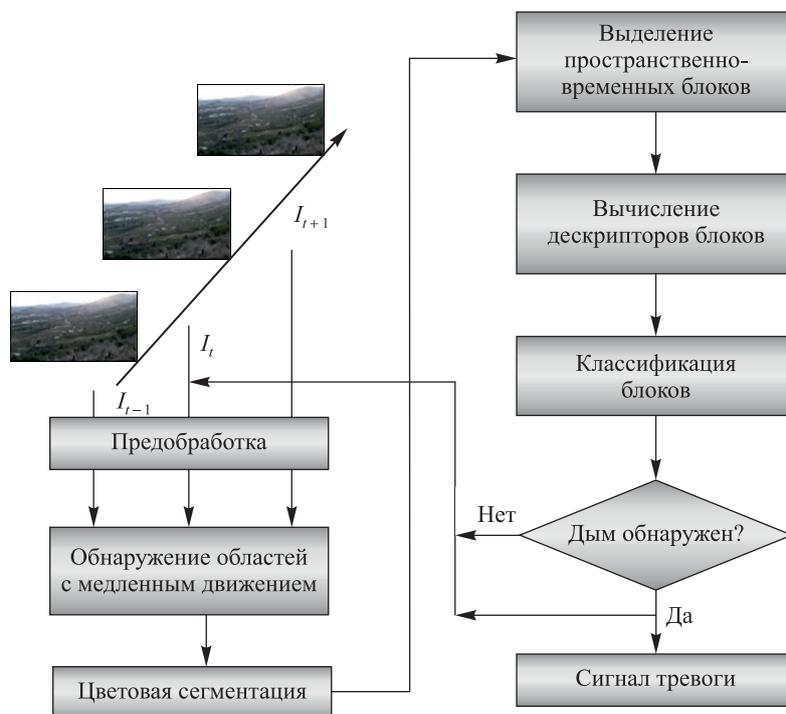


Рис. 1. Общая схема алгоритма
Fig. 1. The flow chart of the algorithm

Обнаружение движущихся областей на основе вычитания фона

Методы вычитания фонового кадра для детектирования движущихся объектов основаны на определении сходства между элементами изображения входного кадра видеопотока и шаблонным (опорным) изображением, на котором отсутствуют движущиеся объекты, в общем случае путем сравнения с ним всех соответствующих пикселей кадра. Такой подход может быть использован для систем видеонаблюдения со стационарными камерами, движение которых не предусмотрено. Для простых динамических сцен с редким движением в качестве шаблонного может применяться первый кадр. При этом предполагается, что он не содержит движущихся объектов. При длительном видеомониторинге леса освещение снимаемой сцены изменяется, в ней присутствуют, появляются и исчезают динамические объекты, причем с разной скоростью, которая может меняться. Соответственно, чтобы уменьшить количество ошибок при обработке, фоновый кадр в таких системах должен адаптироваться к изменениям в видео за счет добавления новых пикселей и объектов и удаления предыдущих. Таким образом, формируется модель фонового кадра (фоновый кадр), которая не содержит движущихся объектов, на основе анализа нескольких входных кадров видеоряда. Очевидно, что качество модели фона во многом определяет результативность обнаружения движущихся объектов. Модель фона формируется с учетом того, что изменения значений яркости пикселя фона от кадра к кадру описываются нормальным законом распределения или смесью нормальных распределений (mixture of Gaussians, MOG), а для объектов переднего плана данное утверждение не выполняется.

Алгоритм, использующий нормальное распределение, моделирует каждый пиксел заднего плана с помощью одномерной нормально распределенной случайной величины. В реальных видеопоследовательностях, получаемых с камер систем видеонаблюдения за лесным массивом, существуют различные

возмущающие воздействия на каждый пиксел, поэтому наиболее эффективным будет моделирование фона на основе смеси нормальных распределений. Для обнаружения медленно движущихся объектов наиболее оптимален улучшенный метод формирования модели фона на основе адаптивной смеси гауссовых распределений [13]. При этом принимаются допущения: для каждого пиксела текущего изображения функция плотности вероятности может быть представлена смесью распределений из нескольких процессов; каждый из процессов описывается нормальным распределением с некоторыми параметрами математического ожидания, дисперсии и весовым коэффициентом; сумма весовых коэффициентов процессов, которыми описывается пиксел, равна единице. Таким образом, алгоритм построения кадра фона на основе смеси нормальных распределений формирует пиксельную модель сцены, используя смесь нормальных распределений. Распределение с наименьшей дисперсией и максимальным весом отвечает пикселу фона, т. е. при соответствии пиксела одному из распределений он относится к группе фоновых, в противном случае классифицируется как принадлежащий движущемуся объекту. С поступлением каждого нового кадра модель обновляется и классифицирует каждый пиксел как принадлежащий к заднему или к переднему плану. Достоинством данного метода является его улучшенная устойчивость к резким изменениям освещения сцены, что достигается автоматическим выбором количества компонент смеси, описывающих пиксел изображения. Если новый объект попадает в кадр и остается неизменным в течение некоторого времени, он может считаться частью фона. На рис. 2, б, представлен результат работы метода вычитания фона на основе смеси гауссовых распределений для обнаружения движения при мониторинге лесных пожаров. Анализ рис. 2 показывает, что из-за резкого изменения освещения и теней бинарная маска движения (см. рис. 2, б), на которой белые пикселы отвечают движущимся областям для текущего кадра (см. рис. 2, а), а черные пикселы определяют фон, будет содержать некоторое число областей, соответствующих различным движущимся объектам (например, дым и автомобили на рис. 2, а). Поэтому необходим следующий этап, позволяющий уменьшить количество областей – кандидатов для классификации.

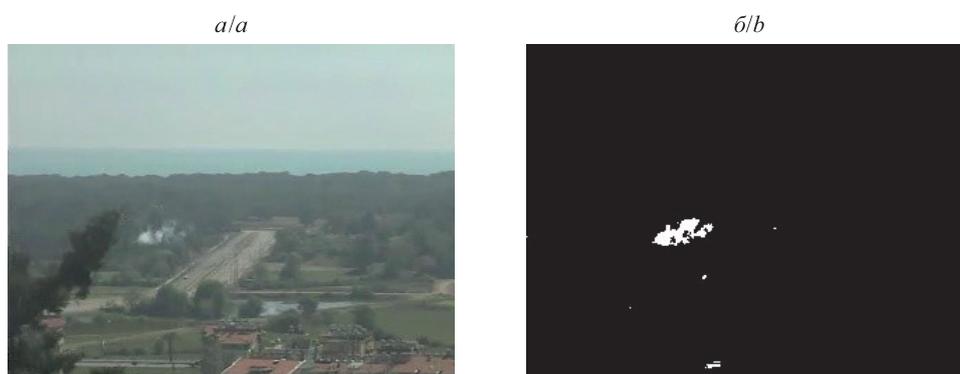


Рис. 2. Примеры обнаружения движения:
а – кадры с дымом; б – маска движения
Fig. 2. Examples of motion detection:
а – frames with smoke; б – motion mask

Цветовая сегментация

На этапе цветовой сегментации обнаруженных областей движения, в отличие от алгоритма, рассмотренного в [9], используются преобразование и сегментация в цветовом пространстве HSV, так как в данном цветовом пространстве классификация областей дымчатого цвета происходит с меньшим количеством ложных срабатываний, чем в цветовом пространстве YUV, что приводит к уменьшению ложных областей и, соответственно, позволяет увеличить скорость работы алгоритма за счет уменьшения количества пикселов, которые необходимо классифицировать.

Область может содержать дым, если выполняется условие

$$\text{if } ((100 < H) \ \&\& \ (H < 210)) \ \text{and} \ \text{if } ((0,008 < S) \ \&\& \ (S < 0,5)) \\ \text{and} \ \text{if } ((127 < V) \ \&\& \ (V < 255)).$$

В случае выполнения условия пиксел относится к области дыма. Пороговые значения для классификации в цветовом пространстве HSV подбирались на основе многопараметрических экспериментальных исследований с использованием видеопоследовательностей, полученных в реальных условиях при лесных пожарах.

Вычисление дескрипторов блоков

Для обнаружения объектов на видеоизображении применяются предложенные в [8] распределенные во времени и нормализованные дескрипторы ковариации для блоков, принадлежащих областям-кандидатам, полученным после детектирования движения и цветовой сегментации. Используются пространственно-временные блоки размером $5 \times 5 \times f$, где f – частота кадров видеопоследовательности.

Ковариационная матрица определяется по формуле

$$C = \frac{1}{N-1} \sum_i \sum_j (F_{ij} - \bar{F})(F_{ij} - \bar{F})^T,$$

где $\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j F_{ij}$; N – количество пикселей; F_{ij} – вектор признаков (дескриптор) пиксела.

Набор цветowych признаков $F^1 = (Y, U, V)$ вычисляется в цветовом пространстве YUV. Так как ковариационная матрица является симметричной, то для дальнейших вычислений используются величины, расположенные в нижней треугольной части, включая главную диагональ. Из ковариационной матрицы $C(a, b)$, построенной из F^1 , извлекаются 6 значений, выделенных цветом, для дальнейшего анализа (рис. 3).

$$C = \begin{bmatrix} C(1, 1) & C(1, 2) & C(1, 3) \\ C(2, 1) & C(2, 2) & C(2, 3) \\ C(3, 1) & C(3, 2) & C(3, 3) \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Выбор значений из ковариационной матрицы

Fig. 3. Value choice from the covariance matrix

Набор признаков, характеризующих изменение пиксела в пространстве и времени, формируется как

$$F^2 = (Y, Y_x, Y_y, Y_{xx}, Y_{yy}, Y_t, Y_{tt}),$$

где Y_x, Y_y – результаты вычисления первой производной путем наложения одномерной маски $[-1; 0; 1]$ по горизонтали и вертикали соответственно; Y_{xx}, Y_{yy} – результаты вычисления второй производной путем наложения одномерной маски $[1; -1; 1]$ по горизонтали и вертикали соответственно; Y_t, Y_{tt} – результаты вычисления первой и второй производных по времени, т. е. с учетом значений на соседних кадрах.

Из ковариационной матрицы, построенной на основе F^2 , извлекаются 28 значений, следовательно, в дальнейшем используются 34 параметра ковариации.

Затем формируются исходные данные для обучения классификатора. При этом для обучения используются пространственно-временные блоки размером $5 \times 5 \times f$. Во временной области применяется перекрытие блоков, которое равно половине частоты кадров, а в пространственной области перекрытие отсутствует. Использование блоков малого размера в пространственной области позволит обнаруживать области дыма небольших размеров, что очень важно для раннего детектирования лесных пожаров.

Если число пикселей блока, относящихся к дыму, составляет 30 % и более от количества всех пикселей блока, то считаем, что он может быть отнесен к дыму, в таком случае этот блок передается в классификатор. Пример пространственно-временного блока размером $5 \times 5 \times f$, где $f = 3$, представлен на рис. 4.

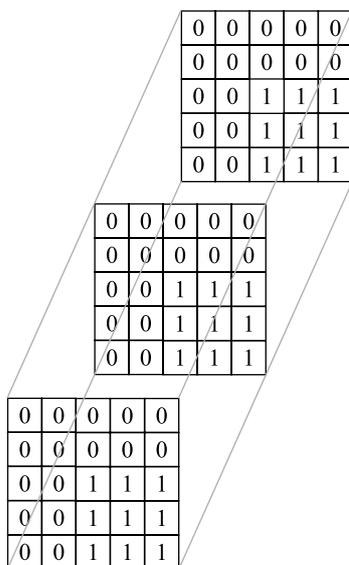


Рис. 4. Пример пространственно-временного блока

Fig. 4. An example of a spatio-temporal block

Классификация блоков

Классификация выполняется только для кадров на границах и перекрывающихся во времени блоков, а для промежуточных кадров используется полученный результат, что позволяет уменьшить вычислительные затраты. Для классификации применяется метод опорных векторов. Задача этого метода состоит

в разделении двух классов (дым и объекты, схожие с дымом по характеристикам), в которых объекты описываются вещественными векторами, извлекаемыми из пространственно-временных блоков.

Правило классификации блоков может быть записано в следующем виде [14]:

$$a(F) = \text{sign} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i y_i K(F_i, F) - w_0 \right),$$

где $a(F)$ – решающее правило, принимающее одно из значений меток класса (+1 и –1 для блоков с дымом и без дыма соответственно); $\lambda(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – вектор двойственных переменных; $y(y_0, y_1, \dots, y_n)$ – вектор меток классов опорных векторов; $\{F_i\}_{i=1, n}$ – множество опорных векторов признаков; w_0 – пороговое значение; F – обрабатываемый вектор признаков. Эффективность работы классификатора в значительной степени определяется применяемой функцией ядра. Для классификации блоков с дымом лесного пожара выбрана радиальная базисная функция ядра:

$$K_{rbf}(F_a, F_b) = \exp(-\gamma \cdot \|F_a - F_b\|^2),$$

где γ – параметр ядра; F_a, F_b – признаковые векторы.

Известно, что метод SVM сдвигает центры гауссианов ближе к границе классов, в результате форма разделяющей поверхности описывается более четко, поэтому такая функция лучше подходит для описания классов с границами сложной формы.

Результаты и их обсуждение

Для проведения экспериментов использовались видеопоследовательности³, представленные на рис. 5.

Таким образом, предложенный алгоритм протестирован на значительном количестве реальных видеопоследовательностей с дальним дымом, который характерен для лесного пожара. Videopоследовательности отличаются сложным фоном, содержат объекты, цвет и яркостные характеристики которых близки к характеристикам дыма. Кроме этого, исследовались видеопоследовательности, на которых присутствовал дым с достаточно резким изменением направления и структуры, происходившим из-за сильных порывов ветра, а также видеопоследовательности, полученные в зимний период при наличии снежного покрова. Результаты экспериментов представлены в таблице.

Тестирование и анализ результатов работы алгоритма проводились с помощью ноутбука Dell Inspiron N5110N со следующими основными параметрами: центральный процессор – Intel Core i5-2410M с тактовой частотой 2,3 ГГц, объем ОЗУ – 8,0 Гб, графический ускоритель – Nvidia GeForce GT 525M.

Параметры алгоритма подобраны таким образом, чтобы обеспечить минимальное ложное обнаружение дыма. При этом выделение всей области задымления считается необязательным, основным критерием является правильное обнаружение хотя бы одного блока с дымом, который свидетельствует о возникновении пожара. Анализ таблицы показывает, что обнаружение дыма на тестируемых видеопоследовательностях происходит с минимальными временными задержками – от 0 до 10 с, учитывая частоту кадров видео – 25–30 кадров в секунду. Наличие дыма с первого кадра видеопоследовательности увеличивает время обнаружения, так как в этом случае усложняется и требует больше времени построение модели фона. Из таблицы видно, что не обеспечивается хорошая устойчивость к движению видеокамеры, так как на тестовом видео с движущейся камерой большое число кадров классифицированы с ошибками (см. пример кадра с ложным обнаружением блоков на рис. 6, а).

При наличии схожих двигающихся объектов возможно ложное срабатывание. На видео, кадр которого показан на рис. 6, б, в сцену входит человек в куртке, по цветовым характеристикам схожей с дымом. Поэтому при движении человека на некоторых кадрах (см., например, рис. 6, б) происходит ложное обнаружение, однако, когда он статичен, ложное обнаружение отсутствует. На кадре, представленном на рис. 6, в, ложное обнаружение обусловлено движущейся машиной на дальней сцене с цветовыми характеристиками, идентичными дыму.

Предложенный алгоритм, в сравнении с традиционными подходами (см., например, [8]), позволяет обнаруживать области дыма меньшего размера, в частности 5×5 пк. Также разработанный алгоритм дает возможность обнаружить дым с высокой степенью прозрачности, в то время как существующие подходы требуют более четкого цветового отличия дыма от фона.

³Размещены на сайтах <http://signal.ee.bilkent.edu.tr/VisiFire/Demo/ForestSmoke/>; <http://wildfire.fesb.hr/>; <http://cvpr.kmu.ac.kr/http://staff.ustc.edu.cn/~yfn/vsd.html> или получены авторами.

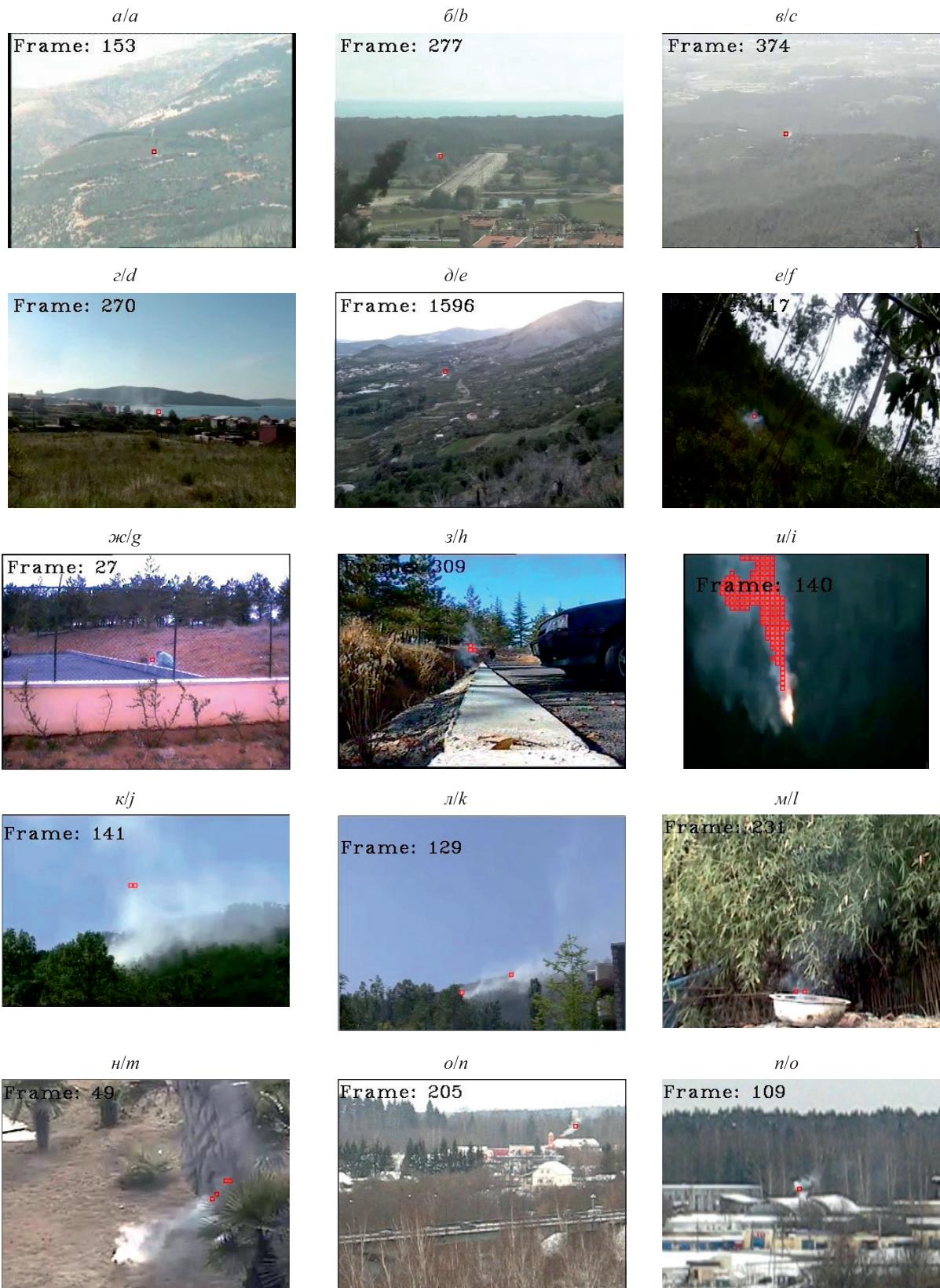


Рис. 5. Кадры используемых видеопоследовательностей с результатами обнаружения блоков дыма размером 5×5 пк
Fig. 5. Results of detecting smoke blocks with size of 5×5 pixels

Результаты экспериментов по обнаружению дыма лесного пожара на видео
Experimental results forest fire smoke detection in video

Видео*	Описание	Номер кадра, с которого дым присутствовал /был обнаружен	Число кадров, на которых дым был найден /присутствовал	Число кадров с ложным обнаружением /общее число кадров
<i>a</i>	Горящий лес, туман, летающие птицы	137/153	366/388	0/600
<i>б</i>	Горящий лес, движущиеся автомобили	172/277	1148/1265	0/1725
<i>в</i>	Горящий лес, туман	296/374	753/1104	0/1400
<i>г</i>	Поселение, горящие деревья	179/270	3116/3656	0/3835
<i>д</i>	Поселение, горящие деревья	946/1596	4933/5133	0/6079
<i>e</i>	Открытая местность, задымление в траве, ветер	47/117	406/453	20/1125
<i>ж</i>	Открытая местность, задымление в траве, движущийся человек	27/27	600/600	3/629
<i>з</i>	Открытая местность, задымление в траве	270/309	519/585	0/1725
<i>и</i>	Задымление в лесу, дрожание камеры	1/140	10/150	75/150
<i>к</i>	Задымление в лесу	1/141	299/500	0/500
<i>л</i>	Задымление в лесу	1/129	322/500	0/500
<i>м</i>	Съемка с близкого расстояния на фоне зеленого кустарника	100/231	970/1101	0/1200
<i>н</i>	Открытая местность, движущийся человек	1/49	2810/2875	75/2875
<i>о</i>	Съемка в зимний период, движущиеся машины	1/205	824/1050	12/1050
<i>п</i>	Съемка в зимний период, движущиеся машины	1/109	741/870	75/870

*Данные видеопоследовательности представлены на рис. 5.



Рис. 6. Примеры кадров видеопоследовательностей с ложным обнаружением:
a – при движении видеокамеры; *б* – при наличии движущегося человека;
в – при наличии движущейся машины

Fig. 6. Examples of frames with false detection:
a – for moving video camera; *b* – for moving person; *c* – for moving car

В противоположность методам на основе СНС [10] предложенный алгоритм не требует использования больших вычислительных мощностей, т. е. графических процессоров, что позволяет применять его в небольших аппаратно-программных комплексах.

Заклучение

В статье рассмотрена актуальная задача раннего обнаружения дыма лесного пожара, которая решается путем разработки алгоритма детектирования дыма на видеопоследовательностях, полученных со стационарных камер. Алгоритм включает следующие основные шаги: улучшение контраста кадров видеопоследовательности; получение областей-кандидатов, в которых может быть дым, путем определения движущихся пикселей методом адаптивного вычитания фонового кадра и цветовой сегментации в пространстве HSV; формирование и классификацию пространственно-временных блоков. При классификации применяется метод опорных векторов с радиальной базисной функцией ядра. Малый пространственный размер блока (5×5 пк) позволяет обнаруживать области дыма небольшого размера, что важно при мониторинге леса на значительных расстояниях. Выполненные эксперименты на реальных видеопоследовательностях подтвердили эффективность алгоритма.

Библиографические ссылки

1. Кудрин АЮ, Запорожец АИ, Подрезов ЮВ. Современные методы обнаружения и мониторинга лесных пожаров. *Технологии гражданской безопасности*. 2006;3(4):66–67.
2. Барановский ОВ, Краснопрошин ВВ, Вальвачев АН. Система мониторинга природно-территориальных комплексов. *Вестник Брестского государственного технического университета. Физика, математика, информатика*. 2019;5:12–15.
3. Ye S, Bai Z, Chen H, Bohush R, Ablameyko S. An effective algorithm to detect both smoke and flame using color and wavelet analysis. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2017;27(1):131–138. DOI: 10.1134/S1054661817010138.
4. Gomez-Rodriguez F, Arrue BC, Ollero A. Smoke monitoring and measurement using image processing: application to forest fires. In: Sadjadi FA, editor. *Automatic target recognition XIII. AeroSense; 2003 April 21–25; Orlando, Florida, USA*. [S. l.]: [s. n.]; 2003. p. 404–411. (Proceedings of SPIE; volume 5094). DOI: 10.1117/12.487050.
5. Vicente J, Guillemant P. An image processing technique for automatically detecting forest fire. *International Journal of Thermal Sciences*. 2002;41(12):1113–1120. DOI: 10.1016/S1290-0729(02)01397-2.
6. Toreyin BU, Cetin AE. Wildfire detection using LMS based active learning. In: *IEEE International conference on acoustics, speech and signal processing; 2009 April 19–24; Taipei, Taiwan*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2009. p. 1461–1464. DOI: 10.1109/ICASSP.2009.4959870.
7. Genovese A, Labati RD, Piuri V, Scotti F. Wildfire smoke detection using computational intelligence techniques. *IEEE International conference on computational intelligence for measurement systems and applications (CIMSAs) proceedings; 2011 September 19–21; Ottawa, Canada*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2011. p. 1–6. DOI: 10.1109/CIMSAs.2011.6059930.
8. Hakan Habiboglu Y, Gunay O, Cetin AE. Real-time wildfire detection using correlation descriptors. In: Mestre X, Hernando J, Pardas M, editors. *19th European signal processing conference (EUSIPCO-2011); 2011 August 29 – September 2; Barcelona, Spain*. Kessariani: European Association for Signal, Speech, and Image Processing (EURASIP); 2011. p. 894–898. (Proceedings of EUSIPCO; volume 19).
9. Ko BC, Park JO, Nam J-Y. Spatiotemporal bag-of-features for early wildfire smoke detection. *Image and Vision Computing*. 2013;31(10):786–795. DOI: 10.1016/j.imavis.2013.08.001.
10. Luxing Qin, Xuehui Wu, Yichao Cao, Xiaobo Lu. An effective method for forest fire smoke detection. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1187(5):052045. DOI: 10.1088/1742-6596/1187/5/052045.
11. Хомякова ВВ, Хомяков АН. Применение сверточных нейронных сетей для обнаружения дыма по видеопоследовательности. В: Логинов ЮЮ, редактор. *Решетневские чтения. Часть 2. Материалы XXII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева; 12–16 ноября 2018 г.; Красноярск, Россия*. Красноярск: СибГУ имени М. Ф. Решетнева; 2018. с. 308–309.
12. Zhao Y, Zhang H, Zhang X, Qian W. Wildfire smoke detection based on depthwise separable convolutions and target-awareness. Preprint 2020040027. 2020 April 3. DOI: 10.20944/preprints202004.0027.v1.
13. Zivkovic Z, van der Heijden F. Recursive unsupervised learning of finite mixture models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2004;26(5):651–656. DOI: 10.1109/TPAMI.2004.1273970.
14. Вапник ВН, Червоненкис АЯ. *Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения)*. Москва: Наука; 1974. 416 с.

References

1. Kudrin AYu, Zaporozhets AI, Podrezov YuV. [Modern methods of detecting and monitoring forest fires]. *Tekhnologii grazhdanskoj bezopasnosti*. 2006;3(4):66–67. Russian.
2. Baranovsky OV, Krasnoprosin VV, Valvachev AN. System of monitoring natural and territorial complexes. *Vestnik of Brest State Technical University. Physics, mathematics, informatics*. 2019;5:12–15. Russian.
3. Ye S, Bai Z, Chen H, Bohush R, Ablameyko S. An effective algorithm to detect both smoke and flame using color and wavelet analysis. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2017;27(1):131–138. DOI: 10.1134/S1054661817010138.
4. Gomez-Rodriguez F, Arrue BC, Ollero A. Smoke monitoring and measurement using image processing: application to forest fires. In: Sadjadi FA, editor. *Automatic target recognition XIII. AeroSense; 2003 April 21–25; Orlando, Florida, USA*. [S. l.]: [s. n.]; 2003. p. 404–411. (Proceedings of SPIE; volume 5094). DOI: 10.1117/12.487050.
5. Vicente J, Guillemant P. An image processing technique for automatically detecting forest fire. *International Journal of Thermal Sciences*. 2002;41(12):1113–1120. DOI: 10.1016/S1290-0729(02)01397-2.

6. Toreyin BU, Cetin AE. Wildfire detection using LMS based active learning. In: *IEEE International conference on acoustics, speech and signal processing; 2009 April 19–24; Taipei, Taiwan*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2009. p. 1461–1464. DOI: 10.1109/ICASSP.2009.4959870.
7. Genovese A, Labati RD, Piuri V, Scotti F. Wildfire smoke detection using computational intelligence techniques. *IEEE International conference on computational intelligence for measurement systems and applications (CIMSIA) proceedings; 2011 September 19–21; Ottawa, Canada*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2011. p. 1–6. DOI: 10.1109/CIMSIA.2011.6059930.
8. Hakan Habiboglu Y, Gunay O, Cetin AE. Real-time wildfire detection using correlation descriptors. In: Mestre X, Hernando J, Pardas M, editors. *19th European signal processing conference (EUSIPCO-2011); 2011 August 29 – September 2; Barcelona, Spain*. Kessariani: European Association for Signal, Speech, and Image Processing (EURASIP); 2011. p. 894–898. (Proceedings of EUSIPCO; volume 19).
9. Ko BC, Park JO, Nam J-Y. Spatiotemporal bag-of-features for early wildfire smoke detection. *Image and Vision Computing*. 2013;31(10):786–795. DOI: 10.1016/j.imavis.2013.08.001.
10. Luxing Qin, Xuehui Wu, Yichao Cao, Xiaobo Lu. An effective method for forest fire smoke detection. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1187(5):052045. DOI: 10.1088/1742-6596/1187/5/052045.
11. Khomyakova VV, Khomyakov AN. Convolutional neural network for video-based smoke detection. In: Loginov YuYu, editor. *Reshetnevskie chteniya. Chast' 2. Materialy XXII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, posvyashchennoi pamyati general'nogo konstruktora raketno-kosmicheskikh sistem akademika M. F. Reshetneva; 12–16 noyabrya 2018 g.; Krasnoyarsk, Rossiya* [Reshetnev readings. Part 2. Materials of the 22nd International scientific and practical conference dedicated to the memory of the general designer of the rocket and space systems, academician M. F. Reshetnev; 2018 November 12–16; Krasnoyarsk, Russia]. Krasnoyarsk: Reshetnev Siberian State University of Science and Technology; 2018. p. 308–309. Russian.
12. Zhao Y, Zhang H, Zhang X, Qian W. Wildfire smoke detection based on depthwise separable convolutions and target-awareness. Preprint 2020040027. 2020 April 3. DOI: 10.20944/preprints202004.0027.v1.
13. Zivkovic Z, van der Heijden F. Recursive unsupervised learning of finite mixture models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2004;26(5):651–656. DOI: 10.1109/TPAMI.2004.1273970.
14. Vapnik VN, Chervonenkis AY. *Teoriya raspoznavaniya obrazov (statisticheskie problemy obucheniya)* [Pattern recognition theory (statistical learning problems)]. Moscow: Nauka; 1974. 416 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 13.10.2020.
Received by editorial board 13.10.2020.

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

В. В. ЧАЙКО¹⁾, О. Л. КОНОВАЛОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается подход к моделированию процессов геомеханики на основе метода внутренних сил. В частности, исследуется проблема неинвариантности метода к поворотам. Предложена оригинальная модификация метода на основе дополнительных центральных сил, определяемых деформациями сопряженных ячеек Вороного. Получено аналитическое соотношение между параметрами микроструктурной модели и упругими свойствами моделируемого материала. Представлены результаты численных экспериментов по верификации данного соотношения и точности моделирования напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: численный эксперимент; дискретно-элементное моделирование; микроструктурные параметры; напряженно-деформированное состояние; деформируемая диаграмма Вороного.

DEFORMABLE VORONOI MODEL FOR THE RESEARCH OF THE PLANE STRESS-STRAIN STATE

V. V. CHAIKO^a, O. L. KONOVALOV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. V. Chaiko (chvictor0@gmail.com)

The paper considers an approach to modelling geomechanical processes based on the internal forces method. In particular, the problem of non-invariance of the method to rotations is investigated. An original modification of the method based on additional central forces determined by deformations of adjacent Voronoi cells is proposed. An analytical relationship between the parameters of the microstructural model and the elastic properties of the simulated material is obtained. The results of numerical experiments to verify this relationship and the accuracy of modelling the stress-strain state are presented.

Keywords: numerical experiment; discrete element modelling; microstructural parameters; stress-strain state; deformable Voronoi.

Образец цитирования:

Чайко ВВ, Коновалов ОЛ. Модель деформируемой диаграммы Вороного для исследования плоского напряженно-деформированного состояния. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:102–112.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-102-112>

For citation:

Chaiko VV, Kononov OL. Deformable Voronoi model for the research of the plane stress-strain state. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:102–112. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-102-112>

Авторы:

Виктор Валерьевич Чайко – аспирант кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор технических наук, профессор В. В. Краснопрошин.
Олег Леонидович Коновалов – кандидат технических наук; заведующий научно-исследовательской лабораторией информационных технологий и компьютерной графики, доцент кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Victor V. Chaiko, postgraduate student at the department of information management systems, faculty of applied mathematics and computer science.
chvictor0@gmail.com
Oleg L. Kononov, PhD (engineering); head of the laboratory of information technologies and computer graphics and associate professor at the department of information management systems, faculty of applied mathematics and computer science.

Введение

Дискретно-элементное (ДЭ) моделирование является перспективным подходом для исследования процессов трещинообразования в задачах геомеханики [1; 2]. Существует множество модификаций ДЭ-моделей, в которых деформируемое твердое тело представляется набором частиц и соединяющих их связей (пружин), отличающихся способом построения сетки и методом расчета сил, прикладываемых к частицам (см., например, [3; 4]). В модели RMIB (*real multidimensional internal bonds*) [5] генерируется упаковка частиц, заполняющих пространство моделируемого объекта. Связи устанавливаются между центрами касающихся частиц. Связь включает нормальную и касательную пружины, которые учитываются в расчете силы, возникающей при их деформации. На рис. 1 показано, что невозможно полноценно определить деформацию связи через перемещение двух соседних частиц без потери инвариантности схемы к поворотам. Чтобы преодолеть это ограничение, для вычисления локальной деформации в окрестности каждой частицы в RMIB используется процедура, анализирующая перемещения самой частицы и соседних с ней частиц.

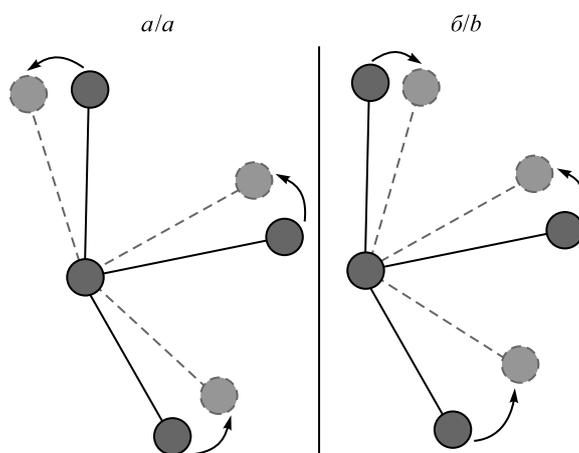


Рис. 1. Неинвариантность деформации связи к поворотам при ее тривиальном вычислении:

a – поворот сетки; *b* – сжатие и поворот сетки

Fig. 1. Non-invariance of bond deformation to rotations at trivial calculation:
a – mesh rotate; *b* – mesh compression and rotate

В работе [6] получена модель деформируемой диаграммы Вороного (*deformable Voronoi, DV*), инвариантная к поворотам. Помимо этого, в ней нет дополнительного вычисления матрицы локальных деформаций. Для генерации решетки пружин и расчета сил используется тетраэдризация Делоне и двойственная диаграмма Вороного. Также авторами работы [6] получено приемлемое упругое поведение модели для материалов с коэффициентом Пуассона ν в диапазоне от 0,1 до 0,3 и отмечена возможность моделирования ауксетиков с коэффициентом ν в пределах от $-0,1$ до $-0,5$. Соотношения микроструктурных параметров DV-модели k_n и ν_m и свойств упругой сплошной среды E и ν подобраны экспериментально. В предлагаемой статье рассматриваются модификации модели DV для решения задач исследования напряженно-деформированного состояния твердых тел в двумерном случае, а также определяется соотношение микроструктурных параметров k_n и ν_m и свойств сплошной среды E и ν .

Материалы и методы исследования

Модель деформируемой диаграммы Вороного. В пространстве моделируемого тела генерируется триангуляция Делоне. Ребра триангуляции соответствуют связям, узлы – частицам. На рис. 2 показана схема деформирования сетки в окрестности связи между частицами O и A (конфигурация связь – сторона ячейки Вороного). При этом сторона ячейки Вороного не перестраивается, а деформируется тем же способом, что и треугольники в окрестности конфигурации.

Введем обозначения:

- u_i и u_j – перемещение частиц;
- $u_{ij} = u_i - u_j$ – перемещение связи OA ;
- l – исходная длина связи OA ;
- $n = (\sin \varphi, \cos \varphi) = (\xi_1, \xi_2)$ – направление связи OA ;

- $(\xi'_1, \xi'_2) = (\xi_1 \cos \alpha - \xi_2 \sin \alpha, \xi_1 \sin \alpha + \xi_2 \cos \alpha)$ – направление связи OB ;
- $(\xi''_1, \xi''_2) = (\xi_1 \cos \beta - \xi_2 \sin \beta, \xi_1 \sin \beta + \xi_2 \cos \beta)$ – направление связи OC ;
- $u^n = (u_{ij} \cdot n)n$ – нормальная компонента деформации связи;
- r – исходная длина стороны ячейки Вороного;
- r'_1 и r'_2 – длины частей деформированной стороны ячейки Вороного;
- $r' = r'_1 + r'_2$ – длина деформированной стороны ячейки Вороного;
- a, b, c, α, β – исходные длины связей OA, OB, OC и углы между ними;
- $a', b', c', \alpha', \beta'$ – длины связей OA, OB, OC и углы между ними после деформации.

В модели DV, как и в VIB [3], у связи отсутствует касательная пружина, что само по себе ограничивает поведение материала фиксированным коэффициентом Пуассона. Вариативность коэффициента Пуассона обеспечивается за счет увеличения исходной длины связи на величину Δl , зависящую от изменения длины соответствующей стороны ячейки Вороного:

$$\Delta l = v_m(r - r'). \quad (1)$$

Сила F_{ij} , возникающая при деформации связи, рассчитывается с использованием только ее нормальной компоненты, но с учетом изменения исходной длины связи (1):

$$F_{ij} = k_n(u^n_{ij} - \Delta l n). \quad (2)$$

Вычисление r'_1 и r'_2 на практике удобно осуществлять следующим способом. Сначала рассчитываются барицентрические координаты центров описанных окружностей треугольников OAB и OAC . Затем по полученным барицентрическим координатам определяются точки H'_1 и H'_2 для деформированных треугольников $OA'B'$ и $OA'C'$.

На рис. 3 изображена модификация модели, где при деформации сетки диаграмма Вороного перестраивается (модель перестраиваемой диаграммы Вороного (*remeshing Voronoi, RV*)).

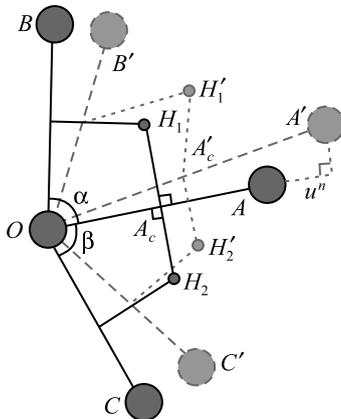


Рис. 2. Схема деформирования связи модели DV
 Fig. 2. Deformation of the bond of the DV model

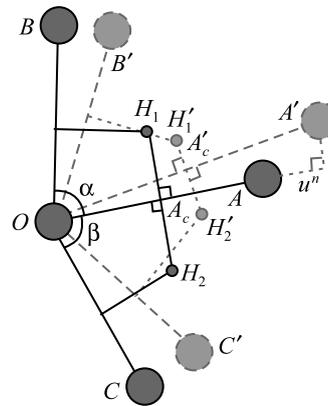


Рис. 3. Схема деформирования связи модели RV
 Fig. 3. Deformation of the bond of the RV model

В этой модификации r'_1 и r'_2 находятся с помощью вычисления H'_1 и H'_2 – центров окружностей, описанных около треугольников $OA'B'$ и $OA'C'$. В остальном модель RV аналогична модели DV.

Вывод соотношений параметров модели DV. Подход к определению микроструктурных параметров k_n и v_m аналогичен [5]. Рассматривается репрезентативный элементарный объем (*representative element volume, REV*) сплошной среды в виде квадрата со стороной длиной L , к которому применена деформация с матрицей ϵ_{ij} . В DV-модели REV содержит множество конфигураций связь – сторона ячейки Вороного. Потенциальная энергия деформированного непрерывного элемента равна суммарной энергии, накопленной во всех конфигурациях.

Определим энергию деформации некоторой конфигурации с заданными параметрами l, r и ϕ . Разделим пружину с переменной исходной длиной на две части: L -пружину – нормальную пружину без учета деформации стороны ячейки Вороного (аналогично RMIB) и R -пружину – пружину, которая оказывает силу, возникающую при изменении исходной длины связи на Δl . Используя соотношение

$$u_n = l \sum_{i,j} \xi_i \epsilon_{ij} \xi_j,$$

получим энергию L -пружины без учета деформации стороны ячейки Вороного:

$$U_L = \frac{1}{2} k_n u_n^2 = \frac{1}{2} k_n l^2 \left(\sum_{i,j} \xi_i \varepsilon_{ij} \xi_j \right)^2. \quad (3)$$

Принимая во внимание перпендикулярность $H_1 H_2$ и OA и применяя линеаризацию относительно ε_{ij} , имеем

$$r' = r \left((\xi_2 \varepsilon_{11} - \xi_1 \varepsilon_{12})^2 + (\xi_2 \varepsilon_{21} - \xi_1 \varepsilon_{22})^2 \right)^{0,5} \approx r \left(\xi_2^2 \varepsilon_{11} - \xi_1 \xi_2 (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + \xi_1^2 \varepsilon_{22} \right). \quad (4)$$

Из (1), (2) следует, что при изменении длины R -пружины в интервале $s \in [l, l + u_n]$ возникающая сила изменяется в интервале $F \in [0, -v_m k_n (r' - r)]$. Используя это, определим механическую работу при ее деформации:

$$A_R = - \int_{s=l}^{l+u_n} v_m k_n \frac{r' - r}{u_n} (s - l) ds = -\frac{1}{2} v_m k_n r' u_n + C_1 r' + C_2 u_n + C_3.$$

Так как в дальнейшем нам понадобятся только слагаемые второй степени от ε_{ij} , определим энергию R -пружины:

$$U_R = -\frac{1}{2} v_m k_n u_n r' \approx -\frac{1}{2} v_m k_n l r \sum_{i,j} \sum_{n,m} (-1)^{\delta_{nm}} \xi_i \xi_j \xi_{3-n} \xi_{3-m} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm}.$$

Суммарная энергия, накопленная при деформации REV,

$$\Phi = \frac{\sum U_L + \sum U_R}{L^2}.$$

Тензор модуля упругости можно определить через энергию REV [5]:

$$C_{ijnm} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{nm}} = \sum \frac{k_n l^2 \xi_i \xi_j \xi_n \xi_m + k_n v_m l r (-1)^{\delta_{nm}} \xi_i \xi_j \xi_{3-n} \xi_{3-m} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm}}{L^2}. \quad (5)$$

Тензор модуля упругости удобно представить в матричной форме:

$$\Omega = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \frac{1}{2}(C_{1112} + C_{1121}) \\ C_{2211} & C_{2222} & \frac{1}{2}(C_{2212} + C_{2221}) \\ C_{1211} & C_{1222} & \frac{1}{2}(C_{1212} + C_{2121}) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

При этом выполняется соотношение

$$\sigma = \Omega \varepsilon,$$

где $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sqrt{2}\sigma_{12}]^T$ – вектор, составленный из компонент тензора напряжений, $\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sqrt{2}\varepsilon_{12}]^T$ – вектор, составленный из компонент тензора деформаций.

Если количество конфигураций в рассматриваемом квадратном элементе достаточно велико, уравнение (5) можно переписать в интегральной форме:

$$C_{ijnm} = \frac{1}{L^2} \int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} k_n v_m l r (-1)^{\delta_{nm}} \xi_i \xi_j \xi_{3-n} \xi_{3-m} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm} D(l, r, \varphi) d\varphi dr dl + \frac{1}{L^2} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{2\pi} k_n l^2 \xi_i \xi_j \xi_n \xi_m D_l(l, \varphi) d\varphi dl,$$

где $D(l, r, \varphi) d\varphi dr dl$ – количество конфигураций в REV с параметрами в интервале $[l, l + dl] \times [r, r + dr] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$.

Для изотропного материала связи распределены равномерно по всем направлениям, поэтому можно провести замену

$$D(l, r, \varphi) = \frac{N(l, r)}{2\pi},$$

где $N(l, r)drdl$ – количество конфигураций в REV с параметрами в интервале $[l, l + dl] \times [r, r + dr]$.
 Разделив интегралы, после сокращения имеем следующую матрицу модулей упругости:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 3\alpha_{2D}k_n + \beta_{2D}k_n\nu_m & \alpha_{2D}k_n + 3\beta_{2D}k_n\nu_m & 0 \\ & 3\alpha_{2D}k_n + \beta_{2D}k_n\nu_m & 0 \\ \text{Symmetry} & & \alpha_{2D}k_n - \beta_{2D}k_n\nu_m \end{bmatrix}. \quad (7)$$

При этом $\alpha_{2D} = \frac{\int_{l_1}^{l_2} l^2 N(l) dl}{8L^2}$, $\beta_{2D} = \frac{\int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} lr N(l, r) dr dl}{8L^2}$.

Данные интегралы могут быть оценены для дискретной геометрической структуры:

$$\alpha_{2D} = \frac{\sum l^2}{8L^2},$$

$$\beta_{2D} = \frac{\sum lr}{8L^2}.$$

В случае плоского напряженного состояния (*plane stress*) матрица (6) имеет вид

$$\Omega = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Приравняв (7) и (8) и решив полученные уравнения, найдем микроструктурные коэффициенты модели DV:

$$k_n = \frac{E(3-\nu)}{8\alpha_{2D}(1-\nu^2)}, \quad (9)$$

$$\nu_m = \frac{\alpha_{2D}(3\nu-1)}{\beta_{2D}(3-\nu)}. \quad (10)$$

Вывод соотношений параметров модели RV. Для модели перестраиваемой диаграммы Вороного проводятся аналогичные рассуждения. Из геометрических свойств конфигурации RV получаем

$$r' = r'_1 + r'_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b' - a' \cos \alpha'}{\sin \alpha'} + \frac{c' - a' \cos \beta'}{\sin \beta'} \right).$$

Используя линеаризацию по ε_{ij} , для преобразованных в ходе деформации параметров a, b, c, α, β конфигурации RV имеем

$$a' \approx a(1 + \xi_1^2 \varepsilon_{11} + \xi_2^2 \varepsilon_{22} + \xi_1 \xi_2 \varepsilon_{12}), \quad (11)$$

$$b' \approx b(1 + \xi_1'^2 \varepsilon_{11} + \xi_2'^2 \varepsilon_{22} + \xi_1' \xi_2' \varepsilon_{12}), \quad (12)$$

$$c' \approx c(1 + \xi_1''^2 \varepsilon_{11} + \xi_2''^2 \varepsilon_{22} + \xi_1'' \xi_2'' \varepsilon_{12}), \quad (13)$$

$$\sin \alpha' \approx \sin \alpha \left(1 + (1 - \xi_1^2 - \xi_1'^2) \varepsilon_{11} + (1 - \xi_2^2 - \xi_2'^2) \varepsilon_{22} + (-\xi_1 \xi_2 - \xi_1' \xi_2') (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \right), \quad (14)$$

$$\sin \beta' \approx \sin \beta \left(1 + (1 - \xi_1^2 - \xi_1''^2) \varepsilon_{11} + (1 - \xi_2^2 - \xi_2''^2) \varepsilon_{22} + (-\xi_1 \xi_2 - \xi_1'' \xi_2'') (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha' \approx \cos \alpha & \left(1 + \left(\frac{2\xi_1 \xi_1'}{\cos \alpha} - \xi_1^2 - \xi_1'^2 \right) \varepsilon_{11} + \left(\frac{2\xi_2 \xi_2'}{\cos \alpha} - \xi_2^2 - \xi_2'^2 \right) \varepsilon_{22} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\xi_1 \xi_2' + \xi_1' \xi_2}{\cos \alpha} - \xi_1 \xi_2 - \xi_1' \xi_2' \right) (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta' \approx \cos \beta & \left(1 + \left(\frac{2\xi_1 \xi_1''}{\cos \beta} - \xi_1^2 - \xi_1''^2 \right) \varepsilon_{11} + \left(\frac{2\xi_2 \xi_2''}{\cos \beta} - \xi_2^2 - \xi_2''^2 \right) \varepsilon_{22} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\xi_1 \xi_2'' + \xi_1'' \xi_2}{\cos \beta} - \xi_1 \xi_2 - \xi_1'' \xi_2'' \right) (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Определим накопленную энергию в конфигурации RV. Аналогично DV разделим связь модели RV на L -пружину и R -пружину. Энергия U_L определяется, как в (3). Найдем энергию R -пружины, используя линеаризацию (11)–(17):

$$U_R(a, b, c, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} k_n v_m u_n r' \approx \sum_{i,j} \sum_{n,m} E_{ijnm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm},$$

где

$$E_{1111} = G_1 \xi_{11}^4 + G_2 \xi_{11}^2 \xi_{22}^2 + G_3 \xi_{11}^2,$$

$$E_{1122} = G_1 \xi_{11}^2 \xi_{22}^2 + G_2 \xi_{11}^4 + G_3 \xi_{11}^2,$$

$$G_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{b(2 \cos^2 \alpha + 1) + 3a \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{c(2 \cos^2 \beta + 1) + 3a \cos \beta}{\sin \beta} \right),$$

$$G_2 = \frac{1}{2} (2b \sin \alpha + 2c \sin \beta),$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{-b - a \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{-c - a \cos \beta}{\sin \beta} \right).$$

Проводя аналогичные модели DV рассуждения, определим модули упругости для модели RV:

$$C_{ijnm} = \frac{1}{L^2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^2 U_R}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{nm}} D(a, b, c, \alpha, \beta, \varphi) d\varphi d\beta d\alpha dc db da + I_L,$$

где $D(a, b, c, \alpha, \beta, \varphi) d\varphi d\beta d\alpha dc db da$ – количество конфигураций в REV с параметрами в интервале $[a, a + da] \times [b, b + db] \times [c, c + dc] \times [\alpha, \alpha + d\alpha] \times [\beta, \beta + d\beta] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$.

Как и в модели DV, пользуясь изотропностью материала, можно провести замену

$$D(a, b, c, \alpha, \beta, \varphi) = \frac{N(a, b, c, \alpha, \beta)}{2\pi}.$$

После сокращения получаем матрицу модулей упругости

$$\Omega = \begin{bmatrix} 3\alpha_{2D} k_n + M_1 k_n v_m & \alpha_{2D} k_n + M_2 k_n v_m & 0 \\ & 3\alpha_{2D} k_n + M_1 k_n v_m & 0 \\ \text{Symmetry} & & \alpha_{2D} k_n + M_3 k_n v_m \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где

$$M_1 = \frac{1}{8L^2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_0^\pi \int_0^\pi (3G_1 + G_2 + 4G_3) N(a, b, c, \alpha, \beta) d\beta d\alpha dc db da,$$

$$M_2 = \frac{1}{8L^2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_0^\pi \int_0^\pi (G_1 + 3G_2 + 4G_3) N(a, b, c, \alpha, \beta) d\beta d\alpha dc db da.$$

Приравняв (18) и (8) и решив полученные уравнения, найдем микроструктурные коэффициенты модели RV:

$$k_n = \frac{E(M_2 - \nu M_1)}{\alpha_{2D}(1 - \nu^2)(3M_2 - M_1)}, \quad (19)$$

$$\nu_m = \frac{\alpha_{2D}(1 - 3\nu)}{\nu M_1 - M_2}. \quad (20)$$

Интегралы M_1 и M_2 могут быть оценены для дискретной геометрической структуры:

$$M_1 = \frac{\sum (3G_1 + G_2 + 4G_3)}{8L^2},$$

$$M_2 = \frac{\sum (G_1 + 3G_2 + 4G_3)}{8L^2}.$$

Результаты и их обсуждение

Численные эксперименты. Для подтверждения полученных соотношений микроструктурных параметров и параметров сплошной среды (9), (10) для модели DV и (19), (20) для модели RV, а также исследования применимости методов проводились описанные ниже численные эксперименты.

Эксперимент 1: восстановление матрицы упругости (6). Эксперимент проводится для верификации поведения модели с полученными микроструктурными параметрами. Генерируется триангуляция из 10^5 вершин квадратного элемента размером 1×1 . Параметры сплошной среды $E = 10^7$, $\nu = 0,2$, если не указано иное. Особенностью эксперимента является то, что одинаковая деформация задается для всех элементов сетки. Так как модули упругости считаются неизвестными, тензор напряжений получен численно. Тензор напряжений $\sigma_{ij}^h(x, y)$ в достаточно малом квадрате с центром в (x, y) и стороной h вычисляется путем непосредственного учета всех сил от пружин, пересекающих стороны рассматриваемого квадрата. Так как сетка обладает нерегулярной структурой, тензор напряжений будет различаться в пространстве моделируемого объекта. Определяется усредненный по всей сетке с шагом h тензор напряжений $\sigma_0 = h^2 \sum \sigma_{ij}^h(x, y)$. Модули упругости восстанавливаются с использованием σ_0 и соотношения (10). На рис. 4 видна погрешность восстановленного модуля упругости при значительных величинах деформации, что можно объяснить применением линейризации (4) и (11)–(17). Можно заметить, что модель RV быстрее теряет точность при увеличении деформации.

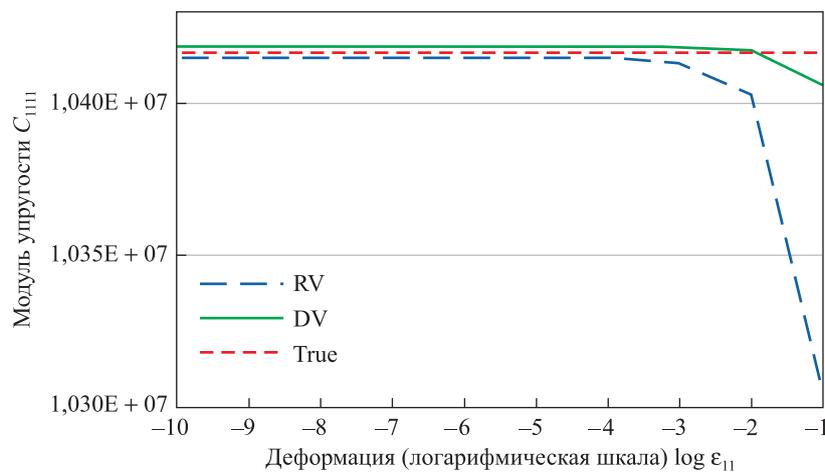


Рис. 4. Восстановление модуля упругости C_{1111} при различных величинах деформации

Fig. 4. Recovery of the elastic modulus C_{1111} at various values of deformation

На рис. 5 и 6 показаны восстановленные модули упругости C_{1111} и C_{1122} при малой деформации и различных коэффициентах Пуассона. Как видно из представленных результатов, дискретная модель в заданных условиях достаточно точно описывает поведение упругой сплошной среды.

Эксперимент 2: моделирование изгиба балки под действием собственного веса с жестким закреплением с двух сторон (рис. 7). Размеры балки 1×4 , $E = 10^5$, $\nu = 0,2$, объемная сила гравитации $F = -1$.

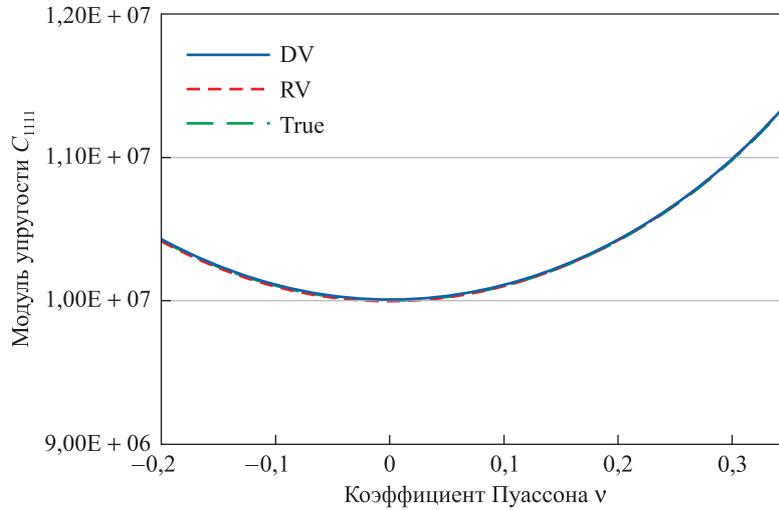


Рис. 5. Восстановление модуля упругости C_{1111} при различных коэффициентах Пуассона

Fig. 5. Recovery of modulus of elasticity C_{1111} at various Poisson's ratios

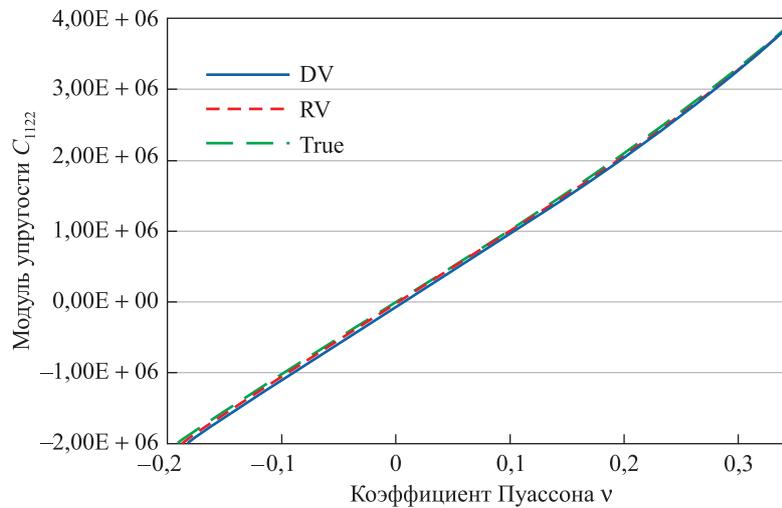


Рис. 6. Восстановление модуля упругости C_{1122} при различных коэффициентах Пуассона

Fig. 6. Recovery of modulus of elasticity C_{1122} at various Poisson's ratios

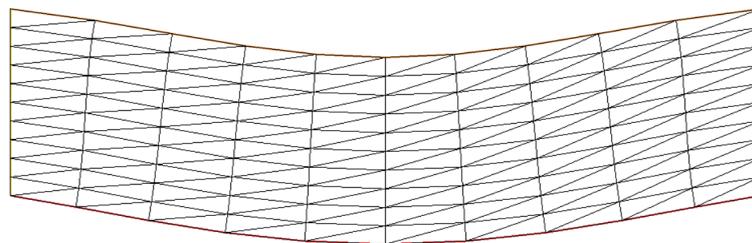


Рис. 7. Изгиб балки под действием собственного веса

Fig. 7. Beam bending under its own weight

Решение для DV и RV получено аналогичным RMIB итерационным методом, описанным в [4]. На рис. 8 и 9 показано распределение перемещений u_x , u_y по длине балки, полученное конечно-элементным методом и с помощью моделей DV и RV. Из результатов этого эксперимента можно сделать вывод, что метод позволяет решать достаточно сложные задачи, получая правдоподобное поведение модели.

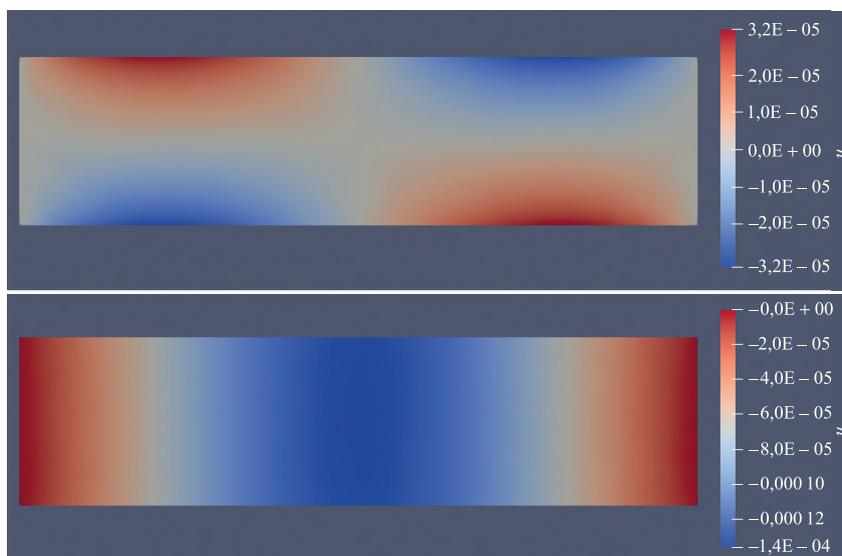


Рис. 8. Эксперимент 2. Визуализация решения модели DV
 Fig. 8. Test 2. Visualisation of the DV model solution

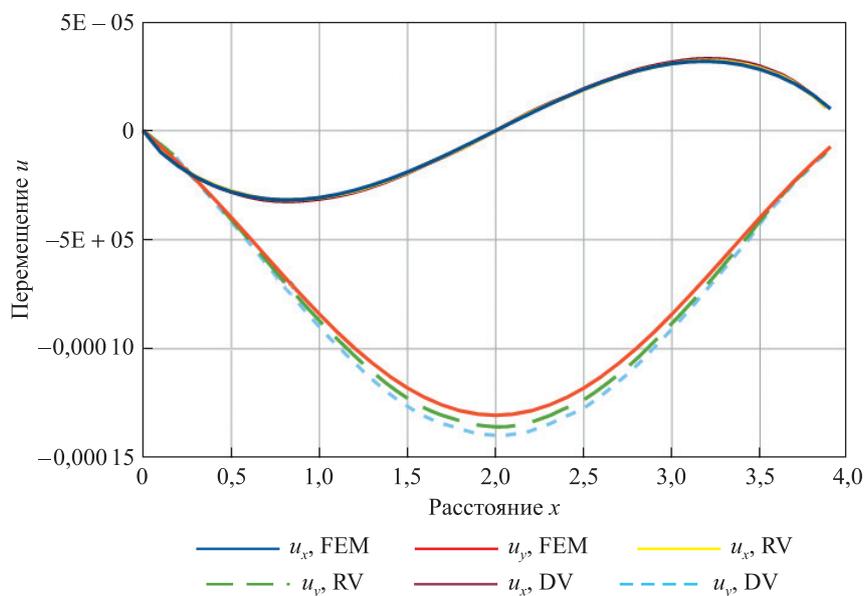


Рис. 9. Результаты эксперимента 2. Сравнение решений
 Fig. 9. Test 2. Comparison of solutions

Эксперимент 3: одноосное сжатие квадратного элемента размером 1×1 со свойствами материала из эксперимента 2 (напряжение $\sigma_{xx} = 1$). При этом исследуется отклонение решения моделей DV и RV от аналитического решения на сетках с различным распределением длин ребер. На рис. 9 показано изменение ошибки при различных величинах $\sigma_L = \frac{\sigma_0}{L_{avr}}$, где σ_0 – среднеквадратичное отклонение длин ребер; L_{avr} – средняя длина ребра. Сетка со свойством σ'_L получается случайной модификацией (каждая вершина перемещается на небольшую случайную величину) имеющейся сетки с $\sigma_L < \sigma'_L$. Результат эксперимента показывает значительное влияние величины среднеквадратичного отклонения длины связи на точность вычислений.

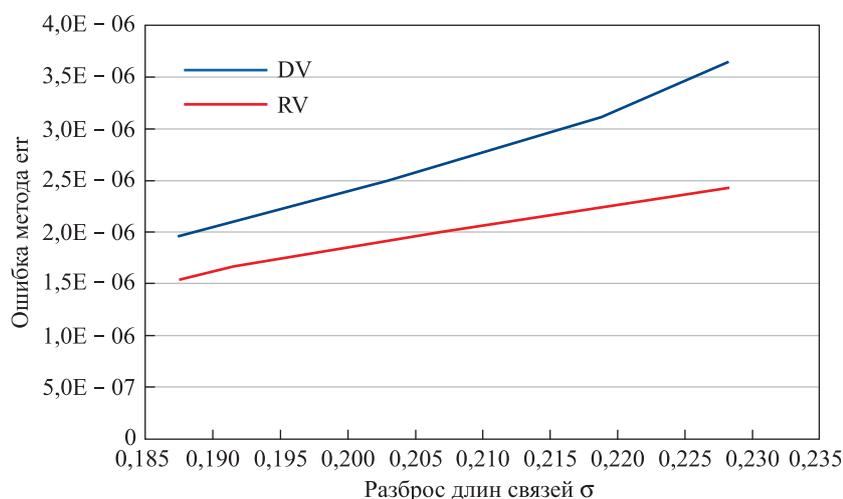


Рис. 10. Результаты эксперимента 3

Fig. 10. Results of test 3

Заключение

В работе были рассмотрены двумерные модификации моделей деформируемой и перестраиваемой диаграмм Вороного. Получено соотношение микроструктурных параметров и свойств сплошной среды (макропараметров).

Как и в RMIB [5], при выводе соотношений микро- и макропараметров мы предположили, что при использовании определенной деформации, примененной к REV, к связям, заполняющим элемент, будет применена схожая деформация и их отличие не повлияет на оценку энергии. На практике это выполнимо только при условии, что длины связей не различаются значительно. Это можно легко организовать при генерации упаковки RMIB, используя близкие по размеру частицы, в то же время алгоритмы триангуляции не обладают такой возможностью. Эксперимент 1 построен так, что деформация устанавливается фиксированной во всей сетке, и при достаточно малых величинах ε_{11} поведение полученных моделей практически совпадает с теоретическим. При достижении равновесного состояния системы (что использовалось в последующих экспериментах) локальная деформация существенно варьировалась в разных областях сетки. В эксперименте 2 также получены решения с достаточно близким к теории поведением. В то же время в эксперименте 3 для материала с такими же свойствами обнаружены значительные погрешности и подтвержден факт существенного влияния разброса длин связей на качество получаемого решения.

В дальнейшем планируется расширить исследуемые модели с учетом разброса длин связей, свойственного получаемым триангуляциям, а также обобщить для трехмерного случая.

Библиографические ссылки

1. Краснопрошин ВВ, Коновалов ОЛ, Чайко ВВ. Алгоритм расчета геометрических параметров плоских гидравлических трещин. *Вестник Брестского государственного технического университета. Физика, математика, информатика*. 2017;5: 23–26.
2. Chaiko VV, Konovalov OL, Zhuravkov MA. DEM-FVM conjugated parallel solver for hydraulic fracturing. In: *2nd International discrete fracture network engineering conference; 2018 June 20–22; Seattle, Washington, USA*. Alexandria: American Rock Mechanics Association; 2018. p. 1429.
3. Gao H, Klein P. Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bonds. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1998;46(2):187–218. DOI: 10.1016/S0022-5096(97)00047-1.
4. Zhang Z, Ge X. A new quasi-continuum constitutive model for crack growth in an isotropic solid. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2005;24(2):243–252. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.11.007.
5. Zhao G. *Development of micro-macro continuum-discontinuum coupled numerical method* [dissertation]. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne; 2010. 224 p.
6. Konovalov O, Ji S, Zhuravkov M. Modified virtual internal bond model based on deformable Voronoi particles. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2020;10(2):87–91. DOI: 10.1016/j.taml.2020.01.008.

References

1. Krasnoprosin VV, Konovalov OL, Chaiko VV. Algorithm for calculating the geometric parameters of flat hydraulically induced fractures. *Vestnik of Brest State Technical University. Physics, mathematics, informatics*. 2017;5:23–26. Russian.

2. Chaiko VV, Konovalov OL, Zhuravkov MA. DEM-FVM conjugated parallel solver for hydraulic fracturing. In: *2nd International discrete fracture network engineering conference; 2018 June 20–22; Seattle, Washington, USA*. Alexandria: American Rock Mechanics Association; 2018. p. 1429.
3. Gao H, Klein P. Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bonds. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1998;46(2):187–218. DOI: 10.1016/S0022-5096(97)00047-1.
4. Zhang Z, Ge X. A new quasi-continuum constitutive model for crack growth in an isotropic solid. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2005;24(2):243–252. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.11.007.
5. Zhao G. *Development of micro-macro continuum-discontinuum coupled numerical method* [dissertation]. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne; 2010. 224 p.
6. Konovalov O, Ji S, Zhuravkov M. Modified virtual internal bond model based on deformable Voronoi particles. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2020;10(2):87–91. DOI: 10.1016/j.taml.2020.01.008.

Статья поступила в редакцию 03.02.2021.
Received by editorial board 03.02.2021.

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ

OUTSTANDING SCIENTISTS

Юрий Станиславович
БОГДАНОВ
(1920–1987)

Yurii Stanislavovich
BOGDANOV
(1920–1987)



8 декабря 2020 г. исполнилось 100 лет со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Юрия Станиславовича Богданова.

Ю. С. Богданов родился 8 декабря 1920 г. в г. Великие Луки Псковской области. В 1938 г., окончив с отличием среднюю школу в г. Сычевке, он поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. В июне 1940 г. Ю. С. Богданов становится сталинским стипендиатом и начинает активно заниматься научной работой. Однако судьба распорядилась так, что окончить университет ему довелось лишь в 1956 г.

В самом начале Великой Отечественной войны Ю. С. Богданов добровольно вступил в студенческий партизанский отряд, в составе которого принимал участие в операциях в тылу врага в Волосовском районе Ленинградской области. Из-за тяжелого ранения Юрий Станиславович вынужден был остаться на оккупированной территории, а в марте 1942 г. его вывезли в Германию. Хорошо владея немецким языком, Ю. С. Богданов активно сотрудничал с антифашистами, а окончание войны встретил в рядах взвода разведки 9-й американской армии. Осенью 1945 г. Юрий Станиславович вернулся на родину и был восстановлен в Ленинградском государственном университете

студентом 4-го курса. Уже первая его научная работа «О нормальных системах Ляпунова», выполненная на 4-м курсе и опубликованная в журнале «Доклады АН СССР» в 1947 г., привлекла внимание специалистов. Но в том же 1947 г. обучение прервалось: Юрий Станиславович был арестован. Однако и во время пребывания в мордовских лагерях на ст. Потьма Юрий Станиславович не переставал заниматься математикой. До наших дней сохранилась написанная Ю. С. Богдановым в этих тяжелейших условиях рукописная книга «Правильные системы». С 1949 г. его статьи начинают пересылаться на рецензирование ведущим специалистам по дифференциальным уравнениям, в частности академику АН СССР В. И. Смирнову и профессору В. В. Немыцкому, которые высоко оценили эти работы. В апреле 1955 г. Военная коллегия Верховного суда СССР отменила приговор и отправила дело на новое расследование с первоначальной стадии, но в декабре этого же года следствие было прекращено, и Ю. С. Богданов вышел на свободу. Реабилитирован же Юрий Станиславович был лишь посмертно 6 февраля 1989 г.

В 1956 г. Ю. С. Богданов с отличием окончил Ленинградский государственный университет. С 1956 по 1958 г. он работал в Ленинградском отделении

Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР, а начиная с 1958 г., когда Юрий Станиславович вслед за своим учителем академиком АН БССР Н. П. Еругиным переезжает в Минск, вся его трудовая деятельность неразрывно связана с Белорусским государственным университетом. Ю. С. Богданов работал на кафедре дифференциальных уравнений, заведовал кафедрами общей математики (1964–1968), высшей математики и математической физики (1968–1973), высшей математики (1971–1981). Он читал лекции по фундаментальным математическим дисциплинам на всех естественных факультетах БГУ. Юрий Станиславович был уникальным лектором. Простота и естественность его лекций, удивительно сочетающиеся с глубоким научным содержанием, всегда привлекали множество студентов, а образный язык и эмоциональность изложения никого не оставляли равнодушным. Студенты университета тех лет и сейчас помнят педагогический эксперимент Юрия Станиславовича, когда он читал лекции по всем основным математическим дисциплинам на младших курсах математического факультета. Преподаванию математических дисциплин, их методическому обеспечению Ю. С. Богданов придавал большое значение. В разное время он руководил работой различных методических семинаров для преподавателей, являлся руководителем Республиканского методического объединения математиков, был членом президиума и членом секции университетов и пединститутів научно-методического совета по математике при Учебно-методическом управлении Министерства высшего и среднего специального образования СССР, заместителем председателя секции математики Научно-технического совета Министерства высшего и среднего специального образования БССР. Взгляды Ю. С. Богданова на математику и ее преподавание нашли отражение в серии написанных им замечательных учебных пособий по математическому анализу и дифференциальным уравнениям.

Ю. С. Богданова часто приглашали для чтения лекций в университетах и пединститутах Молдавии, стран Прибалтики, Узбекистана и, конечно же, Беларуси. В результате у него появилось множество учеников, с которыми он щедро делился идеями и задачами. Юрий Станиславович,

несомненно, является одним из основателей всемирно признанной белорусской школы по дифференциальным уравнениям. Более 40 его учеников стали кандидатами наук, 5 – докторами наук, среди них академик НАН Беларуси Н. А. Изобов. Сейчас в республике нет университета, где бы ни работали ученики Юрия Станиславовича.

Для научной деятельности Ю. С. Богданова характерны глубокое проникновение в сущность рассматриваемых проблем и разнообразие научных интересов. Им получен ряд основополагающих результатов в современной асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, одним из создателей которой он по праву считается. Ю. С. Богдановым построена абстрактная теория норм Ляпунова; получен критерий Басова – Гробмана – Богданова правильности линейных систем; решена задача о существовании аппроксимирующей последовательности для правильных систем; доказана асимптотическая эквивалентность линейных нестационарных систем и систем с кусочно-постоянными коэффициентами, принимающими лишь два значения; введены аналоги преобразований Ляпунова и характеристических показателей для нелинейных систем (vd -преобразования и vd -числа). Им также указаны признаки отсутствия замкнутых траекторий у двумерных систем в заданной области плоскости; изучено множество периодов семейства циклов, охватывающих друг друга; обоснован метод нахождения периодических решений систем дифференциальных уравнений; построено множество всех решений дифференциального уравнения, содержащего лишь производную искомой функции.

В общей сложности Ю. С. Богдановым опубликовано около 100 научных статей и 7 учебных пособий.

Мы, его ученики и коллеги, благодарны судьбе, подарившей нам счастье общения с доброжелательным человеком, талантливым ученым, выдающимся педагогом, пронесшим через всю свою нелегкую жизнь идеалы служения истине, добру и справедливости.

*Сотрудники кафедры высшей математики
факультета прикладной
математики и информатики*

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 517(075.8)

Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03 «Физическая электроника», 1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии», 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)», 1-31 03 07-02 «Прикладная информатика (информационные технологии телекоммуникационных систем)», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», 1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства)» / В. К. Ахраменко [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 180 с. : ил. Библиогр.: с. 177–178. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/250914>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 12.11.2020, № 014112112020.

В электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной» изложены теория пределов, основные понятия дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной, которые сопровождаются большим количеством примеров и задачами. ЭУМК предназначен для студентов и преподавателей учреждений высшего образования.

УДК 517(075.8)

Мазаник С. А. Математический анализ [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 04 «Информатика» : в 3 ч. Ч. 2 / С. А. Мазаник, О. А. Кастрица ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 76 с. : ил. Библиогр.: с. 67–69. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/252752>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 14.12.2020, № 014614122020.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математический анализ» (часть 2) предназначен для студентов специальности 1-31 03 04 «Информатика». В ЭУМК содержится материал, изучаемый студентами первого курса в весеннем семестре. Содержание учебного материала включает разделы «Функции нескольких переменных», «Кратные интегралы», «Криволинейные и поверхностные интегралы», «Числовые ряды». Изложение соответствует программе учебной дисциплины.

УДК 512.664(075.8)

Глецевич М. А. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс] : учеб.-метод. разработка для студентов физ. фак. и фак. радиофизики и компьютер. технологий / М. А. Глецевич, А. А. Егоров, Т. А. Чехменок ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2020. 42 с. Библиогр.: с. 42. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/254050>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 14.01.2021, № 0004142021.

В данной разработке приведены основные теоретические сведения по теме «Системы линейных уравнений», являющейся одной из базовых в дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра». В каждом из разделов даны примеры решения типовых задач, рассматриваемых на практических занятиях по данной дисциплине. Предложены задачи для самостоятельного решения, которые могут быть использованы в качестве индивидуальных заданий по соответствующим темам. Учебно-методическая разработка предназначена для студентов, обучающихся на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ.



СОДЕРЖАНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Дымков М. П.</i> Задача оптимизации для одного класса дифференциально-разностных систем с запаздыванием	6
<i>Ломовцев Ф. Е.</i> Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой	18
<i>Калитин Б. С.</i> О некоторых проблемах неустойчивости в полудинамических системах	39

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

<i>Кукрак Г. О., Тимохович В. Л.</i> О счетнокомпактифицируемости в смысле Морита.....	46
--	----

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

<i>Прохоров Н. П., Дуль Е. Н.</i> Графы самопересечений замкнутых ломаных	54
---	----

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Босяков С. М., Юркевич К. С., Михасев Г. И., Петрова Л. Г., Майсюк М. М.</i> Оценка толщины хрящевого трансплантата для тимпанальной мембраны при удалении ретракционного кармана (конечно-элементное моделирование)	69
---	----

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Шарыкин Р. Е.</i> Применение формальных методов при проектировании системы одного окна.....	79
<i>Богущ Р. П., Абламейко С. В.</i> Алгоритм обнаружения дыма лесного пожара на видеоизображении	91
<i>Чайко В. В., Коновалов О. Л.</i> Модель деформируемой диаграммы Вороного для исследования плоского напряженно-деформированного состояния.....	102

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ

Юрий Станиславович Богданов (1920–1987)	113
Аннотации депонированных в БГУ работ.....	115

CONTENTS

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Dymkov M. P.</i> Optimisation problem for some class of hybrid differential-difference systems with delay.....	6
<i>Lomautsau F. E.</i> The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line.....	18
<i>Kalitine B. S.</i> On some problems of instability in semi-dynamical systems	39

GEOMETRY AND TOPOLOGY

<i>Kukrak H. O., Timokhovich V. L.</i> On the countably-compactifiability in the sense of Morita	46
--	----

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

<i>Prochorov N. P., Dul E. N.</i> Graphs of intersections of closed polygonal chains	54
--	----

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

<i>Bosiakov S. M., Yurkevich K. S., Mikhasev G. I., Petrova L. G., Maisyuk M. M.</i> Assessment of the cartilage transplant thickness after removing of the tympanic membrane retraction pocket (finite-element modelling)	69
--	----

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Sharykin R. E.</i> Application of formal methods in the design of a single window system.....	79
<i>Bohush R. P., Ablameyko S. V.</i> Algorithm for forest fire smoke detection in video	91
<i>Chaiko V. V., Konovalov O. L.</i> Deformable Voronoi model for the research of the plane stress-strain state	102

OUTSTANDING SCIENTISTS

Yurii Stanislavovich Bogdanov (1920–1987)	113
Indicative abstracts of the papers deposited in BSU.....	115

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, РИНЦ.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 1. 2021**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Семенец, М. А. Подголина*
Технический редактор *В. В. Пижкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 31.03.2021.
Тираж 115 экз. Заказ 123.

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь».
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

© БГУ, 2021

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 1. 2021**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Semenets, M. A. Podgolina*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 31.03.2021.
Edition 115 copies. Order number 123.

Republican Unitary Enterprise
«Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr
Ministerstva finansov Respubliki Belarus'».
License for publishing No. 02330/89, 3 March 2014.
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.

© BSU, 2021