



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

3

2018

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демида Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Дымков М. П. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь.
Забрейко П. П. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Княжище Л. Б. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Краснопрошин В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Макаров Е. К. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Мандрик П. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Матус П. П. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Медведев Д. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Михасев Г. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Сафонов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Скиба А. Н. Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
Сотсков Ю. Н. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Тузинов А. В. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Чижик С. А. Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Янчевский В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief	KHARIN Y. S. , doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: kharin@bsu.by
Deputy editors-in-chief	KROTOV V. G. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: krotov@bsu.by DUDIN A. N. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: dudin@bsu.by
Executive secretary	MATEIKO O. M. , PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: matseika@bsu.by
<i>Ablameyko S. V.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Altenbach H.</i>	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
<i>Antonevich A. B.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Beniash-Kryvets V. V.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Bernik V. I.</i>	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Gladkov A. L.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Golovko V. A.</i>	Brest State Technical University, Brest, Belarus.
<i>Gorokhovich V. V.</i>	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Gromak V. I.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Dzemyda G.</i>	Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
<i>Dymkov M. P.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Zabreiko P. P.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Egorov A. D.</i>	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Zoladek H.</i>	Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
<i>Zhuravkov M. A.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Zubkov A. M.</i>	Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
<i>Kashin B. S.</i>	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
<i>Knyazhishche L. B.</i>	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Kozhanov A. I.</i>	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
<i>Kotov V. M.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Krasnoproshin V. V.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Makarov E. K.</i>	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Mandrik P. A.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Matus P. P.</i>	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Medvedev D. G.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Mikhasev G. I.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Safonov V. G.</i>	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
<i>Skiba A. N.</i>	Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
<i>Sotskov Y. N.</i>	United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Tuzikov A. V.</i>	Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Chizhik S. A.</i>	National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
<i>Yanchevskii V. I.</i>	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.518.26, 517.518.118

ТОЧКИ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА $M_\alpha^p(X)$ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С. А. БОНДАРЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Классическая теорема Лебега утверждает, что для суммируемой функции почти любая точка (за исключением множества нулевой меры) является ее точкой Лебега. Множество точек, не являющихся точками Лебега, называют исключительным. Для более регулярных функций (например, принадлежащих определенному функциональному пространству) можно оценивать «размер» исключительного множества с помощью более тонких, чем мера, характеристик. В работе исследуются свойства точек Лебега для функций из классов Соболева на произвольных метрических пространствах в критическом случае $\gamma = \alpha p$, где γ – число, играющее роль размерности пространства, α, p – показатели гладкости и суммируемости соответственно. Получены оценки на «размер» исключительного множества в терминах емкостей и размерности Хаусдорфа, в частности показано, что исключительное множество имеет нулевую емкость и его размерность Хаусдорфа равна нулю. Доказана экспоненциальная скорость сходимости для точек Лебега. В докритическом случае $\gamma > \alpha p$ похожие результаты известны.

Ключевые слова: анализ на метрических пространствах с мерой; пространства Соболева; тонкие свойства функций; точки Лебега.

Образец цитирования:

Бондарев С.А. Точки Лебега для функций из обобщенных классов Соболева $M_\alpha^p(X)$ в критическом случае. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:4–11.

For citation:

Bondarev SA. Lebesgue points for functions from generalized Sobolev classes $M_\alpha^p(X)$ in the critical case. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018; 3:4–11. Russian.

Автор:

Сергей Александрович Бондарев – аспирант кафедры теории функций механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. Г. Кротов.

Author:

Sergey A. Bondarev, postgraduate student at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
bsa0393@gmail.com

LEBESGUE POINTS FOR FUNCTIONS FROM GENERALIZED SOBOLEV CLASSES $M_\alpha^p(X)$ IN THE CRITICAL CASE

S. A. BONDAREV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Classical Lebesgue theorem states that for any integrable function almost every point (except the set of measure zero) is a Lebesgue point. The set of the points that are not Lebesgue points is called an exceptional set. One can estimate the «size» of the exceptional set for more regular functions (e. g. functions that belong to certain function space) using more refined than measure characteristics. The paper is devoted to the investigation of the properties of Lebesgue points for functions from Sobolev classes on general metric space in the critical case $\gamma = \alpha p$, γ plays the role of the dimension of the space, α, p – smoothness and summability parameters. Estimates of the «size» of the exceptional set in terms of capacities and Hausdorff dimension are obtained. Exponential rate of convergence for Lebesgue points has been established. Similar results are known in subcritical case $\gamma > \alpha p$ as well.

Key words: analysis on metric measure spaces; Sobolev spaces; fine properties of functions; Lebesgue points.

Введение

Классическая теорема Лебега [1] утверждает, что почти всюду для функции $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, выполнено соотношение

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(t), \quad (1)$$

где $B(x, r)$ – евклидов шар с центром в точке x радиусом r ; $|B(x, r)|$ – мера Лебега этого шара на $\mathbb{R}^n$. Множество точек, в которых не выполнено (1), будем называть исключительным. Те точки x , для которых (1) выполняется, будем называть точками Лебега функции f .

Представляет интерес вопрос о том, насколько «мало» может быть исключительное множество в случае, если исходная функция f будет более регулярной, например принадлежать некоторому функциональному пространству. Эта задача имеет богатую историю. Здесь «малость» может оцениваться по-разному. Как правило, когда речь идет о пространствах Соболева, для оценок «размера» исключительного множества используются размерность Хаусдорфа и емкости (см. формулы (6), (7) ниже).

Отметим некоторые работы, посвященные указанной тематике. Через $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство Соболева в смысле обобщенных производных, где p – показатель суммируемости; k – показатель гладкости. Оценка для емкости и размерности Хаусдорфа дополнения к множеству точек Лебега для $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ была дана в 1972 г. Х. Федерером и В. Зиммером [2]. Позже в работах Т. Бэгби и В. Зимера [3], К. Кальдерона, Е. Фейбса и Н. Ривьера [4], Н. Мейерса [5] результаты из [2] были распространены на пространства $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ и на их обобщения – пространства бесселевых потенциалов.

Следующий шаг в развитии данной тематики сделан в связи с тем, что П. Хайлашем в 1996 г. были введены классы Соболева $M_1^p(X)$ на произвольном метрическом пространстве X [6]. После этого естественным образом возник вопрос о переносе известных для классических пространств Соболева $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ теорем на более общие классы $M_\alpha^p(X)$. П. Хайлаш и Ю. Киннунен в работе [7] исследовали размеры дополнения к множеству точек Лебега для функций из $M_1^p(X)$ в терминах размерности Хаусдорфа. В 2002 г. Ю. Киннунен и В. Латвала решили эту задачу в терминах емкостей [8]. Далее результаты были обобщены М. А. Прохоровичем на случай пространств $M_\alpha^p(X)$, где α необязательно равно единице, $p > 1$ [9; 10]. Наконец, в [11] вводятся точки Лебега для несуммируемых функций и формулируются более общие результаты, включающие случай $p > 0$.

Отметим важность теоремы Лебега, поскольку она дает способ определения значения функции $f \in L^p$ в точке почти всюду, независимый от выбора представителя (напомним, что L^p – класс эквивалентных функций, различающихся между собой разве что на множестве нулевой меры). Также с помощью теоремы Лебега можно доказать аналог C -свойства Лузина, а именно существование квазинепрерывного представителя для $f \in M_\alpha^p$ (подробности см. в [12]).

В данной работе исследованы свойства точек Лебега для функций из классов Соболева $M_\alpha^p(X)$ на метрическом пространстве X с произвольной мерой μ , удовлетворяющей условию удвоения. Получены оценки на «размер» исключительного множества и на скорость сходимости. При этом рассматривается так называемый критический случай, когда $\gamma = \alpha p$, где γ – постоянная, играющая роль размерности (см. далее формулу (4)).

Введем точки Лебега для несуммируемых функций. Всюду далее будем придерживаться стандартного обозначения для интегральных средних

$$f_B = \int_B f d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu.$$

Поскольку при $p < 1$ подынтегральная функция может быть несуммируема, то использовать интегральные средние в определении точек Лебега уже нельзя. Для преодоления этой трудности вместо интегральных средних используется техника приближения постоянными в пространстве L^p . Пусть шар $B \subset X$ и $f \in L^p(B)$, $p > 0$. Можно показать, что существует $I_B^{(p)} f \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_B |f(y) - c|^p d\mu(y) = \int_B |f - I_B^{(p)} f|^p d\mu(y).$$

Если $f \in L_{\text{loc}}^p(X)$, то для почти всех $x \in X$ существует предел $\lim_{r \rightarrow +0} I_{B(x,r)}^{(p)} f = f^*(x)$.

Постоянные наилучшего приближения $I_B^{(p)} f$ можно использовать вместо интегральных средних в определении точек Лебега [11]. Преимуществом является то, что их также можно применять при $p < 1$. Однако они не обладают хорошими свойствами интегральных средних, например сублинейностью.

В докритическом случае $\gamma > \alpha p$ справедлива следующая теорема [11], подводящая некий итог всем предыдущим исследованиям.

Теорема 1. Пусть $p > 0$, $1 \geq \alpha > 0$, $0 < \alpha p < \gamma$ и $f \in M_\alpha^p(X)$. Тогда существует множество $E \subset X$ такое, что для $x \in X \setminus E$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +0} I_{B(x,r)}^{(p)} f = f^*(x).$$

Кроме того,

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \quad (2)$$

При этом $\text{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ и $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$.

В случае $\gamma > \alpha p$ справедливо вложение $M_\alpha^p(X) \subset L_{\text{loc}}^q(X)$. В критическом случае $\gamma = \alpha p$ параметр q равен бесконечности. Однако вложение $M_\alpha^p \subset L^\infty$, которое можно было ожидать, неверно. При этом выполняется другое вложение в экспоненциальный класс: $M_\alpha^p \subset \exp(L^\beta)$ при некотором β , поэтому в (2) естественно ожидать экспоненциальную скорость сходимости вместо степенной. Целью данной статьи является доказательство следующего результата.

Теорема 2. Пусть $p > 0$, $1 \geq \alpha > 0$, $\gamma = \alpha p$ и $f \in M_\alpha^p(X)$. Тогда существует множество $E \subset X$ такое, что для $x \in X \setminus E$ существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f d\mu, \quad \lim_{r \rightarrow 0} I_{B(x,r)}^{(p)} f.$$

Кроме того,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} \left[\exp \left\{ b \left| f - I_{B(x,r)} \right| \right\} - 1 \right] d\mu = 0, \quad (3)$$

где в качестве $I_{B(x,r)}$ можно взять и постоянную наилучшего приближения $I_{B(x,r)}^{(p)} f$, и среднее интегральное; b – произвольная положительная постоянная. При этом для множества E выполнено: $\text{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ и $\dim_H(E) = 0$.

Заметим, что теорема 2 не налагает никаких дополнительных условий на пространство X , кроме условия удвоения. Скорость сходимости может быть улучшена в том смысле, что существует более быстрорастущая на бесконечности функция ϕ такая, что предельное равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} \phi \left(\left| f - I_{B(x,r)} \right| \right) d\mu = 0$$

все еще выполнено. Однако в этом случае на пространство следует наложить дополнительное ограничение – потребовать его связность. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

Основные определения и обозначения

Пусть (X, d) – метрическое пространство с метрикой d , а борелевская мера μ удовлетворяет условию удвоения, т. е. для любых шаров $B(x, r)$ и $B(x, R)$, $R > r$, выполнено

$$\mu(B(x, R)) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r} \right)^\gamma \mu(B(x, r)) \quad (4)$$

для некоторых постоянных a_μ и γ . При этом также предполагается, что мера каждого шара положительна и конечна. Тройка (X, d, μ) в этом случае называется пространством однородного типа, а число γ играет роль размерности.

Пусть $\alpha > 0$ и $0 < p < \infty$. Пространство Соболева $M_\alpha^p(X)$ на метрическом пространстве X состоит из множества функций (классов эквивалентности) $f \in L^p(X)$, для которых существует неотрицательная функция $g \in L^p(X)$ такая, что неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)] \quad (5)$$

выполнено почти всюду (более подробно см. [6], где дано определение при $\alpha = 1$, и [13], где оно обобщено на произвольное положительное α). На $M_\alpha^p(X)$ вводится норма (квазинорма при $p < 1$)

$$\|f\|_{M_\alpha^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf \left\{ \|g\|_{L^p(X)} \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным функциям $g \in L^p(X)$, удовлетворяющим условию (5). Пространства $M_\alpha^p(X)$ порождают емкости

$$\text{Cap}_{\alpha, p}(E) = \inf \left\{ \|f\|_{M_\alpha^p(X)}^p : f \geq 1 \text{ в окрестности } E \right\}. \quad (6)$$

Емкости являются «измерителями» массивности исключительных множеств в задачах теории тонких свойств функций. Такую же роль играют мера и размерность Хаусдорфа. Дадим все необходимые определения. Вместимость Хаусдорфа определяется как

$$H_R^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_i B(x_i, r_i), r_i < R \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества E шарами радиусом не более R . Мера Хаусдорфа вводится следующим образом:

$$H^s(E) = \lim_{R \rightarrow 0} H_R^s(E).$$

Наконец, определим размерность Хаусдорфа:

$$\dim_H(E) = \inf \left\{ s : H^s(E) = 0 \right\}. \quad (7)$$

Внешней мерой мы называем функцию множества ν , удовлетворяющую свойствам монотонности и субаддитивности (последнее даже может быть выполнено с некоторой константой), т. е.

$$A \subset B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B),$$

$$\nu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq a_\nu \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

для любых множеств A, B, A_i и некоторой постоянной $a_\nu \geq 1$. Заметим, что емкость и мера Хаусдорфа являются внешними мерами.

Нам понадобятся также максимальные операторы

$$\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} \frac{1}{r_B^\alpha} \left(\int_B |f - I_B^{(p)} f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

$$\mathcal{S}_\alpha^{(p)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} \frac{1}{r_B^\alpha} \left(\int_B |f - f_B|^p d\mu \right)^{1/p},$$

введенные в [14].

Вспомогательные факты

Для доказательства основной теоремы требуется ряд технических фактов, имеющих вспомогательный характер. Всюду далее, если не оговорено противное, c означает положительную постоянную, точное значение которой нам не важно. Более того, ее точное значение может меняться даже в пределах одной строки. Зависимость постоянной c от параметров, как правило, ясна из контекста.

Перечислим основные свойства емкости. Связь между емкостью, мерой и размерностью Хаусдорфа иллюстрирует следующая лемма из [15].

Лемма 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $x_0 \in X$, тогда для $0 < r \leq 1$

$$\mu(B(x_0, r)) \leq \text{Cap}_{\alpha, p}(B(x_0, r)) \leq cr^{-\alpha p} \mu(B(x_0, r)).$$

Если $\text{Cap}_{\alpha, p}(E) = 0$, то $H^t(E) = 0$ для любого $t > \gamma - \alpha p$. В частности, $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$.

Замечание. В критическом случае $\gamma = \alpha p$, поэтому $\dim_H(E) = 0$, если $\text{Cap}_{\alpha, p}(E) = 0$. Таким образом, достаточно доказать теорему 2 лишь для емкости.

Для формулировки следующего результата о свойствах емкости нам понадобится классическая лемма о покрытиях (доказательство можно найти, например, в [16]).

Лемма 2. Пусть F – семейство шаров ограниченного радиуса в метрическом пространстве X . Тогда можно выбрать подмножество $G \subset F$, состоящее из непересекающихся шаров, и при этом

$$\bigcup_{B \in F} B \subset \bigcup_{B \in G} 5B.$$

Введем обозначение

$$E = \left\{ x \in X : \limsup_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \int_{B(x, r)} g^p d\mu > 0 \right\}.$$

Лемма 3. Пусть $0 \leq g \in L^p(X)$ и внешняя мера ν удовлетворяет условию

$$\nu(B(x, r)) \leq cr^{-\alpha p} \mu(B(x, r)).$$

Тогда $\nu(E) = 0$. В частности, $\text{Cap}_{\alpha, p}(E) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in X : \limsup_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \int_{B(x, r)} g^p d\mu > \varepsilon \right\}.$$

Покажем, что $\nu(E_\varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда утверждение леммы будет следовать из субаддитивности внешней меры.

Зададим произвольное $0 < \delta < 1$. По определению E_ε для любого $x \in E_\varepsilon$ существует радиус r_x ($0 < r_x < \delta$) такой, что

$$r_x^{\alpha p} \int_{B(x, r_x)} g^p d\mu > \varepsilon. \quad (8)$$

По лемме 2 существует такое семейство попарно непересекающихся шаров $B(x_i, r_i)$, что

$$E_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r_i).$$

Используя субаддитивность внешней меры, лемму 1, неравенство (8) и условие удвоения (4), имеем

$$\begin{aligned} \nu(E_\varepsilon) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B(x_i, 5r_i)) \leq \\ &\leq c \sum_{i=1}^{\infty} (5r_i)^{-\alpha p} \mu(B(x_i, 5r_i)) = c \sum_{i=1}^{\infty} (5r_i)^{-\alpha p} \mu(B(x_i, 5r_i)) \frac{\mu(B(x_i, r_i))}{\mu(B(x_i, r_i))} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\alpha p} \mu(B(x_i, r_i)) \leq \frac{c}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B(x_i, r_i)} g^p d\mu = \\ &= \frac{c}{\varepsilon} \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)} g^p d\mu \rightarrow 0, \delta \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Последнее верно в силу абсолютной непрерывности интеграла. Действительно, так как шары $B(x_i, r_i)$ не пересекаются, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B(x_i, r_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i^{\alpha p}}{\varepsilon} \int_{B(x_i, r_i)} g^p d\mu \leq \\ &\leq \frac{\delta^{\alpha p}}{\varepsilon} \int_X g^p d\mu \rightarrow 0, \delta \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\nu(E_\varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, и наше утверждение следует из субаддитивности внешней меры. Лемма доказана.

Заметим, что мера Хаусдорфа, вообще говоря, не удовлетворяет условию леммы 3. Однако при условии регулярности снизу на меру

$$r_B^\gamma \leq c\mu(B) \quad (9)$$

в случае $\gamma > \alpha p$ имеем

$$H^{\gamma-\alpha p}(B) \leq r_B^{\gamma-\alpha p} \leq cr_B^{-\alpha p} \mu(B).$$

Отметим также, что (9) выполнено с постоянной c , зависящей от шара B , если (X, d, μ) удовлетворяет условию удвоения. Если $\text{diam } X < \infty$, то (9) выполнено с постоянной c , не зависящей от шара, и, стало быть, в случае ограниченности пространства X мера Хаусдорфа $H^{\gamma-\alpha p}$ удовлетворяет условиям леммы.

Следующее неравенство (типа неравенства Трудингера) было доказано в [17].

Лемма 4. Пусть $p > 0$, $\gamma = \alpha p$, $f \in M_\alpha^p(X)$. Тогда существуют постоянные $\sigma > 1$, $a > 0$ и $A > 0$ такие, что для любого шара B выполняется

$$\int_B \exp\left(a \frac{|f - I_B^{(p)} f|}{r_B^\alpha} \left(\int_{\sigma B} [\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f]^p d\mu\right)^{-1/p}\right) d\mu \leq A.$$

Доказательство основной теоремы

В силу замечания после леммы 1 докажем теорему лишь для емкости.

Сначала покажем, что для $f \in M_\alpha^p(X)$, $\gamma = \alpha p$, всюду, кроме «малого» множества, выполнено равенство

$$\lim_{r_B \rightarrow 0} I_B^{(p)} f = \lim_{r_B \rightarrow 0} f_B,$$

которое показывает, что на самом деле достаточно доказывать теорему лишь для $I_{B(x, r)}^{(p)} f$, поэтому далее можно работать только с постоянными наилучшего приближения.

Усредняя неравенство

$$|I_B^{(p)} f - f_B|^p \leq c \left(|I_B^{(p)} f - f(y)|^p + |f(y) - f_B|^p \right)$$

по шару $B = B(x, r)$ и оценивая сверху полученное выражение соответствующими максимальными операторами, получаем

$$|I_B^{(p)} f - f_B|^p \leq cr^{\alpha p} \left([\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(z)]^p + [\mathcal{S}_\alpha^{(p)} f(z)]^p \right),$$

откуда

$$|I_B^{(p)} f - f_B|^p \leq cr^{\alpha p} \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(z),$$

для любого $z \in B = B(x, r)$. Выберем z так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(z) \right]^p \leq \int_{B(x, r)} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu.$$

Таким образом,

$$\left| I_B^{(p)} f - f_B \right|^p \leq r_B^{\alpha p} \int_{B(x, r)} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu,$$

а выражение справа по лемме 3 сходится к нулю везде, за исключением множества нулевой $\text{Cap}_{\alpha, p}$ -емкости.

То, что $I_{B(x, r)}^{(p)} f$ имеет предел $\text{Cap}_{\alpha, p}$ -почти всюду, доказывается точно так же, как и в [11, теорема 1]. Осталось показать (3). Для этого рассмотрим множество

$$E = \left\{ x \in X : \limsup_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \int_{B(x, r)} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu > 0 \right\}$$

и внешнюю меру ν , удовлетворяющую условиям леммы 3. Из последней следует, что $\nu(E) = 0$. Пусть $x \notin E$. Тогда можно выбрать $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы для любых $0 < r < \varepsilon$ выполнялось

$$\delta(r) = \frac{b}{a} r^{\alpha p} \int_{\sigma B} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu < 1,$$

где b – постоянная из теоремы 2, a – постоянная из леммы 4. Применяя неравенство Гёльдера (здесь используется соотношение $\delta(r) < 1$) и лемму 4, получим

$$\begin{aligned} & \int_B \exp \left(b \left| f - I_B^{(p)} f \right| \right) \leq \\ & \leq \left(\int_B \exp \left(a \frac{|f - I_B^{(p)} f|}{r_B^\alpha} \left(\int_{\sigma B} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu \right)^{-1/p} \right) d\mu \right)^{\delta(r)} \leq A^{\delta(r)}. \end{aligned}$$

Последнее выражение сходится к 1, когда r стремится к 0. Таким образом, при любой постоянной $b > 0$ для всех точек $x \in X \setminus E$ выполнено

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} \left[\exp \left\{ b \left| f - I_{B(x, r)}^{(p)} f \right| \right\} - 1 \right] d\mu = 0.$$

Из леммы 3 следует, что $\text{Cap}_{\alpha, p}(E) = 0$. Отсюда же можно заключить, что $\dim_H(E) = 0$.

Библиографические ссылки

1. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*. Москва: Мир; 1973. 342 с.
2. Federer H, Ziemer W. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p -th power summable. *Indiana University Mathematics Journal*. 1973;22(2):139–158. DOI: 10.1512/iumj.1973.22.22013.
3. Bagby T, Ziemer WP. Pointwise differentiability and absolute continuity. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1974;191:129–148.
4. Calderón CP, Fabes EB, Riviere NM. Maximal smoothing operators. *Indiana University Mathematics Journal*. 1974;23: 889–898. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23073.
5. Meyers NG. Taylor expansion of Bessel potentials. *Indiana University Mathematics Journal*. 1974;23:1043–1049. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23085.
6. Hajlasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space. *Potential Analysis*. 1996;5(4):403–415. DOI: 10.1007/BF00275475.
7. Hajlasz P, Kinnunen J. Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces. *Revista Matemática Iberoamericana*. 1998;14(3):601–622. DOI: 10.4171/RMI/246.
8. Kinnunen J, Latvala V. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces. *Revista Matemática Iberoamericana*. 2002; 18(3):685–700. DOI: 10.4171/RMI/332.
9. Прохорович МА. Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша – Соболева на метрических пространствах с мерой. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2006;1:19–23.
10. Прохорович МА. Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева, $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа. *Математические заметки*. 2009;85(4):616–621. DOI: 10.4213/mzm6642.
11. Bondarev SA, Krotov VG. Fine properties of Functions from Hajlasz – Sobolev classes M_{α}^p , $p > 0$. I. Lebesgue points. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*. 2016;51(6):282–295. DOI: 10.3103/S1068362316060029.

12. Bondarev SA, Krotov VG. Fine properties of Functions from Hajłasz – Sobolev classes M_α^p , $p > 0$. II. Lusin’s approximation. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*. 2017;52(1):30–37. DOI: 10.3103/S1068362317010046.
13. Yang D. New characterization of Hajłasz – Sobolev spaces on metric spaces. *Science in China. Series A: Mathematics*. 2003; 46(5):675–689. DOI: 10.1360/02ys0343.
14. Кротов ВГ, Порабкович АИ. Оценки L^p -осцилляций функций при $p > 0$. *Математические заметки*. 2015;97(3):407–420. DOI: 10.4213/mzm10600.
15. Kinnunen J, Martio O. The Sobolev capacity on metric spaces. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*. 1996; 21:367–382.
16. Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces*. Berlin: Springer-Verlag; 2001. 141 p.
17. Порабкович АИ. Самоулучшение L^p -неравенства Пуанкаре при $p > 0$. *Чебышевский сборник*. 2016;17(1-57):187–200.

References

1. Stein E. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton: Princeton University Press; 1970. 287 p. Russian edition: Stein E. *Singulyarnye integraly i differentsial’nye svoistva funktsii*. Moscow: Mir; 1973. 342 p.
2. Federer H, Ziemer W. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p -th power summable. *Indiana University Mathematics Journal*. 1973;22(2):139–158. DOI: 10.1512/iumj.1973.22.22013.
3. Bagby T, Ziemer WP. Pointwise differentiability and absolute continuity. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1974;191:129–148.
4. Calderón CP, Fabes EB, Riviere NM. Maximal smoothing operators. *Indiana University Mathematics Journal*. 1974;23: 889–898. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23073.
5. Meyers NG. Taylor expansion of Bessel potentials. *Indiana University Mathematics Journal*. 1974;23:1043–1049. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23085.
6. Hajłasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space. *Potential Analysis*. 1996;5(4):403–415. DOI: 10.1007/BF00275475.
7. Hajłasz P, Kinnunen J. Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces. *Revista Matemática Iberoamericana*. 1998;14(3):601–622. DOI: 10.4171/RMI/246.
8. Kinnunen J, Latvala V. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces. *Revista Matemática Iberoamericana*. 2002; 18(3):685–700. DOI: 10.4171/RMI/332.
9. Prokhorovich MA. [Capacities and Lebesgue points for fractional Hajłasz – Sobolev classes on metric measure spaces]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2006;1:19–23. Russian.
10. Prokhorovich MA. [Hausdorff measures and Lebesgue points for Sobolev classes, $\alpha > 0$, on spaces of homogeneous type]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 2009;85(4):616–621. DOI: 10.4213/mzm6642. Russian.
11. Bondarev SA, Krotov VG. Fine properties of Functions from Hajłasz – Sobolev classes M_α^p , $p > 0$. I. Lebesgue points. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*. 2016;51(6):282–295. DOI: 10.3103/S1068362316060029.
12. Bondarev SA, Krotov VG. Fine properties of Functions from Hajłasz – Sobolev classes M_α^p , $p > 0$. II. Lusin’s approximation. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*. 2017;52(1):30–37. DOI: 10.3103/S1068362317010046.
13. Yang D. New characterization of Hajłasz – Sobolev spaces on metric spaces. *Science in China. Series A: Mathematics*. 2003; 46(5):675–689. DOI: 10.1360/02ys0343.
14. Krotov VG, Porabkovich AI. Estimates of L^p -oscillations of functions for $p > 0$. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 2015;97(3):407–420. DOI: 10.4213/mzm10600. Russian.
15. Kinnunen J, Martio O. The Sobolev capacity on metric spaces. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*. 1996; 21:367–382.
16. Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces*. Berlin: Springer-Verlag; 2001. 141 p.
17. Porabkovich AI. [Self-improvement of L^p -Poincaré inequality for $p > 0$]. *Chebyshevskii sbornik*. 2016;17(1-57):187–200. Russian.

Статья поступила в редколлегию 08.06.2018.
Received by editorial board 08.06.2018.

УДК 513.5

О КОНСТАНТЕ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО РАЦИОНАЛЬНОГО ПРОЦЕССА С УЗЛАМИ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА

Е. А. РОВБА¹⁾, К. А. СМОТРИЦКИЙ¹⁾, Е. В. ДИРВУК¹⁾

¹⁾Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь

Рассматривается оценка константы Лебега интерполяционного рационального процесса Лагранжа на отрезке $[-1, 1]$ с узлами в нулях косинус-дробей Чебышева – Маркова. Показано, что в случае двух действительных геометрически различных полюсов аппроксимирующих функций нормы фундаментальных многочленов Лагранжа ограничены. На основании этого результата доказано, что в рассматриваемом случае оценка сверху константы Лебега не зависит от расположения полюсов и последовательность констант Лебега растет с логарифмической скоростью. В предыдущих работах оценки констант Лебега были получены только для конкретных наборов полюсов или зависели от расположения полюсов.

Ключевые слова: рациональные приближения; интерполирование; дробь Чебышева – Маркова; константа Лебега.

ON A LEBESGUE CONSTANT OF INTERPOLATION RATIONAL PROCESS AT THE CHEBYSHEV – MARKOV NODES

Y. A. ROUBA^a, K. A. SMATRYTSKI^a, Y. V. DIRVUK^a

^aYanka Kupala State University of Grodno, 22 Ažėška Street, Grodno 230023, Belarus
Corresponding author: K. A. Smatrytski (k_smotritski@mail.ru)

In the present paper estimate of a Lebesgue constant of the interpolation rational Lagrange process on the segment $[-1, 1]$ at the Chebyshev – Markov cosine fractions nodes is considered. It is shown that in the case of two real geometrically distinct poles of approximating functions, the norms of the Lagrange fundamental polynomials are bounded. Based on this result, it is proved that in the case under consideration the upper estimate of the Lebesgue constant does not depend on the arrangement of the poles and the sequence of the Lebesgue constant grows with logarithmic rate. Note, that in previous works the estimates of Lebesgue constants were obtained only for particular choices of poles or depended on the arrangement of poles.

Key words: rational approximation; interpolation; Chebyshev – Markov fraction; Lebesgue constant.

Образец цитирования:

Ровба ЕА, Смотрицкий КА, Дирвук ЕВ. О константе Лебега интерполяционного рационального процесса с узлами Чебышева – Маркова. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3: 12–20.

For citation:

Rouba YA, Smatrytski KA, Dirvuk YV. On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev – Markov nodes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:12–20. Russian.

Авторы:

Евгений Алексеевич Ровба – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Константин Анатольевич Смотрицкий – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Евгений Владимирович Дирвук – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры системного программирования и компьютерной безопасности факультета математики и информатики.

Authors:

Yauheni A. Rouba, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics. rovba.ea@gmail.com

Kanstantin A. Smatrytski, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics. k_smotritski@mail.ru

Yauheni V. Dirvuk, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of system programming and computer security, faculty of mathematics and informatics. dirvuk@gmail.com

Introduction

Behaviour of the Lebesgue constant of interpolating polynomial processes was always of great interest of the researchers (see, for example, [1]). In this direction very deep and profound results were obtained [2].

In the case of interpolation by rational functions, this problem is less studied. Beginning of the investigation of the behavior of the Lebesgue constants of interpolation rational Lagrange processes at the Chebyshev – Markov nodes on a segment was made by V. N. Rusak [3], continued by A. P. Starovoitov [4]. However, in these papers estimates of the Lebesgue constants were obtained under certain conditions on the poles of interpolation rational functions. The main result of [5] is of a different nature. Let us quote it.

Let $\{a_k\}_{k=0}^n$ be a sequence of real numbers such that $a_0 = 0$, $a_k \in (-1, 1)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Chebyshev – Markov rational fraction can be defined as follows

$$M_n(x) = \cos \mu_n(x),$$

where

$$\mu_n(x) = \sum_{k=0}^n \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x},$$

and

$$\mu'_n(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}, \quad x \in (-1, 1).$$

The function $M_n(x)$ has $n+1$ zeroes x_k , $k = 0, 1, \dots, n$, on the interval $(-1, 1)$. Then for any function f defined on $[-1, 1]$ we construct the interpolating rational Lagrange function

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \quad (1)$$

where

$$l_k(x) = \frac{M_n(x)}{(x - x_k) M'_n(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Theorem 1. *For the Lebesgue function*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n |l_k(x)|$$

of the interpolating Lagrange process (1) the following estimate holds

$$L_n(x) < 1 + Cd_n \ln \sum_{k=0}^n \left(\sqrt{\frac{1-a_k}{1+a_k}} + \sqrt{\frac{1+a_k}{1-a_k}} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

where C is a positive constant,

$$d_n = \max_{k=1, 2, \dots, n} \left\{ \frac{\lambda_n(x_{k-1})}{\lambda_n(x_k)}, \frac{\lambda_n(x_k)}{\lambda_n(x_{k-1})} \right\}.$$

Note, that estimate (2) was obtained for any real poles, without any restrictions on their location.

Let us pay some attention to the right-hand side of the estimate (2). Like in previous studies it is a function of poles. However in [6] it was proved that in one particular case $n = 2$ there is no such dependence. In the present work we continue such study.

Basic definitions and auxiliary results

Let $a \in [0, 1)$. Chebyshev – Markov rational fraction with two geometrically distinct real poles can be written as follows:

$$M_{2n}(x) = \cos \mu_{2n}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

$$\mu_{2n}(x) = n \left(\arccos \frac{x+a}{1+ax} + \arccos \frac{x-a}{1-ax} \right).$$

Remark 1. If

$$x = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}}, \quad \theta \in [0, \pi],$$

then the rational fraction (1) can be written in the following form

$$M_{2n} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}} \right) = \cos 2n\theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Using the definition, we obtain directly the following lemma.

Lemma 1. *The function $M_{2n}(x)$ has $2n$ simple zeroes, x_k , $k = 1, 2, \dots, 2n$ on the interval $(-1, 1)$, that are symmetric with respect to the imaginary axis:*

$$-1 < x_{2n} < x_{2n-1} < \dots < x_{n+1} < 0 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < 1;$$

$$x_k = \frac{\cos \theta_k}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k}}, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{4n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2n;$$

$$x_{n+k} = -x_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

For the further research we need the following property of the zeroes of Chebyshev – Markov rational fraction (3).

Lemma 2. *The following inequalities hold:*

$$\frac{1 - a^2 \sin^2 \theta_{k-1}}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} < 9, \quad a \in [0, 1), \quad \theta_k = \frac{2k-1}{4n} \pi, \quad k = 2, 3, \dots, n+1.$$

Proof. Let us consider the functions

$$\varphi_k(u) = \frac{1 - u \sin^2 \theta_{k-1}}{1 - u \sin^2 \theta_k}, \quad u \in [0, 1), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Since

$$\varphi'_k(u) = \frac{\sin^2 \theta_k - \sin^2 \theta_{k-1}}{(1 - u \sin^2 \theta_k)^2} > 0,$$

then

$$\frac{1 - a^2 \sin^2 \theta_{k-1}}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} < \frac{1 - \sin^2 \theta_{k-1}}{1 - \sin^2 \theta_k} = \left(\frac{\cos \theta_{k-1}}{\cos \theta_k} \right)^2.$$

Now,

$$\left(\frac{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2n} \right)}{\cos \theta} \right)' = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2n} \right)}{\cos^2 \theta} > 0, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right),$$

and

$$\left(\frac{\cos \theta_{k-1}}{\cos \theta_k} \right)^2 < \left(\frac{\cos \theta_{n-1}}{\cos \theta_n} \right)^2 = \left(\frac{\sin \left(\frac{3\pi}{4n} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)} \right)^2 < 9.$$

We have $\theta_{n+1} + \theta_n = \pi$ for $k = n + 1$. It means

$$\frac{1 - a^2 \sin^2 \theta_n}{1 - a^2 \sin^2 \theta_{n+1}} = 1.$$

Lemma 2 is proved.

Now for any function $f(x)$, defined on the segment $[-1, 1]$, we construct the interpolating rational Lagrange function

$$L_{2n}(x; f) = \sum_{k=1}^{2n} f(x_k) l_k(x), \quad (4)$$

where

$$l_k(x) = \frac{M_{2n}(x)}{(x - x_k) M'_{2n}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \quad (5)$$

It turns out that in this case the uniform norms of the Lagrange's fundamental polynomials are bounded.

Lemma 3. *The following inequalities hold:*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |l_k(x)| < 6, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Proof. Since

$$M'_{2n}(x) = \sin \mu_{2n}(x) \frac{2n\sqrt{1-a^2}}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

then from (5) it follows that

$$|l_k(x)| = \frac{|M_{2n}(x)|(1-a^2x_k^2)\sqrt{1-x_k^2}}{2n\sqrt{1-a^2}|x-x_k|}. \quad (6)$$

Using lemma 2, it is not difficult to check, that

$$1 - a^2x_k^2 = 1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta_k}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} = \frac{1 - a^2}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k}, \quad (7)$$

$$\sqrt{1-x_k^2} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta_k}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k}} = \frac{\sin \theta_k \sqrt{1-a^2}}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k}. \quad (8)$$

Besides, assuming

$$x = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}}, \quad \theta \in [0, \pi],$$

we obtain

$$\begin{aligned} x - x_k &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}} - \frac{\cos \theta_k}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta_k}} = \frac{\cos \theta \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta_k} - \cos \theta_k \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta} \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta_k}} = \\ &= \frac{\cos^2 \theta (1 - a^2 \sin^2 \theta_k) - \cos^2 \theta_k (1 - a^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta} \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta_k} (\cos \theta \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta_k} + \cos \theta_k \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta})}. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta (1 - a^2 \sin^2 \theta_k) - \cos^2 \theta_k (1 - a^2 \sin^2 \theta) &= \cos^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta (1 - a^2 \cos^2 \theta_k) - \\ &- \cos^2 \theta_k + a^2 \cos^2 \theta_k (1 - a^2 \cos^2 \theta) = (1 - a^2) (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_k). \end{aligned}$$

Therefore,

$$x - x_k = \frac{(1 - a^2)(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_k)}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} (\cos \theta \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} + \cos \theta_k \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta})}. \quad (9)$$

It is clear, that

$$|l_k(x)| = \left| l_k \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}} \right) \right|.$$

Then, plugging (7)–(9) into (6), using remark 1, we obtain

$$|l_k(x)| = \frac{|\cos 2n\theta| \sin \theta_k \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta} |\cos \theta \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} + \cos \theta_k \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}|}{2n(1 - a^2 \sin^2 \theta_k) \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta} |\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_k|}. \quad (10)$$

Now, let $x \in [0, 1]$ and $j, 2 \leq j \leq n$, be such an index that $x \in (x_j, x_{j-1})$. Let us pay attention to the equality (10). If $k \leq j - 1$, then

$$|\cos \theta \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} + \cos \theta_k \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}| < \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} (\cos \theta + \cos \theta_k).$$

Therefore,

$$|l_k(x)| < \frac{|\cos 2n\theta| \sin \theta_k \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}}{2n \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} (\cos \theta_k - \cos \theta)} < \frac{|\cos 2n\theta| \sin \theta_k}{2n (\cos \theta_k - \cos \theta)} \sqrt{\frac{1 - a^2 \sin^2 \theta_j}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k}}.$$

The estimate for the first factor in the right-hand side of the last inequality can be found, for example in [7, p. 528]. For the second factor we use lemma 3. Then

$$\frac{1 - a^2 \sin^2 \theta_j}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} \leq \frac{1 - a^2 \sin^2 \theta_j}{1 - a^2 \sin^2 \theta_{j-1}} < 9.$$

Finally,

$$|l_k(x)| < 9, \quad k \leq j - 1.$$

Then let $j \leq k \leq n$. In this case the factor in the numerator of (10) can be estimated as follows

$$|\cos \theta \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} + \cos \theta_k \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}| < \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta + \cos \theta_k).$$

Thus,

$$|l_k(x)| < \frac{|\cos 2n\theta| \sin \theta_k}{2n (\cos \theta_k - \cos \theta)} \frac{1 - a^2 \sin^2 \theta}{1 - a^2 \sin^2 \theta_k}.$$

It is no difficult to check that the second factor in the right-hand side of the last inequality is not greater than 1 and therefore we obtain

$$|l_k(x)| < 2, \quad j \leq k \leq n.$$

So, we proved lemma when $x \in (x_n, x_1)$. If $x \in [0, x_n] \cup [x_1, 1]$ then in the scheme of the proof of the lemma, there will be obvious changes. Besides, it is clear that

$$\max_{x \in [0, 1]} |l_k(x)| > \max_{x \in [-1, 0]} |l_k(x)|.$$

This concludes the proof.

The main result

According to the definition Lebesgue function of an interpolating process is as follows

$$\Lambda_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} |l_k(x)|,$$

and Lebesgue constant is defined as

$$\Lambda_{2n} = \max_{x \in [-1, 1]} \Lambda_{2n}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Theorem 2. *For the Lebesgue constant of the interpolating rational Lagrange process (4) the following estimate holds*

$$\Lambda_{2n} \leq C_1(1 + \ln n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

where C_1 is a positive constant.

Proof. Here we use modification of the method, applied by S. N. Bernstein to estimate the Lebesgue constant in the polynomial case (see, for example, [7, p. 539]). We are going to check the inequality $\Lambda_{2n}(x) \leq C_1(1 + \ln n)$ for arbitrary $x \in [-1, 1]$. First, it is clear, that if $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots, 2n$, then $\Lambda_{2n}(x_k) = 1$.

Now, let $x \in [0, 1]$. Since the Chebyshev – Markov rational fraction (3) is even,

$$\Lambda_{2n}(x) \leq 2 \sum_{k=1}^n |l_k(x)|.$$

Let $j, j = 1, 2, \dots, n$, be a number such that $x_j < x < x_{j-1}$ (assume that $x_0 = 1$). We represent the sum in the right-hand side of the last equality in the form

$$\Lambda_{2n}(x) \leq 2 \left(S_1(x) + \sum_{k=j-2}^{j+1} |l_k(x)| + S_2(x) \right),$$

where

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{j-3} |l_k(x)|, \quad S_2(x) = \sum_{k=j+2}^n |l_k(x)|.$$

Note that the $S_1(x)$ vanishes for $j = 1, 2, 3$, and the sum $S_2(x)$ vanishes for $j = n - 1, n$. Applying lemma 3 we obtain

$$\Lambda_{2n}(x) \leq 2(S_1(x) + S_2(x) + 24). \quad (11)$$

Let us consider the sum $S_1(x)$. Using definitions of Chebyshev – Markov rational fractions (3) and Lagrange's fundamental polynomials (5), it is easy to see that for $k = 1, 2, \dots, j - 3$

$$|l_k(x)| = \frac{(1 - a^2 x_k^2) \sqrt{1 - x_k^2}}{2n \sqrt{1 - a^2} (x_k - x)}.$$

Assuming $x = \cos \theta$ and applying lemma 2, we obtain

$$|l_k(x)| \leq \frac{\sin \theta_k}{2n(1 - a^2 \sin^2 \theta_k)} \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} + \cos \theta_k \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta})}{\cos^2 \theta_k - \cos^2 \theta}.$$

Given the location of the points θ_k , $k = 1, 2, \dots, j - 3$, the last estimate can be transformed as follows:

$$|l_k(x)| \leq \frac{\sin \theta_k}{2n(1 - a^2 \sin^2 \theta_k)} \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta_k} (\cos \theta + \cos \theta_k)}{\cos^2 \theta_k - \cos^2 \theta} \leq \frac{\sin \theta_k}{2n(\cos \theta_k - \cos \theta)}.$$

Therefore,

$$S_1(x) \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{j-3} \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta}.$$

Then, since the function $\frac{\sin x}{\cos x - \cos \theta}$ increases for $x \in [0, \theta)$,

$$\frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta} \leq \frac{\sin x}{\cos x - \cos \theta}, \quad x \in [\theta_k, \theta_{k+1}].$$

Integrating the last inequality with respect to x from θ_k to θ_{k+1} , we get

$$\frac{\pi}{2n} \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta} \leq \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin x \, dx}{\cos x - \cos \theta}.$$

Then

$$S_1(x) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_{j-2}} \frac{\sin x \, dx}{\cos x - \cos \theta} < \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_{j-2}} \frac{\sin x \, dx}{\cos x - \cos \theta} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_{j-2} - \cos \theta}.$$

Further, we note that

$$1 - \cos \theta \leq 2, \quad \cos \theta_{j-2} - \cos \theta > \cos \theta_{j-2} - \cos \theta_{j-1}.$$

From here,

$$S_1(x) \leq -\frac{1}{\pi} \left(\ln \sin \frac{\theta_{j-2} + \theta_{j-1}}{2} + \ln \sin \frac{\pi}{4n} \right).$$

It remains to note that, $\theta_{j-1} > \theta_{j-2} > \theta_1$ and therefore

$$\ln \sin \frac{\theta_{j-2} + \theta_{j-1}}{2} > \ln \sin \theta_1 = \ln \sin \frac{\pi}{4n}.$$

Finally for the sum $S_1(x)$ we obtain,

$$S_1(x) \leq -\frac{2}{\pi} \ln \sin \frac{\pi}{4n} \leq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{2n} = \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{2 \ln 2}{\pi}.$$

A similar estimate also holds for the sum $S_2(x)$. Plugging the obtained results in the inequality (11), we conclude that

$$\Lambda_{2n}(x) \leq \frac{8}{\pi} \ln n + \frac{8 \ln 2}{\pi} + 48.$$

The case $x \in [-1, 0]$ can be considered in the same way. Theorem 2 is proved.

Numerical examples

The result of theorem 2 shows that in the case of two geometrically distinct real poles the behavior of the Lebesgue constant does not depend on the choice of the parameters $\{a_k\}_{k=0}^n$. In this section we show results of some numerical experiments for calculation of the Lebesgue function and the Lebesgue constant in the considered case of the choice of the parameters as well as some other cases. Numerical experiment was carried out using programming language *Python*, version 3.6, with the help of libraries *NumPy*, *SciPy* and *Matplotlib*.

Two real poles

Let n be even number, $a_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, $a_k = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$. Then the graph of the function $\frac{\Lambda_{2n}(x)}{1 + \ln n}$ for $n = 30$ is presented on the fig. 1 (horizontal axis – values of x , vertical axis – values of the function $\frac{\Lambda_{2n}(x)}{1 + \ln n}$).

Behavior of the Lebesgue constant in this case is described by the fig. 2 (horizontal axis – values of n , vertical axis – values of the ratio $\frac{\Lambda_{2n}}{1 + \ln n}$).

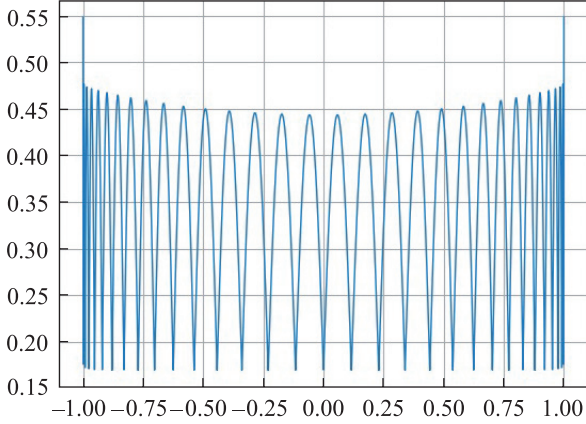


Fig. 1. Graph of $\frac{\Lambda_{2n}(x)}{1 + \ln n}$ for the case of two real poles and $n = 30$

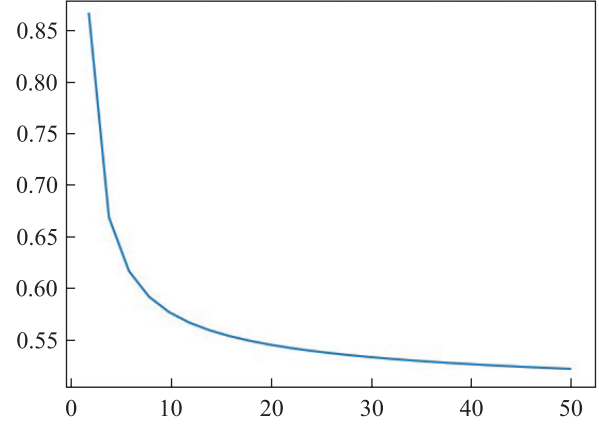


Fig. 2. Lebesgue constant for the case of two real poles

The results of the experiment support the conclusions of theorem 2 and even allow us to make an assumption about the value of the constant in the statement of this theorem.

Also in the experiment we considered many other cases. Here the results of some of them.

Real poles

Let n be even number, $a_0 = 0$, $a_k = e^{-1/n}$, $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, $a_k = -e^{-1/n}$, $k = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$. Then the graph of the function $\frac{\Lambda_{2n}(x)}{1 + \ln n}$ for $n = 30$ is presented on the fig. 3 (axes mean the same as in the subsection «Two real poles»).

Behavior of the Lebesgue constant in this case is described by the fig. 4.

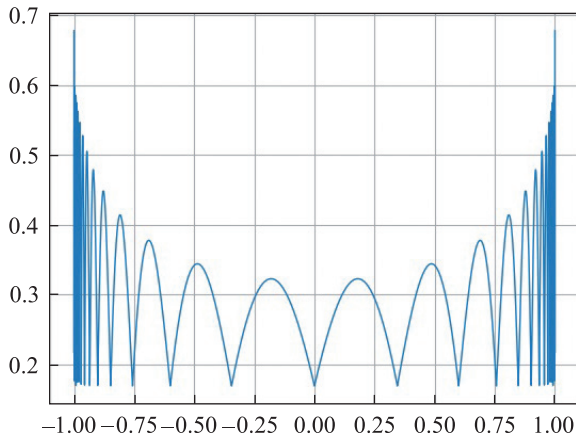


Fig. 3. Graph of $\frac{\Lambda_{2n}(x)}{1 + \ln n}$ for the case of real poles and $n = 30$

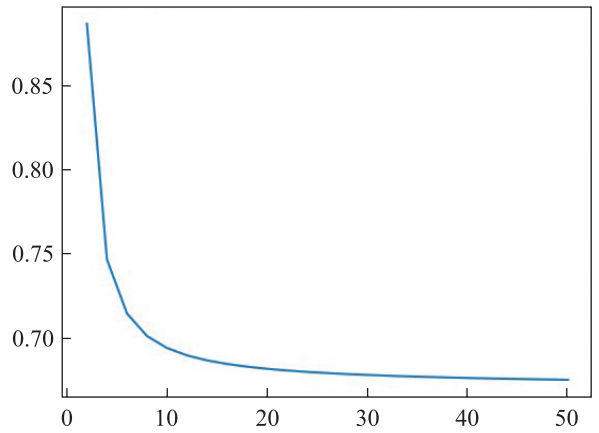


Fig. 4. Lebesgue constant for the case of real poles

Complex conjugate poles

Let n be even number, $a_0 = 0$, $a_k = i e^{-1/\sqrt{n}}$, $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, $a_k = -i e^{-1/\sqrt{n}}$, $k = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$. Then the graph of the function $\frac{\Lambda_{2n}(x)}{1 + \ln n}$ for $n = 30$ is presented on the fig. 5 (axes mean the same as in the subsection «Two real poles»).

Behavior of the Lebesgue constant in this case is described by the fig. 6.

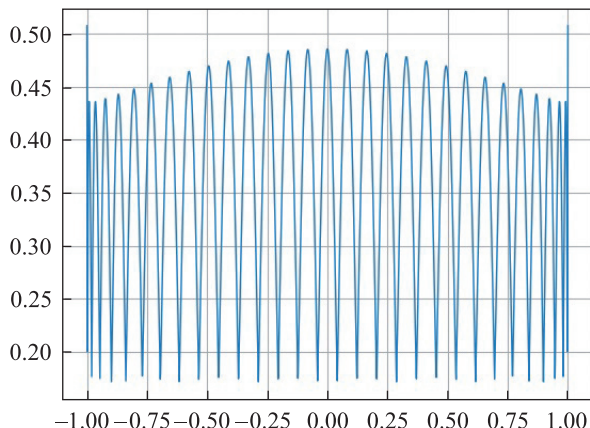


Fig. 5. Graph of $\frac{\Lambda_{2n}(x)}{1 + \ln n}$ for the case of complex conjugate poles and $n = 30$

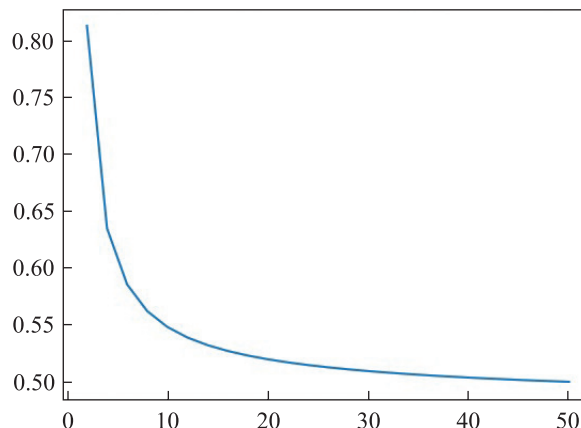


Fig. 6. Lebesgue constant for the case of complex conjugate poles

The results of all conducted experiments show, that the Lebesgue constant grows with logarithmic rate and allow us to make an assumption of independence of the estimation of the Lebesgue constant from the choice of zeroes of Chebyshev – Markov rational cosine fractions.

Библиографические ссылки

1. Привалов АА. *Теория интерполирования функций*. Саратов: Издательство Саратовского университета; 1990. 229 с.
2. Дзядык ВК. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*. Москва: Наука; 1977. 511 с.
3. Русак ВН. Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами. *Доклады Академии наук Белорусской ССР*. 1962;4(9):548–550.
4. Старовойтов АП. О рациональной интерполяции с фиксированными полюсами. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук*. 1983;6:105–106.
5. Ровба ЕА, Дирвук ЕВ. О константе Лебега интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева – Маркова. *Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2015;4:32–38.
6. Ровба ЕА, Козловская НЮ. К вопросу об оценке константы Лебега интерполяционного рационального процесса с узлами Чебышева – Маркова. *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2*. 2016;6(3):6–11.
7. Натансон ИП. *Конструктивная теория функций*. Москва, Ленинград: Гостехиздат; 1949. 688 с.

References

1. Privalov AA. *Teoriya interpolirovaniya funktsii* [Theory of interpolation of functions]. Saratov: Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta; 1990. 229 p. Russian.
2. Dzyadyk VK. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami* [An Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow: Nauka; 1977. 511 p. Russian.
3. Rusak VN. [On interpolation of rational functions with fixed poles]. *Doklady Akademii nauk Belorusskoi SSR*. 1962;4(9):548–550. Russian.
4. Starovoitov AP. [On rational interpolation with fixed poles]. *Izvestiya AN BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1983; 6:105–106. Russian.
5. Rouba YA, Dirvuk YU. [On a Lebesgue constant of interpolation rational Lagrange processes at the Chebyshev – Markov nodes]. *Izvestiya NAN Belarusi. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 2015;4:32–38. Russian.
6. Rouba YA, Kazlouskaya NY. [On a problem of estimation of a Lebesgue constant of interpolation rational processes at the Chebyshev – Markov nodes]. *Vesnik Hrodzenskaha dzharzhavnaha universiteta imia Ianki Kupaly. Seriya 2*. 2016;6(3):6–11. Russian.
7. Natanson IP. *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Constructive function theory]. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat; 1949. 688 p. Russian.

Received by editorial board 28.06.2018.

УДК 004.6

СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ G -ОРБИТ ОШИБОК В РЕВЕРСИВНЫХ КОДАХ

А. В. КУШНЕРОВ¹⁾, В. А. ЛИПНИЦКИЙ^{1), 2)}

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Военная академия Республики Беларусь, пр. Независимости, 220, 220057, г. Минск, Беларусь

Впервые описана двухступенчатая процедура полиномиально-норменной коррекции ошибок реверсивными помехоустойчивыми кодами, которые задаются проверочной матрицей $H_R = (\beta^i, \beta^{-i})^T$, $0 \leq i \leq n-1$, $\beta = \alpha^{\frac{2^m-1}{n}}$, где α – примитивный элемент поля $GF(2^m)$; n – длина кода. Такой подход позволяет существенно ускорить процесс обнаружения и исправления ошибок. Также представлен алгоритм нахождения и исправления ошибок в зашумленном сообщении. На примере реверсивного кода C_R длиной 89 с минимальным расстоянием 7 показана процедура исправления конкретных ошибок.

Ключевые слова: линейные помехоустойчивые коды; минимальное расстояние кода; реверсивные коды; БЧХ-коды; синдром ошибок; норменный метод декодирования.

Образец цитирования:

Кушнеров АВ, Липницкий ВА. Свойства и применение полиномиальных инвариантов G -орбит ошибок в реверсивных кодах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:21–28.

For citation:

Kushnerov AV, Lipnitski VA. Properties and applications of G -orbits polynomial invariants of errors in reverse codes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:21–28. Russian.

Авторы:

Александр Викторович Кушнеров – аспирант кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета. Научный руководитель – В. А. Липницкий.

Валерий Антонович Липницкий – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей математики²⁾, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета¹⁾.

Authors:

Alexander V. Kushnerov, postgraduate student at the department of differential equations and system analyses, faculty of mechanics and mathematics.

al.v.kushnerov@gmail.com

Valery A. Lipnitski, doctor of science (engineering), full professor; head of the department of higher mathematics^b and professor at the department of differential equations and systems analysis, faculty of mechanics and mathematics^a.

valipnitski@yandex.by

PROPERTIES AND APPLICATIONS OF G-ORBITS POLYNOMIAL INVARIANTS OF ERRORS IN REVERSE CODES

A. V. KUSHNEROV^a, V. A. LIPNITSKI^{a, b}

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bMilitary Academy of the Republic of Belarus, 220 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220057, Belarus

Corresponding author: A. V. Kushnerov (al.v.kushnerov@gmail.com)

In this paper is described a two-step procedure for polynomial-norm error correction with reverse error correcting codes. Such codes of length n traditionally are defined by check matrix $H_R = (\beta^i, \beta^{-i})^T$, $0 \leq i \leq n-1$, $\beta = \alpha^{\frac{2^m-1}{n}}$ and α is primitive element of $GF(2^m)$. Also in paper you can find a description of error correction algorithm and an example based on reverse code of length 89.

Key words: error correcting codes; code minimal distance; reverse codes; BCH codes; norm method of error correction.

1. Введение

Реверсивные коды примыкают к семейству БЧХ-кодов с конструктивным расстоянием 5 [1]. С 1990-х гг. проводятся систематические исследования класса реверсивных кодов, сначала примитивных, лексикографически упорядоченных, а также циклических [2, гл. 6; 3; 4], а затем и непримитивных [5; 6]. Установлены некоторые их общие свойства, в диапазоне длин от 7 до 507 найдены случаи, когда они совпадают с кодами Хемминга, БЧХ-кодами, а также когда минимальное расстояние непримитивных реверсивных кодов превышает конструктивное.

В данной работе развиваются исследования, начатые в [6]. Для перспективных непримитивных реверсивных кодов C_R (минимальное расстояние которых $d > 5$), следуя [7], вводятся полиномиальные инварианты G -орбит ошибок относительно группы G циклических и циклотомических автоморфизмов кода C_R , разрабатываются полиномиально-норменные методы коррекции ошибок весом 1–3 этими кодами.

2. Необходимые сведения о реверсивных кодах

Двоичный реверсивный код C_R определен над полем Галуа $GF(2^m)$ из 2^m элементов ($m > 2$), имеет нечетную длину n , являющуюся делителем числа $2^m - 1$, а также размерность $k = n - 2m$. Здесь следует помнить о минимальности m : для всех натуральных значений $\mu < m$ величина $2^\mu - 1$ не делится на n . Код C_R однозначно задается своей проверочной матрицей

$$H_R = \begin{pmatrix} \beta^0 & \beta^1 & \beta^2 & \dots & \beta^{n-1} \\ \beta^0 & \beta^{-1} & \beta^{-2} & \dots & \beta^{1-n} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$0 \leq i \leq n-1$, $2m < n$, $\beta = \alpha^z$ для примитивного элемента α поля Галуа $GF(2^m)$, $z = \frac{2^m-1}{n}$. При $n = 2^m - 1$ величина $\beta = \alpha$, и код C_R называется примитивным. В противном случае код называется непримитивным [1; 2].

Коды с проверочной матрицей (1), как и БЧХ-коды с проверочной матрицей $H_{BCH} = (\beta^i, \beta^{3i})^T$, создавались в расчете на исправление двойных ошибок, и потому их называют кодами с конструктивным расстоянием 5. У примитивных БЧХ-кодов эти расчеты действительно подтвердились [1, гл. 7]. Что же касается примитивных реверсивных кодов, то при четных значениях m (тогда $n = 2^m - 1$ делится на 3) они имеют минимальное расстояние $d = 3$, а при нечетных m (тогда $n = 2^m - 1$ не делится на 3) действительно имеют $d = 5$ [1; 6].

3. Проблема коррекции трехкратных ошибок реверсивными кодами C_R^+

Потенциальная возможность обнаружения и исправления трехкратной ошибки в коде C_R с минимальным расстоянием 7 представляет собой реальную проблему, не решаемую стандартными синдромными методами. Действительно, рассмотрим w – сообщение, принятое в некоторой информационно-коммуникационной системе (ИКС) с двоичным кодом C_R над полем $GF(2^m)$ с проверочной

матрицей H_R . Тогда синдром зашумленного сообщения представим в виде $S(w) = H_R w^T = (s_1, s_2)$, где s_1, s_2 – элементы поля $GF(2^m)$; $w = c + e$ для передаваемого кодового слова c и вектора-ошибки e . По фундаментальному свойству проверочной матрицы кода $H_R c^T = 0$, поэтому $S(w) = S(e)$, т. е. зависит только от вектора-ошибки e . Отметим также, что все синдромы ошибок корректируемой совокупности попарно различны. Названные обстоятельства являются основой всех синдромных методов коррекции ошибок. Для определения трех ошибочных позиций вектора-ошибки весом 3 необходимо отыскать решение системы из двух уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = s_1, \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = s_2 \end{cases}$$

относительно переменных x, y, z . Очевидно, что это решение не может быть однозначным в силу неопределенности системы.

Альтернативным методом коррекции таких ошибок является норменный.

4. Основы теории норм синдромов для непримитивных реверсивных кодов

В указанной теории базовым является понятие нормы синдрома. Пусть ИКС, функционирующая на основе двоичного реверсивного кода C_R длиной n над полем $GF(2^m)$, приняла сообщение w с синдромом $S(w) = H_R w^T = (s_1, s_2) \neq 0$. Согласно [2] нормой синдрома $S(w)$ в коде C_R называется элемент поля $GF(2^m)$, который вычисляется через компоненты синдрома по формуле $N(S(w)) = s_1 s_2$.

Главная задача декодирования сообщения – найти вектор ошибки, приобретенной в процессе его передачи. Теория автоморфизмов кодов позволяет разбить множество исправляемых ошибок на непересекающиеся классы эквивалентности, называемые Γ -орбитами. Циклические коды выделяются из класса линейных тем, что σ – оператор циклического сдвига координат векторов вправо на одну позицию по циклу – является автоморфизмом этих кодов. Коды C_R с проверочной матрицей (1) относятся к классу циклических [1–4]. Через Γ обозначим циклическую подгруппу, порожденную автоморфизмом σ в группе $\text{Aut}(C_R)$. Это коммутативная группа порядка n . Два вектора e_1, e_2 из пространства векторов-ошибок E_n называют эквивалентными, если выполнено соотношение $e_1 = \sigma^k(e_2)$. Это отношение эквивалентности разбивает все пространство возможных ошибок V_n над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на непересекающиеся классы, называемые Γ -орбитами (детали в [2–4]).

Поскольку длина n у кодов C_R нечетна и при условии $d > 5$ не делится на 3 (см. разд. 2), то все ошибки весом 1–3 в этих кодах делятся на полные Γ -орбиты, содержащие по n векторов-ошибок в каждой. Каждая Γ -орбита J таких ошибок однозначно определяется любым своим представителем e , циклическим сдвигом координат которого могут быть получены все n ошибок Γ -орбиты:

$$J = \{e, \sigma(e), \dots, \sigma^{n-1}(e)\} = \langle e \rangle_\Gamma = \langle e \rangle.$$

Ясно, что $\sigma^n(e) = e$.

Как известно [2; 3], если $S(w) = (s_1, s_2)$, то

$$S(\sigma(w)) = (\beta s_1, \beta^{-1} s_2). \quad (2)$$

Благодаря свойству, выражаемому формулой (2), спектр синдромов, т. е. множество всех различных синдромов векторов-ошибок каждой Γ -орбиты J , равномошен самой Γ -орбите и взаимно однозначно соответствует ее циклической структуре: $\sigma^k(e) = e^*$ тогда и только тогда, когда показатели компонент синдромов $S(e) = (s_1, s_2)$ и $S(e^*) = (s_1^*, s_2^*)$ связаны равенствами

$$\deg s_1^* = \deg s_1 + kz, \quad \deg s_2^* = \deg s_2 - kz. \quad (3)$$

Другими словами, два вектора-ошибки принадлежат одной Γ -орбите тогда и только тогда, когда разность показателей одноименных компонент их синдромов делится на z .

Таким образом, вектор-ошибка по синдромам с помощью формул (3) однозначно определяется внутри каждой Γ -орбиты. Более того, каждый вектор-ошибка принадлежит лишь одной Γ -орбите, следовательно, разность показателей синдромов будет делиться на z в единственном случае, когда эти векторы лежат в одной Γ -орбите.

Из формулы (2) следует, что норма синдрома $N(S(w)) = N(S(\sigma(w))) = N$ постоянна на всех векторах каждой отдельно взятой Γ -орбиты, и потому называется нормой самой Γ -орбиты. Как у примитивных, так и у непримитивных кодов C_R нормы Γ -орбит ошибок весом 1, 2 попарно различны и отличны от 0, что легко проверяется повторением доказательства теоремы 4.8 из [3]. Что же касается норм Γ -орбит векторов-ошибок весом 3 у непримитивных кодов C_R^+ , то здесь возможны отдельные совпадения. Не доказано (в отличие от двойных ошибок) отсутствие Γ -орбит тройных ошибок с нормой, равной 1; среди них вполне могут найтись Γ -орбиты, с нормой 0 или совпадающей с нормой какой-либо Γ -орбиты двойных ошибок, с совпадающими между собой нормами.

Во-первых, число Γ -орбит декодируемой совокупности K векторов-ошибок для реверсивного кода C_R длиной n с минимальным расстоянием 7 равно $\frac{1}{n}(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3) = \frac{n^2 + 5}{6}$, что вполне может оказаться большим 2^m – количества возможных значений норм синдромов. У всех перечисленных выше кодов C_R^+ эта величина не превосходит 2^m . Во-вторых, имеется более глубокая, внутренняя причина возможности таких совпадений. У примитивного кода C_R спектр синдромов $S(J)$ каждой Γ -орбиты J в определенном смысле полный. А именно, если для вектора $\bar{e} \in J$ синдром $S(\bar{e}) = (s_1, s_2)$ таков, что $s_1 \neq 0$, то первые компоненты спектра $S(J)$ составляют в силу формулы (2) всю мультипликативную группу $GF(2^m)^*$ порядка $2^m - 1$. Аналогичная ситуация и для второй компоненты синдрома, если $s_2 \neq 0$. У непримитивного же кода C_R при $s_1 \neq 0$ первые компоненты спектра $S(J)$ составляют в силу формулы (2) смежный класс в группе $GF(2^m)^*$, порожденный элементом s_1 по циклической подгруппе $\langle \beta \rangle$ порядка $n = \frac{2^m - 1}{z}$. Вполне может найтись вектор ошибок $\bar{e}^*$ с синдромом $S(\bar{e}^*) = (\alpha^i s_1, \alpha^{-i} s_2)$ для некоторого целого i , $1 \leq i < z$. Несложно видеть, что нормы Γ -орбит J и $\langle \bar{e}^* \rangle_\Gamma$ совпадают, а спектры синдромов не пересекаются.

Таким образом, у непримитивных реверсивных кодов C_R может существовать до z попарно различных Γ -орбит с одинаковыми нормами.

Пример 1. Реверсивный код C_R^+ длиной 89 определен над полем $GF(2^{11})$. Он способен декодировать 117 569 векторов-ошибок весом 1–3, которые группируются в 1321 Γ -орбиту: 1 Γ -орбита ошибок весом 1 и нормой 1, 44 полные Γ -орбиты ошибок весом 2 с попарно различными нормами, отличными от 0 и 1, и 1276 полных Γ -орбит тройных ошибок. Среди последних 33 Γ -орбиты имеют уникальные нормы, 924 Γ -орбиты – по 2 одинаковые нормы, 33 Γ -орбиты – по 3 одинаковые нормы, 244 Γ -орбиты – по 4 одинаковые нормы, а также 22 Γ -орбиты тройных ошибок имеют одинаковые нормы с 11 Γ -орбитами двойных ошибок. Таким образом, 1321 Γ -орбита распределяются на 614 групп по значениям своих норм, что по-прежнему составляет достаточно внушительное количество.

5. Норменный метод коррекции ошибок реверсивными кодами C_R^+

Метод заключается в следующем. Составляют список образующих e_i всех $\frac{n^2 + 5}{6}$ Γ -орбит векторов-ошибок совокупности K , синдромов образующих $S(e_i)$ и их норм синдромов $N_i = N(S(e_i))$. Естественно, Γ -орбиты сортируют в группы с одинаковыми нормами. Для принятого сообщения w декодер ИКС в обязательном порядке вычисляет его синдром $S(w)$. Если $S(w) \neq 0$, находят $N = N(S(w))$. Эту величину сравнивают со списком попарно различных норм N_i . Пусть $N = N_k$. Синдром $S(w) = (s_1, s_2)$ сравнивают с синдромами образующих Γ -орбит с нормой N_k . В силу формул (3) найдется только одна орбита $\langle e_k \rangle$ с образующей e_k и синдромом $S(e_k) = (s_1^k, s_2^k)$ такая, что разность показателей $\deg(s_1) - \deg(s_1^k)$ нацело делится на z . Если соответствующее частное равно τ , то искомый вектор-ошибка e в сообщении w вычисляется по формуле $e = \sigma^{\tau(\text{mod } n)}(e_k)$.

Норменный метод достаточно успешно решает задачу нахождения вектора-ошибки. Однако число Γ -орбит декодируемой совокупности для реверсивного кода C_R длиной n с минимальным расстоянием 7,

равное $\frac{n^2 + 5}{6}$, будет быстро увеличиваться с ростом n , что, естественно, затрудняет задачи эффективного поиска нужной информации в быстро растущих объемах хранения, замедляет работу декодера.

Определенного ускорения процесса декодирования можно добиться норменным методом с использованием полиномиальных инвариантов [7].

6. G-орбиты ошибок и их полиномиальные инварианты

Определим на множестве $T = \{1, 2, \dots, n\}$, где n – нечетно, преобразование φ по правилу

$$\varphi(i) = \begin{cases} 2i - 1, & 2i - 1 \leq n, \\ 2i - 1 - n, & 2i - 1 > n. \end{cases}$$

Для нечетных n оператор φ является взаимно однозначным на множестве T . Применение данного оператора к вектору-ошибке подразумевает перестановку его координат по правилу φ . Ее называют циклотомической перестановкой на пространстве ошибок E_n и обычно по-прежнему обозначают через φ . Повторяя почти дословно доказательство предложения 3.17 из [3], можно убедиться, что она является автоморфизмом любого циклического кода C_R с проверочной матрицей (1), причем порядка m . Автоморфизмы σ и φ образуют некоммутативную группу G порядка mn [1; 2].

Два вектора $\bar{f}, \bar{g}$ из пространства ошибок E_n называются G -эквивалентными, если найдется такая подстановка $\tau = \varphi^i \sigma^j$, что $\bar{g} = \tau(\bar{f})$. Совокупность всех попарно G -эквивалентных векторов из пространства E_n называют G -орбитой. Для реверсивного кода C_R , определенного над полем $GF(2^m)$, любая G -орбита J_G имеет четкую структуру и состоит из всех векторов Γ -орбит, определяемых следующим соотношением:

$$J_G = \{ \langle \bar{e} \rangle, \varphi \langle \bar{e} \rangle, \varphi^2 \langle \bar{e} \rangle, \dots, \varphi^{\mu-1} \langle \bar{e} \rangle \}, \quad (4)$$

где $\langle \bar{e} \rangle$ – Γ -орбита, порожденная вектором-ошибкой e из пространства ошибок E_n ; $\mu = m$ или μ делит m . Формула (4) определяет всю G -орбиту одним вектором-ошибкой, который называют ее образующим, и потому используют обозначение $J_G = \langle e \rangle_G$ [2].

Циклотомическая подстановка замечательна следующими свойствами: если $S(\bar{e}) = (s_1, s_2)$, то

$$S(\varphi(\bar{e})) = (s_1^2, s_2^2), \quad (N(S(\bar{e})))^2 = N(S(\varphi(\bar{e}))). \quad (5)$$

Пусть $N_1 = N(\langle \bar{e} \rangle)$ – норма Γ -орбиты $\langle e \rangle$, тогда нормы Γ -орбит G -орбиты $\langle \bar{e} \rangle_G$ имеют спектр $N(\langle e \rangle_G) = \{N_1, N_1^2, N_1^4, \dots, N_1^{2^{\mu-1}}\}$ в силу формул (4), (5). Возведение нормы в квадрат соответствует применению автоморфизма Фробениуса к элементу N_1 поля $GF(2^m)$. Построенный список норм Γ -орбит, составляющих G -орбиту $\langle e \rangle_G$, есть множество всех сопряженных друг другу под действием группы Галуа элементов поля. Такие элементы составляют полный список корней неприводимого полинома над минимальным подполем $GF(2)$ [5]. Этот полином называют минимальным полиномом элемента N_1 (а также любого элемента поля, сопряженного с ним) и обозначают $\text{Irr}(N_1, x)$. Из теоремы Безу о корнях полиномов следует, что не существует иного неприводимого полинома, содержащего хотя бы один из корней полинома $\text{Irr}(N_1, x)$. Отсюда получаем следующее определение.

Определение. Единственный неприводимый полином

$$\text{Irr}(N_1, x) = (x - N_1)(x - N_1^2) \cdots (x - N_1^{2^{\mu-1}}), \quad (6)$$

множество корней которого совпадает с множеством норм в коде C_R Γ -орбит, составляющих данную G -орбиту, называется полиномиальным инвариантом этой G -орбиты и обозначается $p(\langle e \rangle_G, x)$ или $p(N_1, x)$ [6].

Важно отметить, что степень полинома $p(\langle e \rangle_G, x)$ совпадает с количеством Γ -орбит в соответствующей G -орбите. В частности, для простых значений m степень этого полинома равна 1 или, что чаще всего, m .

Конечно, $p(\langle e \rangle_G, x)$ должен храниться не в форме (6), а в стандартной полиномиальной форме $x^\mu + c_{\mu-1}x^{\mu-1} + \dots + c_1x + c_0$ с коэффициентами из $GF(2)$ или вовсе в виде двоичного вектора

$(1, c_{\mu-1}, \dots, c_1, c_0)$. Для этого следует раскрыть скобки в формуле (6) и привести подобные. Полученные в результате коэффициенты c_i , $0 \leq i < \mu$, будучи симметрическими полиномами от корней полинома в силу теоремы Виета, должны быть инвариантными относительно автоморфизма Фробениуса поля Галуа $GF(2^m)$ и, следовательно, принадлежать его минимальному подполю $GF(2)$.

Каждый элемент γ поля $GF(2^m)$ является алгебраическим над подполем $GF(2)$, т. е. есть корень некоторого единственного неприводимого полинома $\text{Irr}(\gamma, x) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$. Если γ не принадлежит никакому подполю поля $GF(2^m)$, то $\deg \text{Irr}(\gamma, x) = m$, в противном случае $\deg \text{Irr}(\gamma, x) = \mu$ – делитель числа m (детали в [8] или [9]). Чтобы конкретная работа с полиномиальными инвариантами не создавала проблем со временем, не замедляла работу декодера, следует заранее, при построении конечного поля $GF(2^m)$, для каждого элемента γ найти его полином $\text{Irr}(\gamma, x) \in GF(2)[x]$ и хранить эту пару в памяти в единой связке: $\gamma \leftrightarrow \text{Irr}(\gamma, x)$.

В непримитивных кодах, как и в случае Γ -орбит, один полиномиальный инвариант могут иметь до z различных G -орбит. Одиночные ошибки образуют одну G -орбиту из одной Γ -орбиты с полиномиальным инвариантом $x+1$. Двойные ошибки делятся, как правило, на полные G -орбиты по m Γ -орбит в каждой, но если число Γ -орбит $\frac{1}{n}C_n^2 = \frac{n-1}{2}$ не делится на m , то среди G -орбит обязательно найдутся неполные, но содержащие более одной Γ -орбиты. У G -орбит тройных ошибок трудно указать какие-либо общие закономерности.

Пример 2. Над полем $GF(2)$ имеется 186 различных неприводимых полиномов 11-й степени, по которым распределяются в качестве корней 2046 элементов поля $GF(2^{11})$ (два оставшихся принадлежат подполю $GF(2)$). В развитие примера 1 заметим, что в коде C_R^+ длиной 89 векторы двойных ошибок образуют 4 полные G -орбиты с уникальными полиномиальными инвариантами:

Полином	Образующая	Синдром образующей	Норма образующей
$1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{11}$	(1, 4)	$(\alpha^{1534}, \alpha^{1465})$	α^{952}
$1 + x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^{10} + x^{11}$	(1, 2)	$(\alpha^{527}, \alpha^{504})$	α^{1031}
$1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{11}$	(1, 6)	$(\alpha^{397}, \alpha^{282})$	α^{679}
$1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{10} + x^{11}$	(1, 14)	$(\alpha^{1041}, \alpha^{742})$	α^{1783}

В свою очередь, 1276 Γ -орбит тройных ошибок делятся на 116 полных G -орбит, которым соответствуют 53 полиномиальных инварианта. Из них 3 инварианта соответствуют в точности одной G -орбите, 43 полинома – сразу двум G -орбитам, 1 полином – трем G -орбитам и 6 – четырём. Отметим также, что два инвариантных полинома для тройных ошибок совпадают с таковым для двойных.

7. Двухступенчатая процедура полиномиально-норменной коррекции ошибок реверсивными кодами C_R^+

Для работы декодера на основе полиномиальных инвариантов необходимо хранить в памяти ряд списков: $PG = \{p(<e_1>_G, x), p(<e_2>_G, x), \dots, p(<e_s>_G, x)\}$ – список попарно различных полиномиальных инвариантов всех G -орбит векторов-ошибок весом 2 и 3; для каждого целого i ($1 \leq i \leq s$) – список $N_i\Gamma$ из μ ($\mu = m$ или μ – делитель m) попарно различных норм N_{ij} ($1 \leq j \leq \mu$) Γ -орбит с полиномиальным инвариантом $p(<e_i>_G, x)$; для каждой нормы N_{ij} – список $N_{ij}OS = \{<\bar{e}_{ij1}>, S(\bar{e}_{ij1}); <\bar{e}_{ij2}>, S(\bar{e}_{ij2}); \dots; <\bar{e}_{ij\zeta}>, S(\bar{e}_{ij\zeta})\}$ образующих Γ -орбит и синдромов образующих с данной нормой N_{ij} .

Представим алгоритм исправления ошибки кодом C_R с проверочной матрицей (1). Пусть принято некоторое сообщение l . Вычисляем его синдром ошибки $HI^T = S(l)$. Если $S(l) = 0$, то сообщение не содержит ошибок. Алгоритм заканчивает работу. В противном случае переходим на выполнение следующих ниже шагов.

1. Пусть $S(l) \neq 0$. Тогда находим норму синдрома $S(l) = (s_1, s_2)$ по формуле $N_0 = N(S(l)) = s_1 s_2$. Если $N_0 = 1$ и $s_1 = s_2^{-1} = \beta^{t-1}$, то ошибка e_l однократная на t -й позиции и можно переходить к шагу 6.

2. Иначе по отмеченной выше связке элементов поля с их неприводимыми полиномами $\gamma \leftrightarrow \text{Irr}(\gamma, x)$ определяем полиномиальный инвариант $p(N_0, x)$ и сравниваем его со списком PG . Пусть $p(N_0, x) = p(\langle e_i \rangle_G, x)$ для некоторого целого i ($1 \leq i \leq s$). Это означает, что норма N_0 принадлежит короткому списку $N_i\Gamma$.

3. Сравниваем N_0 с этим списком, находим $N_0 = N_{j_0} \in N_i \Gamma$. Следовательно, искомая вектор-ошибка находится среди ζ Γ -орбит с нормой N_{j_0} .

4. Для каждого целого k ($1 \leq k \leq \varsigma$) и вектора $\bar{e}_{ij_0k}$ из списка $N_{ij_0} OS = \{ \langle \bar{e}_{ij_01} \rangle, S(\bar{e}_{ij_01}) = (s_1^1, s_2^1); \langle \bar{e}_{ij_02} \rangle, S(\bar{e}_{ij_02}) = (s_1^2, s_2^2); \dots; \langle \bar{e}_{ij_0\varsigma} \rangle, S(\bar{e}_{ij_0\varsigma}) = (s_1^\varsigma, s_2^\varsigma) \}$ вычисляем величину $\tau_k = \frac{\deg(s_1) - \deg(s_1^k)}{z}$, если $s_1 \neq 0$, и величину $\tau'_k = \frac{\deg(s_2^k) - \deg(s_2)}{z}$, если $s_1 = 0$. Фиксируем то единственное, в силу сказанного выше, значение $k = \lambda$, для которого τ_λ или τ'_λ является целым числом.

5. Вычисляем искомую вектор-ошибку $e_l = \sigma^{\tau(\bmod n)}(\bar{e}_{ij_0\lambda})$ в сообщении l .

6. Получаем верное сообщение $c = l + e_i$.

Пример 3. Работу декодера проследим на примере реверсивного кода длиной 89 над полем $GF(2^{11})$. Декодированный код содержит в себе, помимо проверочной матрицы, список PG из 57 полиномов и список SNO Г-орбит, отсортированный по G -орбитам. Всего пространство ошибок содержит 121 G -орбиту: 4 орбиты двукратных ошибок, 116 – ошибок весом 3, а также 1 орбиту однократных ошибок.

Пусть ИКС приняла следующее сообщение:

[illegible]

Находим синдром ошибки для сообщения $S(l) = Hl = (\alpha^{1687}, \alpha^{1835})$.

1. Вычисляем норму синдрома $N_0 = s_1 s_2 = \alpha^{1475}$. По связке элемент поля – полином определяем $p(N_0, x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{11}$.

2. В списке PG находим полином, равный найденному $p(N_0, x)$, $p(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{11}$.

Сразу получаем и список норм, соответствующий инвариантному полиному: $N_i \Gamma = \{\alpha^{952}, \alpha^{476}, \alpha^{238}, \alpha^{119}, \alpha^{1083}, \alpha^{1565}, \alpha^{1806}, \alpha^{903}, \alpha^{1475}, \alpha^{1761}, \alpha^{1904}\}$.

3. В списке $N_i\Gamma$ легко отыщем нашу норму, а значит, искомая ошибка находится среди элементов Γ -орбит с нормой N_0 . Переходим к списку $N_{j_0}OS = \{ \langle (1, 25) \rangle, \{ \alpha^{2037}, \alpha^{1485} \}; \langle (1, 2, 28) \rangle, \{ \alpha^{606}, \alpha^{869} \}; \langle (1, 27, 28) \rangle, \{ \alpha^{1490}, \alpha^{2032} \} \}$. Отметим, что данной норме соответствуют Γ -орбиты двойных и тройных ошибок одновременно.

4. Находим $\tau_k = \frac{\deg(s_1) - \deg(s_1^k)}{z}$, где $z = \frac{2^{11} - 1}{89} = 23$. Таким образом, имеем

$$\tau_1 = \frac{1687 - 2037}{23} = \frac{-350}{23}, \tau_2 = \frac{1687 - 606}{23} = 47, \tau_3 = \frac{1687 - 1490}{23} = \frac{197}{23}.$$

Фиксируем $\tau_2 = 47$, так как оно является целым числом.

5. Вычисляем искомым вектор-ошибку $e_l = \sigma^{47(\bmod n)}(1, 2, 28) = (48, 49, 75)$. Выпишем вектор e_l в полной форме:

$$e_i = (\underbrace{000}_{\text{36 zeros}}11\underbrace{000000000000000000000000000000000000}_{\text{24 zeros}}1\underbrace{000000000000000000000000000000000000}_{\text{24 zeros}}).$$

6. Получаем верное сообщение $c = l + e_j$:

[illegible]

8. Заключение

В работе развита теория полиномиальных инвариантов G -орбит ошибок на класс реверсивных кодов, как правило непримитивных, корректирующие возможности которых выходят за рамки конструктивных возможностей. Свойства этих инвариантов позволяют предложить усеченный двухступенчатый полиномиально-норменный метод декодирования ошибок реверсивными кодами. Классические синдромные методы коррекции ошибок так или иначе преодолевают полный перебор списка исправляемых ошибок, что неизбежно приводит к «проблеме селектора». Норменные методы на порядок сокращают этот перебор, ибо ему подвергаются нормы G -орбит декодируемых ошибок (их инварианты). Когда идентифицирована G -орбита, содержащая искомую ошибку, дальнейший ее поиск осуществляется детерминированными вычислениями с синдромами. Полиномиально-норменный метод выполняет еще более усеченный поиск в списке полиномиальных инвариантов G -орбит ошибок корректируемой совокупности с последующим минимальным поиском нужной G -орбиты в узком списке G -орбит с найденным полиномиальным инвариантом. Предлагаемый метод коррекции ошибок, несомненно, должен найти свои приложения в практике.

Библиографические ссылки

1. Мак-Вильямс ФДж, Слоэн Н. *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Москва: Связь; 1979.
2. Конопелько ВК, Липницкий ВА. *Теория норм синдромов и перестановочное декодирование помехоустойчивых кодов*. Москва: Едиториал УРСС; 2004.
3. Конопелько ВК, Липницкий ВА. *Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения*. Минск: Издательский центр БГУ; 2007.
4. Липницкий ВА. *Теория норм синдромов*. Минск: БГУИР; 2010.
5. Липницкий ВА, Кушнеров АВ. Некоторые свойства реверсивных помехоустойчивых кодов. В: *Технологии информатизации и управления. Выпуск 3. В 2 книгах. Книга 1*. Кадан АМ, Свирский ЕА, редакторы. Минск: РИВШ; 2017. с. 47–54.
6. Липницкий ВА, Кушнеров АВ. Свойства и декодирование реверсивных кодов с конструктивным расстоянием 5. *Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В*. 2016;2:30–44.
7. Липницкий ВА, Середа ЕВ. Полиномиальные инварианты G -орбит ошибок БЧХ-кодов и их применение. *Доклады БГУИР*. 2017;5(107):62–69.
8. Липницкий ВА. *Современная прикладная алгебра. Математические основы защиты информации от помех и несанкционированного доступа*. Минск: БГУИР; 2005. 88 с.
9. Лиддл Р, Нидеррайтер Г. *Конечные поля*. Москва: Мир; 1988.

References

1. MacWilliams FJ, Sloane N. *Teoriya kodov, ispravlyayushchikh oshibki* [The Theory of Error-Correcting Codes]. Moscow: Svyaz; 1979. Russian.
2. Konopel'ko VK, Lipnitskii VA. *Teoriya norm sindromov i perestanovochnoe dekodirovanie pomekhoustoichivyykh kodov* [Theory of syndrome norms and permutation decoding of error-correcting codes]. Moscow: Editorial URSS; 2004. Russian.
3. Konopel'ko VK, Lipnitskii VA. *Normennoe dekodirovanie pomekhoustoichivyykh kodov i algebraicheskie uravneniya* [Norm decoding of error-correcting codes and algebraic equations]. Minsk: Izdatel'skii tsentr BGU; 2007. Russian.
4. Lipnitskii VA. *Teoriya norm sindromov* [Theory of syndrome norms]. Minsk: BGUIR; 2010. Russian.
5. Lipnitskii VA, Kushnerov AV. [Some properties of reverse error-correcting codes]. In: *Tekhnologii informatizatsii i upravleniya. Vypusk 3. V 2 knigakh. Kniga 1*. Kadan AM, Svirskii EA, editors. Minsk: RIVSh; 2017. p. 47–54. Russian.
6. Lipnitskii VA, Kushnerov AV. [Properties and decoding of reverse codes with a code distance of 5]. *Vesnik Magilevskaya dzharzhavnaya vniwersitjeta imja A. A. Kuljashova. Seriya V*. 2016;2:30–44. Russian.
7. Lipnitskii VA, Sereda EV. [Polynomial invariants of G -orbits of BCH-code errors and their application]. *Doklady BGUIR*. 2017; 5(107):62–69. Russian.
8. Lipnitskii VA. *Sovremennaya prikladnaya algebra. Matematicheskie osnovy zashchity informatsii ot pomekh i nesanksionirovannogo dostupa* [Modern applied algebra. Mathematical foundations of information protection from interference and unauthorized access]. Minsk: BGUIR; 2005. 88 p. Russian.
9. Liddle R, Niederreiter G. *Introduction to finite fields and their applications*. New York: Cambridge University Press; 1986. Russian edition: *Konechnye polya*. Moscow: Mir; 1988.

Статья поступила в редколлегию 23.03.2018.
Received by editorial board 23.03.2018.

ЛОКАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ФИТТИНГА И ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Т. Б. КАРАУЛОВА¹⁾

¹⁾Витебский государственный университет им. П. М. Машерова,
Московский пр., 33, 210038, г. Витебск, Беларусь

Произведением $\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}$ множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ называют множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$. Пусть P – множество всех простых чисел, $\emptyset \neq \pi \subseteq P$, $\pi' = P \setminus \pi$ и $\mathfrak{S}_{\pi'}$ – класс всех π' -групп. Пусть также $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^{\pi}$ – класс всех разрешимых групп и класс всех π -разрешимых групп соответственно. В работе доказано, что $\mathcal{F}$ -инъектор группы G либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G , когда G – частично разрешимая группа. Описаны главные факторы группы, покрываемые $\mathcal{F}$ -инъекторами, в следующих случаях: 1) $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{S}$ и $\mathcal{F}$ – множество Хартли G ; 2) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F} \diamond \mathfrak{S}_{\pi'}$, для приведенной H -функции f .

Ключевые слова: множество Фиттинга; $\mathcal{F}$ -инъектор; функция Хартли; свойство покрытия-изоляции.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. Т. Воробьеву за постановку задачи и плодотворное обсуждение результатов работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф17М-064).

LOCAL FITTING SETS AND THE INJECTORS OF A FINITE GROUP

T. B. KARAULOVA^a

^aP. M. Masherov Vitebsk State University, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus

The product $\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}$ of the Fitting set $\mathcal{F}$ of a group G and the Fitting class $\mathfrak{X}$ is called the set of subgroups $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$. Let P be the set of all primes, $\emptyset \neq \pi \subseteq P$, $\pi' = P \setminus \pi$ and $\mathfrak{S}_{\pi'}$ denote the class of all π' -groups. Let $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}^{\pi}$ to denote the class of all soluble groups and the class of all π -soluble groups, respectively. In the paper, it is proved that $\mathcal{F}$ -injector of a group G either covers or avoids every chief factor of G if G is a partially soluble group. Chief factors of a group covered by $\mathcal{F}$ -injectors are described in the following cases: 1) $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{S}$ and $\mathcal{F}$ is the Hartley set of G ; 2) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F} \diamond \mathfrak{S}_{\pi'}$, for the integrated H -function f .

Key words: Fitting set; $\mathcal{F}$ -injector; Hartley function; cover-avoid property.

Acknowledgements. The author would like to express sincere gratitude to professor N. T. Vorob'ev for the formulation of the problem and productive discussion of the results of work. Research is supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. Ф17М-064).

Образец цитирования:

Караулова ТБ. Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3: 29–38.

For citation:

Karaulova TB. Local Fitting sets and the injectors of a finite group. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:29–38. Russian.

Автор:

Татьяна Борисовна Караулова – аспирант кафедры алгебры и методики преподавания математики факультета математики и информационных технологий. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. Т. Воробьев.

Author:

Tatyana B. Karaulova, postgraduate student at the department of algebra and methods of teaching mathematics, faculty of mathematics and information technology.
tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

Введение

Все рассматриваемые в настоящей работе группы конечны. Секцией группы G называется фактор-группа ее некоторой подгруппы. Подгруппа V покрывает (изолирует) секцию H/K группы G , если $H \subseteq VK$ ($V \cap H \subseteq K$) [1, с. 4].

В теории классов Фиттинга Б. Хартли установлено [2, лемма 1], что $\mathfrak{F}$ -инъектор V разрешимой группы G либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор G , т. е. $\mathfrak{F}$ -инъекторы G обладают свойством покрытия-изоляции. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$ -подгруппу, которую называют $\mathfrak{F}$ -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Подгруппа V группы G называется:

- $\mathfrak{F}$ -максимальной в G , если $V \in \mathfrak{F}$ и $U = V$ при условии, что $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$;
- $\mathfrak{F}$ -инъектором G , если $V \cap K$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой K для любой субнормальной подгруппы K группы G .

Б. Хартли в работе [2] была сформулирована проблема описания главных факторов разрешимой группы, покрываемых ее $\mathfrak{F}$ -инъекторами [2, с. 204]. Решение было получено для локальных классов Фиттинга вида $\bigcap_p h(p)\mathfrak{C}_{p'}\mathfrak{C}_p$ [2, с. 204, следствие], где h – некоторое отображение множества всех простых чисел во множество классов Фиттинга.

Локализуя понятие класса Фиттинга, Л. А. Шеметков [3] и в разрешимом случае В. Андерсон [4] определили понятие множества Фиттинга группы. Напомним, что непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют множеством Фиттинга G , когда выполняются следующие условия:

- если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;
- если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;
- если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Понятия $\mathcal{F}$ -инъектора и $\mathcal{F}$ -радикала группы G для множества Фиттинга G определяются аналогично, как и понятия $\mathfrak{F}$ -инъектора и $\mathfrak{F}$ -радикала для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Заметим, что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует множество подгрупп $\{H \leq G : H \in \mathfrak{F}\}$ группы G , которое, очевидно, является множеством Фиттинга G , хотя обратное в общем случае неверно [1, пример VIII, 2.2 (с)]. Такое множество Фиттинга обозначают $Tr_{\mathfrak{F}}(G)$ и называют следом класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в группе G . В случае $\mathcal{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G)$ множества $\mathfrak{F}$ -инъекторов и $\mathcal{F}$ -инъекторов группы G совпадают, а также $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathcal{F}}$.

Произведением $\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}$ множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ [5, с. 218] называют множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$. Установлено, что множество $\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G [5, свойство 3.1].

Пусть P – множество всех простых чисел, $\emptyset \neq \pi \subseteq P$ и $\pi' = P \setminus \pi$. В частности, если $\pi = \{p\}$, то символом p' обозначим $\{p'\}$. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называют π -насыщенным, если $\mathcal{F} = \mathcal{F} \diamond \mathfrak{C}_{\pi'}$, где $\mathfrak{C}_{\pi'}$ – класс всех π' -групп.

Отображение $f : P \rightarrow \{\text{множества Фиттинга группы } G\}$ называют функцией Хартли или коротко – H -функцией G [5, с. 218].

Пусть $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p -групп и $LFS_{\pi}(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{C}_{p'})$. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называется π -локальным [5, определение 1.3], если $\mathcal{F} = LFS_{\pi}(f)$ для некоторой H -функции f группы G . В частности, если $\pi = P$ ($\pi = \{p\}$), то π -локальное множество Фиттинга называется локальным (p -локальным) соответственно.

Пусть $HS(h) = \bigcap_{p \in P} h(p) \diamond (\mathfrak{C}_{p'} \mathfrak{N}_p)$, где h – H -функция группы G . Следуя [2], множество Фиттинга $\mathcal{H}$ группы G назовем множеством Хартли G , если $\mathcal{H} = HS(h)$ для некоторой H -функции h группы G . При этом h называют H -функцией G , определяющей локально множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G . Нами установлено, что каждое множество Хартли группы G является π -локальным множеством Фиттинга группы G , и показано, что обратное в общем случае неверно (см. предложение 1).

Пусть h – H -функция группы G , которая определяет локально множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G . Тогда h назовем:

- приведенной, если $h(p) \subseteq \mathcal{H}$ для всех $p \in P$;

- устойчивой, если $h(p) \subseteq h(q) \diamond \mathfrak{E}_q$, для всех различных $p, q \in \pi$;
- устойчивой приведенной, если h является одновременно устойчивой и приведенной.

Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G . Символом $\sigma(\mathcal{F})$ будем обозначать множество всех простых делителей всех $\mathcal{F}$ -подгрупп G , символом $\mathfrak{E}^\pi$ – класс всех π -разрешимых групп. В частности, если $\pi = P$, то символом $\mathfrak{E}$ будем обозначать класс всех разрешимых групп.

В работе [5] было получено обобщение известных теорем Гашюца – Фишера – Хартли [6] и Шеметкова – Андерсона [3; 4] о существовании и сопряженности инъекторов группы.

Доказано [5, теорема А, (1), (2)], что если $\emptyset \neq \pi \subseteq P$ и $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G , то G обладает единственным классом сопряженных $\mathcal{F}$ -инъекторов в каждом из следующих случаев:

- $G \in \mathfrak{E}^\pi$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}_{\pi'}$;
- $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ и $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}^\pi$.

В связи с этим естественной является постановка следующих вопросов:

- Верно ли, что $\mathcal{F}$ -инъекторы группы G обладают свойством покрытия-изолирования в каждом из указанных выше случаев а) и б)?
- Если $\mathcal{F}$ -инъекторы G обладают свойством покрытия-изолирования, то каковы главные факторы G , покрываемые $\mathcal{F}$ -инъекторами?

Основные результаты работы представлены двумя теоремами. Первая из них дает ответ на вопрос 1.

Теорема 1. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq P$ и $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G . Тогда $\mathcal{F}$ -инъекторы группы G обладают свойством покрытия-изолирования в каждом из следующих случаев:

- $G \in \mathfrak{E}^\pi$ и $\mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$;
- $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ и $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}^\pi$.

Решение вопроса 2 и проблемы Хартли о факторах, покрываемых инъекторами, для случая π -локальных множеств Фиттинга частично разрешимых групп представляет вторая теорема.

Теорема 2. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq P$ и $\mathcal{F}$ – π -локальное множество Фиттинга группы G , определяемое H -функцией f . Тогда $\mathcal{F}$ -инъектор G покрывает все такие главные p -факторы ($p \in \pi$), которые покрывает ее $f(p)$ -радикал в каждом из следующих случаев:

- $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}$ и $\mathcal{F}$ – множество Хартли G ;
- $G \in \mathfrak{E}^\pi$, $\mathcal{F}$ π -насыщенно и f – приведенная H -функция.

Предварительные сведения

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведением называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, IX, (1.12) (a)]. Пусть $\pi \subseteq P$. Подгруппа H группы G называется *холловой π -подгруппой* группы G , если $|H|$ является π -числом, а индекс $|G : H|$ – π' -числом. Группа G называется *p -нильпотентной*, если G имеет нормальную холлову p' -подгруппу, и *π -нильпотентной*, если G p -нильпотентна для всех $p \in \pi$.

В качестве лемм приведем ряд известных утверждений, которые будем использовать для доказательства теорем 1 и 2.

Лемма 1 [5, теорема А, (1), (2)]. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $\emptyset \neq \pi \subseteq P$. Тогда в группе G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены в каждом из следующих случаев:

- $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ и $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}^\pi$;
- $G \in \mathfrak{E}^\pi$, $\mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$ и индекс каждого $\mathcal{F}$ -инъектора G в группе G является π -числом.

Лемма 2 [1, VIII, (2.4) (d)]. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G . Если N – субнормальная подгруппа G , то $N_{\mathcal{F}} = N \cap G_{\mathcal{F}}$.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G :

- если V – $\mathcal{F}$ -инъектор G , то $G_{\mathcal{F}} \leq V$;
- если V – $\mathcal{F}$ -инъектор G , то V является $\mathcal{F}$ -максимальной подгруппой G ;
- если V – $\mathcal{F}$ -максимальная подгруппа G и $V \cap N$ – $\mathcal{F}$ -инъектор N для любой максимальной нормальной подгруппы N группы G , то V – $\mathcal{F}$ -инъектор G ;
- если $N \trianglelefteq G$ и V – $\mathcal{F}$ -инъектор N , то V^g – $\mathcal{F}$ -инъектор N для всех $g \in G$;
- если K – субнормальная подгруппа G и V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , то $V \cap K$ является $\mathcal{F}$ -инъектором K .

Лемма 3 следует непосредственно из определений множества Фиттинга и $\mathcal{F}$ -инъектора группы G .

Лемма 4 [5, свойства 3.1, 3.2 (1), (2), 3.3]. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G , $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $H \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}$;
- (2) произведение $\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G ;
- (3) $(H/H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}} = H_{\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}}/H_{\mathcal{F}}$;
- (4) если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – непустые классы Фиттинга, то $(\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}_1) \diamond \mathfrak{X}_2 = \mathcal{F} \diamond (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2)$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют гомоморфом, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ следует $G/N \in \mathfrak{F}$. Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется формацией, если из $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$ следует $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Лемма 5 [5, свойство 3.4]. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ – множества Фиттинга группы G . Тогда:

(1) если $\mathfrak{X}$ является одновременно непустым классом Фиттинга и гомоморфом, то из $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ следует $\mathcal{F}_1 \diamond \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_2 \diamond \mathfrak{X}$;

(2) если $\mathfrak{X}$ – непустая формация Фиттинга, то $(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \diamond \mathfrak{X} = (\mathcal{F}_1 \diamond \mathfrak{X}) \cap (\mathcal{F}_2 \diamond \mathfrak{X})$;

(3) если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – непустые классы Фиттинга, то $\mathcal{F} \diamond (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2) = (\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}_1) \cap (\mathcal{F} \diamond \mathfrak{X}_2)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Наименьшую нормальную подгруппу $G^{\mathfrak{F}}$ группы G , для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, называют $\mathfrak{F}$ -корадикалом G .

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $\mathfrak{H}$ – класс групп. Корадикальным произведением $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ формации $\mathfrak{F}$ и класса групп $\mathfrak{H}$ [1, определение IV, (1.7)] называют класс $\{G \in \mathfrak{G} : G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$.

Лемма 6 [1, теорема IV, (1.8) (a), (b)]. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые формации. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$ для каждой группы G ;

(2) $G^{\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$.

Напомним, что максимальная нормальная π -подгруппа (максимальная нормальная π' -подгруппа) G называется π -радикалом G (π' -радикалом G) и обозначается G_{π} ($G_{\pi'}$). Группа G называется π -замкнутой, если она содержит нормальную холлову π -подгруппу. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех π -замкнутых групп, т. е. $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{G}_{\pi'}$. Тогда $\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{G}_{\pi'}$ -радикал группы G называют π -замкнутым радикалом G , а $\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{G}_{\pi'}$ -инъектор G – π -замкнутым инъектором G . Следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы B (1) [5].

Лемма 7. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимый класс Фиттинга p -замкнутых групп. Тогда $\mathfrak{F}$ -инъекторы разрешимой группы G характеризуются следующим образом: подгруппа V – $\mathfrak{F}$ -инъектор G , если $V/G_{\mathfrak{F}}$ – p' -холлова подгруппа G .

Лемма 8 [7, теорема 2.4.27]. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{G}$. Тогда в G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

О свойстве покрытия-изолирования инъекторов

Лемма 9. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $\emptyset \neq \pi \subseteq P$. Если $K \trianglelefteq G$ и V – $\mathcal{F}$ -инъектор G , то $N_G(V \cap K)K = G$ в каждом из следующих случаев:

- (1) $G \in \mathfrak{G}^{\pi}$ и $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G ;
- (2) $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{G}^{\pi}$, где $\pi = \sigma(\mathcal{F})$.

Доказательство. (1) Ввиду утверждения (5) леммы 3 $V \cap K$ – $\mathcal{F}$ -инъектор K . Поскольку $K \in \mathfrak{G}^{\pi}$ и $\mathcal{F} \diamond \mathfrak{G}_{\pi} = \mathcal{F}$, по утверждению (2) леммы 1 любые два $\mathcal{F}$ -инъектора сопряжены в K . Тогда если $x \in G$, то $V \cap K$ и $(V \cap K)^x$ сопряжены в K . Следовательно, существует такой элемент $k \in K$, что $xk \in N_G(V \cap K)$. Отсюда $x \in N_G(V \cap K)K$ и $N_G(V \cap K)K = G$.

Доказательство леммы в случае (2) аналогично доказательству в случае (1). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. (1) Пусть V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G . Так как G – π -разрешимая группа, то главный фактор H/K есть либо элементарная абелева p -группа для некоторого $p \in \pi$, либо π' -группа. Пусть H/K – элементарная абелева p -группа. Тогда $K(V \cap H) \trianglelefteq H$ и по утверждению (1) леммы 9 $K(V \cap H) \trianglelefteq G$. Значит, $K(V \cap H) = H$ или $(V \cap H)K = K$ и V либо покрывает, либо изолирует H/K .

Так как группа G π -разрешима и $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга G , то по утверждению (2) леммы 1 индекс $\mathcal{F}$ -инъекторов G в группе G является π -числом. Следовательно, если V – $\mathcal{F}$ -инъектор G , то существует холлова π' -подгруппа G такая, что $G_{\pi'} \leq V$. Пусть $H/K \in \mathfrak{G}_{\pi'}$. Тогда $H = G_{\pi'}K$ и $H \leq VK$, т. е. V покрывает H/K .

(2) Пусть $G \in \mathcal{F} \diamond \mathcal{E}^\pi$ и $\pi = \sigma(\mathcal{F})$. Рассмотрим главный ряд группы G на участке от $G_{\mathcal{F}}$ до G , т. е. ряд $G_1 = G_{\mathcal{F}} \leq \dots \leq G_{i-1} \leq G_i = G$, где G_i/G_{i-1} – либо нильпотентная π -группа, либо π' -группа для $i \in \{1, \dots, t\}$. По утверждению (1) леммы 1 в группе G существуют $\mathcal{F}$ -инъекторы. Поэтому если V – $\mathcal{F}$ -инъектор G , то по утверждению (5) леммы 3 $V^x \cap G_{i-1}$ – $\mathcal{F}$ -инъектор G_{i-1} . Так как по утверждению (1) леммы 1 $\mathcal{F}$ -инъекторы группы G_{i-1} сопряжены, то $V^x \cap G_{i-1} = V^k \cap G_{i-1}$, $k \in G_{i-1}$. Тогда $xk^{-1} \in N_G(V \cap G_{i-1})$ и $(V \cap G_{i-1})^{xk^{-1}} = V \cap G_{i-1}$. Отсюда по утверждению (2) леммы 9 $G = N_G(V \cap G_{i-1})G_{i-1}$ и подгруппа $(V \cap G_{i-1})G_i$ нормальна в G . Поэтому $(V \cap G_{i-1})G_i = VG_i \cap G_{i-1}$ совпадает либо с G_i , либо с G_{i-1} и $\mathcal{F}$ -инъектор V либо изолирует, либо покрывает главный фактор G_i/G_{i-1} .

Рассмотрим теперь участок главного ряда группы G от 1 до $G_{\mathcal{F}}$. Ввиду утверждения (1) леммы 3 для каждого главного фактора R/S такого ряда справедливо: $VS \geq V \geq G_{\mathcal{F}} \geq R$. Следовательно, V покрывает R/S .

Следствие 1 [3, теорема 2.3.2]. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и G π -разрешима, где $\pi = \sigma(\mathcal{F})$. Если H – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , то H либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G .

Множества Хартли и множества Фиттинга

Пусть h – H -функция группы G и $HS(h) = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p)$. Напомним, что множество Фиттинга $\mathcal{H}$ – множество Хартли G , если $\mathcal{H} = HS(h)$.

Лемма 10. Каждое множество Хартли группы G определяется приведенной H -функцией.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H} = HS(h_1)$. Тогда $\mathcal{H} = \bigcap_{p \in \pi} h_1(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p)$ для H -функции h_1 группы G . Определим H -функцию h группы G следующим образом: $h(p) = h_1(p) \cap \mathcal{H}$ для всех $p \in \pi$. Покажем, что $\mathcal{H} = HS(h)$.

Так как $\mathcal{H} = HS(h_1)$, то

$$HS(h) = \left(\bigcap_{p \in \pi} h_1(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathcal{H} \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \right) = \mathcal{H} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathcal{H} \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \right).$$

Следовательно, ввиду утверждений (2) и (3) леммы 5 $HS(h) = \mathcal{H} \cap \mathcal{H} \diamond \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p \right) = \mathcal{H}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{H}$ – непустое множество подгрупп группы G . Следуя [1, определение II, (1.3)], для $\mathcal{H}$ и непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ определим множество подгрупп $\mathcal{H}\mathfrak{F} = \{H \leq G : L \leq H, L \in \mathcal{H} \text{ и } H/L \in \mathfrak{F}\}$ и назовем его произведением множества $\mathcal{H}$ и класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Замечание 1. Если $\mathcal{H}$ – множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то, очевидно, $\mathcal{H} \diamond \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{H}\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф. Тогда если $H \leq G$ и $H \in \mathcal{H}\mathfrak{F}$, то $H/L \in \mathfrak{F}$ для некоторой нормальной $\mathcal{H}$ -подгруппы L группы H . Так как $L \leq H_{\mathcal{H}}$ и $H/L/H_{\mathcal{H}}/L \cong H/H_{\mathcal{H}} \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathcal{H} \diamond \mathfrak{F}$ и $\mathcal{H} \diamond \mathfrak{F} = \mathcal{H}\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathcal{X}$ – непустое множество подгрупп группы G . Через $\text{Fitset } \mathcal{X}$ будем обозначать наименьшее множество Фиттинга группы G , содержащее $\mathcal{X}$ [1, определение VIII, 3.1 (b)].

Лемма 11. Каждое множество Хартли определяется устойчивой приведенной H -функцией.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – множество Хартли группы G . По лемме 10 $\mathcal{H} = HS(h_1)$ для некоторой приведенной H -функции h_1 .

Определим для каждого $p \in \pi$ множество подгрупп группы G следующим образом:

$$\overline{h_1}(p) = \{H \leq G : H \text{ сопряжена с } R^{\mathfrak{E}_p} \text{ в } G \text{ для некоторой подгруппы } R \in h_1(p)\}.$$

Заметим, что если $H \in \overline{h_1}(p)$, то $H \in h_1(p)$, и поэтому $\overline{h_1}(p) \subseteq h_1(p)$ для всех $p \in \pi$.

Предположим, что $X \in \overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_p$. Тогда X имеет нормальную подгруппу $K \in \overline{h_1}(p)$ такую, что $X/K \in \mathfrak{E}_p$. Поскольку $\overline{h_1}(p) \subseteq h_1(p)$, то $K \leq X_{h_1(p)}$. Следовательно, $X/X_{h_1(p)} \in \mathfrak{E}_p$, и $X \in h_1(p)\mathfrak{E}_p$ ввиду изоморфизма $X/K/X_{h_1(p)}/K \cong X/X_{h_1(p)}$. Значит, $\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_p \subseteq h_1(p)\mathfrak{E}_p$.

С другой стороны, пусть $Y \in h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда $Y/Y_{h_1(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \leq Y_{h_1(p)}$. Следовательно, $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h_1(p)$. Поскольку $(Y^{\mathfrak{E}_{p'}})^{\mathfrak{E}_{p'}} = Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ и подгруппа $Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ сопряжена $Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ в группе G , то $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \in \overline{h_1}(p)$. Значит, $Y \in \overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Таким образом, справедливо равенство

$$\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'} = h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}. \quad (1)$$

Пусть h – H -функция такая, что $h(p) = \text{Fitset}(\overline{h_1}(p))$ для всех $p \in \pi$. Докажем, что $HS(h) = \mathcal{H}$. Так как $\overline{h_1}(p) \subseteq h_1(p)$, то $h(p) = \text{Fitset}(\overline{h_1}(p)) \subseteq \text{Fitset}(h_1(p)) = h_1(p)$ и $h(p) \subseteq h_1(p)$. Следовательно, ввиду утверждения (1) леммы 5 $h(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Заметим, что в силу утверждения (4) леммы 4 $(h(p)\mathfrak{E}_{p'})\mathfrak{N}_p = h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$ и $(h_1(p)\mathfrak{E}_{p'})\mathfrak{N}_p = h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Таким образом, $h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p) \subseteq h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$ для всех $p \in \pi$ и $HS(h) \subseteq \mathcal{H}$. В силу (1) получаем $h_1(p)\mathfrak{E}_{p'} = \text{Fitset}(\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'})$. Поскольку $\overline{h_1}(p) \subseteq \text{Fitset}(\overline{h_1}(p))$, то по утверждению (1) леммы 5 $\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq \text{Fitset}(\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'})$. Поэтому $\text{Fitset}(\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'}) \subseteq \text{Fitset}(\overline{h_1}(p))\mathfrak{E}_{p'}$ и для каждого $p \in \pi$ справедливо включение

$$\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h(p)\mathfrak{E}_{p'}. \quad (2)$$

Далее с учетом утверждения (4) леммы 4 и утверждения (1) леммы 5 получаем включение $h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p) \subseteq h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Следовательно, $\mathcal{H} \subseteq HS(h)$ и $\mathcal{H} = HS(h)$.

Так как H -функция h_1 является приведенной H -функцией $\mathcal{H}$ и $\overline{h_1}(p) \subseteq h_1(p)$ для каждого $p \in \pi$, то $h(p) \subseteq \mathcal{H}$ для всех $p \in \pi$. Следовательно, h – приведенная H -функция $\mathcal{H}$.

Остается показать, что $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных $p, q \in \pi$. Пусть X_1 – произвольная подгруппа в $h_1(p)$ и $p \neq q$. Так как h_1 – приведенная H -функция, то $X_1 \in \mathcal{H}$, и поэтому $X_1 \in h_1(q)(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q)$. Ввиду утверждения (4) леммы 4 справедливо равенство $h_1(q)(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q) = (h_1(q)\mathfrak{E}_{q'})\mathfrak{N}_q$. Следовательно, $X_1^{\mathfrak{N}_q} \in h_1(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Поскольку $p \neq q$, по утверждению (1) леммы 6 $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \leq X_1^{\mathfrak{N}_q}$. Следовательно, $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h_1(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Тогда, ввиду включения (2), $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для каждой подгруппы X_1 из $h_1(p)$ и различных простых p и q из π .

Пусть $R \in \overline{h_1}(p)$. Тогда, по определению множества $\overline{h_1}(p)$, подгруппа R сопряжена с $S^{\mathfrak{E}_{p'}}$ для некоторой подгруппы $S \in h_1(p)$. Поэтому $R \in h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ и $h_1(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Таким образом, $h(p) = \text{Fitset}(\overline{h_1}(p)) \subseteq \text{Fitset}(h(q)\mathfrak{E}_{q'}) = h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных простых p и q из π . Лемма доказана.

Напомним, что ввиду [5], если $\emptyset \neq \pi \subseteq P$ и G – группа, то множество Фиттинга $\mathcal{F}$ называется π -локальным, если $\mathcal{F} = LFS_{\pi}(f)$ для некоторой H -функции f группы G , т. е. $\mathcal{F} = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})$. При этом локальную H -функцию f группы G π -локального множества Фиттинга $\mathcal{F}$ называют *полной*, если $f(p) \diamond \mathfrak{N}_p = f(p)$ для каждого $p \in \pi$.

Лемма 12. Каждое π -локальное множество Фиттинга группы G определяется полной приведенной H -функцией.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})$ для некоторой H -функции f . Определим H -функцию ϕ следующим образом: $\phi(p) = f(p) \cap \mathcal{F}$. Ввиду леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} \bigcap_{p \in \pi} \phi(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) &= \bigcap_{p \in \pi} (f(p) \cap \mathcal{F}) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} (f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})) \cap (\mathcal{F} \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})) = \\ &= \left(\bigcap_{p \in \pi} f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathcal{F} \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \right) = \mathcal{F} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathcal{F} \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \right) = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Теперь пусть $\psi(p) = \phi(p) \diamond \mathfrak{N}_p$. Очевидно, что ψ – полная H -функция, которая определяет множество Фиттинга $\mathcal{F}$. Покажем, что ψ – приведенная H -функция. Пусть $L \leq G$ и $L \in \psi(p) = \phi(p) \diamond \mathfrak{N}_p$.

Тогда $L \in \varphi(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})$. Если q – любое простое число из π и $q \neq p$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{E}_{q'}$, и, следовательно, $L^{\mathfrak{E}_{q'}} \subseteq L^{\mathfrak{N}_p} \in \varphi(p) \subseteq \mathcal{F}$. Значит, $(L^{\mathfrak{E}_{q'}})^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Используя утверждение (2) леммы 6, получаем $(L^{\mathfrak{E}_{q'}})^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} = L^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'} \mathfrak{E}_{q'}} = L^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Тогда, ввиду изоморфизма $L/L_{\varphi(q)} \cong L/L^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}}/L_{\varphi(q)}/L^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}}$, $L/L_{\varphi(q)} \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}$.

Следовательно, $L \in \varphi(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})$ для всех простых p из π и $L \in \mathcal{F}$. Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq P$ и $\mathcal{X}$ – множество Фиттинга группы G . Тогда $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'})$ является π -локальным множеством Фиттинга группы G .

Доказательство. Так как $\mathcal{X}$ – множество Фиттинга группы G , то по утверждению (2) леммы 4 произведение $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'})$ является также множеством Фиттинга группы G .

Покажем, что множество $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'})$ π -локально, т. е. $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}) = LFS_\pi(f)$ для некоторой H -функции f группы G . Для этого определим функцию f следующим образом: $f(p) = \mathcal{X} \diamond \mathfrak{E}_\pi$ для всех $p \in \pi$.

Пусть $\pi = P$. Тогда $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}) = \mathcal{X} \diamond \mathfrak{E}$.

В силу утверждения (4) леммы 4 имеем $LFS_\pi(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} (\mathcal{X} \diamond \mathfrak{E}) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E} \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{X} \diamond \mathfrak{E} = \mathcal{X} \diamond \mathfrak{E}$ и множество $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'})$ в этом случае π -локально.

Пусть $\emptyset \neq \pi \subset P$. Тогда по утверждению (4) леммы 4 получаем $LFS_\pi(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} (\mathcal{X} \diamond \mathfrak{E}_\pi) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} (\mathcal{X} \diamond \mathfrak{E}_\pi) \diamond \mathfrak{E}_{p'} = (\mathcal{X} \diamond \mathfrak{E}_\pi) \diamond \bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{E}_{p'} = (\mathcal{X} \diamond \mathfrak{E}_\pi) \diamond \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'})$. Следовательно, множество $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'})$ является π -локальным для любого непустого множества простых чисел π . Лемма доказана.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{X}$ – множество Фиттинга группы G . Тогда $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p)$ является p -локальным множеством Фиттинга группы G для каждого $p \in \pi$.

Доказательство. Если $\pi = P \setminus \{p\}$, то $\pi' = \{p\}$ для $p \in \pi$ и $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}) = \mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p)$. Следовательно, множество Фиттинга $\mathcal{X} \diamond (\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p)$ группы G является p -локальным.

Лемма 14. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq P$. Тогда пересечение любого множества π -локальных множеств Фиттинга группы G является π -локальным множеством Фиттинга группы G .

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$, где $\mathcal{F}_i$ – π -локальное множество Фиттинга группы G . Тогда для каждого $i \in I$ множество $\mathcal{F}_i = LFS_\pi(f_i)$ для некоторой H -функции f_i группы G . Построим H -функцию f группы G следующим образом: $f(p) = \bigcap_{i \in I} f_i(p)$ для каждого $p \in \pi$.

Покажем, что $\mathcal{F} = LFS_\pi(f)$. Так как $f(p) \subseteq f_i(p)$ для всех простых $p \in \pi$, то по утверждению (1) леммы 5 $f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \subseteq f_i(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})$ для всех $i \in I$ и $p \in \pi$. Следовательно, $\bigcap_{p \in \pi} f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \subseteq \bigcap_{p \in \pi} \left(\bigcap_{i \in I} f_i(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \right) = \mathcal{F}$ и $LFS_\pi(f) \subseteq \mathcal{F}$.

Докажем обратное включение: $\mathcal{F} \subseteq LFS_\pi(f)$. Пусть $L \leq G$ и $L \in \mathcal{F}$. Тогда $L \in \bigcap_{p \in \pi} f_i(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})$ и $L^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}} \in f_i(p)$ для всех $i \in I$ и $p \in \pi$. Следовательно, $L^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}} \in \bigcap_{i \in I} f_i(p) = f(p)$ и $L \in \bigcap_{p \in \pi} f(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) = LFS_\pi(f)$. Лемма доказана.

Лемма 15. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq P$ и $\mathcal{H}$ – множество Хартли группы G , где $G \in \mathcal{H} \diamond \mathfrak{E}$. Если V – $\mathcal{H}$ -инъектор группы G , то $V_{h(p)} = G_{h(p)}$ для всех $p \in \pi$.

Доказательство. По лемме 11 $G_{\mathcal{H}} \subseteq V$ и $h(p) \subseteq \mathcal{H}$. Поскольку $V_{h(p)} \cap G_{\mathcal{H}} = (G_{\mathcal{H}})_{h(p)} = G_{h(p) \cap \mathcal{H}} = G_{h(p)}$, то $[V_{h(p)}, G_{\mathcal{H}}] \leq V_{h(p)} \cap G_{\mathcal{H}} = G_{h(p)}$ и $V_{h(p)} \leq C_G(G_{\mathcal{H}}/G_{h(p)})$ для всех $p \in \pi$. Пусть $C = C_G(G_{\mathcal{H}}/G_{h(p)})$. Для доказательства равенства $V_{h(p)} = G_{h(p)}$ достаточно показать, что $C \subseteq G_{\mathcal{H}}$.

Предположим, что включение неверно. Тогда $C/C \cap G_{\mathcal{H}}$ – нетривиальная группа. Так как $C \cap G_{\mathcal{H}} \trianglelefteq G$, то можно рассмотреть нормальный ряд $1 \trianglelefteq C \cap G_{\mathcal{H}} \trianglelefteq K \trianglelefteq C \trianglelefteq G$. Тогда существует нормальная подгруппа K группы G , содержащаяся в C , такая, что $K/C \cap G_{\mathcal{H}}$ – нетривиальный главный фактор группы G . Очевидно, что $K \cap G_{\mathcal{H}} = C \cap G_{\mathcal{H}}$ и $K/C \cap G_{\mathcal{H}} = K/K \cap G_{\mathcal{H}}$. Так как группа $G/G_{\mathcal{H}}$ разрешима, то ввиду изоморфизма $KG_{\mathcal{H}}/G_{\mathcal{H}} \cong K/K \cap G_{\mathcal{H}}$ главный фактор $K/K \cap G_{\mathcal{H}}$ является элементарной абелевой p -группой для $p \in \pi$. Значит, $(K/K \cap G_{\mathcal{H}})' = 1$ и $(K/K \cap G_{\mathcal{H}})' = K'(K \cap G_{\mathcal{H}})/(K \cap G_{\mathcal{H}}) = 1$. Поэтому $K'(K \cap G_{\mathcal{H}}) = K \cap G_{\mathcal{H}}$ и $K' \subseteq K \cap G_{\mathcal{H}}$. Поскольку $K \subseteq C_G(G_{\mathcal{H}}/G_{h(p)})$, получаем $K \subseteq C_G(K \cap G_{\mathcal{H}}/G_{h(p)})$ и $[K', K] \subseteq [K \cap G_{\mathcal{H}}, K] \subseteq G_{h(p)}$. Следовательно, $\left[(K \cap G_{h(p)})', K/G_{h(p)} \right] = 1$ и $K/G_{h(p)}$ – группа нильпотентной длины 2. Значит, $K/G_{h(p)}$ имеет нетривиальную нормальную силовскую p -подгруппу $P/G_{h(p)}$. Очевидно, что $P \trianglelefteq G$ и P покрывает p -главный фактор $K/K \cap G_{\mathcal{H}}$, т. е. $P(K \cap G_{\mathcal{H}}) \supseteq K$. Следовательно, $PG_{\mathcal{H}} = KG_{\mathcal{H}}$.

Так как $P/G_{h(p)} \in \mathfrak{N}_p$, то $P \in h(p) \diamond \mathfrak{N}_p \subseteq \mathcal{H}$ для всех $p \in \pi$ и $P \in \mathcal{H}$. Поскольку $P \in \mathcal{H}$, то $PG_{\mathcal{H}} = KG_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$, и, следовательно, $KG_{\mathcal{H}} \subseteq G_{\mathcal{H}}$. Отсюда $KG_{\mathcal{H}}/G_{\mathcal{H}} \cong K/K \cap G_{\mathcal{H}} = 1$. Последнее противоречит тому, что фактор $KG_{\mathcal{H}}/G_{\mathcal{H}}$ нетривиален, и, значит, $C \subseteq G_{\mathcal{H}}$. Лемма доказана.

Предложение 1. Пусть $\mathcal{H}$ – множество Хартли группы G . Справедливы следующие утверждения:

(1) $\mathcal{H}$ является π -локальным множеством Фиттинга G ;

(2) существуют π -локальные множества Фиттинга G , которые не являются множествами Хартли G .

Доказательство. (1) Пусть $\mathcal{H} = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \diamond (\mathfrak{S}_p, \mathfrak{N}_p)$. Ввиду следствия 1 множество $h(p) \diamond (\mathfrak{S}_p, \mathfrak{N}_p)$ является π -локальным множеством Фиттинга группы G для любого $p \in \pi$. Тогда по лемме 14 $\mathcal{H}$ – π -локальное множество Фиттинга группы G .

(2) Пусть множество Фиттинга $\mathcal{H} = \text{Tr}_{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}(G)$, где $G \in \mathfrak{S}$. Покажем вначале, что множество Фиттинга $\mathcal{H}$ локально. Пусть $LFS(h) = \bigcap_p h(p) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})$ для H -функции h такой, что $h(p) = \text{Tr}_{\mathfrak{N}_p}(G)$ и $h(q) = \mathcal{H}$ для всех простых $q \neq p$. Тогда $LFS(h) = \text{Tr}_{\mathfrak{N}_p}(G) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} \mathcal{H} \diamond (\mathfrak{N}_q \mathfrak{S}_{q'}) \right)$. Заметим, что подгруппа $R \in \text{Tr}_{\mathfrak{N}_p}(G) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})$ тогда и только тогда, когда $R/R_{\text{Tr}_{\mathfrak{N}_p}(G)} = R/R_{\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}$, т. е. $R \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}$. Следовательно, $\text{Tr}_{\mathfrak{N}_p}(G) \diamond (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}) = \text{Tr}_{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}(G)$. Значит, ввиду утверждения (3) леммы 5 и утверждения (1) леммы 3 $LFS(h) = \mathcal{H} \cap \mathcal{H} \diamond \left(\bigcap_{q \neq p} \mathfrak{N}_q \mathfrak{S}_{q'} \right) = \mathcal{H}$ и множество Фиттинга $\mathcal{H}$ локально.

Предположим, что $\mathcal{H}$ – множество Хартли группы G . Тогда по лемме 10 $\mathcal{H} = \bigcap_p h_1(p) \diamond (\mathfrak{S}_p, \mathfrak{N}_p)$ для некоторой приведенной H -функции h_1 . Так как $G \in \mathfrak{S}$, то по лемме 8 в G существуют $\mathcal{H}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены. Пусть V – $\mathcal{H}$ -инъектор группы G . Поскольку $V \in \mathcal{H}$, то $V/V_{h_1(p)} \in \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{N}_p$ для каждого простого p . Ввиду леммы 15 $V_{h_1(p)} = G_{h_1(p)}$ для всех простых p . Следовательно, $V/G_{h_1(p)} \in \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{N}_p$ для всех простых p . Так как $h_1(p) \subseteq \mathcal{H}$ для всех $p \in \pi$, то, используя изоморфизм $V/G_{h_1(p)}/G_{\mathcal{H}}/G_{h_1(p)} \cong V/G_{\mathcal{H}}$, получаем, что $V/G_{\mathcal{H}}$ – p -нильпотентная группа для каждого простого p . Следовательно, группа $V/G_{\mathcal{H}}$ нильпотентна.

С другой стороны, так как $\mathcal{H}$ – локальное множество Фиттинга, $\mathcal{H}$ -инъектор группы G по лемме 7 характеризуется следующим образом: V – $\mathcal{H}$ -инъектор G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{N}_p}$ – холлова p' -подгруппа G . Ввиду $G_{\mathfrak{N}_p} \leq G_{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}$ имеем $V/G_{\mathfrak{N}_p}/G_{\mathcal{H}}/G_{\mathfrak{N}_p} \cong V/G_{\mathcal{H}}$ и $V/G_{\mathcal{H}}$ является p' -группой, которая ненильпотентна. Полученное противоречие следует из неверного предположения о том, что $\mathcal{H}$ является множеством Хартли группы G . Предложение доказано.

Предложение 2. Каждое множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G можно определить полной приведенной H -функцией F такой, что $F(p) = h(p) \diamond (\mathfrak{S}_p, \mathfrak{N}_p) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} h(q) \diamond \mathfrak{S}_{q'} \right)$ для всех $p \in \pi$.

Доказательство. По утверждению (1) предложения 1 множество $\mathcal{H}$ является π -локальным. Покажем, что $\mathcal{H} = LFS_\pi(F)$.

Так как $LFS_\pi(F) = \bigcap_{p \in \pi} \left(h(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} h(q) \diamond \mathfrak{E}_q \right) \right) \diamond (\mathfrak{N}_p, \mathfrak{E}_{p'})$, по утверждению (1) леммы 5 $\bigcap_{p \in \pi} \left(h(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} h(q) \diamond \mathfrak{E}_q \right) \right) \diamond (\mathfrak{N}_p, \mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p \in \pi} \left(h(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \right) \diamond (\mathfrak{N}_p, \mathfrak{E}_{p'}) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} \left(h(q) \diamond \mathfrak{E}_q \right) \diamond (\mathfrak{N}_q, \mathfrak{E}_{q'}) \right)$. Ввиду утверждения (4) леммы 4

$$\begin{aligned} & \bigcap_{p \in \pi} \left(h(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \right) \diamond (\mathfrak{N}_p, \mathfrak{E}_{p'}) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} \left(h(q) \diamond \mathfrak{E}_q \right) \diamond (\mathfrak{N}_q, \mathfrak{E}_{q'}) \right) = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \diamond \\ & \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} h(q) \diamond (\mathfrak{E}_q, \mathfrak{N}_q) \right) = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} h(q) \diamond (\mathfrak{E}_q, \mathfrak{E}_{q'}) \right) = \\ & = \bigcap_{p \in \pi} \left(h(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \right) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} h(q) \diamond \mathfrak{E}_q \right) \diamond \mathfrak{E}_{p'}. \end{aligned}$$

Так как h – устойчивая, приведенная H -функция $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{E}_{q'}$, то $LFS_\pi(F) = \bigcap_{p \in \pi} \left(h(p) \diamond (\mathfrak{E}_p, \mathfrak{N}_p) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} h(q) \diamond \mathfrak{E}_q \right) \right) \diamond \mathfrak{E}_{p'} = \bigcap_{q \in \pi} h(q) \diamond (\mathfrak{E}_q, \mathfrak{N}_q) = \mathcal{H}$. Предложение доказано.

О факторах, покрываемых инъекторами

Лемма 16. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $G \in \mathfrak{E}^\pi$ и $\mathcal{F} = LFS_\pi(f)$ для приведенной H -функции f группы G . Если $\mathcal{F} = \mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}_\pi$ и V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , то $V_{f(p)} = G_{f(p)}$ для всех $p \in \pi$.

Доказательство. По лемме 13 $G_{\mathcal{F}} \subseteq V$. Так как $f(p) \subseteq \mathcal{F}$, то

$$V_{f(p)} \cap G_{\mathcal{F}} = (G_{\mathcal{F}})_{f(p)} = G_{f(p) \cap \mathcal{F}} = G_{f(p)}.$$

Поэтому $[V_{f(p)}, G_{\mathcal{F}}] \leq V_{f(p)} \cap G_{\mathcal{F}} = G_{f(p)}$ и $V_{f(p)} \leq C_G(G_{\mathcal{F}}/G_{f(p)})$ для каждого $p \in \pi$. Пусть $C = C_G(G_{\mathcal{F}}/G_{f(p)})$. Для доказательства равенства $V_{f(p)} = G_{f(p)}$ достаточно убедиться, что $C \subseteq G_{\mathcal{F}}$.

Предположим, что включение неверно. Следовательно, $C/C \cap G_{\mathcal{F}}$ – нетривиальная группа. Поскольку $C \cap G_{\mathcal{F}} \trianglelefteq G$, существует нормальный ряд $1 \trianglelefteq C \cap G_{\mathcal{F}} \trianglelefteq K \trianglelefteq C \trianglelefteq G$. Тогда найдется нормальная подгруппа K группы G , содержащаяся в C такая, что $K/C \cap G_{\mathcal{F}}$ – нетривиальный главный фактор группы G . Следовательно, $K \cap G_{\mathcal{F}} = C \cap G_{\mathcal{F}}$ и $K/C \cap G_{\mathcal{F}} = K/K \cap G_{\mathcal{F}}$. Так как G – π -разрешимая группа, ввиду изоморфизма $KG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}} \cong K/K \cap G_{\mathcal{F}}$, главный фактор является либо π' -группой, либо элементарной абелевой p -группой для любого $p \in \pi$.

Пусть $K/K \cap G_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. По лемме 2 $K/K_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$ и $K \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}_{\pi'}$. Так как $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G , то $K \in \mathcal{F}$. Следовательно, $K \subseteq G_{\mathcal{F}}$ и фактор $K/K \cap G_{\mathcal{F}}$ тривиален. Получили противоречие.

Предположим, что $K/K \cap G_{\mathcal{F}}$ – элементарная абелева p -группа для некоторого $p \in \pi$. В этом случае, следуя доказательству утверждения (1) предложения 1, снова получаем противоречие с тем, что фактор $K/K \cap G_{\mathcal{F}}$ тривиален. Это завершает доказательство того, что $C \subseteq G_{\mathcal{F}}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. (1) Пусть V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G . Поскольку $G \in \mathcal{F} \diamond \mathfrak{E}$, по лемме 8 группа G обладает $\mathcal{F}$ -инъектором и любые два из них сопряжены. Следовательно, свойство покрытия-изолирования $\mathcal{F}$ -инъектором главных факторов группы G не зависит от выбора $\mathcal{F}$ -инъекторов. Поскольку $V_{f(p)} \leq V$, то V покрывает все такие главные p -факторы группы G , которые покрывает $V_{f(p)}$ для любого $p \in \pi$. Так как по лемме 15 $V_{f(p)} = G_{f(p)}$ для любого $p \in \pi$, то V покрывает все те главные p -факторы, которые покрывает $f(p)$ -радикал группы G . Таким образом, утверждение (1) теоремы доказано.

(2) Ввиду утверждения (2) леммы 1 и леммы 16 доказательство теоремы в случае (2) аналогично ее доказательству в случае (1). Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Doerk K, Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York: Walter de Gruyter; 1992.
2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1969;3(2):193–207. DOI: 10.1112/plms/s3-19.2.193.
3. Шеметков ЛА. О подгруппах π -разрешимых групп. В: *Конечные группы*. Минск: Наука и техника; 1975. с. 207–212.
4. Anderson W. Injectors in finite soluble groups. *Journal of Algebra*. 1975;36(3):333–338. DOI: 10.1016/0021-8693(75)90136-2.
5. Yang N, Guo W, Vorob'ev NT. On $\mathcal{F}$ -injectors of Fitting set of a finite group. *Communications in Algebra*. 2018;46(1):217–229. DOI: 10.1080/00927872.2017.1319475.
6. Fischer B, Gaschütz W, Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*. 1967;102(5):337–339. DOI: 10.1007/BF01111070.
7. Ballester-Bolinches A, Ezquerro LM. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht: Springer; 2006.

References

1. Doerk K, Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York: Walter de Gruyter; 1992.
2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1969;3(2):193–207. DOI: 10.1112/plms/s3-19.2.193.
3. Shemetkov LA. [On subgroups of π -soluble groups]. In: *Konechnye gruppy* [Finite Groups]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1975. p. 207–212. Russian.
4. Anderson W. Injectors in finite soluble groups. *Journal of Algebra*. 1975;36(3):333–338. DOI: 10.1016/0021-8693(75)90136-2.
5. Yang N, Guo W, Vorob'ev NT. On $\mathcal{F}$ -injectors of Fitting set of a finite group. *Communications in Algebra*. 2018;46(1):217–229. DOI: 10.1080/00927872.2017.1319475.
6. Fischer B, Gaschütz W, Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*. 1967;102(5):337–339. DOI: 10.1007/BF01111070.
7. Ballester-Bolinches A, Ezquerro LM. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht: Springer; 2006.

Статья поступила в редколлегию 25.06.2018.
Received by editorial board 25.06.2018.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.955:519.622

О НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

П. П. ЗАБРЕЙКО¹⁾, С. В. ПОНОМАРЕВА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуются нелокальные условия разрешимости задачи типа Коши для дробных дифференциальных уравнений с производными Римана – Лиувилля в некотором специальном пространстве функций. Задача Коши сводится к нахождению неподвижной точки интегрального оператора A , затем для него строится инвариантное множество («сдвиг» шара из пространства непрерывных функций) и применяются принцип Шаудера и принцип Банаха – Каччиопполи неподвижной точки в полном метрическом пространстве. Получены условия разрешимости рассматриваемой задачи в данном функциональном пространстве, а также условия существования единственного решения.

Ключевые слова: задача Коши; дробная производная Римана – Лиувилля; принцип Шаудера; принцип Банаха – Каччиопполи.

Образец цитирования:

Забрейко ПП, Пономарева СВ. О непрерывности решений задачи Коши для уравнений дробного порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:39–45.

For citation:

Zabreiko PP, Ponomareva SV. On continuous solutions of the Cauchy problem for equations of fractional order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:39–45. Russian.

Авторы:

Петр Петрович Забрейко – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета.

Светлана Владимировна Пономарева – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета.

Authors:

Petr P. Zabreiko, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.

zabreiko@mail.ru

Svetlana V. Ponomareva, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics.

demyanko@bsu.by

ON CONTINUOUS SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

P. P. ZABREIKO^a, S. V. PONOMAREVA^a

^a*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: S. V. Ponomareva (demyanko@bsu.by)

It is studied the nonlocal conditions of solving Cauchy-type problem for fractional differential equations with Riemann – Liouville derivatives in some special function space. The Cauchy problem is reduced to a the finding fixed point of an integral operator A , then is constructed an invariant set for A (the «shift» of a ball from the space of continuous functions, and then it is applied the Schauder anf Banach – Caccioppoli fixed point principles. As a result, the conditions of solvability and unique solvability for the Cauchy problem under consideration are given.

Key words: Cauchy problem; fractional Riemann – Liouville derivative; the Schauder fixed point principle; the Banach – Caccioppoli fixed point principle.

1. Будем рассматривать аналог задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля D^α порядка α , $0 < \alpha < 1$, на конечном отрезке $[0, T]$ действительной оси

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha} x(t) = \xi, \end{cases} \quad (1)$$

где дробная производная Римана – Лиувилля определяется равенством

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_0^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^\alpha}.$$

Относительно нелинейности $f(s, u)$ будем предполагать, что она непрерывна по совокупности переменных на множестве $(0, T] \times (-\infty, \infty)$.

Литература, посвященная исследованию задачи Коши для дробно-дифференциальных уравнений, весьма обширна. Общая теория таких уравнений достаточно полно представлена в обзорной монографии [1] (см. также [2]), в [3] описываются решения подобных задач и с другими видами дробных производных. Отыскание решений задачи типа Коши для уравнений с дробными производными Римана – Лиувилля обычно сводится к решению интегрального уравнения Вольтерры

$$x(t) = \frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds,$$

и доказываются их одновременная разрешимость в определенных пространствах функций. В формулировании начального значения проблемы для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с дробными производными в форме Римана – Лиувилля начальные условия даются, как правило, в терминах дробных интегралов.

Придерживаясь общепринятой схемы, отыскание решений задачи (1) сведем к нахождению неподвижных точек оператора

$$Ax(t) = \tilde{\xi}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \quad \left(\tilde{\xi}(t) = \frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \quad (2)$$

в подходящем пространстве функций, определенных на отрезке $[0, T]$.

Решение задачи (1) в пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$ определенных на отрезке $[0, T]$ и непрерывных на $(0, T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел

$$x(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t)}{t^{\alpha-1}},$$

с нормой

$$\|x\|_{1-\alpha} = \sup_{0 < t \leq T} t^{1-\alpha} |x(t)|$$

исследовалось в [4], где были получены (нелокальные) условия существования и единственности решения.

В данной работе задача Коши (1) будет изучаться в более узком пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$ функций, представимых в виде $x(t) = \xi \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + x_c(t)$ ($\xi \in \mathbb{R}$, $x_c(t) \in C[0, T]$), с нормой

$$\left\| \xi \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + x(t) \right\|_{(1-\alpha)} = |\xi| + \|x(t)\|_C.$$

Это пространство не совпадает с $C_{1-\alpha}[0, T]$ ($t^\gamma \in C_{1-\alpha} \setminus C_{(1-\alpha)}$ при $\alpha - 1 < \gamma < 0$). Однако оно непрерывно вложено в пространство $C_{1-\alpha}$, причем

$$\|x(t)\|_{1-\alpha} = \left(\max \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, T^{1-\alpha} \right\} \right) \|x(t)\|_{(1-\alpha)} \quad (x(t) \in C_{(1-\alpha)}[0, T]),$$

а его замыкание совпадает с пространством $C_{1-\alpha}[0, T]$.

Действительно, так как $\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ лежит в $C_{(1-\alpha)}$, то достаточно функциями из $C_{(1-\alpha)}$ аппроксимировать функции из $C_{1-\alpha}$, для которых $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha} x(t) = 0$. Пусть $x(t)$ – такая функция, и пусть $t^{1-\alpha} |x(t)| \leq \frac{1}{n}$ при $0 < t < \delta_n(x)$. Положим $D_n(x) = \left\{ t : t^{1-\alpha} |x(t)| \geq \frac{1}{n} \right\} \cap (0, \delta_n(x))$ ($n = 1, 2, \dots$) и рассмотрим принадлежащие $C_{(1-\alpha)}$ функции

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{n} \operatorname{sign} x(t) & \text{при } t \in D_n(t), \\ x(t) & \text{при } t \notin D_n(t). \end{cases}$$

Оценим норму $\|x(t) - x_n(t)\|_{1-\alpha}$. Очевидно,

$$t^{1-\alpha} |x(t) - x_n(t)| = \begin{cases} t^{1-\alpha} x(t) - \frac{1}{n} \operatorname{sign} x(t) & \text{при } t \in D_n(t), \\ 0 & \text{при } t \notin D_n(t), \end{cases}$$

и, значит, $t^{1-\alpha} |x(t) - x_n(t)| \leq \frac{1}{n}$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t) - x_n(t)\|_{1-\alpha} = 0$.

Из сказанного следует, что теоремы существования решения задачи (1) в пространстве $C_{(1-\alpha)}$ – более сильный факт, чем в пространстве $C_{1-\alpha}$, а теоремы единственности решения, наоборот, – менее сильный факт в $C_{(1-\alpha)}$, чем в $C_{1-\alpha}$.

2. Опишем простейшие условия, при которых оператор (2) действует в пространстве $C_{(1-\alpha)}$.

Предположим, что нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t, u)| \leq \mu(t) + \nu(t)|u| \quad (0 < t \leq T, -\infty < u < \infty), \quad (3)$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные функции со свойствами, которые будут описаны ниже. Тогда выполняется неравенство

$$|f(t, x(t))| \leq \mu(t) + \nu(t)|x(t)| \quad (0 < t \leq T).$$

Отсюда $(\tilde{\xi}(t) = \xi t^{\alpha-1} \Gamma(\alpha))$

$$|Ax(t)| \leq |\tilde{\xi}(t)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\mu(s) + \nu(s)|x(s)|) ds \quad (0 < t \leq T)$$

и далее

$$\begin{aligned} |Ax(t)| &\leq |\tilde{\xi}(t)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) |x(s)| ds \leq \\ &\leq |\tilde{\xi}(t)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds + \frac{|\xi|}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) s^{\alpha-1} ds + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) |x_c(s)| ds. \end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает, что оператор A будет ограниченно действовать в пространстве $C_{(1-\alpha)}$, если для функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ выполняются условия

$$\tilde{\mu}(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds \in C[0, T], \quad \tilde{\nu}(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} \nu(s) ds \in C[0, T]. \quad (4)$$

Примерами таких функций могут служить

$$\mu(t) = t^{-\beta} \quad (0 \leq \beta < \alpha), \quad \nu(t) = s^{-\gamma} \quad (\gamma < 1 - 2\alpha).$$

Лемма 1. Пусть нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству (3), причем для функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ выполняется условие (4). Тогда оператор (2) действует в пространстве $C_{(1-\alpha)}$ и ограничен. Более того, этот оператор и вполне непрерывен.

Действие и ограниченность оператора (2) показаны выше. Его непрерывность следует из непрерывности оператора суперпозиции $fx(t) = f(t, x(t))$, которая вытекает из непрерывности нелинейности $f(s, u)$ [5]. Компактность этого оператора следует из компактности оператора I^α [6; 7].

3. Напомним принцип Шаудера неподвижной точки в банаховом пространстве:

Если A – вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X , оставляющий инвариантным ограниченное замкнутое выпуклое множество $Q \subset X$, то он имеет в Q по крайней мере одну неподвижную точку (т. е. уравнение $x = Ax$ имеет в Q по крайней мере одно решение x_* : $x_* = Ax_*$).

Предположим, что нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству (3), а $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные функции, удовлетворяющие условию (4).

В качестве инвариантного для оператора A множества Q будем рассматривать множество $B(\xi, u) = \{x(t) : |x(t) - \tilde{\xi}(t)| \leq u(t)\}$, где $u(t)$ – непрерывная функция. Ограниченность, замкнутость и выпуклость этого множества очевидны.

Пусть $x(t) \in B(\xi, u)$. Перепишем равенство (2) в виде

$$\begin{aligned} Ax(t) - \tilde{\xi}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, \tilde{\xi}(s) + (x(s) - \tilde{\xi}(s))\right) ds. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$|Ax(t) - \tilde{\xi}(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\mu(s) + \nu(s) \tilde{\xi}(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) |x(s) - \tilde{\xi}(s)| ds,$$

$$|Ax(t) - \tilde{\xi}(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\mu(s) + v(s)\tilde{\xi}(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)u(s) ds.$$

Из полученного неравенства вытекает, что оператор A оставляет множество $B(\xi, u)$ инвариантным, если для функции $u(t)$ справедливо

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\mu(s) + v(s)\tilde{\xi}(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)u(s) ds \leq u(t).$$

Будем искать функцию $u(t)$ как решение линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\mu(s) + v(s)\tilde{\xi}(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)u(s) ds = u(t) \quad (5)$$

в пространстве непрерывных функций $C[0, T]$. Поскольку при выполнении условия (4) первое слагаемое в (5) является непрерывной функцией, а второе слагаемое является вполне непрерывным оператором в пространстве $C[0, T]$, то уравнение (5) [6–8] имеет единственное решение при любом значении ξ и справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть для $f(t, u)$ справедливо неравенство (3), функции $\mu(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют условиям (8). Тогда оператор A , определенный формулой (2), будет оставлять инвариантным множество B , определенное функцией $u(t)$ ($AB \subseteq B$), где $u(t)$ – решение интегрального уравнения (5).

Из этих рассуждений и принципа Шаудера вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для правой части $f(t, u)$ уравнения (1) выполняется ограничение (3). Тогда задача Коши (1) при любом $\xi \in R$ имеет хотя бы одно решение $x(t) \in C_{(1-\alpha)}$.

4. Напомним принцип Банаха – Каччиопполи неподвижной точки в полном метрическом пространстве:

Если A – действующий в полном метрическом пространстве (M, ρ) оператор, удовлетворяющий условию Липшица $\rho(Ax_1, Ax_2) \leq k\rho(x_1, x_2)$ ($x_1, x_2 \in M$) с постоянной $k < 1$, то он имеет в M единственную неподвижную точку, т. е. уравнение $x = Ax$ имеет в M единственное решение x_* : $x_* = Ax_*$, и это решение является пределом последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при любом $x_0 \in M$.

В качестве метрического пространства M рассматривается пространство $(B(\xi, u), \rho)$, в котором $B(\xi, u)$ – построенное выше инвариантное для A множество, а метрика ρ определяется ниже.

Пусть $f(s, u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(s, u_1) - f(s, u_2)| \leq \lambda(s)|u_1 - u_2| \quad (0 < s \leq T, -\infty < u_1, u_2 < \infty) \quad (6)$$

с некоторой положительной функцией $\lambda(s)$. В качестве метрики ρ на множестве $B(\xi, u)$ будем рассматривать норму

$$\|x\|_\lambda = \max_{0 \leq t \leq T} \frac{|x(t)|}{\lambda(t)},$$

функцию $\lambda(s)$ выберем так, чтобы оператор A в этой метрике удовлетворял условию Липшица с некоторой постоянной $k < 1$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} |Ax_1(t) - Ax_2(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) |x_1(s) - x_2(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) ds \|x_1(t) - x_2(t)\|_\lambda, \end{aligned}$$

откуда

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_\lambda \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) ds \right\|_\lambda \|x_1(t) - x_2(t)\|_\lambda.$$

Оператор A будет удовлетворять условию Липшица с постоянной k , если для $\lambda(s)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) ds \right\| \leq k.$$

В свою очередь, это неравенство выполнено, если функция $\lambda(s)$ является решением интегрального уравнения

$$1 + \frac{1}{k\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) ds = \lambda(t). \quad (7)$$

Но это уравнение, в силу компактности стоящего в его левой части оператора, имеет единственное положительное решение $\lambda(t)$. Таким образом, при данном выборе $\lambda(s)$ оператор A удовлетворяет условию Липшица с постоянной k .

Остается заметить, что в качестве k можно взять произвольное положительное число из интервала $(0, 1)$. При этом, в силу непрерывности и положительности функции $\lambda(t)$, эта норма эквивалентна норме пространства $C[0, T]$.

Таким образом, оператор A , определенный формулой (2), будет оставлять инвариантным множество $B(\xi, \rho)$, в котором функция $u(t)$ – решение интегрального уравнения (5); более того, с метрикой $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_\lambda$, построенной по функции $\lambda(t)$ – решению интегрального уравнения (7) с $k < 1$, удовлетворяет на этом множестве условию Липшица с постоянной $k < 1$. Тем самым верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть правая часть $f(t, x(t))$ уравнения (1) удовлетворяет неравенствам (3) и (6). Тогда задача Коши (1) при любом $\xi \in \mathbb{R}$ имеет в пространстве $C_{(1-\alpha)}[0, T]$ единственное решение $x(t)$.

Библиографические ссылки

1. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies 204. New York: Elsevier science; 2006. 523 p.
2. Gorenflo R, Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In: *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996)*. CISM Courses and Lectures. 1997;378:223–276.
3. Kilbas AA. New trends on fractional integral and differential equations. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*. 2005;147(1):72–106.
4. Забрейко ПП, Пономарева СВ. О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана – Лиувилля. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2018;62(4):391–397. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-6.
5. Красносельский МА, Забрейко ПП, Пустыльник ЕИ, Соболевский ПЕ. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*. Москва: Наука; 1966. 500 с.
6. Забрейко ПП, Кошелев АИ, Красносельский МА, Михлин СГ, Раковщик ЛС, Стеценко ВЯ. *Интегральные уравнения*. Москва: Наука; 1968. 448 с.
7. Забрейко ПП. Об интегральных операторах Вольтерра. *Успехи математических наук*. 1967;22(1):167–168.
8. Забрейко ПП. О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра. *Литовский математический сборник*. 1967;2:281–287.

References

1. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies 204. New York: Elsevier science; 2006. 523 p.
2. Gorenflo R, Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In: *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996)*. CISM Courses and Lectures. 1997;378:223–276.

3. Kilbas AA. New trends on fractional integral and differential equations. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*. 2005;147(1):72–106.
4. Zabreiko PP, Ponomareva SV. [Cauchy Problem for Riemann – Liouville fractional derivative equations]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2018;62(4):391–397. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-6.
5. Krasnosel'skii MA, Zabreiko PP, Pustyl'nik EI, Sobolevskii PE. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii* [Integral operators in spaces of summable functions]. Moscow: Nauka; 1966. 500 p. Russian.
6. Zabreiko PP, Koshelev AI, Krasnosel'skii MA, Mikhlin SG, Rakovshchik LS, Stetsenko VYa. *Integral'nye uravneniya* [Integral equations]. Moscow: Nauka; 1968. 448 p. Russian.
7. Zabreiko PP. Volterra integral operators. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys]. 1967;22(1):167–168. Russian.
8. Zabreiko PP. [On the spectral radius of integral Volterra operators]. *Litovskii matematicheskii sbornik* [Lithuanian Mathematical Journal]. 1967;2:281–287. Russian.

Статья поступила в редколлегию 11.06.2018.
Received by editorial board 11.06.2018.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, НАГРУЖЕННОГО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ ПО ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ

В. В. КОРОЛЕВИЧ¹⁾, Д. Г. МЕДВЕДЕВ²⁾

¹⁾Международный центр современного образования,
ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага 1, Чехия

²⁾Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Приводится решение плоской задачи теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска постоянной толщины. На внешнем контуре диск равномерно нагружен системой одинаковых сосредоточенных сил, симметричных относительно диаметра. Диск посажен с натягом на гибкий вал, так что на внутреннем контуре действует постоянное контактное давление. Напряжения и деформации, возникающие в таком вращающемся анизотропном кольцевом диске, будут неосесимметричными. Выводится дифференциальное уравнение 4-го порядка в частных производных для функции напряжений Эри. Его общее решение разыскивается в виде ряда Фурье по косинусам с четными номерами. Полученная бесконечная система обыкновенных дифференциальных

Образец цитирования:

Королевич ВВ, Медведев ДГ. Напряженно-деформированное состояние вращающегося полярно-ортотропного диска постоянной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:46–58.

For citation:

Karalevich UV, Medvedev DG. Stressed-deformed state of a rotating polar-orthotropic disk of constant thickness loaded with undistracted forces on the outer contour. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3: 46–58. Russian.

Авторы:

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:

Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij G. Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

уравнений решается стандартными методами теории дифференциальных уравнений. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. По известным формулам записываются выражения для компонент напряжений через функцию напряжений. Путем интегрирования уравнений закона Гука для полярно-ортотропной пластины определяются компоненты вектора перемещения в диске. Зная последние, легко по дифференциальным соотношениям Коши вычислить компоненты деформаций в кольцевом анизотропном диске. Отдельно рассмотрен случай вращающегося сплошного полярно-ортотропного диска постоянной толщины, нагруженного сосредоточенными силами на внешнем контуре. Полученные формулы для напряжений и перемещений полностью описывают напряженно-деформированное состояние во вращающемся полярно-ортотропном диске постоянной толщины с системой сосредоточенных сил на внешнем контуре.

Ключевые слова: полярно-ортотропный диск; сосредоточенная сила; дифференциальное уравнение; напряжения; деформации; перемещения в диске.

STRESSED-DEFORMED STATE OF A ROTATING POLAR-ORTHOTROPIC DISK OF CONSTANT THICKNESS LOADED WITH UNDISTRACTED FORCES ON THE OUTER CONTOUR

U. V. KARALEVICH^a, D. G. MEDVEDEV^b

*^aInternational Center of Modern Education,
61 Štěpánská, Prague 1, PSC 110 00, Czech*

^bBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: D. G. Medvedev (medvedev@bsu.by)

The work gives a solution of the plane elasticity problem for a rotating polar-orthotropic annular disk of a constant thickness. The disk is loaded with a system of identical undistracted forces on the outer contour applied evenly along the rim and symmetric concerning the diameter. The disk is seated with an interference fit on the flexible shaft so that a constant contact pressure acts on the interior contour. The stresses and deformations arising in such a rotating anisotropic annular disk will be non-axisymmetric. A conclusion of a fourth-order partial differential equation for the Erié stress function is drawn. Its general solution is searched out in the form of a Fourier series of cosines with even numbers. The resulting infinite system of ordinary differential equations is solved by standard methods of the theory of differential equations. Constants of integration are determined from the border conditions. Expressions for the stress components are written through the stress function by the well-known formulas. We find the components of the displacement vector in the disk by the integration of the Hooke's law equations for the polar-orthotropic plate. It is easy to calculate the deformation components in a ring anisotropic disk by Cauchy differential relations if we know the displacements. The case of a rotating solid polar-orthotropic disk of constant thickness loaded with undistracted forces on the outer contour is considered separately. The obtained formulas for stresses and displacements completely describe the stress-deformed state in a rotating polar-orthotropic disc of constant thickness with a system of undistracted forces on the outer contour.

Key words: polar-orthotropic disc; undistracted force; differential equation; stresses; deformations; displacements in the disk.

Введение

В современных лабораторных испытаниях часто используются стаканчиковые центрифуги, например для фракционирования крови или классификации микропорошков, а также центрифуги для исследования на эрозионную стойкость различных материалов, применяемых в авиационной и ракетной технике.

В НПО «Центр» разработаны и производятся центрифуги большого объема для фракционирования крови на станциях переливания крови и для классификации микропорошков на горно-обогачительных комбинатах [1]. Актуальной остается задача создания малых портативных центрифуг для фракционирования крови и ее экспресс-анализа (например, для бригад скорой помощи), а также малых центрифуг для классификации микропорошков в лабораторных исследованиях.

С запуском первого белорусского спутника в 2012 г. Республика Беларусь стала космической державой. Она принимает участие в различных международных проектах исследования космоса. В 2016 г.

Беларусь начала производить собственные высокоточные ракетные комплексы «Полонез», а также планирует разработать и создать крылатые ракеты «Аист». В связи с этим весьма актуальным становится проведение большого комплекса исследований по изучению влияния капельно-жидкостной и пылевидной среды на эрозионную стойкость материалов обтекателей головных частей ракет или обшивки капсулы спускаемого космического аппарата. Такие работы успешно проводились в 1980–90-х гг. в НПО «Центр» [2].

Роторы в указанных центрифугах могут иметь различные формы. Предлагаемый в данной работе ротор, как наиболее технологически простой в изготовлении и обладающий высокой производительностью, представляет собой анизотропный тонкий кольцевой диск постоянной толщины h_0 , нагруженный на внешнем контуре системой одинаковых сосредоточенных сил, приложенных равномерно по ободу и симметричных относительно диаметра. *Сосредоточенные силы* – это силы инерции, создаваемые стаканчиками с жидкостью или держателями с испытываемыми образцами материалов, возникающие при вращении ротора и действующие на малых участках внешнего контура. Диск насаживается с натягом на гибкий вал, так что на внутреннем контуре действует постоянное контактное давление p_0 . Напряжения и деформации, возникающие в таком вращающемся анизотропном кольцевом диске, будут неосесимметричными.

Постановка задачи и основные уравнения

Пусть материал диска обладает цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, в каждой точке которого имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Диск вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с осью анизотропии и перпендикулярной срединной плоскости диска. На внешнем контуре диск нагружен системой N одинаковых сосредоточенных сил P_i ($i = \overline{1, N}$), а на внутреннем контуре действует контактное давление p_0 .

Требуется найти распределение напряжений, деформаций и перемещений в данном анизотропном кольцевом диске постоянной толщины.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z , поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска. Ось z направим вертикально вверх. Радиус внутреннего контура диска обозначим r_0 , а радиус внешнего – R . Для тонкого диска отношение его толщины h_0 к внешнему радиусу R должно быть меньше $\frac{1}{20} \left(\frac{h_0}{R} < \frac{1}{20} \right)$. Например, при $R = 20$ см толщина диска h_0 равна

1 см, т. е. рассматриваемый тонкий диск не является таким тонкостенным, как мембрана.

Поскольку тонкий диск нагружен сосредоточенными силами, приложенными на внешней его границе параллельно плоскости диска, а центробежные силы действуют в той же плоскости, то диск будет находиться в *плоском напряженном состоянии* [3]. Тогда нормальным напряжением σ_z и касательными напряжениями $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ и $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ можно пренебречь по сравнению с остальными нормальными радиальным σ_r и тангенциальным σ_θ напряжениями и касательными $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ напряжениями. Предполагается, что компоненты напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ почти не зависят от координаты z и являются функциями только координат r и θ .

Отклонение от плоского напряженного состояния будет только в местах крепления стаканчиков с жидкостью или держателей образцов. Там появятся контактные напряжения, которые можно оценить по формулам сопротивления материалов или рассчитать методом конечных элементов.

Если фактор разделения Fr (или критерий Фруда, т. е. отношение центростремительного ускорения $a = \omega^2 R$ к ускорению свободного падения g) равен 1000–5000, то в стаканчиковых центрифугах влияние веса стаканчиков и диска на напряженное состояние в диске пренебрежимо мало и его можно не учитывать.

Выделим из диска двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент. Запишем уравнения равновесия этого элемента [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + \rho \omega^2 r = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ – плотность композитного материала диска.

Закон Гука для полярно-ортотропной пластины имеет вид [4]

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \sigma_\theta, \\ \varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\theta} \sigma_\theta, \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}} \tau_{r\theta}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varepsilon_r(r, \theta)$ и $\varepsilon_\theta(r, \theta)$ – нормальная радиальная и нормальная тангенциальная компоненты деформации соответственно; E_r и E_θ – модули упругости при растяжении (сжатии) анизотропного тела в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно; $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ – коэффициенты Пуассона; $\gamma_{r\theta}(r, \theta)$ – деформация сдвига; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига.

Для полярно-ортотропного тела справедливо следующее равенство:

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}.$$

Обозначим компоненты вектора перемещения $\bar{U}$ в радиальном направлении через $u(r, \theta)$, а в тангенциальном – через $v(r, \theta)$.

Связь компонент деформаций ε_r , ε_θ , $\gamma_{r\theta}$ с компонентами u и v вектора перемещения $\bar{U}$ задается дифференциальными соотношениями Коши [3]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (3)$$

Исключая из (3) компоненты u и v вектора перемещения $\bar{U}$, получим уравнение совместности деформаций [4]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial r^2} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta}. \quad (4)$$

Таким образом, имеем все уравнения плоской задачи теории упругости для вращающегося анизотропного тонкого кольцевого диска: два уравнения равновесия (1), три уравнения закона Гука (2), три дифференциальных соотношения Коши (3), которые содержат 8 неизвестных функций σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, ε_r , ε_θ , $\gamma_{r\theta}$, u , v . Число неизвестных функций равно количеству уравнений.

Дополним нашу плоскую задачу теории упругости граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_0, \theta) &= -p_0, \quad \sigma_r(R, \theta) = q_N(R, \theta), \\ \tau_{r\theta}(r_0, \theta) &= 0, \quad \tau_{r\theta}(R, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $q_N(R, \theta)$ – интенсивность распределенной нагрузки на внешнем контуре.

Решение плоской задачи теории упругости

Как известно, решение плоской задачи теории упругости для вращающегося тонкого анизотропного кольцевого диска при заданных граничных условиях (5) удобно вести с помощью функции напряжений Эри $F(r, \theta)$.

Компоненты напряжений $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ выражаются через функцию $F(r, \theta)$ по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}. \quad (6)$$

Подстановка соотношений (6) в уравнения равновесия (1) обращает их в тождества.

Записывая компоненты деформаций в законе Гука (2) через функцию напряжений $F(r, \theta)$ и затем подставляя их в уравнение совместности деформаций (4), получим неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных 4-го порядка для функции $F(r, \theta)$ [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{k^2}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{k^2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \\ + \left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) + 2k^2 \right] \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{k^2}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = - \left[(k^2 - 1) - 2(1 - \nu_{\theta r}) \right] \rho \omega^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $k^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$.

Поскольку на внешнем контуре диска приложено четное количество N одинаковых и симметричных относительно диаметра сосредоточенных сил P_i , то разложим функцию напряжений $F(r, \theta)$ в ряд Фурье по косинусам с четными номерами:

$$F(r, \theta) = \Phi_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{Nn}(r) \cos Nn\theta. \quad (8)$$

Подставляя разложение (8) в уравнение (7), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для функций $\Phi_0(r)$, $\Phi_{Nn}(r)$:

$$(n=0) \quad \frac{d^4 \Phi_0}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi_0}{dr^3} - \frac{k^2}{r^2} \frac{d^2 \Phi_0}{dr^2} + \frac{k^2}{r^3} \frac{d \Phi_0}{dr} x = - \left[(k^2 - 1) - 2(1 - \nu_{\theta r}) \right] \rho \omega^2; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (n \geq 1) \quad \frac{d^4 \Phi_{Nn}}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi_{Nn}}{dr^3} - \left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) (Nn)^2 + k^2 \right] \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi_{Nn}}{dr^2} + \\ + \left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) (Nn)^2 + k^2 \right] \frac{1}{r^3} \frac{d \Phi_{Nn}}{dr} - \left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) - ((Nn)^2 - 2)k^2 \right] \frac{(Nn)^2}{r^4} \Phi_{Nn}(r) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем новую переменную $t = \ln r$. Уравнения (9), (10) приведем к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$(n=0) \quad \frac{d^4 \Phi_0}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \Phi_0}{dt^3} - (k^2 - 5) \frac{d^2 \Phi_0}{dt^2} + 2(k^2 - 1) \frac{d \Phi_0}{dt} = - \left[(k^2 - 1) - 2(1 - \nu_{\theta r}) \right] \rho \omega^2 e^{4t}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (n \geq 1) \quad \frac{d^4 \Phi_{Nn}}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \Phi_{Nn}}{dt^3} - \left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 - 5) \right] \frac{d^2 \Phi_{Nn}}{dt^2} + \\ + 2 \left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 - 1) \right] \frac{d \Phi_{Nn}}{dt} - (Nn)^2 \left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_{\theta r} \right) - ((Nn)^2 - 2)k^2 \right] \Phi_{Nn}(t) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения для уравнения (11) есть

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - (k^2 - 5)\lambda^2 + 2(k^2 - 1)\lambda = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1 + k$, $\lambda_4 = 1 - k$.

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$\Phi_0^{\text{однор}}(t) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)} e^{2t} + C_3^{(0)} e^{(1+k)t} + C_4^{(0)} e^{(1-k)t},$$

где $C_i^{(0)}$ ($i = \overline{1, 4}$) – произвольные постоянные.

Частное решение дифференциального уравнения (11) равно

$$\Phi_0^{\text{част}}(t) = - \frac{\left[(k^2 - 1) - 2(1 - \nu_{\theta r}) \right] \rho \omega^2}{(9 - k^2)} e^{4t}.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (11) есть

$$\Phi_0(t) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)} e^{2t} + C_3^{(0)} e^{(1+k)t} + C_4^{(0)} e^{(1-k)t} - \frac{[(k^2 - 1) - 2(1 - v_{\theta r})] \rho \omega^2}{(9 - k^2)} e^{4t}. \quad (13)$$

В переменной r решение (13) запишется в виде

$$\Phi_0(r) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)} r^2 + C_3^{(0)} r^{1+k} + C_4^{(0)} r^{1-k} - \frac{[(k^2 - 1) - 2(1 - v_{\theta r})] \rho \omega^2 r^4}{(9 - k^2)}. \quad (14)$$

Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения (12) есть

$$\begin{aligned} \mu^4 - 4\mu^3 - \left[\left(\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2v_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 - 5) \right] \mu^2 + 2 \left[\left(\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2v_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 - 1) \right] \mu - \\ - (Nn)^2 \left[\left(\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2v_{\theta r} \right) - ((Nn)^2 - 2)k^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Это алгебраическое уравнение 4-й степени путем замены $(\mu - 1)^2 = \chi$ сводится к биквадратному уравнению

$$\chi^2 - \left[\left(\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2v_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 + 1) \right] \chi + ((Nn)^2 - 1)^2 k^2 = 0.$$

Его корни равны

$$\begin{aligned} \chi_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2v_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 + 1) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{\left[\left(\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2v_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 + 1) \right]^2 - 4((Nn)^2 - 1)^2 k^2} \right\}, \\ \chi_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2v_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 + 1) \right] - \right. \\ \left. - \sqrt{\left[\left(\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2v_{\theta r} \right) (Nn)^2 + (k^2 + 1) \right]^2 - 4((Nn)^2 - 1)^2 k^2} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда корни характеристического уравнения (15) есть

$$\mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\chi_1}, \quad \mu_{3,4} = 1 \pm \sqrt{\chi_2}.$$

Используя формулу сложного радикала

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \left[\sqrt{\frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - B})} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - B})} \right],$$

корни характеристического уравнения (15) окончательно запишем в виде

$$\mu_{1,2}(n) = 1 \pm m_1(n), \quad \mu_{3,4}(n) = 1 \pm m_2(n),$$

где

$$m_1(n) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} + 2(k - v_{\theta r}) \right] (Nn)^2 + (k - 1)^2} + \sqrt{\left[\frac{E_{\theta}}{G_{r\theta}} - 2(k + v_{\theta r}) \right] (Nn)^2 + (k + 1)^2} \right\},$$

$$m_2(n) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} + 2(k - v_{\theta r}) \right] (Nn)^2 + (k-1)^2} - \sqrt{\left[\frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2(k + v_{\theta r}) \right] (Nn)^2 + (k+1)^2} \right\}.$$

(Далее аргумент n у функций $m_1(n)$ и $m_2(n)$ писать не будем.)

Общее решение однородного дифференциального уравнения (12) есть

$$\Phi_{Nn}(t) = C_1^{(Nn)} e^{(1+m_1)t} + C_2^{(Nn)} e^{(1-m_1)t} + C_3^{(Nn)} e^{(1+m_2)t} + C_4^{(Nn)} e^{(1-m_2)t}, \quad (16)$$

где $C_i^{(Nn)}$ ($i = \overline{1, 4}$) – произвольные постоянные.

В переменной r решение (16) запишется в виде

$$\Phi_{Nn}(r) = C_1^{(Nn)} r^{1+m_1} + C_2^{(Nn)} r^{1-m_1} + C_3^{(Nn)} r^{1+m_2} + C_4^{(Nn)} r^{1-m_2}. \quad (17)$$

Учитывая выражения (14)–(17) для коэффициентов разложения в ряд Фурье (8) функции напряжений $F(r, \theta)$, вычислим по формулам (6) компоненты напряжений $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &= (k+1)C_3^{(0)} r^{(k-1)} - (k-1)C_4^{(0)} r^{-(k+1)} - \frac{(3 + v_{\theta r})}{(9 - k^2)} \rho \omega^2 r^2 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[m_1 - ((Nn)^2 - 1) \right] C_1^{(Nn)} r^{(m_1-1)} - \left[m_1 + ((Nn)^2 - 1) \right] C_2^{(Nn)} r^{-(m_1+1)} + \right. \\ &+ \left. \left[m_2 - ((Nn)^2 - 1) \right] C_3^{(Nn)} r^{(m_2-1)} - \left[m_2 + ((Nn)^2 - 1) \right] C_4^{(Nn)} r^{-(m_2+1)} \right\} \cos Nn\theta, \quad (18) \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= k(k+1)C_3^{(0)} r^{(k-1)} + k(k-1)C_4^{(0)} r^{-(k+1)} - \frac{(k^2 + 3v_{\theta r})}{(9 - k^2)} \rho \omega^2 r^2 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[m_1(m_1+1)C_1^{(Nn)} r^{(m_1-1)} + m_1(m_1-1)C_2^{(Nn)} r^{-(m_1+1)} + m_2(m_2+1)C_3^{(Nn)} r^{(m_2-1)} + \right. \\ &+ \left. m_2(m_2-1)C_4^{(Nn)} r^{-(m_2+1)} \right] \cos Nn\theta, \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} Nn \left[m_1 C_1^{(Nn)} r^{(m_1-1)} - m_2 C_2^{(Nn)} r^{-(m_1+1)} + m_2 C_3^{(Nn)} r^{(m_2-1)} - \right. \\ &+ \left. m_2 C_4^{(Nn)} r^{-(m_2+1)} \right] \sin Nn\theta. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнения Гука (2) выражения для компонент напряжений (18) и используя дифференциальные соотношения Коши (3), после их интегрирования получим компоненты $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ вектора перемещения $\bar{U}$:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{(k - v_{\theta r})(k+1)}{E_\theta} C_3^{(0)} r^k + \frac{(k + v_{\theta r})(k-1)}{E_\theta} C_4^{(0)} r^{-k} - \frac{(k^2 - v_{\theta r})}{(9 - k^2)} \frac{\rho \omega^2 r^3}{E_\theta} - \\ &- \frac{1}{E_\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m_1} \left[v_{\theta r} m_1^2 - (k^2 - v_{\theta r}) m_1 + ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] C_1^{(Nn)} r^{m_1} - \right. \\ &- \frac{1}{m_1} \left[v_{\theta r} m_1^2 + (k^2 - v_{\theta r}) m_1 + ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] C_2^{(Nn)} r^{-m_1} + \\ &+ \frac{1}{m_2} \left[v_{\theta r} m_2^2 - (k^2 - v_{\theta r}) m_2 + ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] C_3^{(Nn)} r^{m_2} - \\ &- \left. \frac{1}{m_2} \left[v_{\theta r} m_2^2 + (k^2 - v_{\theta r}) m_2 + ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] C_4^{(Nn)} r^{-m_2} \right\} \cos Nn\theta, \quad (19) \end{aligned}$$

$$v(r, \theta) = \frac{1}{E_\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Nn} \left\{ \frac{1}{m_1} \left[m_1^2(m_1+1) - (k^2 - (Nn)^2 v_{\theta r}) m_1 + ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] C_1^{(Nn)} r^{m_1} + \right. \\ + \frac{1}{m_1} \left[m_1^2(m_1-1) - (k^2 - (Nn)^2 v_{\theta r}) m_1 - ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] C_2^{(Nn)} r^{-m_1} + \\ + \frac{1}{m_2} \left[m_2^2(m_2+1) - (k^2 - (Nn)^2 v_{\theta r}) m_2 + ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] C_3^{(Nn)} r^{m_2} + \\ \left. + \frac{1}{m_2} \left[m_2^2(m_2-1) - (k^2 - (Nn)^2 v_{\theta r}) m_2 - ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] C_4^{(Nn)} r^{-m_2} \right\} \sin Nn\theta.$$

Из условия однозначности перемещений в диске постоянную $C_2^{(0)}$ нужно приравнять к нулю.

Рассмотрим случай, когда диск нагружен двумя равными и диаметрально противоположными сосредоточенными силами $P_1 = P_2 = \frac{m_{\text{ст}} \omega^2 R_{\text{ц.т}}^{\text{ст}}}{h_0}$, где $m_{\text{ст}}$ – масса стаканчика с жидкостью; $R_{\text{ц.т}}^{\text{ст}}$ – расстояние от оси вращения до центра тяжести стаканчика с жидкостью.

Заменим заданные сосредоточенные силы $P = P_1 = P_2$ распределенной нагрузкой интенсивностью q_2 , приложенной по двум малым дугам одинаковой длины $l = \varphi R$:

$$q_2 = \frac{P}{\varphi R} \text{ при } -\frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \frac{\varphi}{2} \text{ и } \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \leq \theta \leq \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$q_2 = 0 \text{ при } \frac{\varphi}{2} < \theta < \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \text{ и } \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right) < \theta < \left(2\pi - \frac{\varphi}{2} \right),$$

где φ – произвольный сколь угодно малый центральный угол, опирающийся на дугу l .

Поскольку нагрузка q_2 симметрична относительно диаметра, разложим ее в тригонометрический ряд Фурье по косинусам с четными номерами n :

$$q_2(R, \theta) = \frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} \cos 2n\theta,$$

где

$$q_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q_2 d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi/2} \frac{P}{\varphi R} d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\pi-\varphi/2}^{\pi} \frac{P}{\varphi R} d\theta = \frac{2P}{\pi \varphi R} \left(\frac{\varphi}{2} - 0 \right) + \frac{2P}{\pi \varphi R} \left(\pi - \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \frac{2P}{\pi R};$$

$$q_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q_2 \cos 2n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi/2} \frac{P}{\varphi R} \cos 2n\theta d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\pi-\varphi/2}^{\pi} \frac{P}{\varphi R} \cos 2n\theta d\theta = \frac{2P}{\pi \varphi R} \left(\frac{\sin n\varphi - 0}{2n} \right) + \\ + \frac{2P}{\pi \varphi R} \frac{1}{2n} \left(\sin 2n\pi - \sin 2n \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \frac{2P}{\pi R} \left(\frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \right).$$

Так как $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \right) = 1$, то $q_{2n} = \frac{2P}{\pi R}$. Следовательно,

$$q_2(R, \theta) = \frac{P}{\pi R} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\theta \right).$$

Аналогично рассуждая для случая нагружения внешнего контура диска N одинаковыми сосредоточенными силами P_i ($i = \overline{1, N}$), симметричными относительно диаметра, получим для распределенной нагрузки интенсивностью $q_N(R, \theta)$ выражение

$$q_N(R, \theta) = \frac{NP}{2\pi R} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nn\theta \right). \quad (20)$$

Для нахождения неизвестных постоянных $C_3^{(0)}$, $C_4^{(0)}$ и $C_i^{(Nn)}$ ($i = \overline{1, 4}$) удовлетворим найденное решение (18) для компонент напряжений граничным условиям (5), в которых $q_N(R, \theta)$ задается выражением (20):

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_0, \theta) &= (k+1)C_3^{(0)}r_0^{(k-1)} - (k-1)C_4^{(0)}r_0^{-(k+1)} - \frac{(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)}\rho\omega^2r_0^2 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[m_1 - ((Nn)^2 - 1) \right] C_1^{(Nn)}r_0^{(m_1-1)} - \left[m_1 + ((Nn)^2 - 1) \right] C_2^{(Nn)}r_0^{-(m_1+1)} + \right. \\ &+ \left. \left[m_2 - ((Nn)^2 - 1) \right] C_3^{(Nn)}r_0^{(m_2-1)} - \left[m_2 + ((Nn)^2 - 1) \right] C_4^{(Nn)}r_0^{-(m_2+1)} \right\} \cos Nn\theta = -p_0, \\ \tau_{r\theta}(r_0, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} Nn \left[m_1 C_1^{(Nn)}r_0^{(m_1-1)} - m_2 C_2^{(Nn)}r_0^{-(m_1+1)} + \right. \\ &+ \left. m_2 C_3^{(Nn)}r_0^{(m_2-1)} - m_2 C_4^{(Nn)}r_0^{-(m_2+1)} \right] \sin Nn\theta = 0, \\ \sigma_r(R, \theta) &= (k+1)C_3^{(0)}R^{(k-1)} - (k-1)C_4^{(0)}R^{-(k+1)} - \frac{(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)}\rho\omega^2R^2 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[m_1 - ((Nn)^2 - 1) \right] C_1^{(Nn)}R^{(m_1-1)} - \left[m_1 + ((Nn)^2 - 1) \right] C_2^{(Nn)}R^{-(m_1+1)} + \right. \\ &+ \left. \left[m_2 - ((Nn)^2 - 1) \right] C_3^{(Nn)}R^{(m_2-1)} - \left[m_2 + ((Nn)^2 - 1) \right] C_4^{(Nn)}R^{-(m_2+1)} \right\} \cos Nn\theta = \\ &= q_N(R, \theta) = \frac{NP}{2\pi R} + \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nn\theta, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(R, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} Nn \left[m_1 C_1^{(Nn)}R^{(m_1-1)} - m_2 C_2^{(Nn)}R^{-(m_1+1)} + \right. \\ &+ \left. m_2 C_3^{(Nn)}R^{(m_2-1)} - m_2 C_4^{(Nn)}R^{-(m_2+1)} \right] \sin Nn\theta = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_3^{(0)} &= (k+1)C_3^{(0)}R^{(k-1)}, \quad \tilde{C}_4^{(0)} = (k-1)C_4^{(0)}R^{-(k+1)}; \\ \tilde{C}_1^{(Nn)} &= C_1^{(Nn)}R^{(m_1-1)}, \quad \tilde{C}_2^{(Nn)} = C_2^{(Nn)}R^{-(m_1+1)}, \quad \tilde{C}_3^{(Nn)} = C_3^{(Nn)}R^{(m_2-1)}, \\ \tilde{C}_4^{(Nn)} &= C_4^{(Nn)}R^{-(m_2+1)}; \quad A = \frac{(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)}\rho\omega^2R^2; \quad x = \frac{r}{R}, \quad \delta = \frac{r_0}{R}, \quad x \in [\delta, 1]. \end{aligned}$$

Тогда систему уравнений (21) представим в виде двух систем:

$$(n=0) \quad \begin{cases} \tilde{C}_3^{(0)}\delta^{(k-1)} - \tilde{C}_4^{(0)}\delta^{-(k+1)} = -p_0 + \frac{(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)}\rho\omega^2R^2\delta^2, \\ \tilde{C}_3^{(0)} - \tilde{C}_4^{(0)} = \frac{NP}{2\pi R} + \frac{(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)}\rho\omega^2R^2; \end{cases} \quad (22)$$

$$(n \geq 1) \begin{cases} \tilde{C}_1^{(Nn)} \left[m_1 - ((Nn)^2 - 1) \right] \delta^{(m_1-1)} - \tilde{C}_2^{(Nn)} \left[m_1 + ((Nn)^2 - 1) \right] \delta^{-(m_1+1)} + \\ + \tilde{C}_3^{(Nn)} \left[m_2 - ((Nn)^2 - 1) \right] \delta^{(m_2-1)} - \tilde{C}_4^{(Nn)} \left[m_2 + ((Nn)^2 - 1) \right] \delta^{-(m_2+1)} = 0, \\ \tilde{C}_1^{(Nn)} m_1 \delta^{(m_1-1)} - \tilde{C}_2^{(Nn)} m_1 \delta^{-(m_1+1)} + \tilde{C}_3^{(Nn)} m_2 \delta^{(m_2-1)} - \tilde{C}_4^{(Nn)} m_2 \delta^{-(m_2+1)} = 0, \\ \tilde{C}_1^{(Nn)} \left[m_1 - ((Nn)^2 - 1) \right] - \tilde{C}_2^{(Nn)} \left[m_1 + ((Nn)^2 - 1) \right] + \\ + \tilde{C}_3^{(Nn)} \left[m_2 - ((Nn)^2 - 1) \right] - \tilde{C}_4^{(Nn)} \left[m_2 + ((Nn)^2 - 1) \right] = \frac{NP}{\pi R}, \\ \tilde{C}_1^{(Nn)} m_1 - \tilde{C}_2^{(Nn)} m_1 + \tilde{C}_3^{(Nn)} m_2 - \tilde{C}_4^{(Nn)} m_2 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Решая системы алгебраических уравнений (22), (23) методом Крамера, получим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_3^{(0)} &= p_0 \frac{\delta^{k+1}}{(1 - \delta^{2k})} + \frac{NP}{2\pi R} \frac{1}{(1 - \delta^{2k})} + \frac{(3 + v_{\theta r})}{(9 - k^2)} \frac{(1 - \delta^{3+k})}{(1 - \delta^{2k})} \rho \omega^2 R^2, \\ \tilde{C}_4^{(0)} &= p_0 \frac{\delta^{k+1}}{(1 - \delta^{2k})} + \frac{NP}{2\pi R} \frac{\delta^{2k}}{(1 - \delta^{2k})} + \frac{(3 + v_{\theta r})}{(9 - k^2)} \frac{(\delta^{2k} - \delta^{3+k})}{(1 - \delta^{2k})} \rho \omega^2 R^2; \\ \tilde{C}_1^{(Nn)}(n) &= -\frac{NP}{\pi R \Delta(n)} \tilde{C}_1^{*(Nn)}(n), \quad \tilde{C}_2^{(Nn)}(n) = -\frac{NP}{\pi R \Delta(n)} \tilde{C}_2^{*(Nn)}(n), \\ \tilde{C}_3(n) &= -\frac{NP}{\pi R \Delta(n)} \tilde{C}_3^{*(Nn)}(n), \quad \tilde{C}_4(n) = -\frac{NP}{\pi R \Delta(n)} \tilde{C}_4^{*(Nn)}(n), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^{*(Nn)}(n) &= \left[2m_1 m_2 - m_2(m_1 - m_2) \delta^{-(m_1+m_2)} - m_2(m_1 + m_2) \delta^{-(m_1-m_2)} \right]; \\ \tilde{C}_2^{*(Nn)}(n) &= \left[2m_1 m_2 - m_2(m_1 - m_2) \delta^{(m_1+m_2)} - m_2(m_1 + m_2) \delta^{(m_1-m_2)} \right]; \\ \tilde{C}_3^{*(Nn)}(n) &= \left[2m_1 m_2 - m_1(m_1 + m_2) \delta^{(m_1-m_2)} + m_1(m_1 - m_2) \delta^{-(m_1+m_2)} \right]; \\ \tilde{C}_4^{*(Nn)}(n) &= \left[2m_1 m_2 + m_1(m_1 - m_2) \delta^{(m_1+m_2)} - m_1(m_1 + m_2) \delta^{(m_1-m_2)} \right]; \\ \Delta(n) &= ((Nn)^2 - 1) \left\{ 8m_1 m_2 + (m_1 - m_2)^2 \left[\delta^{(m_1+m_2)} + \delta^{-(m_1+m_2)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (m_1 + m_2)^2 \left[\delta^{(m_1-m_2)} + \delta^{-(m_1-m_2)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Запишем окончательные выражения для компонент напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ и компонент u и v вектора перемещения $\bar{U}$ в переменных x , θ для вращающегося анизотропного кольцевого диска:

$$\begin{aligned} \sigma_r(x, \theta) &= p_0 \frac{\delta^{k+1}}{(1 - \delta^{2k})} \left[x^{(k-1)} - x^{-(k+1)} \right] + \frac{NP}{2\pi R} \frac{1}{(1 - \delta^{2k})} \left[x^{(k-1)} - \delta^{2k} x^{-(k+1)} \right] + \\ &+ \frac{(3 + v_{\theta r})}{(9 - k^2)} \frac{\rho \omega^2 R^2}{(1 - \delta^{2k})} \left[(1 - \delta^{3+k}) x^{(k-1)} - (\delta^{2k} - \delta^{3+k}) x^{-(k+1)} - (1 - \delta^{2k}) x^2 \right] - \\ &- \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta(n)} \left\{ \left[m_1 - ((Nn)^2 - 1) \right] \tilde{C}_1^{*(Nn)} x^{(m_1-1)} - \left[m_1 + ((Nn)^2 - 1) \right] \tilde{C}_2^{*(Nn)} x^{-(m_1+1)} + \right. \\ &\quad \left. + \left[m_2 - ((Nn)^2 - 1) \right] \tilde{C}_3^{*(Nn)} x^{(m_2-1)} - \left[m_2 + ((Nn)^2 - 1) \right] \tilde{C}_4^{*(Nn)} x^{-(m_2+1)} \right\} \cos Nn\theta, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta}(x, \theta) = & p_0 \frac{k\delta^{k+1}}{(1-\delta^{2k})} \left[x^{(k-1)} + x^{-(k+1)} \right] + \frac{NP}{2\pi R} \frac{k}{(1-\delta^{2k})} \left[x^{(k-1)} + \delta^{2k} x^{-(k+1)} \right] + \\
 & + \frac{(3+v_{\theta r})}{(9-k^2)} \frac{\rho\omega^2 R^2}{(1-\delta^{2k})} \left[k(1-\delta^{3+k})x^{(k-1)} + k(\delta^{2k}-\delta^{3+k})x^{-(k+1)} - \left(\frac{k^2+3v_{\theta r}}{3+v_{\theta r}} \right) (1-\delta^{2k})x^2 \right] - \\
 & - \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta(n)} \left[m_1(m_1+1)\tilde{C}_1^{*(Nn)} x^{(m_1-1)} + m_1(m_1-1)\tilde{C}_2^{*(Nn)} x^{-(m_1+1)} + \right. \\
 & \left. + m_2(m_2+1)\tilde{C}_3^{*(Nn)} x^{(m_2-1)} + m_2(m_2-1)\tilde{C}_4^{*(Nn)} x^{-(m_2+1)} \right] \cos Nn\theta, \\
 \tau_{r\theta}(x, \theta) = & - \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Nn}{\Delta(n)} \times \\
 & \times \left[m_1\tilde{C}_1^{*(Nn)} x^{(m_1-1)} - m_1\tilde{C}_2^{*(Nn)} x^{-(m_1+1)} + m_2\tilde{C}_3^{*(Nn)} x^{(m_2-1)} - m_2\tilde{C}_4^{*(Nn)} x^{-(m_2+1)} \right] \sin Nn\theta; \\
 u(x, \theta) = & \frac{R}{E_{\theta}} \left\{ p_0 \frac{\delta^{k+1}}{(1-\delta^{2k})} \left[(k-v_{\theta r})x^k + (k+v_{\theta r})x^{-k} \right] + \frac{NP}{2\pi R} \frac{1}{(1-\delta^{2k})} \left[(k-v_{\theta r})x^k + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (k+v_{\theta r})\delta^{2k}x^{-k} \right] + \frac{(3+v_{\theta r})}{(9-k^2)} \frac{\rho\omega^2 R^2}{(1-\delta^{2k})} \left[(k-v_{\theta r})(1-\delta^{3+k})x^k + (k+v_{\theta r}) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times (\delta^{2k}-\delta^{3+k})x^{-k} - \left(\frac{k^2-v_{\theta r}^2}{3+v_{\theta r}} \right) (1-\delta^{2k})x^3 \right] + \right. \\
 & + \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta(n)} \left\{ \frac{1}{m_1} \left[v_{\theta r}m_1^2 - (k^2-v_{\theta r})m_1 + ((Nn)^2-1)k^2 \right] \tilde{C}_1^{*(Nn)} x^{m_1} - \right. \\
 & - \frac{1}{m_1} \left[v_{\theta r}m_1^2 + (k^2-v_{\theta r})m_1 + ((Nn)^2-1)k^2 \right] \tilde{C}_2^{*(Nn)} x^{-m_1} + \\
 & + \frac{1}{m_2} \left[v_{\theta r}m_2^2 - (k^2-v_{\theta r})m_2 + ((Nn)^2-1)k^2 \right] \tilde{C}_3^{*(Nn)} x^{m_2} - \\
 & \left. - \frac{1}{m_2} \left[v_{\theta r}m_2^2 + (k^2-v_{\theta r})m_2 + ((Nn)^2-1)k^2 \right] \tilde{C}_4^{*(Nn)} x^{-m_2} \right\} \cos Nn\theta \Big\}, \\
 v(x, \theta) = & - \frac{NP}{\pi R E_{\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(Nn)\Delta(n)} \left\{ \frac{1}{m_1} \left[m_1^2(m_1+1) - (k^2-(Nn)^2v_{\theta r})m_1 + ((Nn)^2-1)k^2 \right] \tilde{C}_1^{*(Nn)} x^{m_1} + \right. \\
 & + \frac{1}{m_1} \left[m_1^2(m_1-1) - (k^2-(Nn)^2v_{\theta r})m_1 - ((Nn)^2-1)k^2 \right] \tilde{C}_2^{*(Nn)} x^{-m_1} + \\
 & + \frac{1}{m_2} \left[m_2^2(m_2+1) - (k^2-(Nn)^2v_{\theta r})m_2 + ((Nn)^2-1)k^2 \right] \tilde{C}_3^{*(Nn)} x^{m_2} + \\
 & \left. + \frac{1}{m_2} \left[m_2^2(m_2-1) - (k^2-(Nn)^2v_{\theta r})m_2 - ((Nn)^2-1)k^2 \right] \tilde{C}_4^{*(Nn)} x^{-m_2} \right\} \sin Nn\theta.
 \end{aligned}$$

Зная компоненты $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ вектора перемещения $\vec{U}$, легко по дифференциальным соотношениям Коши (3) вычислить компоненты деформаций $\varepsilon_r(r, \theta)$, $\varepsilon_\theta(r, \theta)$, $\gamma_{r\theta}(r, \theta)$.

Рассмотрим теперь вращающийся анизотропный сплошной диск постоянной толщины h_0 , который нагружен на внешнем контуре системой N одинаковых сосредоточенных сил, распределенных равномерно по ободу и симметричных относительно диаметра. Так как в центре сплошного диска отсутствуют перемещения, то в формулах (18), (19) постоянные $C_4^{(0)}$, $C_2^{(Nn)}$, $C_4^{(Nn)}$ положим равными нулю. Остальные постоянные определим из граничных условий на внешнем контуре диска. В результате получим

$$\tilde{C}_3^{(0)} = \frac{NP}{2\pi R} + \frac{(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)} \rho \omega^2 R^2, \quad \tilde{C}_1^{(Nn)} = \frac{NP}{\pi R} \frac{1}{((Nn)^2 - 1)} \frac{m_2}{(m_1 - m_2)},$$

$$\tilde{C}_3^{(Nn)} = -\frac{NP}{\pi R} \frac{1}{((Nn)^2 - 1)} \frac{m_1}{(m_1 - m_2)}.$$

Запишем выражения для компонент напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ и компонент u и v вектора перемещения $\vec{U}$ в переменных x , θ для вращающегося анизотропного сплошного диска:

$$\begin{aligned} \sigma_r(x, \theta) &= \frac{NP}{2\pi R} x^{k-1} + \frac{(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)} \rho \omega^2 R^2 (x^{k-1} - x^2) + \\ &+ \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((Nn)^2 - 1)} \frac{1}{(m_1 - m_2)} \left\{ m_2 \left[m_1 - ((Nn)^2 - 1) \right] x^{m_1-1} - m_1 \left[m_2 - ((Nn)^2 - 1) \right] x^{m_2-1} \right\} \cos Nn\theta, \\ \sigma_\theta(x, \theta) &= k \frac{NP}{2\pi R} x^{k-1} + \frac{(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)} \rho \omega^2 R^2 \left[kx^{k-1} - \left(\frac{k^2 + 3\nu_{\theta r}}{3 + \nu_{\theta r}} \right) x^2 \right] + \\ &+ \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((Nn)^2 - 1)} \frac{m_1 m_2}{(m_1 - m_2)} \left[(m_1 + 1) x^{m_1-1} - (m_2 + 1) x^{m_2-1} \right] \cos Nn\theta, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tau_{r\theta}(x, \theta) = \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Nn}{((Nn)^2 - 1)} \frac{m_1 m_2}{(m_1 - m_2)} (x^{m_1-1} - x^{m_2-1}) \sin Nn\theta;$$

$$\begin{aligned} u(x, \theta) &= \frac{R}{E_\theta} \left\{ (k - \nu_{\theta r}) \frac{NP}{2\pi R} x^k + \frac{(k - \nu_{\theta r})(3 + \nu_{\theta r})}{(9 - k^2)} \rho \omega^2 R^2 \left[x^k - \left(\frac{k + \nu_{\theta r}}{3 + \nu_{\theta r}} \right) x^3 \right] - \right. \\ &- \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((Nn)^2 - 1)} \frac{1}{(m_1 - m_2)} \left\{ \frac{m_2}{m_1} \left[\nu_{\theta r} m_1^2 - (k^2 - \nu_{\theta r}) m_1 + ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] x^{m_1} - \right. \\ &- \left. \left. \frac{m_1}{m_2} \left[\nu_{\theta r} m_2^2 - (k^2 - \nu_{\theta r}) m_2 + ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] x^{m_2} \right\} \cos Nn\theta \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, \theta) &= \frac{R}{E_\theta} \left\{ \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Nn((Nn)^2 - 1)} \frac{1}{(m_1 - m_2)} \left\{ \frac{m_2}{m_1} \left[m_1^2 (m_1 + 1) - (k^2 - (Nn)^2 \nu_{\theta r}) m_1 + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] x^{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \left[m_2^2 (m_2 + 1) - (k^2 - (Nn)^2 \nu_{\theta r}) m_2 + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. ((Nn)^2 - 1) k^2 \right] x^{m_2} \right\} \sin Nn\theta \right\}. \end{aligned}$$

Заключение

Полученные формулы (24), (25) для напряжений и перемещений полностью описывают напряженно-деформированное состояние вращающихся полярно-ортотропных кольцевых и сплошных дисков постоянной толщины с системой сосредоточенных сил на внешнем контуре. Результаты данной работы могут быть использованы при проектировании стаканчиковых центрифуг или стендов для эрозионных испытаний конструкционных материалов с предложенной формой ротора.

Библиографические ссылки

1. Соболев ЮФ, Выгонный ВГ, Мякота ВК, Кушко ВМ, Королевич ВВ. Установки для фракционирования крови и классификации микропорошков. *Технический прогресс в атомной промышленности. Серия: Твэлостроение*. 1988;4(24):103–105.
2. Соболев ЮФ, Сафрошкин АИ, Карнейчик СД, Ивановский АМ, Воропаев МЕ, Королевич ВВ и др. Стенды для эрозионных испытаний конструкционных материалов. *Технический прогресс в атомной промышленности. Серия: Твэлостроение*. 1988;4(24):106–109.
3. Тимошенко СП, Гудьер Дж. *Теория упругости*. Москва: Наука; 1978.
4. Лехницкий СГ. *Анизотропные пластинки*. Москва: Физматгиз; 1959.

References

1. Sobolev YuF, Vygonny VG, Myakota VK, Kushko VM, Korolevich VV. [Installations for blood fractionation and classification of micropowders]. *Tekhnicheskii progress v atomnoi promyshlennosti. Seriya: Tvelostroenie* [Technical progress in the nuclear industry. Series: Tvelostroenie]. 1988;4(24):103–105. Russian.
2. Sobolev YuF, Saftroshkin AI, Karneychik SD, Ivanovskiy AM, Voropaev ME, Korolevich VV, et al. [Stands for erosion testing of construction materials]. *Tekhnicheskii progress v atomnoi promyshlennosti. Seriya: Tvelostroenie* [Technical progress in the nuclear industry. Series: Tvelostroenie]. 1988;4(24):106–109. Russian.
3. Timoshenko SP, Goodyer J. *Teoriya uprugosti* [The theory of elasticity]. Moscow: Nauka; 1978. Russian.
4. Lehnitsky SG. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow: Fizmatgiz; 1959. Russian.

Статья поступила в редколлегию 07.05.2018.
Received by editorial board 07.05.2018.

УДК 519.67

УСЛОВИЯ ПРИВАТИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ МАССИВА ПОТОКАМИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Н. А. ЛИХОДЕД¹⁾, М. А. ПОЛЕЩУК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Множество операций параллельного алгоритма для реализации на графическом процессоре должно быть разбито на потоки (нити) вычислений. Потоки следует сгруппировать в блоки вычислений, выполняющиеся атомарно на потоковых процессорах, называемых также мультипроцессорами. Для хорошей производительности графического процессора важно, чтобы как можно больше данных умещались в быстрых регистровой и разделяемой памяти, иначе используются медленные глобальная и локальная память. Степень использования памяти с быстрым доступом отражает вычислительное свойство алгоритма, называемое локальностью. При реализации алгоритмов на многопроцессорных вычислительных устройствах применение локальности играет важнейшую роль для достижения высокой производительности. В данной работе сформулированы и доказаны необходимые условия и достаточные условия, использование которых позволяет получать потоки с приватизированными данными, т. е. такие потоки вычислений, что элемент массива используется только одним потоком, и поэтому его целесообразно разместить в регистре.

Ключевые слова: параллельные вычисления; графический процессор; тайлинг; приватизация элементов массива; регистры.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»).

Образец цитирования:

Лиходед НА, Полещук МА. Условия приватизации элементов массива потоками вычислений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:59–67.

For citation:

Likhoded NA, Paliashchuk MA. Conditions for privatizing the elements of arrays by computing threads. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3: 59–67. Russian.

Авторы:

Николай Александрович Лиходед – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики.

Максим Александрович Полещук – ассистент кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Nikolai A. Likhoded, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of computational mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.

likhoded@bsu.by

Maksim A. Paliashchuk, assistant at the department of computational mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.

poleschuma@bsu.by

CONDITIONS FOR PRIVATIZING THE ELEMENTS OF ARRAYS BY COMPUTING THREADS

N. A. LIKHODED^a, M. A. PALIASHCHUK^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: N. A. Likhoded (likhoded@bsu.by)

The set of operations of the parallel algorithm for implementation on the GPU must be split into computation threads. The threads must be grouped into computation units that run atomically on stream processors, also called multiprocessors. For good GPU performance, it is important that as much data as possible can fit into fast register and shared memory, otherwise slow global and local memory are used. The degree of memory usage with fast access reflects the computational property of the algorithm, called locality. When implementing algorithms on multiprocessor computing devices, the use of locality plays a crucial role in achieving high performance. In this paper, necessary conditions and sufficient conditions have been formulated and proved, the use of which allows receiving threads with privatized data, i. e. it allows to receive such computation threads that the array element is used only by one thread and therefore it is advisable to place it in the register.

Key words: parallel computations; GPU; tiling; array privatization; registers.

Acknowledgements. The prepared report was sponsored by the government program of scientific research of the Republic of Belarus «Convergence-2020» (subprogram «Methods of mathematical modeling of complex systems»).

Введение

В качестве целевого компьютера для реализации алгоритмов будем рассматривать графические процессоры (GPU) – довольно мощные и в настоящее время широко используемые многоядерные устройства. При вычислениях на GPU быстрым является процесс обращения к регистрам (самый быстрый вид памяти), разделяемой памяти мультипроцессора и кешам, но не обращение к глобальной и локальной памяти GPU. Регистры мультипроцессора делятся поровну между потоками блока вычислений. Особенно эффективно используется регистровая память, если элемент массива приватизирован потоком. Под приватизацией понимается использование элемента массива в вычислениях только одного потока блока вычислений. Если элемент массива приватизирован, то он может быть размещен в регистрах, выделенных потоку. Цель данной работы – формулировка и доказательство необходимых условий и достаточных условий приватизации элементов массива потоками вычислений.

Степень использования памяти с быстрым доступом отражает вычислительное свойство алгоритма, называемое локальностью. При реализации алгоритмов на многопроцессорных устройствах локальность играет важнейшую роль для достижения высокой производительности [1; 2].

Отметим некоторые исследования локальности алгоритмов для реализации на GPU. В работе [2] на примере решения задачи поиска кратчайших путей показана особая для GPU эффективность использования свойства локальности. В работе [3] сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие ранжировать параметры размера блоков на основе асимптотических оценок объема коммуникационных операций; в [4] подобные оценки получены с использованием более сложного (но и лучше приспособленного для автоматизации) математического аппарата. Известен способ получения более точной оценки количества элементов, к которым осуществляется доступ при выполнении операций блока вычислений, но практическое применение этого результата довольно трудоемкое и требует привлечения специализированных средств автоматизации [5; 6]. В работе [7] сформулированы необходимые условия использования элемента массива только одним потоком вычислений и, соответственно, размещения в регистрах.

Разбиение множества операций алгоритма на блоки и потоки вычислений

Пусть алгоритм задан гнездом вложенных циклов, в котором имеется Θ наборов выполняемых операторов. Под набором операторов будем понимать один или несколько выполняемых операторов, окруженных одним и тем же множеством циклов. Выполняемые операторы и наборы операторов линейно упорядочены расположением их в записи алгоритма. Обозначим: V^θ – область изменения параметров циклов, окружающих θ -й набор операторов, $1 \leq \theta \leq \Theta$; n^θ – размерность этой области, число циклов,

окружающих θ -й набор операторов; v_l – размерности массивов a_l . Также обозначим размеры блоков вычислений натуральными числами $r_1^\theta, \dots, r_{n^\theta}^\theta$; r_ζ^θ – число значений параметра j_ζ , приходящихся на один блок θ -го набора операторов; Q_ζ^θ – число блоков θ -го набора операторов по координате с номером ζ (обозначение этой координаты – j_ζ^{gl}). Нумеровать блоки вычислений будем по каждой координате в пределах от 0 до $Q_\zeta^\theta - 1$, $1 \leq \zeta \leq n^\theta$. Блоки обозначим $V_{J^{gl}}^\theta$, где $J^{gl} = (j_1^{gl}, \dots, j_{n^\theta}^{gl})$, $0 \leq j_\zeta^{gl} \leq Q_\zeta^\theta - 1$, $1 \leq \zeta \leq n^\theta$. Далее для простоты записи будем часто использовать обозначения без индекса θ .

Зададим в блоках вычислений потоки вычислений посредством выделения блоков второго уровня. Зададим размеры потоков натуральными числами $r_{1,2}, r_{2,2}, \dots, r_{n^\theta,2}$; $r_{\zeta,2}$ – число значений параметра j_ζ , приходящихся на один поток; $Q_{1,2}, Q_{2,2}, \dots, Q_{n^\theta,2}$ – число таких потоков; $Q_{\zeta,2} = \left\lfloor \frac{r_\zeta}{r_{\zeta,2}} \right\rfloor$.

В общем случае разбить множество операций алгоритма на блоки и потоки можно путем тайлинга – преобразования алгоритма для получения макроопераций [8].

Вхождением (a_l, S_β, q) будем называть q -е вхождение массива a_l в оператор S_β . Индексы элементов l -го массива, связанных с вхождением (a_l, S_β, q) , выражаются функцией вида

$$\bar{F}_{a_l, S_\beta, q}(J) = F_{a_l, S_\beta, q} J + f^{a_l, S_\beta, q}, \quad J(j_1, \dots, j_{n^\theta}) \in V^\theta, \quad F_{a_l, S_\beta, q} \in \mathbb{Z}^{v_l \times n^\theta}, \quad f^{a_l, S_\beta, q} \in \mathbb{Z}^{v_l}.$$

Пример 1. Рассмотрим основную часть алгоритма Флойда – Уоршелла поиска кратчайших путей между всеми парами вершин графа:

```
do k = 1, n
do i = 1, n
do j = 1, n
  a(i, j) = min(a(i, j), a(i, k) + a(k, j))
enddo
enddo
enddo
```

В гнезде циклов имеется один выполняемый оператор S_1 (один набор операторов), и используется один массив a размерности 2. Область изменения параметров циклов (область итераций) $V^1 = \{(k, i, j) \in \mathbb{Z}^3 | 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ для оператора S_1 имеет размерность 3. Для матриц $F_{a, S_1, q}$ на вхождениях (a, S_1, q) имеем

$$F_{a, S_1, 1} = F_{a, S_2, 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_{a, S_1, 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{a, S_1, 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известны блочные алгоритмы с 3D-блоками размером $r \times r \times r$ для реализации на GPU [9; 10]. Заметим, что одинаковые размеры блока имеют существенное значение, а не выбраны для простоты. Пусть k^{gl}, i^{gl}, j^{gl} – номера частей, на которые при формировании блоков разбиваются области значений параметров k, i, j циклов. Блоки $V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}$ имеют следующий вид:

```
do k = 1 + k^{gl}r, min((k^{gl} + 1)r, n)
do i = 1 + i^{gl}r, min((i^{gl} + 1)r, n)
do j = 1 + j^{gl}r, min((j^{gl} + 1)r, n)
  a(i, j) = min(a(i, j), a(i, k) + a(k, j))
enddo
enddo
enddo
```

Обозначим через $r_{k,2}$, $r_{i,2}$ и $r_{j,2}$ размеры блоков второго уровня. Числа $Q_{k,2} = \left\lceil \frac{r}{r_{k,2}} \right\rceil$, $Q_{i,2} = \left\lceil \frac{r}{r_{i,2}} \right\rceil$ и $Q_{j,2} = \left\lceil \frac{r}{r_{j,2}} \right\rceil$ задают количество итераций в новых циклах с параметрами k^{gl2} , i^{gl2} и j^{gl2} соответственно.

Пусть $r_{k,2} = r$, тогда $Q_{k,2} = 1$. Блок $V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}$ с выделенными потоками $\text{Thr}(i^{gl2}, j^{gl2})$ имеет следующее представление:

```

do  $i^{gl2} = 0, Q_{i,2} - 1$ 
do  $j^{gl2} = 0, Q_{j,2} - 1$ 
  Thr( $i^{gl2}, j^{gl2}$ ):
do  $k = 1 + k^{gl}r, \min((k^{gl} + 1)r, n)$ 
do  $i = 1 + i^{gl}r + i^{gl2}r_{i,2}, \min(i^{gl}r + (i^{gl2} + 1)r_{i,2}, (i^{gl2} + 1)r, n)$ 
do  $j = 1 + j^{gl}r + j^{gl2}r_{j,2}, \min(j^{gl}r + (j^{gl2} + 1)r_{j,2}, (j^{gl} + 1)r, n)$ 
   $a(i, j) = \min(a(i, j), a(i, k) + a(k, j))$ 
enddo
enddo
enddo
enddo
enddo
enddo

```

Необходимое условие приватизации элементов массива

Сформулируем и докажем условия, налагаемые на матрицу $F_{a_i, S_\beta, q}$, без выполнения которых невозможна приватизация элементов массива, используемых на вхождении (a_i, S_β, q) , в любом из трех возможных способов задания потоков вычислений (потоки могут помечаться как узлы одномерной, двумерной или трехмерной сетки).

Введем в рассмотрение множество $Z_s = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\} \subset \{1, \dots, n^\theta\}$, составленное из одного ($m = 1$), двух ($m = 2$) или трех ($m = 3$) произвольных элементов множества $\{1, \dots, n^\theta\}$, и множество $Z_t = \{\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_{n^\theta}\} = \{1, \dots, n^\theta\} \setminus Z_s$. Для удобства будем считать множества Z_s и Z_t упорядоченными: $\zeta_i < \zeta_j$, если $i < j$ (отдельно для любых $\zeta_i, \zeta_j \in Z_s$ и $\zeta_i, \zeta_j \in Z_t$).

Полагаем, что $j_{\zeta_1}^{gl2}, \dots, j_{\zeta_m}^{gl2}$ задают координаты потоков, и если $\zeta \in Z_s$, то $1 \leq r_{\zeta,2} < r_\zeta$, а если $\zeta \in Z_t$, то $r_{\zeta,2} = r_\zeta$. Таким образом, m координат задают m -мерное пространство потоков, а остальные $n^\theta - m$ координат – итерации, выполняемые потоками в лексикографическом порядке.

Введем обозначения: T_s – матрица, строки которой составлены из векторов $e_\zeta^{(n^\theta)}$, $\zeta \in Z_s$, где $e_\zeta^{(n^\theta)}$ – вектор-строка размером n^θ , у которого координата с номером ζ равна 1, а остальные координаты нулевые;

$\rho_{a_i, S_\beta, q} = \text{rank } F_{a_i, S_\beta, q}$, $\rho_{a_i, S_\beta, q}^s = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{a_i, S_\beta, q} \\ T_s \end{pmatrix}$; u_i – базисные векторы (размерности n^θ) подпространства $\ker F_{a_i, S_\beta, q}$ пространства Z^{n^θ} , $1 \leq i \leq n^\theta - \rho_{a_i, S_\beta, q}$. Если $\rho_{a_i, S_\beta, q} = n^\theta$, то подпространство $\ker F_{a_i, S_\beta, q}$ имеет нулевую размерность.

Теорема 1. Пусть зафиксирован блок вычислений, потоки вычислений $\text{Thr}(j_{\zeta_1}^{gl2}, \dots, j_{\zeta_m}^{gl2})$ помечены как узлы одномерной, или двумерной, или трехмерной сетки и для вхождения (a_i, S_β, q) массива a_i в оператор S_β выполнено условие

$$\rho_{a_l, S_\beta, q} = \rho_{a_l, S_\beta, q}^s. \quad (2)$$

Тогда каждый элемент массива a_l используется на вхождении (a_l, S_β, q) только одним потоком. Если $\rho_{a_l, S_\beta, q} < \rho_{a_l, S_\beta, q}^s$, то элемент массива используется, вообще говоря, более чем одним потоком.

Доказательство. Сперва рассмотрим случай $r_{\zeta, 2} = 1$, $\zeta \in Z_s$. Тогда один поток $\text{Thr}(j_{\zeta_1}, \dots, j_{\zeta_m})$ составляют все вычисления блока при фиксированных значениях $j_{\zeta_1}, \dots, j_{\zeta_m}$, причем $(j_{\zeta_1}, \dots, j_{\zeta_m})^T = T_s(j_1, \dots, j_{n^0})^T$.

Одним из результатов работы [11] (частный случай следствия 2) является следующее утверждение: для каждого элемента массива, связанного с вхождением (a_l, S_β, q) , значения координат потоков, в которых используется этот элемент, отличаются линейными комбинациями векторов $T_s u_i$, $1 \leq i \leq n^0 - \rho_{a_l, S_\beta, q}$.

Если $\rho_{a_l, S_\beta, q} = \rho_{a_l, S_\beta, q}^s$, то $\ker \begin{pmatrix} F_{a_l, S_\beta, q} \\ T_s \end{pmatrix} = \ker F_{a_l, S_\beta, q}$, поэтому $T_s u_i = 0$ для всех u_i . Следовательно, в этом случае каждый элемент массива используется только одним потоком. Если $\rho_{a_l, S_\beta, q} < \rho_{a_l, S_\beta, q}^s$, то $\ker \begin{pmatrix} F_{a_l, S_\beta, q} \\ T_s \end{pmatrix} \neq \ker F_{a_l, S_\beta, q}$, поэтому для каких-то u_i имеет место $T_s u_i \neq 0$. Тогда элемент массива используется (если только этот элемент не используется однократно на границе блока вычислений) более чем одним потоком.

Пусть теперь $1 < r_{\zeta, 2} < r_\zeta$ для каких-то (возможно, всех) $\zeta \in Z_s$. Тогда один поток $\text{Thr}(j_{\zeta_1}^{g/2}, \dots, j_{\zeta_m}^{g/2})$ составляют вычисления с более чем одним значением таких j_ζ . Если элемент массива используется только одним потоком при $r_{\zeta, 2} = 1$, то тем более он будет использоваться только одним потоком при $r_{\zeta, 2} > 1$. Если элемент массива используется более чем одним потоком при $r_{\zeta, 2} = 1$, то при $r_{\zeta, 2} > 1$ он будет использоваться меньшим числом потоков, но с учетом $r_{\zeta, 2} < r_\zeta$ все же более чем одним (исключение, как и при $r_{\zeta, 2} = 1$, возможно на границе блока вычислений).

Частные случаи теоремы 1 ($m = 1$, $m = 2$) сформулированы в работе [7].

Пример 1 (продолжение). Пусть блоки имеют вид (1). Наиболее интересными с точки зрения эффективного использования быстрой регистровой памяти являются такие варианты выбора матрицы T_s , при которых условие (2) выполняется для вхождений $(a, S_1, 1)$ и $(a, S_1, 2)$: на этих вхождениях осуществляется считывание и запись данного $a(i, j)$ (на других вхождениях – только считывание $a(i, k)$ или $a(k, j)$). Нетрудно видеть, что условия $\rho_{a, S_1, 1} = \rho_{a, S_1, 1}^s$, $\rho_{a, S_1, 2} = \rho_{a, S_1, 2}^s$ выполняются, если матрица T_s не содержит строки $e_1^{(3)} = (1 \ 0 \ 0)$. Например, если $Z_s = \{2, 3\}$, то

$$\rho_{a, S_1, 1} = \text{rank } F_{a, S_1, 1} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \rho_{a, S_1, 1}^s = \text{rank} \begin{pmatrix} F_{a, S_1, 1} \\ T_s \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Пример 2. Основную часть алгоритма численного решения двумерной задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом последовательной верхней релаксации можно представить (после аффинного преобразования итерационной области, применяемого для возможности получать блочные версии) в следующем виде:

```
do t = 1, T
  do i = t + 1, t + Nx - 1
    do j = t + 1, t + Ny - 1
      y(i - t, j - t) = F(y(i - t - 1, j - t), y(i - t, j - t - 1), y(i - t, j - t), y(i - t + 1, j - t), y(i - t, j - t + 1))
    enddo
  enddo
enddo
```

Здесь T – некоторое фиксированное число итераций метода релаксации, N_x и N_y характеризуют число частей, на которые разбивается итерационная область.

Для любого вхождения (y, S_1, q) и для любого выбора матрицы T_s имеем

$$F_{a_l, S_\beta, q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_{a_l, S_\beta, q} = 2, \rho_{a_l, S_\beta, q}^s = 3$$

(ранг матрицы $F_{a_l, S_\beta, q}$ равен 2, но после добавления в матрицу хотя бы одной из строк $(1 \ 0 \ 0)$, $(0 \ 1 \ 0)$, $(0 \ 0 \ 1)$ ранг полученной матрицы станет равен 3). Поэтому для любого варианта организации потоков выполняется $\rho_{a_l, S_\beta, q} < \rho_{a_l, S_\beta, q}^s$, каждый элемент массива используется более чем одним потоком, и элементы массива u не могут размещаться в регистрах.

Достаточные условия приватизации элементов массива

Условие (2) гарантирует использование элемента массива a_l на вхождении (a_l, S_β, q) только одним потоком. Для исследования возможности приватизации элемента массива надо принять во внимание и другие вхождения элементов этого массива в операторы данного блока вычислений.

Обозначим через $\bar{F}_{a_l, S_\beta, q}(V_{J^{gl}}^\theta)$ образ множества $V_{J^{gl}}^\theta$ после применения отображения $\bar{F}_{a_l, S_\beta, q}$. По определению

$$\bar{F}_{a_l, S_\beta, q}(V_{J^{gl}}^\theta) = \{ F \in \mathbb{Z}^{v_l} \mid F = \bar{F}_{a_l, S_\beta, q}(J), J \in V_{J^{gl}}^\theta \}.$$

Теорема 2. Пусть зафиксирован блок вычислений $V_{J^{gl}}^\theta$, потоки вычислений $\text{Thr}(j_{\zeta_1}^{gl2}, \dots, j_{\zeta_m}^{gl2})$ помечены как узлы одномерной, или двумерной, или трехмерной сетки и для вхождения (a_l, S_β, q) массива a_l в оператор S_β выполнено условие (2). Для того чтобы каждый элемент массива a_l , возникающий на вхождении (a_l, S_β, q) , использовался только одним потоком, достаточно выполнения условий

$$\bar{F}_{a_l, S_\beta, q}(V_{J^{gl}}^\theta) \cap \bar{F}_{a_l, S_\gamma, y}(V_{J^{gl}}^\theta) = \emptyset$$

или

$$F_{a_l, S_\gamma, y} = F_{a_l, S_\beta, q}, f^{a_l, S_\gamma, y} = f^{a_l, S_\beta, q},$$

где (a_l, S_γ, y) есть любое, отличное от (a_l, S_β, q) вхождение массива a_l в операторы блока вычислений $V_{J^{gl}}^\theta$.

Доказательство. Пусть имеет место условие (2) и пусть сначала $r_{\zeta, 2} = 1$, $\zeta \in Z_s$. Тогда один поток $\text{Thr}(j_{\zeta_1}, \dots, j_{\zeta_m})$ составляют все вычисления блока при фиксированных значениях $j_{\zeta_1}, \dots, j_{\zeta_m}$ и на вхождении (a_l, S_β, q) каждый элемент массива a_l используется только одним потоком.

Если $\bar{F}_{a_l, S_\beta, q}(V_{J^{gl}}^\theta) \cap \bar{F}_{a_l, S_\gamma, y}(V_{J^{gl}}^\theta) = \emptyset$, то на вхождении (a_l, S_β, q) и на любом другом вхождении (a_l, S_γ, y) используются разные элементы массива, поэтому другие вхождения не влияют на использование массива a_l на вхождении (a_l, S_β, q) только одним потоком.

Пусть $F_{a_l, S_\gamma, y} = F_{a_l, S_\beta, q}$, $f^{a_l, S_\gamma, y} = f^{a_l, S_\beta, q}$. Покажем, что на вхождениях (a_l, S_β, q) и (a_l, S_γ, y) один и тот же элемент массива может появиться только в одном потоке, т. е. если $\bar{F}_{a_l, S_\beta, q}(J) = \bar{F}_{a_l, S_\gamma, y}(I)$, $I, J \in V_{J^{gl}}^\theta$, то вычисления итераций I и J выполняются одним потоком.

Так как $F_{a_l, S_\beta, q}J + f^{a_l, S_\beta, q} = F_{a_l, S_\gamma, y}I + f^{a_l, S_\gamma, y}$, $F_{a_l, S_\beta, q}(J - I) = 0$, то $J - I \in \ker F_{a_l, S_\beta, q}$. Поэтому векторы I и J отличаются линейными комбинациями базисных векторов u_i , $1 \leq i \leq n^\theta - \rho_{a_l, S_\beta, q}$, подпространства $\ker F_{a_l, S_\beta, q}$. Тогда координаты потоков $T_s I$ и $T_s J$, которые выполняют операции итераций I и J , отличаются линейными комбинациями векторов $T_s u_i$. Так как $\rho_{a_l, S_\beta, q} = \rho_{a_l, S_\beta, q}^s$, то $T_s u_i = 0$ для всех u_i , вычисления итераций I и J выполняются одним потоком.

Пусть теперь $1 < r_{\zeta,2} < r_\zeta$ для каких-то (или всех) $\zeta \in Z_s$. Тогда один поток $\text{Thr}(j_{\zeta_1}^{gl2}, \dots, j_{\zeta_m}^{gl2})$ составляют вычисления с более чем одним значением таких j_ζ . Если элемент массива используется только одним потоком при $r_{\zeta,2} = 1$, то тем более и при $r_{\zeta,2} > 1$ он будет использоваться лишь одним потоком.

Пример 1 (окончание). Рассмотрим блоки вычислений $V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}$, для которых $i^{gl} \neq k^{gl}, j^{gl} \neq k^{gl}$. Покажем, что если $T_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, или $T_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, или $T_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то на вхождениях $(a, S_1, 1)$ и $(a, S_1, 2)$ происходит приватизация потоками данных $a(i, j)$. В предыдущем разделе установлено, что при таком выборе матрицы T_s условие (2) выполнено. Осталось показать, что выполнены и остальные условия теоремы 2. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{F}_{a, S_1, 1}(k, i, j) &= \bar{F}_{a, S_1, 2}(k, i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (k, i, j)^T = (i, j)^T, \\ \bar{F}_{a, S_1, 1}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}) &= \bar{F}_{a, S_1, 2}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}) = \\ &= \left\{ (F_1, F_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid (F_1, F_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (k, i, j)^T = (i, j), (k, i, j) \in V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}} \right\} = \\ &= \left\{ (F_1, F_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 + i^{gl}r \leq F_1 \leq (i^{gl} + 1), 1 + j^{gl}r \leq F_2 \leq (j^{gl} + 1) \right\}. \end{aligned}$$

Для вхождений $(a, S_1, 3)$, $(a, S_1, 4)$, на которых осуществляется считывание данных $a(i, k)$, $a(k, j)$, имеем соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{a, S_1, 3}(k, i, j) &= (i, k)^T, \\ \bar{F}_{a, S_1, 3}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}) &= \left\{ (F_1, F_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 + i^{gl}r \leq F_1 \leq (i^{gl} + 1), 1 + k^{gl}r \leq F_2 \leq (k^{gl} + 1) \right\}; \\ \bar{F}_{a, S_1, 4}(k, i, j) &= (k, j)^T, \\ \bar{F}_{a, S_1, 4}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}) &= \left\{ (F_1, F_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 + k^{gl}r \leq F_1 \leq (k^{gl} + 1), 1 + j^{gl}r \leq F_2 \leq (j^{gl} + 1) \right\}. \end{aligned}$$

Так как $i^{gl} \neq k^{gl}, j^{gl} \neq k^{gl}$, то $\bar{F}_{a, S_1, 1}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}) \cap \bar{F}_{a, S_1, 3}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}) = \emptyset$ (пересечений нет по второй координате), $\bar{F}_{a, S_1, 1}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}) \cap \bar{F}_{a, S_1, 4}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}}) = \emptyset$ (пересечений нет по первой координате). Следовательно, выполняются достаточные условия приватизации.

Замечание 1. В рассмотренном примере множества $\bar{F}_{a, S_1, q}(V_{k^{gl}, i^{gl}, j^{gl}})$ получить довольно просто. Для построения $\bar{F}_{a, S_\beta, q}(V_{J^{gl}}^\theta)$ в общем случае можно воспользоваться методом получения отображений выпуклых ограниченных многогранников [12; 13].

Замечание 2. Пусть, как и ранее, $\text{Thr}(j_{\zeta_1}^{gl2}, \dots, j_{\zeta_m}^{gl2})$ – потоки вычислений, для вхождения (a_l, S_β, q) массива a_l в оператор S_β выполнено условие (2), а для любого другого вхождения (a_l, S_γ, y) справедливо $F_{a_l, S_\gamma, y} = F_{a_l, S_\beta, q}$, m строк матрицы $F_{a_l, S_\beta, q}$ совпадают со строками матрицы T_s и соответствующие координаты вектора $f^{a_l, S_\beta, q} - f^{a_l, S_\gamma, y}$ равны нулю. Тогда каждый элемент массива a_l , возникающий на вхождениях (a_l, S_β, q) , (a_l, S_γ, y) , используется только одним потоком.

Действительно, покажем, что если $\bar{F}_{a_l, S_\beta, q}(J) = \bar{F}_{a_l, S_\gamma, y}(I)$, $I, J \in V_{J^{gl}}^\theta$, то $T_s I = T_s J$. Так как $F_{a_l, S_\beta, q} J + f^{a_l, S_\beta, q} = F_{a_l, S_\gamma, y} I + f^{a_l, S_\gamma, y}$, $F_{a_l, S_\gamma, y} = F_{a_l, S_\beta, q}$, то $F_{a_l, S_\beta, q}(J - I) = f^{a_l, S_\beta, q} - f^{a_l, S_\gamma, y}$. Отсюда, поскольку

m строк матрицы $F_{a_i, S_{\beta}, q}$ совпадают со строками матрицы T_s и соответствующие координаты вектора $f^{a_i, S_{\beta}, q} - f^{a_i, S_{\gamma}, y}$ равны нулю, получим $T_s(J - I) = 0$.

Достаточные условия, приведенные в замечании 2, можно применить, например, в случае итераций (k, i, j) , оператора вида $a(i, j) = a(i, j - 1) + \dots$, $T_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (поток определяет координата i).

Заключение

В работе сформулированы и доказаны необходимые условия и достаточные условия приватизации элементов массива потоками вычислений при реализации алгоритма на графическом процессоре. Приватизация элементов массива позволяет разместить их в самой быстрой памяти процессора – регистрах.

Направления дальнейших исследований: формализация условий, при которых также происходит эффективное использование быстрой памяти графического процессора – бродкаст (поток запрашивает одновременно один и тот же элемент массива) и пространственная локальность (поток использует близко расположенные в памяти данные); применение сформулированных условий для автоматизации получения алгоритмов, реализуемых на графических процессорах; использование результатов работы при разработке параллельных алгоритмов для решения прикладных задач.

Библиографические ссылки

1. Воеводин ВлВ, Воеводин ВадВ. Спасительная локальность суперкомпьютеров. *Открытые системы*. 2013;9:12–15.
2. Buluc A, Gilberta JR, Budak C. Solving path problems on the GPU. *Parallel Computing*. 2010;36(5–6):241–253.
3. Лиходед НА, Полещук МА. Оценка локальности параллельных алгоритмов, реализуемых на графических процессорах. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика*. 2016;5(3):96–111. DOI: 10.14529/cmse160307.
4. Лиходед НА, Полещук МА. Метод ранжирования параметров размера блоков вычислений параллельного алгоритма. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2015;59(4):25–33.
5. Kandemir M, Ramanujam J, Irwin M, Narayanan V, Kadayif I, Parikh A. A compiler based approach for dynamically managing scratch-pad memories in embedded systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*. 2004;23(2):243–260.
6. Baskaran M, Bondhugula U, Krishnamoorthy S, Ramanujam J, Rountev A, Sadayappan P. Automatic data movement and computation mapping for multi-level parallel architectures with explicitly managed memories. In: *Proceedings of the 13th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and practice of parallel programming; 2008 February 20–23; Salt Lake City, USA*. New York: ACM; 2008. p. 1–10. DOI: 10.1145/1345206.1345210.
7. Полещук МА, Лиходед НА. Приватизация элементов массивов потоками вычислений. В: *CSIST'2016. Международный конгресс по информатике: информационные системы и технологии; 24–27 октября 2016 г.; Минск, Беларусь*. Минск: БГУ; 2016. с. 883–888.
8. Baskaran M, Ramanujam J, Sadayappan P. Automatic C-to-CUDA code generation for affine programs. In: *Compiler Construction. 19th International Conference. Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software; 2010 March 20–28; Paphos, Cyprus*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-11970-5_14.
9. Katz GJ, Kider J. All-pairs shortest-paths for large graphs on the GPU. In: *Proceedings of the 23rd ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS symposium on Graphics hardware; 2008 June 20–21; Sarajevo, Bosnia and Herzegovina*. Geneva: Eurographics Association; 2008. p. 47–55.
10. Lund BD, Smith JW. A Multi-Stage {CUDA} Kernel for Floyd-Warshall. CoRR [Internet]. 2010;abs/1001.4108. Available from: <http://arxiv.org/abs/1001.4108>.
11. Адуцкевич ЕВ, Лиходед НА, Сикорский АО. К распараллеливанию последовательных программ: распределение массивов между процессорами и структуризация коммуникаций. *Кибернетика и системный анализ*. 2012;48(1):144–163.
12. Воеводин ВВ. *Информационная структура алгоритмов*. Москва: МГУ; 1997.
13. Лиходед НА, Толстикова АА. Формализация коммуникационных операций многомерных циклов. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2010;3:109–114.

References

1. Voevodin VIV, Voevodin VadV. [The fortunate locality of supercomputers]. *Otkrytye sistemy* [Open systems]. 2013;9:12–15. Russian.
2. Buluc A, Gilberta JR, Budak C. Solving path problems on the GPU. *Parallel Computing*. 2010;36(5–6):241–253.
3. Likhoded NA, Paliashchuk MA. [Estimate of locality of parallel algorithms implemented on GPUs]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering]. 2016;5(3):96–111. Russian. DOI: 10.14529/cmse160307.
4. Likhoded NA, Poleschchuk MA. Method of ranking tiles size parameters of parallel algorithm. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2015;59(4):25–33. Russian.
5. Kandemir M, Ramanujam J, Irwin M, Narayanan V, Kadayif I, Parikh A. A compiler based approach for dynamically managing scratch-pad memories in embedded systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*. 2004;23(2):243–260.

6. Baskaran M, Bondhugula U, Krishnamoorthy S, Ramanujam J, Rountev A, Sadayappan P. Automatic data movement and computation mapping for multi-level parallel architectures with explicitly managed memories. In: *Proceedings of the 13th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and practice of parallel programming; 2008 February 20–23; Salt Lake City, USA*. New York: ACM; 2008. p. 1–10. DOI: 10.1145/1345206.1345210.
7. Poleshchuk MA, Likhoded NA. [Array privatization by computing threads]. In: *CSIST'2016. Mezhdunarodnyi kongress po informatike: informatsionnye sistemy i tekhnologii; 24–27 oktyabrya 2016 g.; Minsk, Belarus'* [CSIST'2016. International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies; 2016 October 24–27; Minsk, Belarus]. Minsk: Belarusian State University; 2016. p. 883–888. Russian.
8. Baskaran M, Ramanujam J, Sadayappan P. Automatic C-to-CUDA code generation for affine programs. In: *Compiler Construction. 19th International Conference. Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software; 2010 March 20–28; Paphos, Cyprus*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-11970-5_14.
9. Katz GJ, Kider J. All-pairs shortest-paths for large graphs on the GPU. In: *Proceedings of the 23rd ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS symposium on Graphics hardware; 2008 June 20–21; Sarajevo, Bosnia and Herzegovina*. Geneva: Eurographics Association; 2008. p. 47–55.
10. Lund BD, Smith JW. A Multi-Stage {CUDA} Kernel for Floyd-Warshall. CoRR [Internet]. 2010;abs/1001.4108. Available from: <http://arxiv.org/abs/1001.4108>.
11. Adutskevich EV, Likhoded NA, Sikorsky AO. [Parallelization of sequential programs: distribution of arrays among processors and structurization of communications]. *Kibernetika i sistemnyi analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 2012;48(1):144–163. Russian.
12. Voevodin VV. *Informatsionnaya struktura algoritmov* [Informational structure of algorithms]. Moscow: MGU; 1997. Russian.
13. Likhoded NA, Tolstikov AA. Formalization of communication operations of multidimensional loops. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2010;3:109–114. Russian.

Статья поступила в редколлегию 12.06.2018.
Received by editorial board 12.06.2018.

УДК 517.968.73

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. А. РАСОЛЬКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Построена и обоснована вычислительная схема решения задачи Коши для сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля с сингулярным интегралом по отрезку действительной оси, понимаемым в смысле главного значения по Коши. Данное уравнение приводится к равносильному уравнению Фредгольма второго рода путем обращения сингулярного интеграла в классе неограниченных на концах отрезка функций и использования спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Одновременно исследуется условие разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром специального вида и находится приближенное решение. Новая вычислительная схема основана на применении к интегралу, входящему в равносильное уравнение, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Получены равномерные оценки погрешностей приближенных решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; уравнение Прандтля; численное решение; метод ортогональных многочленов.

NUMERICAL SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL PRANDTL EQUATION BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

G. A. RASOLKO^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The paper is constructed and proved computational scheme for a solution of singular Prandtl of integro-differential equations with singular integral over the interval of the real axis, understood in the sense of the Cauchy principal value. This equation reduces to the equivalent Fredholm equation of the second kind by inversion of the singular integral in the class of functions unbounded at the ends and the application of spectral relations for the singular integral. At the same time we investigate the condition of solvability of a Fredholm integral equation of the second kind with a logarithmic kernel of a special kind. The new computational scheme is based on applying spectral relations for the singular integral to the integral entering into the equivalent equation. Uniform estimates of the errors of approximate solutions are obtained.

Key words: integro-differential equation; Prandtl equation; numerical solution; method of orthogonal polynomials.

Образец цитирования:

Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018; 3:68–74.

For citation:

Rasolko GA. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:68–74. Russian.

Автор:

Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Author:

Galina A. Rasolko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
rasolka@bsu.by

Введение

Многие задачи гидродинамики, теории аналитических функций, упругости, фильтрации, теплопроводности и ряда других разделов механики, физики и математической физики приводят к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши.

В исследовании крыла конечного размаха, в контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

которое называется уравнением Прандтля [1–3]. Здесь $B(x)$ и $f(x)$ – известные функции из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$, $\Gamma(x)$ – искомая функция. К уравнению (1) присоединяются дополнительные условия

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \quad (2)$$

Число работ, посвященных этому уравнению, велико. Известно, что оно точно решается лишь в редких частных случаях [4]. В значительной части публикаций, начиная с самой первой, исследуется вопрос разработки и обоснования приближенных методов решения уравнения (1) (см., например, [5] и библиографию в ней). Среди таковых наиболее распространенным является метод Мультихотта.

В настоящей работе предлагается и обосновывается вычислительная схема для численного решения уравнения (1). Первоначально оно сводится к равносильному уравнению с логарифмической особенностью. Указываются условия разрешимости последнего. Новая вычислительная схема основана на применении к интегралу, входящему в уравнение, которое равносильно исходному, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Отметим, что в [6] предложена и обоснована вычислительная схема для уравнения (1), близкая по структуре к схеме Мультихотта, но отличающаяся от приведенной ниже.

Предварительные сведения

В статье применяются известные спектральные соотношения [7, с. 188]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} &= U_{n-1}(x), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} &= -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n=1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

При построении вычислительной схемы использован интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода, указанный в теореме 7.9 из [8, с. 89]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x), \quad (4)$$

где $c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k)$, $j=0, 1, \dots, n$; $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k=0, 1, \dots, n$.

Здесь обозначено: $\sum_{j=0}^n a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Отметим, что в этой же теореме 7.9 используется и другая – классическая – форма интерполяционного многочлена по узлам Чебышева первого рода, которая равносильна (4). Будем далее говорить, что (4) – это разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева первого рода.

Чтобы получить разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева второго рода, применим в (4) тождества [8, с. 23]

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2.$$

Тогда

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \quad (5)$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n, \quad (6)$$

$$G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Напомним определение класса функций $h(0)$ по Мусхелишвили – функций с интегрируемой особенностью в окрестности точек $x = \pm 1$ [9, с. 31]. Говорят, что функция $\psi(x) \in h(0)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точек ± 1 допускает интегрируемую особенность.

Приведение уравнения (1) к уравнению Фредгольма

Сведем уравнение (1) к уравнению Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью. Пусть

$$u(x) \triangleq -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt. \quad (7)$$

Применим формулу обращения этого сингулярного интеграла в указанном классе функций:

$$\Gamma'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} u(t)}{t-x} dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Здесь c – произвольная постоянная. Отсюда с учетом (2) получим

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} u(t)}{t-\tau} dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt + \mu(x),$$

где

$$H(x, t) = \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}; \quad (8)$$

$$\mu(x) = c \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Учитывая, что $H(-1, t) = H(1, t)$, находим $c = 0$.

Наряду с тем что функция $H(x, t)$ симметрична, она также и неотрицательна. В самом деле

$$H(x, t) = H(\cos \theta, \cos \sigma) = \ln \frac{1 - \cos(\theta + \sigma)}{2 \sin \frac{\theta + \sigma}{2} \left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} = \ln \frac{\sin \frac{\theta + \sigma}{2}}{\left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} \geq 0, \quad 0 < \sigma, \theta \leq \pi.$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x, t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt, \quad (9)$$

введем линейный оператор

$$K(u; x) \triangleq \frac{\Gamma(x)}{B(x)} = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt. \quad (10)$$

Тогда граничная задача (1), (2) сводится к уравнению

$$u(x) + K(u; x) = f(x). \quad (11)$$

Учитывая (8), (10) и применяя в (9) формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x}, \quad \Phi'(x) = u(x). \quad (12)$$

Отсюда с учетом теоремы Племеля – Привалова (см., например, [9], с. 58) заключаем, что оператор $K(u; x)$ отображает пространство $\mathbb{C}[-1, 1]$ в себя, если функция $B^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$ или даже $b^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$, где $b(x) = \frac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|Ku\|_{\mathbb{C}} \leq \rho \|u\|_{\mathbb{C}}, \quad (13)$$

где

$$\rho = \max_{|x| \leq 1} \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|} \right|. \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть функция $B(x)$, входящая в уравнение (1), удовлетворяет условию

$$\rho < 1, \quad \rho = \max_{|x| \leq 1} \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|} \right|. \quad (15)$$

Тогда уравнение (11), а вместе с ним и граничная задача (1), (2) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(0)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$.

Приближенное решение уравнения (1)

На основании (11) и (7) приближенное решение для (1) при условии (2) найдем как решение следующего уравнения:

$$u_n(x) + K(u_n; x) = F_n(x), \quad (16)$$

где $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен (5) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (17)$$

c_k – пока неизвестные постоянные, $k = 0, 1, \dots, n$;

$$K(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt; \quad (18)$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Очевидно, что для уравнения (16) имеет место аналог теоремы 1, т. е. вследствие (13)–(15) уравнение (16) также разрешимо.

Используя (17) и (3), как и ранее, упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K(u_n; x)$:

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x), \quad (19)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt &= \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} (-T_{k+1}(\tau)) d\tau = \\ &= -\sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x). \end{aligned}$$

Поэтому из (18) и (19) следует, что

$$K(u_n; x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x). \quad (20)$$

Уравнение (16) с учетом (17), (20) переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \frac{1}{k+1} + 1 \right) U_k(x) = F_n(x). \quad (21)$$

Вычислительные схемы решения задачи (1), (2)

Схема 1. В качестве внешних узлов x выберем узлы Чебышева первого рода, а именно: $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Из (21) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{\sqrt{1-x_j^2}}{B(x_j)} \frac{1}{k+1} + 1 \right) U_k(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (22)$$

Уравнение (21), а следовательно и система (22), и интегральное уравнение (16) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (16) в (22), в обратном порядке, из (22) получим (16). Значит, система (22) разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (19).

Схема 2. Рассматривая случай, когда $B(x) = b\sqrt{1-x^2}$, $b = \text{const}$, в уравнении (21) в качестве $F_n(x)$ возьмем интерполяционный многочлен (5). Тогда уравнение (21) переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{1}{b} \frac{1}{k+1} + 1 \right) U_k(x) = \sum_{k=0}^n f_k U_k(x). \quad (23)$$

Отсюда следует, что решением (23) являются числа

$$c_k = f_k \left(\frac{1}{b} \frac{1}{k+1} + 1 \right)^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (24)$$

где f_k вычисляются в соответствии с (6).

Тогда приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – находится согласно (19).

Обоснование сходимости

Порядок аппроксимации можно найти, изучая структурные свойства функции $u(x)$ (см. (7)). Для этого уравнение (11) на основании (12) запишем в виде

$$u(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = f(x), \quad \Phi'(x) = u(x),$$

и отметим, что сингулярный интеграл принадлежит классу $H\left(\frac{1}{2}\right)$. В самом деле

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t) - \Phi(1)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x},$$

а поскольку в окрестности точки $t = 1$

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(1)}{\sqrt{1-t^2}} \in H\left(\frac{1}{2}\right),$$

то по теореме Племеля – Привалова и сингулярный интеграл принадлежит классу $H\left(\frac{1}{2}\right)$ в окрестности точки $x = 1$. Аналогичная ситуация имеет место в окрестности точки $x = -1$. Отсюда вытекает, что если функции $B(x)$ и $f(x)$ из класса $H(\mu)$, $\mu \geq \frac{1}{2}$, то $u(x) \in H\left(\frac{1}{2}\right)$, $-1 \leq x \leq 1$.

Далее рассмотрим следующее (см., например, [10, с. 318]).

Предложение. Если в качестве узлов интерполирования берутся нули многочлена Чебышева первого рода, т. е. точки $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi$, $k = 0, 1, \dots, n$, то для констант Лебега λ_n имеет место оценка $\lambda_n = O(\ln n)$, $n = 2, 3, \dots$

Отсюда с учетом (9) и (19) следует, что в любой точке $x \in [-1, 1]$ справедливо

$$\begin{aligned} \|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\|_{\mathbb{C}} &= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t)(u(t) - u_n(t)) dt \right\|_{\mathbb{C}} \leq \\ &\leq \|u(x) - u_n(x)\|_{\mathbb{C}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) dt \right\|_{\mathbb{C}} \leq O(\ln n \cdot E_n(u)). \end{aligned}$$

Так как имеет место оценка $E_n(u) = O(n^{-\alpha})$, если $u(x) \in H(\alpha)$ на $[-1, 1]$ (см., например, [10], с. 391), то, таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2. Пусть функции $B(x)$ и $f(x)$, входящие в уравнение (1), принадлежат классу $H(\mu)$, $\mu \geq \frac{1}{2}$, и выполнено условие (15). Тогда система (22) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение задачи (1), (2), построенное по формуле (19), сходится к точному со скоростью

$$\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\|_{\mathbb{C}} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Численные эксперименты на модельных примерах

В заключение приведем результаты численного эксперимента, выполненного по вычислительной схеме (22) и вычислительной схеме (24) (случай, когда $B(x) = b\sqrt{1-x^2}$, $b = \text{const}$).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = B(x) \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \operatorname{arcth} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} + 1, \quad -1 < x < 1. \quad (25)$$

1. Пусть $B(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1+4x^2}{1+2x^2}$. Известно, что решением задачи (25), (2) в данном случае является

$$\text{функция } \Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \operatorname{arcth} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right).$$

Как показывают расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *Mathcad 15*, уже при сравнительно небольших значениях n достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения уравнения (25).

Точное решение $\Gamma(x)$ системы (22) при $n = 10$ и $n = 34$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, найденного по формуле (19) для ряда точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$, не более чем на $5,5 \cdot 10^{-6}$ и $1,3 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $\text{cond} \leq 25$ и $\text{cond} \leq 142$ соответственно.

2. Пусть $B(x) = 6\sqrt{1-x^2}$. Решением задачи (25), (2) и в данном случае является функция $\Gamma(x) =$
$$= \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right).$$

При $n = 10$ и $n = 34$ точное решение $\Gamma(x)$ системы (22) отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (19) для точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$, не более чем на $5,6 \cdot 10^{-6}$ и $1,4 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $\text{cond} \leq 26$ и $\text{cond} \leq 142$ соответственно.

Найдем $c_k, k = 0, 1, \dots, n$, по формуле (24). Тогда при $n = 10$ и $n = 34$ точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (19) в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$, не более чем на $5,6 \cdot 10^{-6}$ и $1,3 \cdot 10^{-15}$ соответственно.

Библиографические ссылки

1. Prandtl L. Tragflügeltheorie. I. Mitteilung. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse*. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung; 1918. p. 451–470.
2. Голубев ВВ. *Лекции по теории крыла*. Москва: ГИИТЛ; 1949.
3. Каландия АИ. *Математические методы двумерной упругости*. Москва: Наука; 1973.
4. Веква ИН. О интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. *Прикладная математика и механика*. 1945;9(2);143–150.
5. Габдулхаев БГ. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ*. Казань: Издательство Казанского университета; 1994.
6. Шешко МА, Расолько ГА, Мастяница ВС. К приближенному решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля. *Дифференциальные уравнения*. 1993;29(9):1550–1560.
7. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Том 2*. Москва: Наука; 1966. 295 с.
8. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. Москва: Наука; 1983.
9. Мухелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва: Наука; 1968.
10. Суетин ПК. *Классические ортогональные многочлены*. Москва: Наука; 1979.

References

1. Prandtl L. Tragflügeltheorie. I. Mitteilung. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse*. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung; 1918. p. 451–470.
2. Golubev VV. *Lektsii po teorii kryla* [Lectures on the theory of the wing]. Moscow: GIITL; 1949. Russian.
3. Kalandiya AI. *Matematicheskie metody dvumernoi uprugosti* [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]. Moscow: Nauka; 1973. Russian.
4. Vekua IN. O integro-differentsial'nom uravnenii Prandtlya. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1945;9(2);143–150. Russian.
5. Gabdulkhaev BG. *Pryamye metody resheniya singulyarnykh integral'nykh uravnenii pervogo roda. Chislennyi analiz* [Direct methods for solving singular integral equations of the first kind. Numerical analysis]. Kazan: Izdatel'stvo Kazanskogo universiteta; 1994. Russian.
6. Sheshko MA, Rasolko GA, Mastyanitsa VS. To the approximate solution of the integro-differential Prandtl equation. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1993;29(9):1550–1560. Russian.
7. Bateman G, Erdei A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2* [Higher transcendental functions. Volume 2]. Moscow: Nauka; 1966. 295 p. Russian.
8. Pashkovsky S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of polynomials and Chebyshev series]. Moscow: Nauka; 1983. Russian.
9. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka; 1968. Russian.
10. Suetin PK. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka; 1979. Russian.

Статья поступила в редколлегию 18.06.2018.
Received by editorial board 18.06.2018.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Ю. В. БУЯЛЬСКАЯ¹⁾, В. М. ВОЛКОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрен спектральный метод Чебышева для двухточечных краевых задач, описывающих процессы встречного взаимодействия оптических волн в средах с кубической нелинейностью и линейных средах с периодической модуляцией показателя преломления. На примере линейной задачи показано, что для достижения заданной точности спектральный метод требует на два-три порядка меньше времени по сравнению с методом сплайн-коллокации 5-го порядка точности. При этом сетка чебышевских узлов обладает естественными адаптивными свойствами для типичных задач встречного нелинейного взаимодействия оптических волн. Предложен консервативный итерационный алгоритм реализации нелинейной спектральной модели. Предлагаемый метод имеет меньшую чувствительность к выбору начального приближения и обеспечивает более высокую скорость сходимости по сравнению с методом Ньютона в условиях сильной связи взаимодействующих волн.

Ключевые слова: спектральный метод Чебышева; двухточечная краевая задача; нелинейное взаимодействие встречных оптических волн; метод Ньютона; консервативный итерационный метод.

Chebyshev Spectral Method for Numerical Simulations of Counter-Propagating Optical Waves Interaction in Nonlinear Media

Y. V. Buyalskaya^a, V. M. Volkov^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: Y. V. Buyalskaya (buyalskaya.yv@gmail.com)

Chebyshev spectral methods for two-point boundary value problems describing the processes of counter interaction of optical waves in media with cubic nonlinearity and linear media with periodic modulation of the refractive index are considered. On the example of a linear problem, it is shown that the spectral method for achieving a given accuracy requires of two-three orders less time in comparison with the spline collocation method of the 5th accuracy order. Moreover, Chebyshev mesh has natural adaptive properties for the considered problems of the nonlinear interaction of optical waves.

Образец цитирования:

Буяльская ЮВ, Волков ВМ. Спектральный метод Чебышева для численного моделирования встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:75–81.

For citation:

Buyalskaya YV, Volkov VM. Chebyshev spectral method for numerical simulations of counter-propagating optical waves interaction in nonlinear media. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:75–81. Russian.

Авторы:

Юлия Викторовна Буяльская – старший преподаватель кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Authors:

Yuliya V. Buyalskaya, senior lecturer at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.

buyalskaya.yv@gmail.com

Vasily M. Volkov, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.

v.volkov@tut.by

A conservative iterative algorithm for implementation of the nonlinear spectral model is proposed. The proposed method has a lower sensitivity to the choice of an appropriate initial guess and provides a higher rate of convergence in comparison with Newton's method under conditions of strong coupling of interacting waves.

Key words: Chebyshev spectral methods; two-point boundary value problem; nonlinear interaction of counter-propagating optical waves; Newton's method; conservative iterative method.

Введение

Разработка методов численного моделирования процессов встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах имеет важное практическое значение, поскольку схема такого взаимодействия является типичной для большинства видов лазеров и оптических усилителей. В зависимости от выбора соответствующего приближения задачи данного класса могут приводить как к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений [1; 2], так и к системам дифференциальных уравнений в частных производных [3]. И в первом, и во втором случаях для исчерпывающего анализа задачи требуется привлечение численных методик.

Для решения данного класса краевых задач существуют различные подходы, основанные на методах конечных разностей [3], коллокации [4], стрельбы [5] и др. В последние годы большие успехи достигнуты в использовании спектральных методов применительно к задачам численного моделирования оптоволоконных усилителей [6; 7].

Одна из проблем спектральных методов решения нелинейных краевых задач связана с реализацией такого рода дискретных моделей, представляющих собой системы нелинейных алгебраических уравнений. Для этих целей применяют, как правило, итерационный метод Ньютона, который при надлежащем выборе начального приближения обеспечивает высокую скорость сходимости итераций. В данной работе предлагается альтернативная итерационная методика реализации спектральных моделей, обеспечивающая высокую эффективность вне зависимости от выбора начального приближения. На примере модельной задачи показано, что при использовании этой методики достигается уменьшение числа итераций в 2–3 раза по сравнению с методом Ньютона. Показано также, что спектральный метод на основе полиномов Чебышева по эффективности на порядок превосходит стандартные средства численного анализа двухточечных краевых задач, предлагаемые современными математическими пакетами, например *Matlab*.

Постановка задачи

Математическая модель встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах в простейшем случае представляет собой краевую задачу для двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию комплексных, огибающих амплитуды поля волн $E_{\pm} = E_{\pm}(z)$, распространяющихся в прямом и обратном направлениях координатной оси z . Данная система уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{dE_{\pm}}{dz} = G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp}), \quad -1 < z < 1, \quad (1)$$

$$E_{+}(-1) = E_p, \quad E_{-}(1) = E_m. \quad (2)$$

Функция $G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp})$ определяется механизмами взаимодействия волн. Для описания эффекта вынужденного комбинационного рассеяния функция нелинейного взаимодействия имеет вид

$$G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp}) = -\gamma |E_{\mp}|^2 E_{\pm}, \quad (3)$$

где постоянная γ характеризует интенсивность энергетического обмена взаимодействующих волн.

Для задачи (1)–(3) имеет место закон сохранения

$$\frac{d}{dz} |E_{+}|^2 - |E_{-}|^2 = 0. \quad (4)$$

Аналогичным инвариантом обладает и задача о распространении волн в средах с периодической модуляцией коэффициента преломления [7, с. 144], для которой функции $G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp})$ имеют вид

$$G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp}) = \mp i k \exp(\pm i 2 \Delta z) E_{\mp}. \quad (5)$$

Здесь действительные постоянные k и Δ характеризуют амплитуду и отстройку периода модуляции коэффициента преломления среды от длины волны.

Спектральный метод Чебышева

В основе спектральных методов лежит представление искомого решения дифференциальной задачи в виде линейной комбинации некоторых базисных функций, в качестве которых традиционно выступают системы ортогональных алгебраических или тригонометрических полиномов. Для этих целей наиболее удобно интерполяционное представление вида

$$f(z) \cong \sum_{n=0}^{N-1} f_n \varphi_n(z), \quad (6)$$

где значения коэффициентов f_n совпадают с интерполируемой функцией в узлах сетки z_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, $f(z_n) = f_n$, а базисные функции удовлетворяют условию $\varphi_n(z_m) = \delta_{nm}$. В этом случае удастся достаточно компактно выразить производные интерполируемой функции в узлах сетки:

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z_m) \cong \sum_{n=0}^{N-1} f_n \frac{d^k}{dz^k} \varphi_n(z_m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Выражение (7) для приближенного вычисления производных сеточной функции $f(z_m)$ представляет собой не что иное, как произведение некоторой матрицы $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – матрицы спектрального дифференцирования – на заданный вектор $f \in \mathbb{R}^N$:

$$f^{(k)} \cong D^{(k)} f, \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T, \quad d_{mn}^{(k)} = \frac{d^k}{dz^k} \varphi_n(z_m). \quad (8)$$

Подробную информацию о вычислении матриц спектрального дифференцирования для различных классов базисных функций можно найти в работах [8; 9]. Мы использовали спектральную матрицу дифференцирования Чебышева для системы узлов

$$z_j = \cos \frac{j\pi}{N-1}, \quad j = 0, \overline{N-1}, \quad (9)$$

которые являются экстремумами полиномов Чебышева первого рода степени $N-1$: $T_{N-1}(z) \equiv \cos((N-1) \arccos(z))$. Важно отметить, что сетка (9), сгущающаяся возле границ области $z = \pm 1$, хорошо согласуется с особенностями решений типа пограничного слоя, которые характерны для задач рассматриваемого класса. Матрица дифференцирования спектрального метода Чебышева произвольной размерности для отрезка $z \in [-1, 1]$ может быть сгенерирована стандартными функциями *Matlab*.

Использование формализма матриц спектрального дифференцирования (6)–(8) позволяет весьма просто перейти от дифференциальной модели к ее спектральному аналогу путем замены неизвестных функций и их производных на соответствующие векторы и матрицы с учетом краевых условий задачи. В нашем случае спектральная модель приводит к системе алгебраических уравнений, которая может быть представлена в виде

$$A\mathbf{u} + g(\mathbf{u}) = f, \quad (10)$$

где $A = \begin{pmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{pmatrix}$ – блочно-диагональная матрица размерности $2N \times 2N$, блоки которой строятся из спектральной матрицы дифференцирования с учетом краевых условий задачи; $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_+ \\ \mathbf{u}_- \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_\pm = (u_\pm(z_0), u_\pm(z_1), \dots, u_\pm(z_{N-1}))^T$, $u_\pm(z_n)$ – приближенные значения искомого решения в узлах сетки (9); $g(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} G_+(\mathbf{u}) \\ G_-(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$ – вектор-функция размерности $2N$, описывающая нелинейную часть задачи. В случае линейной задачи, например (1), (2), (5), функции $G_\pm(E_\pm, E_\mp)$ могут быть учтены в виде соответствующих блоков матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} D_+ & G_+ \\ G_- & D_- \end{pmatrix},$$

здесь $G_+ = \text{diag}(0, g_1^+, \dots, g_{N-1}^+)$; $G_- = \text{diag}(g_0^-, \dots, g_{N-2}^-, 0)$, $g_n^\pm = \pm i\kappa \exp(\pm i2\Delta z_n)$. Заметим, что первая и последняя строки матрицы A отвечают краевым условиям задачи, в связи с чем все компоненты данных строк, за исключением $a_{11} = a_{2N, 2N} = 1$, полагаются равными нулю. Первая и последняя компоненты

вектор-функции $g(\mathbf{u})$ также полагаются равными нулю. В соответствии с краевыми условиями вектор правой части системы (10) $f \in \mathbb{R}^{2N}$ имеет вид

$$f = (E_p, 0, \dots, 0, E_m)^T, \quad (11)$$

где E_p и E_m определяются краевыми условиями (2).

Отметим, что, в отличие от разностных методов [3], спектральная модель не обладает свойством консервативности. В частности, для нее не удастся получить дискретного аналога закона сохранения (4), поскольку необходимое для этого свойство производных $(ug)' = u'g + ug'$ не выполняется в строгом смысле для формул спектрального дифференцирования. Тем не менее для достаточно гладких функций спектральные методы обеспечивают весьма высокую точность вычисления производных, сравнимую с вычислительной точностью. В силу этого при достаточном разрешении сетки все качественные характеристики таких решений, включая и законы сохранения вида (4), могут быть обеспечены в рамках спектральной модели с точностью в пределах вычислительной погрешности [10].

В качестве иллюстрации преимуществ спектрального метода (10) на рис. 1 представлены результаты численных экспериментов по оценке эффективности данного подхода в сравнении со стандартными функциями *Matlab* для решения двухточечных краевых задач [11]. Как тестовый пример рассмотрена линейная задача (1), (2), (5) при значениях параметров: $\kappa = 1$, $\Delta = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 0$. Погрешность приближенных решений оценивалась относительно точного значения амплитуды отраженной волны $E_-(-1)$, согласно аналитическому решению [7, с. 146]:

$$|E_-(-1)| = \frac{|\operatorname{sh}(2\alpha)|}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(2\alpha - \chi^2)}}, \quad \alpha = \kappa^2 - \Delta^2, \quad \chi = \frac{\Delta}{\kappa}. \quad (12)$$

На рис. 1 представлены зависимости относительной погрешности приближенного решения $\delta = \frac{\|E_-(-1) - |u_-(-1)|\|}{|E_-(-1)|}$, вычисленной в соответствии с (12), от времени решения задачи при использовании спектрального метода Чебышева (10) и метода сплайн-коллокации 5-го порядка точности [11]. Более высокая точность результатов достигалась за счет увеличения размерности сетки от $N = 21$ до $N = 47$ в спектральном методе и от $N = 17$ до $N = 700$ – в методе сплайн-коллокации. С ростом размерности сетки соответственно возрастали вычислительные затраты на решение задачи.

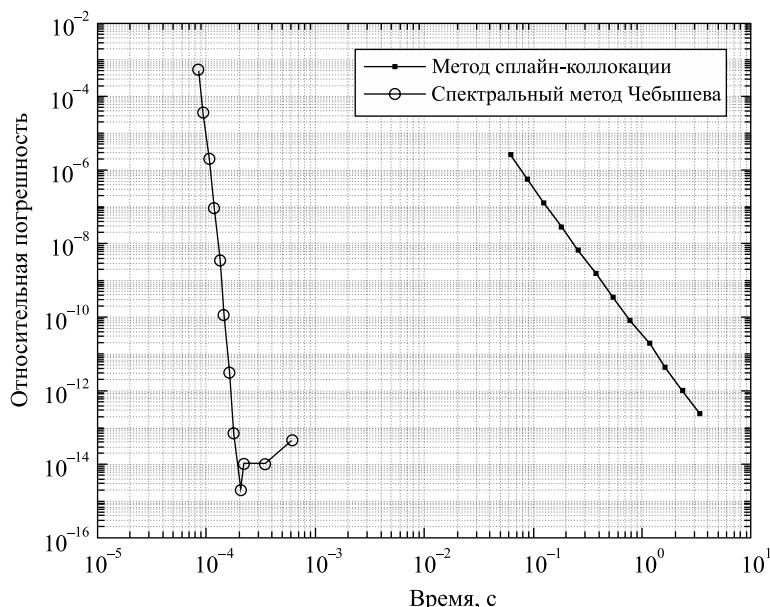


Рис. 1. Зависимости относительной погрешности приближенных решений от времени вычислений для спектрального метода Чебышева (10) и метода сплайн-коллокации 5-го порядка точности [11], реализованных в функции *Matlab* *tpbvp5c*

Fig. 1. Dependences of the relative error of the approximate solutions on the calculation time for the Chebyshev spectral method (10) and the spline-collocation methods of the fifth orders of accuracy [11] implemented in *Matlab* (function *tpbvp5c*)

Из рис. 1 следует, что спектральный метод Чебышева позволяет сократить время решения задачи на один-два порядка для получения заданной относительной погрешности в диапазоне от $\delta = 10^{-4}$ до $\delta = 10^{-12}$, причем с ростом требований к точности преимущества спектрального метода возрастают.

Среди преимуществ спектрального метода Чебышева для рассмотренного класса задач следует отметить естественную адаптацию расчетной сетки к характеру типичных решений. Пример решения задачи (1)–(3), $\gamma = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$, представлен на рис. 2. При возрастании значения параметра $\gamma \gg 1$ решение приобретает структуру пограничного слоя, для описания которого требуется лучшее разрешение сетки вблизи границ области, что естественным образом обеспечивается расчетной сеткой (9).

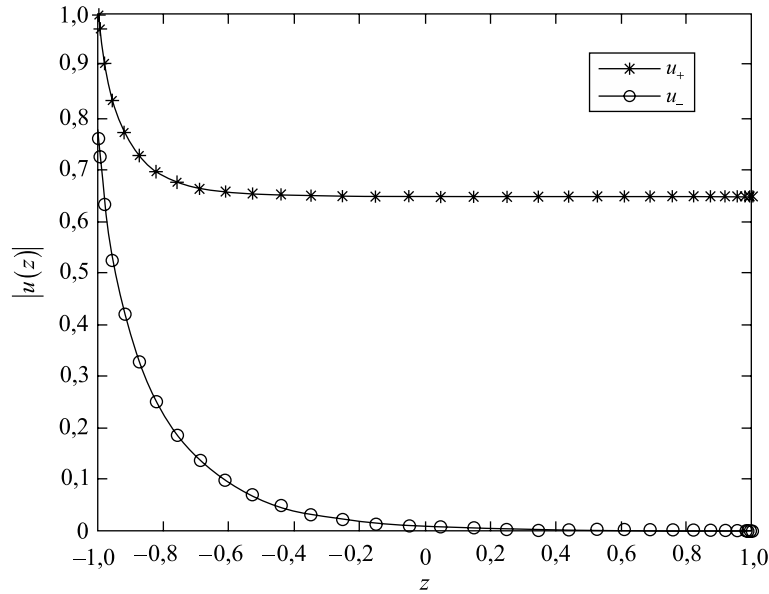


Рис. 2. Решения задачи (1)–(3), $\gamma = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$
Fig. 2. The solution of problem (1)–(3), $\gamma = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$

В случае линейной задачи спектральный метод приводит к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей блочного вида. При решении нелинейных задач соответствующая спектральная модель (10) также нелинейная, поэтому для ее реализации требуется использование итерационных методов.

Итерационные методы реализации спектральной модели

Рассмотрим итерационный метод Ньютона, который для задачи (1)–(3), (10) имеет следующий вид:

$$J^s \mathbf{u}^{s+1} = J^s \mathbf{u}^s - \tau F(\mathbf{u}^s), \quad (13)$$

$$J^s = J(\mathbf{u}^s) = A + \gamma \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

$$G_{11} = \text{diag} \left(0, |u_-^s(z_1)|^2, \dots, |u_-^s(z_{N-1})|^2 \right),$$

$$G_{22} = \text{diag} \left(|u_+^s(z_0)|^2, \dots, |u_+^s(z_{N-2})|^2, 0 \right),$$

$$G_{12} = \text{diag} \left(0, u_+^{*s}(z_1) u_-^s(z_1), \dots, u_+^{*s}(z_{N-1}) u_-^s(z_{N-1}) \right), \quad (14)$$

$$G_{21} = \text{diag} \left(u_-^{*s}(z_0) u_+^s(z_0), \dots, u_-^{*s}(z_{N-2}) u_+^s(z_{N-2}), 0 \right),$$

$$F(\mathbf{u}^s) = A \mathbf{u}^s + g(\mathbf{u}^s) - f, \quad s = 0, 1, \dots$$

Здесь $u_{\pm}^*$ означает комплексно-сопряженное значение $u_{\pm}$, $0 < \tau \leq 1$ – итерационный параметр, обеспечивающий глобальную сходимость метода Ньютона в пространстве начальных приближений вне зависимости

от попадания в достаточно малую окрестность искомого решения. Максимальная скорость сходимости достигается при $\tau = 1$. Если сходимость итерационного метода (13), (14) отсутствует при $\tau = 1$, тогда следует повторить процедуру с меньшим значением τ , например $\tau = \frac{1}{2}$. Использование модифицированного метода Ньютона с параметром позволяет достичь сходимости при произвольном начальном приближении, например нулевом: $\mathbf{u}_{\pm}^0 = 0$.

Наряду с итерационным методом Ньютона (13), (14) рассмотрим также итерационный процесс, аналогичный консервативному методу, успешно примененному ранее для реализации разностных моделей аналогичных нелинейных задач встречного взаимодействия оптических волн [12]:

$$C^s \mathbf{u}^{s+1} = f, \quad (15)$$

$$C^s = C(\mathbf{u}^s) = \begin{pmatrix} D_+ & \gamma G_{12} \\ \gamma G_{21} & D_- \end{pmatrix}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в формулах (13), (14). Структура матрицы C в итерационном методе (15) совпадает со структурой матрицы Якоби в методе Ньютона, что позволяет говорить о сопоставимой вычислительной сложности одной итерации в рассмотренных двух итерационных процедурах.

Отличительная особенность итерационного метода (15), (16) заключается в том, что в пределах спектральной точности он является консервативным, т. е. приближенное решение на каждой итерации удовлетворяет закону сохранения (4) с точностью не хуже, чем погрешность спектральной производной. Иными словами, консервативность итерационного метода выполняется настолько, насколько спектральная производная обеспечивает точность дифференцирования квадрата сеточных функций на текущей итерации.

Результаты численных экспериментов показывают, что скорость сходимости итерационных методов (13), (14) и (15), (16) существенно зависит от интенсивности взаимодействия волн, однако для консервативного итерационного метода замедление скорости сходимости с ростом параметра γ существенно ниже по сравнению с методом Ньютона (13), (14). В частности, на рис. 3 представлены результаты сравнительного анализа эффективности рассмотренных численных методов, а именно зависимости числа итераций для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-8}$. В качестве критерия точности использовалась относительная норма невязки приближенного решения. Рассмотрен пример решения задачи (1)–(3) в диапазоне

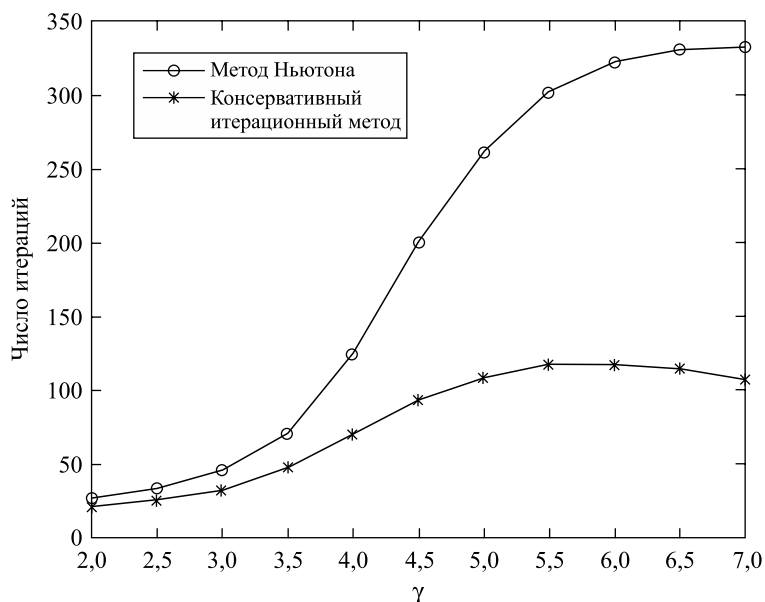


Рис. 3. Количество итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-8}$ при реализации нелинейной спектральной схемы (10), (11) посредством консервативного итерационного метода (15), (16) и методом Ньютона (13), (14) при различных значениях параметра γ , $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$

Fig. 3. The number of iterations at the accuracy goal $\varepsilon = 10^{-8}$ when the nonlinear spectral scheme (10), (11) is realized by means of the conservative iterative method (15), (16) and Newton's method (13), (14) at different values of the parameter γ and $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$

значений параметра γ от 2 до 7 при $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$. Как видно из рис. 3, консервативный итерационный метод требует меньше итераций по сравнению с методом Ньютона и при $\gamma > 5$ в два-три раза превосходит его в эффективности. Как отмечалось выше, вычислительные затраты на отдельную итерацию в рассмотренных методах приблизительно одинаковы.

Заключение

Представленные материалы показывают, что спектральный метод Чебышева для краевых задач, описывающих встречное взаимодействие оптических волн в нелинейных средах, обладает бесспорным преимуществом в обеспечении высокой точности результатов по сравнению со стандартными методами, предоставляемыми математическим пакетом *Matlab*. В частности, для модельной линейной задачи спектральный метод Чебышева позволяет на 2–3 порядка сократить время решения по сравнению с методом сплайн-коллокации 5-го порядка точности.

Предложенный консервативный итерационный метод (15) для реализации нелинейной задачи (1)–(3) тестировался как на рассмотренном двухволновом варианте, так и на более сложных примерах многоволновых задач, характерных для моделирования оптоволоконных усилителей на основе эффекта вынужденного комбинационного рассеяния [1; 2]. При этом в подавляющем большинстве случаев данный итерационный метод демонстрировал убедительное преимущество в скорости сходимости и меньшую чувствительность к выбору начального приближения по сравнению с методом Ньютона.

Библиографические ссылки

1. Headley C, Agrawal GP. *Raman amplification in fiber optical communication systems*. San Diego: Academic Press; 2005.
2. Perlín VE, Winful HG. Optimal design of flat-gain wide-band fiber Raman amplifiers. *Journal of lightwave technology*. 2002; 20(2):250–254. DOI: 10.1109/50.983239.
3. Карамзин ЮН, Сухоруков АП, Трофимов ЮН. *Математическое моделирование в нелинейной оптике*. Москва: МГУ; 1989.
4. Serdar Gokhan F, Yilmaz G. Solution of Raman fiber amplifier equations using MATLAB BVP solvers. *COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*. 2011;30(2):398–411. DOI: 10.1108/03321641111100998.
5. Liu X, Zhang M. An effective method for two-point boundary value problems in Raman amplifier propagation equations. *Optics communications*. 2004;235(1):75–82. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.03.003.
6. Tarman HI, Berberoğlu H. A spectral collocation algorithm for two-point boundary value problem in fiber Raman amplifier equations. *Optics Communications*. 2009;282(8):1551–1556.
7. Виноградова МБ, Сухоруков АП, Руденко ОВ. *Теория волн*. Москва: Наука; 1979.
8. Trefethen LN. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM; 2000.
9. Weideman JA, Reddy SC. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*. 2000;26(4):465–519.
10. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. New York: DOVER Publications; 2000.
11. Shampine LF, Gladwell I, Thompson S. *Solving ODEs with Matlab*. New York: Cambridge University Press; 2003.
12. Волков ВМ. Итерационные методы решения стационарных задач встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах. *Дифференциальные уравнения*. 1998;34(7):935–941.

References

1. Headley C, Agrawal GP. *Raman amplification in fiber optical communication systems*. San Diego: Academic Press; 2005.
2. Perlín VE, Winful HG. Optimal design of flat-gain wide-band fiber Raman amplifiers. *Journal of lightwave technology*. 2002; 20(2):250–254. DOI: 10.1109/50.983239.
3. Karamzin JuN, Suhorukov AP, Trofimov JuN. *Matematicheskoe modelirovanie v nelineinoi optike* [Mathematic modeling in the non-linear optics]. Moscow: MGU; 1989. Russian.
4. Serdar Gokhan F, Yilmaz G. Solution of Raman fiber amplifier equations using MATLAB BVP solvers. *COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*. 2011;30(2):398–411. DOI: 10.1108/03321641111100998.
5. Liu X, Zhang M. An effective method for two-point boundary value problems in Raman amplifier propagation equations. *Optics communications*. 2004;235(1):75–82. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.03.003.
6. Tarman HI, Berberoğlu H. A spectral collocation algorithm for two-point boundary value problem in fiber Raman amplifier equations. *Optics Communications*. 2009;282(8):1551–1556.
7. Vinogradova MB, Suhorukov AP, Rudenko OV. *Teoriya voln* [The waves theory]. Moscow: Nauka; 1979. Russian.
8. Trefethen LN. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM; 2000.
9. Weideman JA, Reddy SC. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*. 2000;26(4):465–519.
10. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. New York: DOVER Publications; 2000.
11. Shampine LF, Gladwell I, Thompson S. *Solving ODEs with Matlab*. New York: Cambridge University Press; 2003.
12. Volkov VM. The iterative methods for solving stationary problems of counter propagating optical waves in nonlinear spaces. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1998;34(7):935–941. Russian.

УДК 517.977

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ¹⁾, В. В. КРАХОТКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

В теории управляемости динамических систем в большинстве случаев управления выбираются из класса кусочно-непрерывных функций. Однако представляет интерес вопрос выбора управлений из других классов, которые технически легко реализуемы. В статье рассматривается задача относительной управляемости линейной системы со многими запаздываниями по управлению с помощью дифференциального (динамического) регулятора. Получены критерии относительной управляемости, которые записываются в терминах исходной системы и динамического регулятора.

Ключевые слова: управляемость; наблюдаемость; линейные системы; системы с запаздыванием по управлению; динамический регулятор.

Образец цитирования:

Размыслович ГП, Крахотко ВВ. Управляемость линейных систем со многими запаздываниями по управлению с помощью дифференциальных регуляторов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:82–85.

For citation:

Razmyslovich GP, Krakhotko VV. Controllability linear systems with many delays in control by the differential regulators. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:82–85. Russian.

Авторы:

Георгий Прокофьевич Размыслович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Валерий Васильевич Крахотко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Georgii P. Razmyslovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science. razmysl@bsu.by

Valerii V. Krakhotko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of optimal control methods, faculty of applied mathematics and computer science.

CONTROLLABILITY LINEAR SYSTEMS WITH MANY DELAYS IN CONTROL BY THE DIFFERENTIAL REGULATORS

G. P. RAZMYSLOVICH^a, V. V. KRAKHOTKO^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: G. P. Razmyslovich (razmysl@bsu.by)

In the theory of controllability dynamical systems in most cases the control is selected from the class of piecewise continuous functions. But the choice of the control from other classes is interested. In the article we consider the problem of relative controllability of linear systems with many delays in control by the help of differential (dynamical) regulator. The criterions of controllability in terms of parameters initial system and dynamical regulator are obtained.

Key words: controllability; observability; linear systems; systems with delay in control; dynamical regulator.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + \sum_{i=1}^m b_i u(t - h_i), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad u_0(\cdot) = \{u(t) \equiv 0, \quad t \in [-h_m, 0]\}, \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $A - n \times n$ -матрица; x_0, b, b_i ($i = \overline{1, m}$) – заданные n -векторы; u – скалярное управление; h_i – запаздывания ($1 \leq i \leq m$), причем $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m$.

Определение 1. Система (1) называется относительно управляемой, если для любого начального состояния (2) найдутся момент времени t_1 ($0 < t_1 < +\infty$) и кусочно-непрерывное управление $u(t)$ ($0 \leq t \leq t_1$) такие, что состояние системы (1), (2), соответствующее этому управлению, удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Обобщая результаты работы [1], имеем следующее утверждение.

Теорема 1. Система (1) относительно управляема тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \quad (3)$$

где $B - n \times (m+1)$ -матрица вида $B = (b, b_1, \dots, b_m)$.

Представляет интерес вопрос о возможности управления системой (1) не кусочно-непрерывными функциями, а с помощью более узкого класса управлений. А именно пусть управление строится по выходному сигналу

$$u(t) = c^T y(t), \quad t \geq 0 \quad (4)$$

дифференциальной системы

$$\dot{y}(t) = Dy(t), \quad y_0 = y(0), \quad (5)$$

где $c, y, y_0 \in \mathbb{R}^n$; D – заданная $n \times n$ -матрица.

Определение 2. Система (5) называется наблюдаемой, если существует момент времени t_1 ($0 < t_1 < +\infty$) такой, что любое начальное состояние y_0 системы (5) можно восстановить по выходу (4).

Согласно [2] верна следующая теорема.

Теорема 2. Система (5) наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}(c^T, c^T D, c^T D^2, \dots, c^T D^{n-1}) = n. \quad (6)$$

Определение 3. Систему (1) назовем управляемой дифференциальным регулятором (5), если существует момент времени t_1 ($0 < t_1 < +\infty$) такой, что для любого начального состояния (2) найдется начальное состояние y_0 системы (5), при котором состояние $x(t)$ системы (1), соответствующее управлению (4), удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Запишем решение системы (1), (2) с учетом (4), (5):

$$x(t) = e^{At} x_0 + \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)} \left(bc^T + \sum_{i=1}^m b_i c^T e^{-Dh_i} \right) e^{D\tau} d\tau \right) y_0. \quad (7)$$

Исходя из (7), получаем, что система (1) управляема дифференциальным регулятором (5) тогда и только тогда, когда при некотором $t_1 > 0$ для любого n -вектора x_0 найдется n -вектор y_0 такой, что выполняется равенство

$$-x_0 = \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} \left(bc^T + \sum_{i=1}^m b_i c^T e^{-Dh_i} \right) e^{D\tau} d\tau \right) y_0. \quad (8)$$

Из равенства (8) получаем неявный критерий управляемости системы (1) регулятором (5).

Теорема 3. Для управляемости системы (1) дифференциальным регулятором (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\text{rank} \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} \left(bc^T + \sum_{i=1}^m b_i c^T e^{-Dh_i} \right) e^{D\tau} d\tau \right) = n. \quad (9)$$

Укажем более удобный критерий управляемости.

Теорема 4. Система (1) управляема дифференциальным регулятором (5) тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\text{rank} \tilde{B} = n, \text{rank} \tilde{C} = n, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= (b, Ab, \dots, A^{n-1}b, b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_m); \\ \tilde{C} &= (c, D^T c, \dots, (D^{n-1})^T c, e^{-Dh_1} c, (e^{-Dh_1} D)^T c, \dots, (e^{-Dh_1} D^{n-1})^T c, \dots, (e^{-Dh_m} D)^T c, \dots, (e^{-Dh_m} D^{n-1})^T c). \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим матричную функцию

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-A\tau} \left(bc^T + \sum_{i=1}^m b_i c^T e^{-Dh_i} \right) e^{D\tau} d\tau, \quad t \geq 0.$$

Поскольку матричные функции $e^{A\tau}$ и $e^{D\tau}$ представимы как [3]

$$e^{-A\tau} = \sum_{\gamma=0}^{n-1} a_\gamma(\tau) A^\gamma, \quad e^{D\tau} = \sum_{\beta=0}^{n-1} b_\beta(\tau) D^\beta,$$

где $a_\gamma(\tau)$, $b_\beta(\tau)$ – некоторые аналитические функции, то функцию $\Phi(t)$, в свою очередь, можно представить в виде

$$\Phi(t) = \tilde{B} \tilde{F}(t) \tilde{C}^T,$$

причем $n(m+1) \times n(m+1)$ -матрица $\tilde{F}(t)$ является блочно-диагональной:

$$\tilde{F}(t) = \text{diag}(F(t), F(t), \dots, F(t)),$$

а $n \times n$ -матрица $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t a_0(\tau) b_0(\tau) d\tau & \dots & \int_0^t a_0(\tau) b_{n-1}(\tau) d\tau \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_0^t a_{n-1}(\tau) b_0(\tau) d\tau & \dots & \int_0^t a_{n-1}(\tau) b_{n-1}(\tau) d\tau \end{bmatrix}.$$

Так как система (1) управляема дифференциальным регулятором (5), то на основании теоремы 3 для некоторого момента t_1 ($0 < t_1 < +\infty$) выполняется равенство $\text{rank} \Phi(t_1) = n$. Но тогда в силу неравенства Сильвестра [3] из (11) следуют равенства (10).

Достаточность. Пусть выполняются соотношения (10). Рассматривая определитель матрицы $F(t)$ и вычисляя производную порядка n^2 в точке $t = 0$, получаем, что $(\det F(t))^{(n^2)} \Big|_{t=0} \neq 0$. Поэтому из

аналитичности функции $F(t)$ заключаем, что $F(t)$ может обращаться в нуль лишь в изолированных точках полуинтервала $[0, +\infty)$. Отсюда, поскольку матрица $\tilde{F}(t)$ является блочно-диагональной, найдется момент времени t_1 ($0 < t_1 < +\infty$) такой, что $\det \tilde{F}(t_1) \neq 0$. Следовательно, согласно [4], с учетом соотношений (10), (11), получаем, что выполняется равенство (9), т. е. система (1) управляема дифференциальным регулятором (5). Теорема доказана.

Следуя [3], отметим, что равенство $\text{rank } \tilde{B} = n$ равносильно равенству (3), а равенство $\text{rank } \tilde{C} = n$ равносильно равенству (6). Отсюда справедлива следующая теорема, которая развивает результаты работы [5].

Теорема 5. Система (1) управляема дифференциальным регулятором (5) тогда и только тогда, когда система (1) относительно управляема, а система (5) относительно наблюдаема.

В заключение отметим, что полученные результаты обобщаются на системы с r -мерным управлением [6], а именно для систем вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=0}^m B_i u(t - h_i), \quad t \geq 0,$$

где $B, B_i, i = \overline{1, m}$, – заданные $n \times r$ -матрицы; $u \in \mathbb{R}^r$, а также для систем управления с группой динамических регуляторов.

Библиографические ссылки

1. Габасов РФ, Кириллова ФМ, Крахотко ВВ. Управляемость многоконтурных систем с сосредоточенными параметрами. *Автоматика и телемеханика*. 1971;XXI(11):18–25.
2. Красовский НН. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. *Прикладная математика и механика*. 1964;28(1):3–14.
3. Гантмахер ФР. *Теория матриц*. 4-е издание. Москва: Наука; 1988. 552 с.
4. Игнатенко ВВ. Управляемость систем нейтрального типа со многими входами группой обыкновенных динамических регуляторов. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук*. 1976;3:24–33.
5. Крахотко ВВ, Размыслович ГП. Управляемость линейных систем с запаздыванием по управлению при помощи динамического регулятора. В: *Еругинские чтения – 2018. Тезисы докладов XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям; 15–18 мая 2018 г.; Гродно, Беларусь. Часть 1*. Минск: Институт математики НАН Беларуси; 2018. с. 120–121.
6. Крахотко ВВ, Размыслович ГП. Управляемость линейных систем со многими запаздываниями по управлению при помощи динамического регулятора. В: *Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация (DSSCO'18). Материалы Международной научной конференции к 100-летию со дня рождения академика Е. А. Барбашина; 24–29 сентября 2018 г.; Минск, Беларусь*. Минск: БГУ; 2018. с. 143–145.

References

1. Gabasov RF, Kirillova FM, Krakhotko VV. Upravlyaemost' mnogokonturnykh sistem s sosredotochennymi parametrami. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 1971;XXI(11):18–25. Russian.
2. Krasovskii NN. K teorii upravlyaemosti i nablyudaemosti lineinykh dinamicheskikh sistem. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1964;28(1):3–14. Russian.
3. Gantmaher FR. *Teoriya matrits* [Theory of matrices]. 4th edition. Moscow: Nauka; 1988. 552 p. Russian.
4. Ignatenko VV. Upravlyaemost' sistem neutral'nogo tipa so mnogimi vkhodami gruppoi obyknovennykh dinamicheskikh regul'yatorov. *Izvestiya AN BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1976;3:24–33. Russian.
5. Krakhotko VV, Razmyslovich GP. Upravlyaemost' lineinykh sistem s zapazdyvaniem po upravleniyu pri pomoshchi dinamicheskogo regul'yatora. In: *Erugin'skie chteniya – 2018. Tezisy dokladov XVIII Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam; 15–18 maya 2018 g.; Grodno, Belarus'. Chast' I* [Erugin reading – 2018. Abstracts of the XVIII International scientific conference on differential equations; 2018 May 15–18; Grodno, Belarus. Part 1]. Minsk: Institut matematiki NAN Belarusi; 2018. p. 120–121. Russian.
6. Krakhotko VV, Razmyslovich GP. Upravlyaemost' lineinykh sistem so mnogimi zapazdyvaniyami po upravleniyu pri pomoshchi dinamicheskogo regul'yatora. In: *Dinamicheskie sistemy: ustoichivost', upravlenie, optimizatsiya (DSSCO'18). Materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii k 100-letiyu so dnya rozhdeniya akademika E. A. Barbashina; 24–29 sentyabrya 2018 g.; Minsk, Belarus'* [Dynamical Systems: stability, control, optimization. Proceedings of the International scientific conference to the 100th anniversary of Ye. A. Barbashin; 2018 September 24–29; Minsk, Belarus]. Minsk: BSU; 2018. p. 143–145. Russian.

Статья поступила в редколлегию 29.05.2018.
Received by editorial board 29.05.2018.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

<i>Бондарев С. А.</i> Точки Лебега для функций из обобщенных классов Соболева $M_{\alpha}^p(X)$ в критическом случае	4
<i>Ровба Е. А., Смотрицкий К. А., Дирвук Е. В.</i> О константе Лебега интерполяционного рационального процесса с узлами Чебышева – Маркова	12

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

<i>Кушнеров А. В., Липницкий В. А.</i> Свойства и применение полиномиальных инвариантов G -орбит ошибок в реверсивных кодах	21
<i>Караулова Т. Б.</i> Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы	29

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Забрейко П. П., Пономарева С. В.</i> О непрерывности решений задачи Коши для уравнений дробного порядка	39
--	----

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Королевич В. В., Медведев Д. Г.</i> Напряженно-деформированное состояние вращающегося полярно-ортотропного диска постоянной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру	46
--	----

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Лиходед Н. А., Полещук М. А.</i> Условия приватизации элементов массива потоками вычислений	59
<i>Расолько Г. А.</i> Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов	68
<i>Буяльская Ю. В., Волков В. М.</i> Спектральный метод Чебышева для численного моделирования встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах	75

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Размыслович Г. П., Крахотко В. В.</i> Управляемость линейных систем со многими запаздываниями по управлению с помощью дифференциальных регуляторов	82
---	----

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

<i>Bondarev S. A.</i> Lebesgue points for functions from generalized Sobolev classes $M_\alpha^p(X)$ in the critical case.....	4
<i>Rouba Y. A., Smatrytski K. A., Dirvuk Y. V.</i> On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev – Markov nodes	12

GEOMETRY AND ALGEBRA

<i>Kushnerov A. V., Lipnitski V. A.</i> Properties and applications of G -orbits polynomial invariants of errors in reverse codes	21
<i>Karaulova T. B.</i> Local Fitting sets and the injectors of a finite group	29

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Zabreiko P. P., Ponomareva S. V.</i> On continuous solutions of the Cauchy problem for equations of fractional order	39
---	----

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

<i>Karalevich U. V., Medvedev D. G.</i> Stressed-deformed state of a rotating polar-orthotropic disk of constant thickness loaded with undistracted forces on the outer contour.....	46
--	----

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

<i>Likhoded N. A., Paliashchuk M. A.</i> Conditions for privatizing the elements of arrays by computing threads	59
<i>Rasolko G. A.</i> Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials	68
<i>Buyalskaya Y. V., Volkov V. M.</i> Chebyshev spectral method for numerical simulations of counter-propagating optical waves interaction in nonlinear media	75

SHORT COMMUNICATIONS

<i>Razmyslovich G. P., Krakhotko V. V.</i> Controllability linear systems with many delays in control by the differential regulators	82
--	----

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 3. 2018**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.

Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редактор *Т. Р. Джум*
Технический редактор *В. В. Кильдишева*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 08.11.2018.
Тираж 125 экз. Заказ 346.

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь».
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

© БГУ, 2018

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 3. 2018**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.

Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editor *T. R. Dzhum*
Technical editor *V. V. Kil'disheva*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 08.11.2018.
Edition 125 copies. Order number 346.

Republican Unitary Enterprise
«Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr
Ministerstva finansov Respubliki Belarus'».
License for publishing No. 02330/89, 3 March, 2014.
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.

© BSU, 2018