



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

2

2017

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики БГУ, заведующий кафедрой математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

Ответственный секретарь **МАТЕЙКО О. М.** — кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Головко В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демидо Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Дудкин А. А. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Дымков М. П. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Княжище Л. Б. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Краснопрошин В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Кротов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Макаров Е. К. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Мандрик П. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Матус П. П. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Медведев Д. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Михасев Г. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Ровба Е. А. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь.
Сафонов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Скиба А. Н. Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
Тузинов А. В. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Чижик С. А. Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Янчевский В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief **KHARIN Y. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, head of the department of mathematical modelling and data analysis of the faculty of applied mathematics and computer science of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by

Executive secretary **MATEIKO O. M.**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science of the faculty of mechanics and mathematics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by

- Ablameyko S. V.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H. Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Beniash-Kryvets V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Gladkov A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Golovko V. A. Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovik V. V. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Dzemyda G. Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Doudkin A. A. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dymkov M. P. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Egorov A. D. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Zoladek H. Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
Zhuravkov M. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Zubkov A. M. Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Kashin B. S. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Knyazhishche L. B. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Kotov V. M. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Krasnoproshin V. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Krotov V. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Makarov E. K. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Mandrik P. A. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Matus P. P. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Rovba E. A. Yanka Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus.
Safonov V. G. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Skiba A. N. Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
Tuzikov A. V. Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Chizhik S. A. National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Yanchevskii V. I. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.925+517.938

РАДИКАЛ ИДЕАЛА ФОКУСНЫХ ВЕЛИЧИН КОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

А. П. САДОВСКИЙ¹⁾, Т. В. МАКОВЕЦКАЯ¹⁾, Д. Н. ЧЕРГИНЕЦ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

На примере исследования вопроса о существовании комплексного центра для комплексной системы Куклеса $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3$ представлено применение нового метода получения необходимых и достаточных условий центра, разработанного А. П. Садовским и основанного на методе нормальных форм. Вместо изучения многообразия идеала фокусных величин предлагается исследовать многообразие идеала, базисом которого являются полиномы, полученные новым методом. При поиске радикала такого идеала исследование разбивается на две части: $BN = 0$ и $BN \neq 0$. При $BN = 0$ найдены пять серий условий комплексного центра, в частности, четыре серии условий вещественного центра. В случае $BN \neq 0$ можно считать, что в системе Куклеса

Образец цитирования:

Садовский А. П., Маковецкая Т. В., Чергинец Д. Н. Радикал идеала фокусных величин комплексной системы Куклеса // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 4–11.

For citation:

Sadovskii A. P., Makavetskaya T. V., Cherginets D. N. The radical of the focal values ideal of the complex Kukles system. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 4–11 (in Russ.).

Авторы:

Антон Павлович Садовский – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Татьяна Витальевна Маковецкая – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Дмитрий Николаевич Чергинец – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Authors:

Anton Sadovskii, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of differential equations and systems analysis, faculty of mechanics and mathematics.

sadovskii@bsu.by

Tatsiana Makavetskaya, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.

shcheglovskaya@tut.by

Dmitry Cherginets, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of differential equations and systems analysis, faculty of mechanics and mathematics.

cherginetsdn@gmail.com

$B = N$, а это значительно упрощает его дальнейшее изучение (получены три серии существования комплексного центра, в частности, две серии – вещественного центра). В результате исследования в работе определены необходимые и достаточные условия существования комплексного и вещественного центров для комплексной и вещественной систем Куклеса соответственно.

Ключевые слова: проблема центра и фокуса; система Куклеса; многообразие комплексного центра; фокусные величины; нормальные формы; радикал идеала.

THE RADICAL OF THE FOCAL VALUES IDEAL OF THE COMPLEX KUKLES SYSTEM

A. P. SADOVSKII^a, T. V. MAKAVETSKAYA^a, D. N. CHERGINETS^a

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

Corresponding author: D. N. Cherginets (cherginetsdn@gmail.com)

In the article it is considered the center-focus problem for complex Kukles system $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3$. The problem is solved by the new method, obtained by A. P. Sadovski and based on the method of normal forms. Instead of investigating the variety of ideal of focal values it is proposed to study the variety of ideal with the basis – polynomials obtained by a new method. The study of the radical of such ideal is divided into two parts: the trivial case where $BN = 0$, and the case of $BN \neq 0$. If $BN = 0$ it is obtained five series of center conditions for the complex system, in particular, four series of center conditions for the real system. In the case of $BN \neq 0$ it can be assumed $B = N$ in the Kukles' system. This assumption simplifies the further study of this case (it is obtained three series of the existence of the complex center, in particular, two series of the existence of the real center). Thus, as a result of research in the present paper it is presented the necessary and sufficient conditions for the complex and real centers existence for the complex and real Kukles' systems respectively.

Key words: center-focus problem; Kukles system; complex center variety; focal values; normal forms; radical of ideal.

Рассматриваемую систему Куклеса

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \quad (1)$$

где $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{R}$ будем называть *вещественной*, а в случае $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{C}$ – *комплексной*.

Впервые проблема центра и фокуса для системы (1) исследовалась И. С. Куклесом. В работе [1] на основании проведенного анализа фокусных величин высказана гипотеза о том, что при $N \neq 0$ для системы (1) необходимы и достаточны следующие условия вещественного центра:

$$AB + BC + L + N = 0, 2B^3 - ABC + 2BK + CL + BM - 2AN = 0;$$

$$6B^2L - ACL - ABM - BCK + KL + LM + A^2N - 2KN = 0;$$

$$6BL^2 - CKL - BKM - ALM + 2AKN = 0, 2L^3 - KLM + K^2N = 0.$$

В [2] была доказана справедливость этой гипотезы и тем самым разрешена проблема центра и фокуса для вещественной системы (1). В работе [3] было приведено решение проблемы центра и фокуса на основании исследования фокусных величин. Проблема центра и фокуса для этой системы изучалась в [4; 5].

Новый метод получения необходимых и достаточных условий существования центра (комплексного центра) в $O(0, 0)$ представлен в [6]. В настоящей работе с помощью этого метода будут получены необходимые и достаточные условия существования центра для комплексной системы (1).

Из [6, теорема 1] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. *Существует единственное аналитическое преобразование*

$$x = u + \sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^i f_{j,i-j} u^j v^{i-j} \equiv x(u, v), \quad y = v + \sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^i g_{j,i-j} u^j v^{i-j} \equiv y(u, v), \quad (2)$$

приводящее вещественную систему (1) к системе

$$\dot{u} = \left(v + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k u^k \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k u^k \right) \equiv \varphi(u, v), \quad \dot{v} = -u \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k u^k \right) \equiv \psi(u, v). \quad (3)$$

$O(0, 0)$ системы (1) является центром тогда и только тогда, когда $c_{2k-1} = 0$.

Семейство отображений (2) формирует группу, где в качестве умножения рассматривается композиция отображений. В утверждении 1 для отображения (2) обратное отображение имеет такой же вид.

Замечание 1. Утверждение 1 справедливо как для вещественной системы вида (1), так и для комплексной.

Таким образом, соотношения $c_{2k-1} = 0$, $k = \overline{2, +\infty}$, представляют собой необходимые и достаточные условия существования центра (комплексного центра) для системы (1).

Опишем механизм поиска величин c_{2k-1} . Используя системы (1), (3) и замену (2), составим следующие выражения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \varphi(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \psi(u, v) - y \equiv \sum_{k=2}^{+\infty} p_k(u, v); \\ & \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \varphi(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \psi(u, v) - \\ & - \left(-x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3 \right) \Big|_{x=x(u, v), y=y(u, v)} \equiv \sum_{k=2}^{+\infty} q_k(u, v), \end{aligned}$$

где p_k, q_k – однородные полиномы степени k . Тогда величины c_{2k-1} будем получать последовательно из соотношений

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p_k(u, v) \equiv 0, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} q_k(u, v) \equiv 0.$$

Так, на первом шаге из системы уравнений $p_2(u, v) \equiv 0, q_2(u, v) \equiv 0$ единственным образом определяем величины $f_{2,0}; f_{1,1}; g_{2,0}; g_{1,1}; c_2; d_1$. Имеем

$$f_{2,0} = \frac{A+2C}{3}; \quad f_{1,1} = 0; \quad g_{2,0} = \frac{3B}{2}; \quad g_{1,1} = C; \quad c_2 = \frac{3B}{2}; \quad d_1 = -\frac{2A+C}{3}.$$

Подставляя полученные величины в систему $p_3(u, v) \equiv 0, q_3(u, v) \equiv 0$, на втором шаге единственным образом определяем величины $f_{3,0}; f_{2,1}; f_{1,2}; g_{3,0}; g_{2,1}; g_{1,2}; c_3; d_2$. Получаем

$$\begin{aligned} f_{3,0} &= \frac{2(5A^2 + 11AC + 11C^2) + 9(K + M)}{36}; \quad f_{2,1} = \frac{N}{2}; \quad f_{1,2} = 0; \\ g_{3,0} &= \frac{B(2A + 5C) + 2L + N}{2}; \quad g_{2,1} = \frac{2AC + 7C^2 + 3M}{6}; \quad g_{1,2} = N; \\ c_3 &= B(A + C) + L + N; \quad d_2 = \frac{-2(7A^2 + 7AC + 4C^2) - 9(3K + M)}{36}. \end{aligned}$$

Пройдя $i - 1$ шаг, на i -м шаге из системы уравнений

$$p_{i+1}(u, v) \equiv 0, \quad q_{i+1}(u, v) \equiv 0$$

единственным образом определяем величины $f_{j,i+1-j}; g_{j,i+1-j}; c_{i+1}; d_i$, где $j = \overline{1, i}$.

Рассмотрим систему из первых семи необходимых условий:

$$c_{2k-1} = 0, \quad k = \overline{2, 8}, \quad (4)$$

где для получения значений $c_{2k-1} = 0$, $k = \overline{2, 8}$, проделываем 14 шагов, используя описанный выше механизм. В результате

$$c_{2k-1} = \alpha_{k-1} \tilde{c}_{k-1}, \quad k = \overline{2, 8},$$

где $\alpha_{k-1} \in \mathbb{Q}$; $\tilde{c}_1 = AB + BC + L + N$; $\tilde{c}_2$ содержит 19 слагаемых, $\tilde{c}_3 - 60$, $\tilde{c}_4 - 149$, $\tilde{c}_5 - 321$, $\tilde{c}_6 - 523$, $\tilde{c}_7 - 1122$.

Следовательно, система (4) эквивалентна системе

$$\tilde{c}_i = 0, \quad i = \overline{1, 7}. \quad (5)$$

Используя алгоритм деления, преобразуем систему (5). Для этого определим остатки от деления полинома $\tilde{c}_i$ (для каждого $i = \overline{2, 7}$) на набор полиномов $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{i-1}\}$, взятых в указанном порядке. Используем лексикографическое упорядочение $L > M > K > N > B > C > A$. Получаем

$$r_1 = \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{j,i} \tilde{c}_j + \beta_i r_i, \quad i = \overline{2, 7},$$

где $\beta_i \in \mathbb{Q}$; $\alpha_{j,i} \in \mathbb{Q}[A, B, C, K, L, M, N]$.

Тогда система уравнений (5) эквивалентна системе уравнений

$$r_i = 0, \quad i = \overline{1, 7}. \quad (6)$$

В системе (6) $r_1 = \tilde{c}_1 = AB + BC + L + N$; r_2 содержит 13 слагаемых, $r_3 - 41$, $r_4 - 99$, $r_5 - 201$, $r_6 - 382$, $r_7 - 660$.

Далее проводим аналогичную процедуру. Меняя порядок переменных на $B > L > M > K > N > C > A$, имеем

$$e_1 = r_1, \quad r_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{j,i} r_j + \gamma_i e_i, \quad i = \overline{2, 7},$$

где $\gamma_i \in \mathbb{Q}$; $b_{j,i} \in \mathbb{Q}[A, B, C, K, L, M, N]$.

Получаем новую систему, эквивалентную системам (4), (5) и (6):

$$e_i = 0, \quad i = \overline{1, 7},$$

где $e_1 = r_1 = \tilde{c}_1 = AB + BC + L + N$; $e_2 = AB(-K + M) + 2L(2K + M) + 6B^2N + (7K + 3M)N + (5A + 3C) \times (-CL + AN)$; $e_3 = -6(3K^2 - M^2)AB + 12(6K^2 + M^2)L + (135A^2 + 176C^2 + 310AC)KL - (15A^2 - 58C^2 + 4AC)LM + (390A^2 + 608C^2 + 1021AC)KN - (6A^2 - 222C^2 - 193AC + 72K)MN + 6ABN(35L + 29N) + (A + C)(135A^2 + 222C^2 + 415AC)(-CL + AN) - 12N(5L^2 - 37N^2 - 29LN)$; e_4 содержит 83 слагаемых, $e_5 - 178$, $e_6 - 334$, $e_7 - 578$.

Многообразие комплексного центра для системы (1) в случае $BN = 0$ представлено в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть V – многообразие комплексного центра системы (1). Тогда

$$V \cap \mathbb{V}(BN) = \bigcap_{k=1}^5 \mathbb{V}(J_k),$$

где $J_1 = \langle A, C, L, N \rangle$; $J_2 = \langle N, C(A + C) - K, C^2(A + C) + M(A + 2C), B(A + C) + L \rangle$; $J_3 = \langle B, N, L \rangle$; $J_4 = \langle 2A + C, B, A^4 - 18N^2, A^2 + 3K, M, L + N \rangle$; $J_5 = \langle A, B, C, K^2 + N^2, 3K + M, L + N \rangle$.

Доказательство. Используя методы компьютерной алгебры [7; 8], определяем радикалы идеалов $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, N \rangle$ и $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, B \rangle$. При вычислении базисов Гребнера будем использовать лексикографическое упорядочение $L > M > K > N > B > C > A$. Получим

$$\sqrt{\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, N \rangle} = \bigcap_{k=1}^3 J_k; \quad \sqrt{\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, B \rangle} = \bigcap_{k=3}^5 J_k.$$

Введем вектор $p = (A, B, C, K, L, M, N)$. При $p \in \mathbb{V}(J_1)$ траектории системы (1) симметричны относительно оси Oy . Значит, $O(0, 0)$ – центр системы (1).

Для доказательства справедливости включений $\mathbb{V}(J_k) \subset V \cap \mathbb{V}(BN)$, $k = \overline{2, 5}$, преобразуем систему (1) к системе Льенара.

Подстановка $(u, v) \mapsto \frac{\tilde{u}, (1 - A\tilde{u} - K\tilde{u}^2)\tilde{v}}{1 + (B + L\tilde{u})\tilde{v}}$ [9] приводит (1) к виду

$$\dot{\tilde{u}} = P_0(\tilde{u})\tilde{v}, \quad \dot{\tilde{v}} = -\tilde{u} + P_2(\tilde{u})\tilde{v}^2 + P_3(\tilde{u})\tilde{v}^3,$$

где $P_0(\tilde{u}) = 1 - A\tilde{u} - K\tilde{u}^2$; $P_2(\tilde{u}) = A + C + (3B^2 - AC + 2K + M)\tilde{u} + (6BL - CK - AM)\tilde{u}^2 + (3L^2 - KM)\tilde{u}^3$; $P_3(\tilde{u}) = B(A + C) + L + N + (CL + B(2B^2 - AC + 2K + M) - 2AN)\tilde{u} + (L(6B^2 - AC + K + M) - B(CK + AM) + (A^2 - 2K)N)\tilde{u}^2 - (L(CK - 6BL + AM) + K(BM - 2AN))\tilde{u}^3 + (2L^3 - KLM + K^2N)\tilde{u}^4$.

Введем функции

$$Q(\tilde{u}) = \frac{P_3(\tilde{u})}{\tilde{u}}; \quad R(\tilde{u}) = \frac{Q'(\tilde{u})P_0(\tilde{u}) + 3Q(\tilde{u})P_2(\tilde{u})}{\tilde{u}}.$$

Поскольку при $p \in \mathbb{V}(J_2)$ выполняется тождество $Q(\tilde{u}) \equiv 0$, а при $p \in \bigcup_{k=3}^5 \mathbb{V}(J_k)$ – тождество $\frac{R^3(\tilde{u})}{Q^5(\tilde{u})} \equiv \text{const}$, то по комплексной теореме Черкаса [10] особая точка $O(0, 0)$ – центр системы (1).

Теорема доказана.

Из [11, теорема 1] имеем следующее следствие.

Следствие 1. Пусть W – многообразие центра вещественной системы (1). Тогда

$$W \cap \mathbb{V}(BN) = \bigcup_{k=1}^4 \mathbb{V}(J_k).$$

Замечание 2. При $A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{R}$ имеет место включение $\mathbb{V}(J_5) \subset \bigcup_{k=1}^4 \mathbb{V}(J_k)$.

Далее будем искать многообразие комплексного центра для системы (1) в случае $BN \neq 0$. Поскольку $BN \neq 0$, то в системе (1) можно считать $N = B$ [3]. Для упрощения вычислений введем замены:

$$N = B; \quad C = U - A, \tag{7}$$

где U – новый параметр.

Подставим замену (7) в уравнения $e_i = 0$, $i = \overline{1, 7}$, учитывая $BN \neq 0$. Получаем эквивалентную систему

$$z_i = 0, \tag{8}$$

где $z_1 = L + B(1 + U)$; $z_2 = B(6B^2 + 3U^3 + U^2(3 - A) + 2U(1 - A)A + (3 - 4U - A)K + (1 - 2U + A)M)$; z_3 содержит 29 слагаемых, $z_4 - 82$, $z_5 - 177$, $z_6 - 333$, $z_7 - 577$.

Определим остатки от деления полинома z_i (для каждого $i = \overline{2, 7}$) на набор полиномов $\{z_1, \dots, z_{i-1}\}$, взятых в указанном порядке. Используем лексикографическое упорядочение $L > B > M > K > A > U$. Получаем

$$w_1 = z_1; \quad z_i = \sum_{j=1}^{i-1} m_{j,i} z_j + \mu_i w_i, \quad i = \overline{2, 7},$$

где $\mu_i \in \mathbb{Q}$; $m_{j,i} \in \mathbb{Q}[A, B, C, K, L, M, N]$.

Получаем новую систему, эквивалентную (8):

$$w_i = 0, \quad i = \overline{1, 7}, \tag{9}$$

где $w_1 = z_1$; $w_2 = z_2$; w_3 содержит 31 слагаемое, $w_4 - 84$, $w_5 - 179$, $w_6 - 335$, $w_7 - 579$.

Аналогичную процедуру повторяем еще четыре раза. Получаем систему уравнений, эквивалентную (9):

$$v_i = 0, \quad i = \overline{1, 7},$$

где $v_1 = w_1$; $v_2 = w_2 = z_2$; $v_3 = M^2(2 + 2U - A) + 3K^2(4 + 4U + A) - U(1 + U - A)(2A^2 - 3U + 2A^2U + 39U^2 + 42U^3 - 2A + 29UA + 16U^2A) + (3 + 5A^2 - 43U + 6A^2U - 25U^2 + 36U^3 - 4A + 25UA + 18U^2A)K + (1 + 3A^2 - 15U + 2A^2U - 3U^2 + 13U^3 + 5UA - 10U^2A + 12K)M$; v_4 содержит 85 слагаемых, $v_5 - 173$, $v_6 - 311$, $v_7 - 495$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= K + (A - U - 1)(1 + U); \quad \eta_2 = A^2 + 4U^2(1 + U)^2 + AU(1 + U)(5 + U); \\ \eta_3 &= A - U(1 + U)(5 + U); \quad \eta_4 = A^2 - AU(1 + U)(5 + U) + U^2(1 + U)^2(3 + U)(7 + U).\end{aligned}$$

Теорема 2. Система уравнений $v_i = 0$, $i = \overline{3, 7}$, эквивалентна системе уравнений $h_i = 0$, $i = \overline{1, 5}$, где $h_1 = U\eta_1\eta_2$; $h_2 = \eta_1U(K + (1 + U)(A + U + U^2))$; $h_3 = \eta_1(3K^2 + A^2U(1 + 3U) + U^2(1 + U)^2(7 + 29U + 33U^2) + AU(1 + U)(7 + 31U + 44U^2 + 9U^3) + K(A(2 - 3U) + 3U(2 + U)))$; $h_4 = 3K^2 - 3U^2(1 + U)^2 \times (2 + U) + A^2U(4 + 3U) - AU(1 + U)(4 - 3U - 3U^2) + M(A - 2U - 2) - K(6 + 7U - 3U^2(1 + U) - A(5 + 6U))$; $h_5 = A(A - U - 1)U(1 + U) + M(K + (1 + U)^2) - K(2A - (1 + U)(3 + U))$.

При этом

$$\langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \rangle = \bigcap_{j=1}^4 I_j,$$

где $I_1 = \langle (1 + U)(1 + U - A) - K, (1 + U - A)((2 + U)A - (1 + U)(3 + U)) - (2 + 2U - A)M \rangle$; $I_2 = \langle A^2 + 4 \times (1 + U)^2 U^2 + U(1 + U)(5 + U)A, (1 + U)(U + U^2 + A) + K, 3U(1 + U) + (3 + U)A - M \rangle$; $I_3 = \langle U, 2A + 3K, 2A - M \rangle$; $I_4 = \langle U, K, M \rangle$.

Доказательство. Используя алгоритм деления, убеждаемся, что каждая величина v_i , $i = \overline{3, 7}$, принадлежит идеалу $\langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \rangle$. Например,

$$v_3 = h_1 p_{1,1} + h_2 p_{1,2} + h_3 p_{1,3} + h_4 p_{1,4} + h_5 p_{1,5},$$

где $p_{1,1} = -37 - 45U$; $p_{1,2} = 2(2 + 21A + 9K) + 3U(5 + 3A + 17U + 3U^2)$; $p_{1,3} = 5$; $p_{1,4} = 6 - M + 3A(1 + U)^2 + K(5 + 6U) + U(19 + 74 + 12U^2 + 3U^3)$; $p_{1,5} = 13 + 3K + 3U(1 + U)(3 + U)$,

или

$$v_4 = h_1 p_{2,1} + h_2 p_{2,2} + h_3 p_{2,3} + h_4 p_{2,4} + h_5 p_{2,5},$$

где $p_{2,1} = 277 + 2A + 18K + 64(37 + 8U + 3U^2)$; $p_{2,2} = -14 - 3K(-77 + 12U) + A(-313 + 135U - 150U^2 - 18U^3) - U(-325 + 1176U + 180U^2 + 72U^3)$; $p_{2,3} = -22 + 2A$; $p_{2,4} = -2A^2(1 + U) + K(-38 - 2A + 61A - 12U^2) - 3A(4 + 5U - 25U^2 + 4U^3) + 2(-13 + 26U + 93U^2 - 169U^3 + 2U^4)$; $p_{2,5} = -56 + 12K + 243U - 189U^2 + 7U^3 + M(12 + 6U)$.

Аналогично можно определить разложения полиномов v_i , $i = \overline{5, 7}$.

Таким образом,

$$\langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \rangle \subset \langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \rangle.$$

Вычислим базис Гребнера для идеала $\langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \rangle$ с порядком переменных $M > K > A > U$. Получаем

$$\langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \rangle = \langle g_1, g_2, g_3, \dots, g_{27} \rangle,$$

где $g_1 = U^{12}\eta_1\eta_2$; $g_2 = U^{11}\eta_1\eta_2\eta_3$; $g_3 = U^{10}\eta_1\eta_2\eta_4$; $g_i \in \mathbb{Q}[M, K, A, U]$, $i = 4, 27$.

Поскольку

$$h_1^7 = \sum_{i=1}^{27} \tilde{\alpha}_i g_i; \quad h_2^7 = \sum_{i=1}^{27} \tilde{\beta}_i g_i; \quad h_3^7 = \sum_{i=1}^{27} \tilde{\gamma}_i g_i; \quad h_4^5 = \sum_{i=1}^{27} \tilde{\delta}_i g_i; \quad h_5^7 = \sum_{i=1}^{27} \tilde{\mu}_i g_i,$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}_i, \tilde{\delta}_i, \tilde{\mu}_i \in \mathbb{Q}[M, K, A, U]$, то

$$\langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \rangle \subset \langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \rangle.$$

Теорема доказана.

Ввиду того, что идеалы I_k , $k = \overline{1, 4}$, радикальные, имеет место следствие.

Следствие 2. Справедливо равенство $\sqrt{\langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \rangle} = \bigcup_{j=1}^4 I_j$.

Замечание 3. Если подсчитывать базис Гребнера идеала $\langle v_3, v_4, v_5, v_6 \rangle$, то получим идеал, состоящий из 28 элементов. Все полиномы со 2-го по 28-й содержат от 668 до 1030 слагаемых, но коэффициенты (начиная с четвертого) представляют собой целые числа, содержащие не менее 10^4 цифр.

Впервые вычисление базиса Гребнера идеала фокусных величин полиномиальной динамической системы (1) с использованием компьютерного пакета *Mathematica 6.0* было осуществлено А. Е. Руденком [8, с. 138–142].

Теорема 3. Комплексная система (1), где $BN \neq 0$, имеет комплексный центр в $O(0, 0)$ тогда и только тогда, когда $BN \neq 0$, и выполняется одна из следующих серий условий:

1) $(1+C)^3 + B^2(2A + 4(1+C)) = 0$, $A(1+C) + (1+C)^2 - K = 0$, $2B^2 + (1+C)(2+C) + M = 0$, $B(1+A+C) + L = 0$, $B - N = 0$;

2) $5A^4 + 4C^2(1+C)^2 + AC(1+C)(13+17C) + A^3(14+19C) + A^2(10+27C^2+36C) = 0$, $2A^3 - 2B^2 + 2C^2(1+C) + 2A^2(1+3C) + AC(5+6C) = 0$, $A^3 + 3A^2(1+C) + C(1+C)^2 + A(1+C)(2+3C) + K = 0$, $4A^2 + A(6+7C) + 3C(1+C) - M = 0$, $B(1+A+C) + L = 0$, $B - N = 0$;

3) $A + C = 0$, $4A^2 + 9B^2 = 0$, $2A + 3K = 0$, $2A - M = 0$, $B + L = 0$, $B - N = 0$.

Доказательство. Используя идеалы из теоремы 2, условия $B = N$; $C = U - A$; $v_1 = 0$; $\tilde{v}_2 = 0$, где $\tilde{v}_2 = \frac{v_2}{B}$ – полином, а также вычисляя базис Гребнера с порядком переменных $N > L > M > K > B > C > A$, получаем идеалы J_k :

$$J_k = I_k + \langle B + N, A + C - U, v_1, \tilde{v}_2 \rangle \cap \mathbb{C}[A, B, C, K, L, M, N], \quad k = \overline{1, 3},$$

где элементами идеала J_1 являются полиномы из серии условий 1) теоремы 3, элементами идеала J_2 – полиномы из серии 2) теоремы 3, элементами идеала J_3 – полиномы из серии условий 3) теоремы 3.

Рассматривая элементы базиса идеала I_4 из теоремы 3 наряду с условиями $B = N$; $C = U - A$; $v_1 = 0$; $\tilde{v}_2 = 0$, новых условий центра не получаем, так как в этом случае $B = 0$.

Из [3, теорема 1] получаем, что при выполнении одной из серий условий 1), 2) замена

$$(u, v) \mapsto \frac{\tilde{u}, (1 - A\tilde{u} - K\tilde{u}^2)\tilde{v}}{1 + (B + L\tilde{u})\tilde{v}}$$

приводит (1) к системе, траектории которой симметричны относительно одной из координатных осей. Следовательно, в этих случаях $O(0, 0)$ – центр системы (1).

При выполнении соотношений из серии условий 3) получаем систему с комплексным центром в $O(0, 0)$, так как в этом случае система (1) имеет интегрирующий множитель вида

$$\mu = (-3B - w + 4B(x + iy))^{\frac{3(B-w)}{2w}} (-3B + w + 4B(x + iy))^{-\frac{3(B+w)}{2w}},$$

где $w^2 + 16iB - B^2 = 0$. Теорема доказана.

Следствие 3. Вещественная система (1), где $BN \neq 0$, имеет центр в $O(0, 0)$ тогда и только тогда, когда $BN \neq 0$ и выполняется одна из серий условий 1), 2) из теоремы 3.

Таким образом, в настоящей работе с использованием нового метода поиска необходимых и достаточных условий центра получены необходимые и достаточные условия существования комплексного и вещественного центров комплексной и вещественной систем Куклеса соответственно.

Библиографические ссылки

1. Lloyd N. G., Pearson J. M. Computing centre conditions for certain cubuc systems // J. Comput. Appl. Math. 1992. Vol. 40, issue 3. P. 323–336.
2. Садовский А. П. Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 236–244.
3. Садовский А. П. Кубические системы нелинейных колебаний с семью предельными циклами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 4. С. 472–481.
4. Lloyd N. G., Pearson J. M. Bifurcations of limit cycles and integrability of planar dynamical systems in complex form // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32, № 10. P. 1973–1984.
5. Pearson J. M., Lloyd N. G. Kukles revisited: Advances in computing techniques // Comput. Math. with Appl. 2010. Vol. 60, issue 10. P. 2797–2805.
6. Садовский А. П. Центры и их изохронность // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф. (Минск, 5–10 сент. 2016 г.) : в 5 ч. Минск, 2016. Ч. 2. С. 52.
7. Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М., 2000.
8. Садовский А. П. Полиномиальные идеалы и многообразия. Минск, 2008.
9. Садовский А. П. К условиям центра и фокуса для уравнений нелинейных колебаний // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 9. С. 1716–1719.
10. Садовский А. П., Щеглова Т. В. Система Лъенара с комплексными коэффициентами и метод Черкаса // Весн. Гродн. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і ўпраўленне. 2014. № 1(170). С. 21–33.
11. Садовский А. П., Щеглова Т. В. Многообразие комплексного и вещественного центра двумерных автономных полиномиальных дифференциальных систем // Доклады НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 4. С. 34–40.

References

1. Lloyd N. G., Pearson J. M. Computing centre conditions for certain cubuc systems. *J. Comput. Appl. Math.* 1992. Vol. 40, issue 3. P. 323–336. DOI: 10.1016/0377-0427(92)90188-4.
2. Sadovskii A. P. [Solution of the center-focus problem for a cubic system of nonlinear oscillations]. *Differenatsial’nye uravn. [Differ. Equ.]*. 1997. Vol. 33, No. 2. P. 236–244 (in Russ.).
3. Sadovskii A. P. [Cubic systems of nonlinear oscillations with seven limit cycles]. *Differenatsial’nye uravn. [Differ. Equ.]*. 2003. Vol. 39, No. 4. P. 472–481 (in Russ.).
4. Lloyd N. G., Pearson J. M. Bifurcations of limit cycles and integrability of planar dynamical systems in complex form. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. Vol. 32, No. 10. P. 1973–1984. DOI: 10.1088/0305-4470/32/10/014.
5. Pearson J. M., Lloyd N. G. Kukles revisited: Advances in computing techniques. *Comput. Math. with Appl.* 2010. Vol. 60, issue 10. P. 2797–2805. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.09.034.
6. Sadovskii A. P. [Centers and their isochronous]. *XII Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya : materialy Mezhdunar. nauchn. konf. (Minsk, 5–10 Sept., 2016) : in 5 parts. Minsk, 2016. Part 2. P. 52 (in Russ.)*.
7. Cox D., Little J., O’Shi D. Idealy, mnogoobraziya i algoritmy. Vvedenie v vychislitel’nye aspekty algebraicheskoi geometrii i kommutativnoi algebrы [Ideals, varieties and algorithms. Introduction to computational aspects of algebraic geometry and commutative algebra]. Moscow, 2000 (in Russ.).
8. Sadovskii A. P. [Polynomial ideals and varieties: tutorial for students]. Minsk, 2008 (in Russ.).
9. Sadovskii A. P. [On the center-focus conditions for equations of nonlinear oscillations]. *Differenatsial’nye uravn. [Differ. Equ.]*. 1979. Vol. 15, No. 9. P. 1716–1719 (in Russ.).
10. Sadovskii A. P., Shcheglova T. V. [Lienard system with complex parameters and Cherkas’s method]. *Vesnik Grodenkaga Dzhazhawnaga universitjeta imja Janki Kupaly. Ser. 2, Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal’ naja tjechnika i wprawlenne*. 2014. No. 1(170). P. 21–33 (in Russ.).
11. Sadovskii A. P., Shcheglova T. V. [Center varieties of complex and real two-dimensional autonomous polynomial differential systems]. *Doklady Natsional’noi akad. nauk Belarusi*. 2015. Vol. 59, No. 4. P. 34–40 (in Russ.).

УДК 512.542

СКРЕЩЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТЕЛА КВАТЕРНИОНОВ И ЧЕТВЕРНОЙ ГРУППЫ

В. В. КУРСОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследована структура обобщенного скрещенного произведения произвольного тела кватернионов и четверной группы относительно системы факторов. Хорошо известно, что такое скрещенное произведение является полупростым кольцом. Показано, что при определенных условиях скрещенное произведение простой алгебры и ее группы внутренних автоморфизмов является простой центральной алгеброй. Отмечено, что при выяснении того, при каких условиях скрещенное произведение является алгеброй с делением, возникают трудности, связанные в общем случае с анализом систем линейных уравнений, определенных над некоммутативными кольцами. В терминах анизотропных квадратичных форм приведены достаточные условия, при которых указанное скрещенное произведение является алгеброй с делением. Доказано, что такое обобщенное скрещенное произведение есть тензорное произведение двух тел кватернионов.

Ключевые слова: кватернион; тело кватернионов; четверная группа; скрещенное произведение; алгебра; ассоциативная алгебра; простая алгебра; алгебра с делением; система факторов; тензорное произведение.

A CROSSED PRODUCT OF A SKEW FIELD OF QUATERNIONS AND FOUR-GROUP

V. V. KURSOV^a

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

The article considers construction of generalized crossed product of an arbitrary quaternions skew field and Klein four-group relative to factor system. It is well known that such crossed product is semisimple ring. Under specific conditions it is easy to show that crossed product of simple algebra and its inner automorphism group is central simple algebra.

Образец цитирования:

Курсов В. В. Скрещенное произведение тела кватернионов и четверной группы // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 12–16.

For citation:

Kursov V. V. A crossed product of a skew field of quaternions and four-group. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 12–16 (in Russ.).

Автор:

Валерий Владимирович Курсов – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации, заместитель декана механико-математического факультета.

Author:

Valery Kursov, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher algebra and information security, deputy dean of the faculty of mechanics and mathematics.
kursov@bsu.by

Finding out the conditions under which the crossed product is division algebra we face to difficulties of general case linked to analysis of system of linear equations defined over non-commutative rings. In the terms of anisotropic quadratic forms, there are sufficient conditions under those the crossed product of skew field of quaternions and four-group relative to factor system is division algebra. In addition, it is proved that the crossed product is the tensor product of two quaternions skew fields.

Key words: quaternion; quaternions skew field; Klein four-group; crossed product; algebra; associative algebra; simple algebra; division algebra; factor system; tensor product.

Классическое скрещенное произведение поля и его группы Галуа, впервые появившееся у Э. Нётер, – один из наиболее эффективных инструментов при изучении конечномерных алгебр. Впоследствии эта конструкция обобщалась с различных точек зрения [1; 2]. В ряде работ при определенных условиях была установлена полупростота и простота скрещенных произведений [3–5]. Доказательство того, что данное обобщенное скрещенное произведение является телом, – сложная задача, поскольку даже в специальных случаях не существует эффективных способов установления обратимости элементов скрещенного произведения.

В настоящей работе в терминах, относящихся к квадратичным формам, формулируются условия, при выполнении которых скрещенное произведение тела кватернионов и четверной группы Клейна является алгеброй с делением.

Пусть F – поле характеристики, отличной от 2 с мультипликативной группой F^* . Для $\alpha, \beta \in F^*$ через $D = \left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right)$ обозначим тело кватернионов над F с базисными элементами 1, i, j, k как $i^2 = \alpha$; $j^2 = \beta$; $k^2 = -\alpha\beta$, при этом $v : D^* \rightarrow F^*$ – гомоморфизм приведенной нормы. Четверная группа $K_4 = \{e, \sigma, \tau, \sigma\tau \mid \sigma\tau = \tau\sigma, \sigma^2 = e, \tau^2 = e\}$ может быть реализована как группа внутренних автоморфизмов тела D : $\sigma = \text{Int}(i)$; $\tau = \text{Int}(j)$; $\sigma\tau = \text{Int}(k)$; e – тождественный автоморфизм; $\text{Int}(g)(x) = gxg^{-1}$, $x \in D$, $g \in D^*$. Пусть $f : K_4 \times K_4 \rightarrow F^*$ – система факторов на K_4 со значениями в F^* [6]. Поскольку абелева группа F^* есть модуль с тривиальным действием группы K_4 , то систему факторов будем считать симметричной и нормализованной [7]:

$$f(x, y) = f(y, x) \text{ и } f(x, e) = 1, \text{ где } x, y \in K_4.$$

Рассмотрим свободный левый D -модуль $S = D + Du_\sigma + Du_\tau + Du_{\sigma\tau}$ с базисными элементами 1, $u_\sigma, u_\tau, u_{\sigma\tau}$, который естественным образом превращается в ассоциативную алгебру относительно умножения, задаваемого по следующему правилу:

$$u_x u_y = f(x, y) u_{xy}, \quad y \in K_4; \quad u_x \lambda = \lambda^x u_x, \quad \lambda \in D,$$

где λ^x – действие автоморфизма x на элементе λ . Назовем $S = (K_4, D, f)$ обобщенным скрещенным произведением группы K_4 и тела D относительно системы факторов f .

В этих обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма. Алгебра S является простой алгеброй размерности 16 над своим центром F .

Доказательство. Алгебра S является полупростой [3]. Рассмотрим в ней центральный элемент $a = x_0 + x_1 u_\sigma + x_2 u_\tau + x_3 u_{\sigma\tau}$, $x_i \in D$. Поскольку для любого $d \in D$ $da = ad$, мы получим равенства:

$$dx_0 = x_0 d, \quad dx_1 = x_1 d^\sigma, \quad dx_2 = x_2 d^\tau, \quad dx_3 = x_3 d^{\sigma\tau}.$$

Отсюда следует, что $x_1 = f_1 i$; $x_2 = f_2 j$; $x_3 = f_3 k$; $x_0, x_1, x_2, x_3 \in F$. Поскольку $au_\sigma = u_\sigma a$, симметричность системы факторов приводит к $a = x_0 + f_1 i u_\sigma$, по той же причине из условия $au_\tau = u_\tau a$ следует, что $a = x_0 \in F$.

Лемма доказана.

Определение. Система факторов $f : K_4 \times K_4 \rightarrow F^*$ называется согласованной со структурой тела

$D = \left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right)$, если выполнены условия

$$\alpha f(\sigma, \sigma) \notin F^{*2}; \quad -\beta f(\tau, \tau) \notin F^{*2}; \quad -\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) \notin F^{*2}.$$

Пусть $S_1 = D + Du_{\sigma\tau}$ – скрещенное произведение D с циклической группой, порожденной автоморфизмом $\sigma\tau$.

Предложение. Пусть система факторов согласована со структурой тела D ; квадратичная форма $\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_3^2$ анизотропна над F . Тогда центр $P = F + Fku_{\sigma\tau}$ алгебры S_1 является полем, и $S_1 = \left(\frac{\alpha, \beta}{P}\right)$ есть тело кватернионов над P .

Доказательство. Рассуждения, использованные при доказательстве леммы, показывают, что центр S_1 имеет вид $P = F + Fku_{\sigma\tau}$. Покажем, что ненулевой элемент из P обратим в P . Пусть $a = f_0 + f_1ku_{\sigma\tau} \in P$. Найдем подходящие $x, y \in F$ так, чтобы выполнялось равенство

$$(f_0 + f_1ku_{\sigma\tau})(x + yku_{\sigma\tau}) = 1,$$

которое эквивалентно системе соотношений

$$f_0x - f_1y \cdot \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) = 1, f_1x + f_0y = 0.$$

Данная система разрешима относительно $x, y \in F$, поскольку в силу согласованности системы факторов $f_0^2 + f_1^2 \cdot \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) \neq 0$. Таким образом, S_1 будет простой алгеброй размерности 4 над полем P . Для ненулевого элемента $a + bu_{\sigma\tau} \in S_1$ обратный элемент будем искать в виде $x + yu_{\sigma\tau}$ для некоторых $x, y \in D$. Можно утверждать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$, так как в противном случае элемент $a + bu_{\sigma\tau}$ обратим. Равенство $(a + bu_{\sigma\tau})(x + yu_{\sigma\tau}) = 1$ эквивалентно системе соотношений

$$ax + by^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau) = 1, ay + bx^{\sigma\tau} = 0. \quad (1)$$

Из равенств (1), ввиду предположения об a и b , получаем:

$$y = -a^{-1}bx^{\sigma\tau}, (a - ba^{-\sigma\tau}b^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau))x = 1. \quad (2)$$

Для данных $a, b \in D$ находим $x, y \in D^*$ в (2), если только $a - ba^{-\sigma\tau}b^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau) \neq 0$ для любых ненулевых $a, b \in D$. Предположим противное и получим $1 = (a^{-1}b)(a^{-1}b)^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau)$. Обозначая $\xi = a^{-1}b \in D^*$, видим, что в теле D разрешимо уравнение, которое назовем характеристическим для автоморфизма $\sigma\tau$:

$$\xi \cdot \xi^{\sigma\tau} f(\sigma\tau, \sigma\tau) = 1, \xi \in D, \xi \neq 0. \quad (3)$$

Пусть ненулевой элемент $\xi = c_0 + c_1i + c_2j + c_3k$, $c_i \in F$, удовлетворяет (3). Тогда, обозначая $\mu = v(\xi)^{-1} f(\sigma\tau, \sigma\tau)^{-1}$, получим, что (3) эквивалентно следующему равенству:

$$k(c_0 + c_1i + c_2j + c_3k)k^{-1} = \mu(c_0 - c_1i - c_2j - c_3k). \quad (4)$$

Равенство (4) дает систему соотношений

$$c_0 = \mu c_0, c_1 = \mu c_1, c_2 = \mu c_2, c_3 = -\mu c_3. \quad (5)$$

Если в (5) $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, то в силу того, что $c_3 \neq 0$, получаем $\mu = -1$ и $-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) = c_3^{-2} \in F^{*2}$, что противоречит согласованности системы факторов. Если среди коэффициентов c_0, c_1, c_2 есть ненулевой, то $\mu = 1$ и $c_3 = 0$. В этом случае $v(\xi) = c_0^2 - \alpha c_1^2 - \beta c_2^2 = f(\sigma\tau, \sigma\tau)^{-1}$ или $c_0^2 - \alpha c_1^2 - \beta c_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)^{-1} = 0$. Полученное равенство эквивалентно тому, что форма $\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_3^2$ изотропна. Действительно, если $x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_3^2 = 0$ и $x_3 = 0$, то приведенная норма $v(\eta) = 0 = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2$ для ненулевого элемента $\eta = x_0 + x_1i + x_2j \in D$, что невозможно. В случае если $x_3 \neq 0$, то, разделив на $x_3^2 f(\sigma\tau, \sigma\tau)^2$, получим требуемое. Таким образом, уравнение (3) не имеет решений и S_1 является телом. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= D + Dku_{\sigma\tau} = (F + Fi + Fj + Fk) + (F + Fi + Fj + Fk)ku_{\sigma\tau} = \\ &= (F + Fku_{\sigma\tau}) + (F + Fku_{\sigma\tau})i + (F + Fku_{\sigma\tau})j + (F + Fku_{\sigma\tau})k = \\ &= P + Pi + Pj + Pk = \left(\frac{\alpha, \beta}{P}\right). \end{aligned}$$

Основной результат статьи – следующая теорема.

Теорема. Пусть система факторов f согласована со структурой тела D и выполнены следующие условия:

1) форма $\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 - f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_3^2$ анизотропна над полем F ;

2) форма $\varphi_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = y_0^2 - f(\sigma, \sigma)y_1^2 - \beta y_2^2 - \alpha\beta y_3^2$ анизотропна над квадратичным расширением $F(\sqrt{-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)})$ поля F .

Тогда $S = (K_4, D, f)$ является телом индекса 4 и представима в виде произведения двух тел кватернионов:

$$(K_4, D, f) = \left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right) \otimes_F \left(\frac{\alpha f(\sigma, \sigma), -\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)}{F} \right).$$

Доказательство. Очевидно, что $S_1 = D + Du_\sigma + Du_\tau + Du_{\sigma\tau} = S_1 + S_1u_\sigma$ – скрещенное произведение тела S_1 с циклической группой, порожденной автоморфизмом σ . Рассуждая так же, как при доказательстве предложения, получаем, что, если ненулевой элемент в S не имеет обратного, в теле S_1 характеристическое уравнение относительно σ имеет ненулевое решение:

$$\xi \cdot \xi f(\sigma, \sigma) = 1, \xi \neq 0, \xi \in S_1. \quad (6)$$

Пусть $\xi = c_0 + c_1i + c_2j + c_3k$, $c_i \in P$, – ненулевое решение в (6). Обозначая $\mu = v(\xi)^{-1} f(\sigma, \sigma)^{-1}$ из (6), получаем соотношения:

$$c_0 = \mu c_0, c_1 = -\mu c_1, c_2 = \mu c_2, c_3 = \mu c_3. \quad (7)$$

Если в (7) $c_0 = c_2 = c_3 = 0$, то из (7) следует, что $\alpha c_1^2 = f(\sigma, \sigma)^{-1} = 0$, где $c_1 \in P$; $c_1 \neq 0$, откуда $\alpha f(\sigma, \sigma) \in P^{*2}$.

Пусть $t = x_0 + x_1ku_{\sigma\tau} \in P$, $t \neq 0$, $x_0x_1 \in F$; $t^2 = \alpha f(\sigma, \sigma)$. Отсюда следует, что

$$x_0^2 + x_1^2 k^2 f(\sigma\tau, \sigma\tau) = \alpha f(\sigma, \sigma) \text{ и } x_0x_1 = 0. \quad (8)$$

Если в (8) $x_1 = 0$, то $x_0^2 = \alpha f(\sigma, \sigma)$, что противоречит согласованности системы факторов. Если $x_0 = 0$, то получаем $-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)x_1^2 = \alpha f(\sigma, \sigma)$. Для системы факторов имеет место равенство

$$f(\sigma, \tau)^2 f(\sigma\tau, \sigma\tau) = f(\sigma, \sigma) f(\tau, \tau).$$

Тогда предыдущее соотношение приводит к $-\beta f(\tau, \tau) \in F^{*2}$, что противоречит согласованности системы факторов. Таким образом, в (7) среди c_0, c_2, c_3 есть, по крайней мере, один ненулевой коэффициент, поэтому $\mu = 1$ и $c_1 = 0$. Значит, в характеристическом уравнении $\xi = c_0 + c_1i + c_2j + c_3k$ имеет место равенство

$$c_0^2 - f(\sigma, \sigma)^{-1} - \beta c_2^2 + \alpha\beta c_3^2 = 0.$$

Это означает, что форма φ_2 изотропна над полем P .

Пусть $\varphi_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = y_0^2 - f(\sigma, \sigma)y_1^2 - \beta y_2^2 - \alpha\beta y_3^2 = 0$; $y_0 = s_0 + t_0ku_{\sigma\tau}$, $y_1 = s_1 + t_1ku_{\sigma\tau}$, $y_2 = s_2 + t_2ku_{\sigma\tau}$, $y_3 = s_3 + t_3ku_{\sigma\tau}$ и $s_i, t_i \in F$, тогда предыдущее равенство эквивалентно системе соотношений

$$\begin{aligned} s_0^2 - f(\sigma, \sigma)s_1^2 - \beta s_2^2 + \alpha\beta s_3^2 - \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)(t_0^2 - f(\sigma, \sigma)t_1^2 - \beta t_2^2 + \alpha\beta t_3^2) &= 0, \\ s_0t_0 - f(\sigma, \sigma)s_1t_1 - \beta s_2t_2 + \alpha\beta s_3t_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Предположим теперь, что векторное пространство $V = F^4$ снабжено невырожденной симметричной билинейной формой $\varphi_2 : V \times V \rightarrow F$, задаваемой диагональной матрицей $D = \text{diag}[1, -f(\sigma, \sigma), -\beta, \alpha\beta]$. Перепишем соотношения (9) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_2(s_0, s_1, s_2, s_3) - \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)\varphi_2(t_0, t_1, t_2, t_3) &= 0, \\ \varphi_2(s_0, s_1, s_2, s_3; t_0, t_1, t_2, t_3) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $u = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ и $v = (t_0, t_1, t_2, t_3)$ – векторы из V . Если u – нулевой вектор, то v – ненулевой вектор и $\varphi_2(v) = 0$, что невозможно в силу анизотропности φ_2 . Аналогичное рассуждение справедливо и для вектора v . Таким образом, мы можем предполагать, что u и v – ненулевые и анизотропные векторы. Из (10) следует, что они ортогональны относительно φ_2 , значит, u и v линейно независимы.

Пусть теперь $\lambda, \mu \in F(\sqrt{-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)})$, тогда

$$\begin{aligned}\varphi_2(\lambda u + \mu v) &= \varphi_2(\lambda u + \mu v, \lambda u + \mu v) = \lambda^2 \varphi_2(u) + \mu^2 \varphi_2(v) = \\ &= \lambda^2 \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) \varphi_2(v) + \mu^2 \varphi_2(v) = (\lambda^2 \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) + \mu^2) \varphi_2(v).\end{aligned}$$

Выберем в квадратичном расширении $\lambda, \mu \in F(\sqrt{-\alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau)})$ так, чтобы $\lambda^2 \alpha\beta f(\sigma\tau, \sigma\tau) + \mu^2 = 0$.

Тогда $\varphi_2(\lambda u + \mu v) = 0$, значит, ненулевой вектор $w = \lambda u + \mu v$ изотропен относительно φ_2 , что противоречит условию.

Пусть теперь $C_S(D)$ – централизатор тела D в теле S . Тогда наблюдаем, что $C_S(D) = \{f_0 + f_1 i u_\sigma + f_2 j u_\tau + f_3 k u_{\sigma\tau} \mid f_i \in F\}$. Обозначим $A = i u_\sigma$, $B = k u_{\sigma\tau}$. Тогда $AB = -\alpha f(\sigma\tau, \sigma\tau) j u_\tau$. Таким образом, $C_S(D)$ есть тело кватернионов с базисными элементами $1, A, B, AB$. Этим обстоятельством заканчивается доказательство теоремы [7].

Библиографические ссылки

1. Albert A. A. Non-associative algebras II // *Ann. Math.* 1942. Vol. 43, № 4. P. 708–723.
2. Jacobson N. Construction of central simple associative algebras // *Ann. Math.* 1942. Vol. 45, № 4. P. 658–666.
3. Бовди А. А. Скрещенные произведения полугруппы и кольца // *Сиб. мат. журн.* 1963. Т. 4, № 3. С. 481–499.
4. Курсов В. В., Янчевский В. И. Скрещенное произведение простых алгебр и их групп автоморфизмов // *Докл. Акад. наук БССР.* 1988. Т. 32, № 9. С. 777–780.
5. Курсов В. В. Циклические скрещенные произведения простых конечномерных центральных алгебр // *Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук.* 1990. № 1. С. 8–13.
6. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М., 1986.
7. Маклейн С. Гомология. М., 1966.

References

1. Albert A. A. Non-associative algebras II. *Ann. Math.* 1942. Vol. 43, No. 4. P. 708–723.
2. Jacobson N. Construction of central simple associative algebras. *Ann. Math.* 1942. Vol. 45, No. 4. P. 658–666.
3. Bovdi A. A. [Crossed products of semigroup and ring]. *Sib. mat. zh.* 1963. Vol. 4, No. 3. P. 481–499 (in Russ.).
4. Kursov V. V., Yanchevsky V. I. [Crossed product of simple algebras and their automorphism groups]. *Dokl. Akad. nauk BSSR.* 1988. Vol. 32, No. 9. P. 777–780 (in Russ.).
5. Kursov V. V. [Cyclic crossed products of simple finite-dimensional central algebras]. *Izv. Akad. nauk BSSR. Seriya fiz.-mat. nauk.* 1990. No. 1. P. 8–13 (in Russ.).
6. Pierce R. [Associative algebras]. Moscow, 1986 (in Russ.).
7. Mac Lane S. [Homology]. Moscow, 1966 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 19.01.2017.
Received by editorial board 19.01.2017.

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДУЛЯРНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ¹⁾, Г. В. МАТВЕЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Построены схемы верификации модулярного разделения секрета. Верификация с участием доверенной стороны осуществляется с помощью внешнего устройства, в которое можно загрузить произвольный многочлен $S(x)$, и при вводе $x_0 \in F_{p^n}$ оно выдает значение $\xi S(x_0)$, где ξ – равномерно распределенная случайная величина, принимающая значения из F_{p^n} . Показано, что данное устройство позволяет каждому пользователю верифицировать его секрет. Полиномиальная верификация модулярной схемы основана на верификации делимости $g(x) \mid f(x)$ в кольце $Z[x]$. При такой верификации разглашается лишь значение $S(x)$ в некоторой неизвестной посторонним точке $x = l$. Верификация модулярной схемы по Бенало дает возможность каждому из участников убедиться в том, что все частичные секреты в совокупности являются консистентными, т. е. любая разрешенная группа участников может правильно восстановить секрет $S(x)$. Никакой информации о секрете $S(x)$, кроме априорной, не разглашается. Предложенные протоколы могут быть безопасно использованы для схем над произвольными конечными полями без дополнительных ограничений на мощность поля.

Ключевые слова: полиномиальная модулярная схема; секрет; частичный секрет; конечное поле.

VERIFICATION OF MODULAR SECRET SHARING

M. M. VASKOUSKI^a, G. V. MATVEEV^a

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

Corresponding author: M. M. Vaskouski (vaskovskii_m@mail.ru)

In the present paper new scheme of secret verification are constructed. Verification with trusted party participation is conducted with help of an external device, which takes an arbitrary polynomial $S(x)$, input element $x_0 \in F_{p^n}$ and returns a value $\xi S(x_0)$, where ξ is an F_{p^n} – valued uniformly distributed random variable. It is shown that using of such device allows any user to verify his secret. Polynomial verification scheme is based on verification of divisibility $g(x) \mid f(x)$ in the ring $Z[x]$. Only a value of polynomial $S(x)$ in unknown point $x = l$ is disclosed at the proposed verification method. Benaloh's verification of the modular scheme allows any shareholder to ensure in consistency of all partial secrets, i. e. any legal group of shareholders can restore the secret $S(x)$ correctly. None information about the secret $S(x)$, excepting a prior information, is disclosed. The proposed protocols can be used safely for schemes over arbitrary finite fields without additional restrictions on a size of a field.

Key words: polynomial modular scheme; secret; partial secret; finite field.

Образец цитирования:

Васьковский М. М., Матвеев Г. В. Верификация модулярного разделения секрета // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 17–22.

For citation:

Vaskouski M. M., Matveev G. V. Verification of modular secret sharing. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 17–22 (in Russ.).

Авторы:

Максим Михайлович Васьковский – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.
Геннадий Васильевич Матвеев – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Maksim Vaskouski, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer sciences.
vaskovskii_m@mail.ru
Gennadii Matveev, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer sciences.
matveev@bsu.by

Постановка задачи

Схемы разделения секрета (СРС) являются составной частью многих криптографических протоколов. Разделение секрета применяется для совместных конфиденциальных вычислений [1], шифрования на основе атрибутов [2] и электронного защищенного голосования [3]. Важной задачей в разделении секрета является построение таких схем, с помощью которых пользователи могут проверить корректность секрета и тем самым не допустить обмана со стороны остальных участников и дилера. Такие схемы строятся на основе протоколов с нулевым разглашением [4]. В схемах верифицируемого разделения секрета (СВРС) дилер распределяет информацию о секретном значении среди участников таким образом, что для честных пользователей гарантируется получение ими значения секрета, а для нечестных – невозможность восстановить секрет.

Преимущество полиномиальных схем модулярного разделения секрета заключается в их теоретико-информационной криптостойкости: полиномиальная модулярная схема является в общем случае совершенной, а в пороговом – идеальной [5]. Еще одно преимущество этих схем по сравнению с целочисленными – их расширенные возможности по генерации параметров: в качестве исходного используется поле F_p , а количество параметров зависит от степеней полиномов в $F_p[x]$, что позволяет строить сколько угодно схем даже для небольших простых p . В связи с этим верификация полиномиальной модулярной схемы – актуальная задача, состоящая в построении протокола верификации, пригодного для любой модулярной пороговой СРС. Заметим, что [6] является пороговой СРС в полиномиальном кольце $F_2[x]$. Решение этой задачи лишь для больших простых p было получено в работе [7], где верификация полиномиальной схемы основана на вычислительной сложности задачи дискретного логарифмирования в полях большой мощности.

В отличие от [7] в настоящей работе построены протоколы верификации полиномиальной модулярной схемы, основанные на свойствах делимости многочленов с целыми коэффициентами и умножении параметров схемы на подходящие случайные величины, что позволяет безопасно использовать данные схемы в произвольных конечных полях без ограничений числа элементов поля.

Пороговая модулярная схема разделения секрета в кольце $F_p[x]$

Пороговая полиномиальная модулярная СРС была предложена в работе [8] как обобщение классической схемы Шамира [9] и схемы Асмуса – Блюма [10]. Данная схема позволяет разделить секретное значение $s(x) \in F_p[x]$. Промежуточный секрет $S(x)$ (t, k) -пороговой модулярной полиномиальной схемы выбирается так, что $\deg S(x) < tn$, где t – порог; n – общая степень модулей участников. Разделение секрета можно начать с генерации значения $S(x)$.

Фаза дилера (алгоритм разделения):

1) случайным образом выбирается промежуточное значение секрета $S(x) \in F_p[x]$ с условием

$$\deg S(x) < tn;$$

2) случайным образом выбираются попарно различные неприводимые $m_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, и $p(x)$ с ограничением $\deg m_i(x) = \deg p(x) = n$. В работе [8] указан способ выбора параметров t, k, n, p ;

3) дилером публикуются $m_i(x)$, $p(x)$, а $s(x) = S(x) \bmod p(x)$ назначается в качестве секрета схемы;

4) дилером по секретным каналам отправляются частичные секреты участников: $s_i(x) = S(x) \bmod m_i(x)$.

5) дополнительно, для ускорения вычислений на фазе восстановления секрета, дилером заранее вычисляются и публикуются следующие значения:

$$M_A(x) = \prod_{j=i_1}^{i_t} m_j(x),$$

где $A = \{i_1, \dots, i_t\}$ – подмножество t участников; $M_{A \setminus \{i\}} = \frac{M_A(x)}{m_i(x)}$; $M'_{A,i} = \left(\frac{M_A(x)}{m_i(x)} \right)^{-1} \bmod m_i(x)$, $\forall i \in A$.

Фаза участников (алгоритм восстановления): участники из подмножества A обмениваются своими частичными секретами $s_i(x)$, $i \in A$, и находят значение секрета $s(x)$:

$$u_i = s_i M'_{A,i} M_{A \setminus \{i\}}, \quad \forall i \in A,$$

$$S(x) = \sum_{i \in A} u_i \bmod M_A,$$

$$s(x) = S(x) \bmod p(x).$$

Верификация с участием доверенной стороны

Рассмотрим подход к проверке условия $s_i(x) = S(x) \bmod m_i(x)$ для каждого участника в отдельности. Не нарушая общности, будем считать, что $s_i(x) \equiv 0$, а многочлен $m_i(x)$ сепарабельный. Если $m_i(x)$ неприводимый, то достаточно проверить, что хотя бы один корень $\beta_j \in F_{p^n}$ многочлена $m_i(x)$ является корнем многочлена $S(x)$. В общем случае проверка необходима всем корням β_j многочлена $m_i(x)$.

Предлагаемый способ заключается в следующем. Будем считать, что, кроме дилера B и законного участника A_i , имеется внешнее устройство C , в которое можно загрузить произвольный многочлен (в нашем случае $S(x)$), и данное устройство при вводе $x_0 \in F_{p^n}$ выдает значение $\xi S(x_0)$, где ξ – равномерно распределенная случайная величина, принимающая значения из F_{p^n} . Очевидно, что это устройство позволяет проверить пользователю A_i , является ли элемент $x_0 \in F_{p^n}$ корнем загруженного многочлена $S(x)$, но при этом за счет случайности ξ не позволяет восстановить сам многочлен $S(x)$ по значениям $(x_0, \xi S(x_0))$. Очевидно, что проверка условия $\xi S(x_0) = 0$, проведенная по всем корням β_j многочлена $m_i(x)$, даст однозначный ответ на вопрос о делимости $m_i(x) | S(x)$.

Полиномиальная верификация модулярной схемы

Ниже предлагается верификация схемы на основе верификации полиномиального деления. Ранее этот способ был применен нами для верификации схемы Шамира. В его основе лежит следующая теорема, обобщающая [11, теорема].

Теорема. Пусть $f(x), g(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами, $\deg f \geq \deg g$, причем старший коэффициент $g(x)$ равен 1. Тогда условие $\frac{f(x)}{g(x)}$ равносильно условию $\frac{f(l)}{g(l)}$, где $l \geq l_0(f, g) = \left(H_g + H_f (H_g + 1)^{\deg f - \deg g + 1} \right) \deg g + 1$; H_g, H_f – высоты многочленов $g(x)$ и $f(x)$ соответственно.

Доказательство. Предположим, что существуют такие многочлены $f(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$; $g(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ с целыми коэффициентами, что $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, $\deg f \geq \deg g$, $r(x) \neq 0$ (так как старший коэффициент многочлена $g(x)$ равен 1, то $r(x) \in Z[x]$), и такое $l \geq l_0(f, g)$, что выполняется условие $g(l) | f(l)$. Оценим высоту H_r многочлена $r(x)$. На первом шаге деления с остатком $f(x)$ на $g(x)$ получаем неполное частное $a_m x^{m-n}$, затем снова делим многочлен $m f_1(x) = f(x) - a_m x^{m-n} g(x)$ на $g(x)$. Видно, что $H_{f_1} \leq H_f + H_f H_g$. На следующем шаге получаем в остатке многочлен $f_2(x) = f_1(x) - \alpha x^{m-n-1} g(x)$, где α – старший коэффициент многочлена $f_1(x)$, т. е. имеем $H_{f_2} \leq H_{f_1} + H_{f_1} H_g$. Таким образом, по индукции получаем, что $H_r \leq H_f (H_g + 1)^{\deg f - \deg g + 1}$. Ввиду того, что $l > H_r + 1$; $l > H_g + 1$, l не является корнем ни $g(x)$, ни $r(x)$. Поскольку $g(l) | f(l)$ и $r(l) \neq 0$, $g(l) \neq 0$, то $g(l) | r(l)$ и $|r(l)| \geq |g(l)|$. Из неравенств $H_r \leq H_f (H_g + 1)^{\deg f - \deg g + 1}$ и $l \geq \left(H_g + H_f (H_g + 1)^{\deg f - \deg g + 1} \right) \deg g + 1$ вытекает, что $l > (H_r + H_g) \deg g$. Тогда получаем $|g(l)| \geq l^{\deg g} - l^{\deg g - 1} H_g \deg g > l^{\deg g - 1} H_r \deg g \geq |r(l)|$, что противоречит неравенству $|r(l)| \geq |g(l)|$.

Приведенную теорему можно применить для верификации делимости $g(x) | f(x)$ в кольце $Z[x]$:

- 1) дилер публикует $f(l)$, $l \geq l_0$;
- 2) пользователь проверяет делимость $g(l) | f(l)$.

При такой верификации разглашается лишь значение многочлена в некоторой неизвестной посторонней точке $x = l$.

Распространим эту верификацию на случай кольца многочленов $F_p[x]$. Будем верифицировать деление $f(x) = g(x)q(x)$.

Сначала построим инъективное отображение φ поля разложения $F_p[x]$ многочлена $f(x)$ в кольцо целых чисел Z . Выберем неприводимый многочлен $h(x) \in F_p[x]$ степени k . Поскольку $F_{p^k} \cong \frac{F_p[x]}{h(x)}$,

то элементы поля F_{p^k} будем рассматривать как многочлены $r(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \pmod{h(x)}$. Каждому такому

многочлену поставим в соответствие целое число $\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i$, рассматривая $a_i \in Z_p$ как наименьший неотрицательный вычет по модулю p . Построенное таким образом отображение обозначим через φ . Имеется эффективный алгоритм обращения φ : выбранное целое число $a \in [0, p^k)$ представляется в системе

счисления по основанию p , т. е. $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i$, тогда $\varphi^{-1}(a) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \pmod{h(x)}$.

Преобразуем затем многочлены $g(x) \in F_p[x]$ и $f(x) \in F_p[x]$ в целочисленные многочлены $\bar{g}(x)$ и $\bar{f}(x)$, полагая, что

$$\bar{g}(x) = (x - \varphi(\alpha_1))(x - \varphi(\alpha_2)) \cdot \dots \cdot (x - \varphi(\alpha_s)),$$

$$\bar{f}(x) = (x - \varphi(\beta_1))(x - \varphi(\beta_2)) \cdot \dots \cdot (x - \varphi(\beta_m)),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in F_{p^k}$ – все корни многочлена $g(x)$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in F_{p^k}$ – все корни многочлена $f(x)$.

Очевидно, что делимость $f(x) = g(x)q(x)$ в кольце $F_p[x]$ равносильна делимости $\bar{g}(x) \mid \bar{f}(x)$.

Поэтому верификация частичного секрета $s_i(x) = S(x) \bmod m_i(x)$ сводится к верификации делимости в кольце $Z[x]$: $\bar{m}_i(x) \mid \overline{S(x) - s_i(x)}$ (с этой целью можно применить приведенную выше теорему).

Перейдем к верификации схемы с порогом t и k .

Для этого требуется инъективное отображение поля разложения многочлена $\prod_{i=1}^k (S(x) - s_i(x))$

в кольцо целых чисел. Аналогично черта будет применяться для обозначения образов элементов поля и многочленов.

Каждый в отдельности частичный секрет можно верифицировать путем проверки делимости $\bar{m}_i(x) \mid \overline{S(x) - s_i(x)}$ в кольце $Z[x]$. При этом дилер публикует целые числа $\overline{S(l) - s_i(l)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, которые можно использовать для атаки на ключи $s_i(x)$.

Чтобы предотвратить эту атаку, дилер может поступить следующим образом:

1) выбрать число $l \in Z[x]$, достаточное для верификации всех условий $\bar{m}_i(x) \mid \overline{S(x) - s_i(x)}$, $i = 1, 2, \dots, k$;

2) подобрать и опубликовать в открытом доступе систему попарно взаимно простых чисел $q_1, q_2, \dots, q_s$ таких, что

$$q_i^{|\bar{s}_i(l)|} > \left| \bar{s}_i(l) \overline{S(l) - s_i(l)} \right|, i = 1, 2, \dots, k;$$

3) разместить в открытом доступе число G такое, что

$$G \equiv \bar{s}_i(l) \overline{S(l) - s_i(l)} \pmod{q_i^{|\bar{s}_i(l)|}}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Для того чтобы законному участнику проверить свой частичный секрет s_i , нужно:

- 1) вычислить $G_i = G \left(\text{mod } q_i^{|\bar{s}_i(l)|} \right)$. В этом случае он находит $\bar{s}_i(l) \overline{S(l) - s_i(l)}$;
- 2) проверить, будет ли целым число $Q_i = \frac{G_i}{\bar{s}_i(l)}$. Если нет, то секрет не является достоверным. Иначе перейти к шагу 3;
- 3) если $Q_i = \overline{S(l) - s_i(l)}$ целое, то проверить условие $\bar{m}_i(l) | Q_i$ (шаг выполняется только для достоверных секретов).

Верификация модулярной схемы по Бенало

Этот способ верификации дает возможность каждому из k участников убедиться в том, что все частичные секреты в совокупности являются t -консистентными, т. е. любые t из k участников смогут правильно восстановить секрет $S(x)$. Обоснование протокола Бенало дано в работе [3]. Никакой информации о секрете $S(x)$, кроме априорной $\deg S(x) \leq tn$, не разглашается. Приведем интерактивное доказательство.

1. Дилер генерирует полином $S(x)$ и распределяет частичные секреты $s_i(x), \dots, s_m(x)$.
2. Дилер генерирует большое число l случайных полиномов степени не выше tn .
3. Участник случайным образом выбирает $m < l$ полиномов.
4. Дилер раскрывает участнику частичные секреты полиномов $S_i(x), \dots, S_m(x)$, а также частичные секреты сумм $S(x) + \sum_{j=m+1}^l S_j(x)$, образованных с участием оставшихся полиномов.
5. Участник, пользуясь китайской теоремой об остатках (CRT), устанавливает, что все полиномы $S(x) + \sum_{j=m+1}^l S_j(x)$ имеют степени не выше tn .

Библиографические ссылки

1. Cramer R., Damgard I., Nielsen J. Multiparty Computation from Threshold Homomorphic Encryption // Lect. Notes Comput. Sci. 2001. Vol. 2045. P. 280–300.
2. Bethencourt J., Sahai A., Waters B. Ciphertext-policy attribute-based encryption // Proceedings of IEEE Symposium on Security and Privacy. Berkley, 2007. P. 321–334.
3. Benaloh J. Secret sharing homomorphisms: keeping shares of a secret // Lect. Notes Comput. Sci. 1987. Vol. 263. P. 251–260.
4. Blum M., Feldman P., Micali S. Non Interactive Zero-Knowledge and Its Applications // Proceedings of the 20th ACM Symposium on Theory of Computing. New York, 1988. P. 103–112.
5. Galibus T., Matveev G., Shenets N. Some structural and security properties of the modular secret sharing // Proceedings of SYNASC'08 : IEEE Comp. soc. press (Timisoara, 26–29 Sept., 2008). Timisoara, 2008. P. 197–200.
6. Информационные технологии и безопасность. Алгоритмы разделения секрета : СТБ 34.101.60–2011. Введ. 01.07.2011.
7. Галибус Т. В., Матвеев Г. В. Верификация параметров модулярного разделения секрета // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 1. С. 76–79.
8. Galibus T., Matveev G. Generalized Mignotte Sequences in Polynomial Rings // ENTCS. 2007. Vol. 186. P. 43–48.
9. Shamir A. How to share a secret // Commun. ACM. 1979. Vol. 22, № 11. P. 612–613.
10. Asmuth C. A., Bloom J. A modular approach to key safeguarding // IEEE Trans. Inf. Theory. 1983. Vol. 29, issue 2. P. 208–210.
11. Васильковский М. М., Матвеев Г. В. Полиномиальная верификация схемы Шамира // Информационные системы и технологии : Междунар. конгр. по информатике (Минск, 24–27 окт. 2016 г.). Минск, 2016. С. 431–433.

References

1. Cramer R., Damgard I., Nielsen J. Multiparty Computation from Threshold Homomorphic Encryption // Lect. notes comput. sci. 2001. Vol. 2045. P. 280–300.
2. Bethencourt J., Sahai A., Waters B. Ciphertext-policy attribute-based encryption. *Proceedings of IEEE Symposium on Security and Privacy*. Berkley, 2007. P. 321–334.
3. Benaloh J. Secret sharing homomorphisms: keeping shares of a secret. *Lect. Notes Comput. Sci.* 1987. Vol. 263. P. 251–260.
4. Blum M., Feldman P., Micali S. Non Interactive Zero-Knowledge and Its Applications. *Proceedings of the 20th ACM Symposium on Theory of Computing*. New York, 1988. P. 103–112. DOI: 10.1145/62212.62222.

5. Galibus T., Matveev G., Shenets N. Some structural and security properties of the modular secret sharing. *Proceedings of SYN-ASC'08* : IEEE Comp. soc. press (Timisoara, 26–29 Sept., 2008). Timisoara, 2008. P. 197–200.
6. Informatsionnye tekhnologii i bezopasnost'. Algoritmy razdeleniya sekreta : STB 34.101.60–2011. Introd. 01.07.2011 (in Russ.).
7. Galibus T. V., Matveev G. V. Verification of the modular secret sharing parameters. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. No. 1. P. 76–79 (in Russ.).
8. Galibus T., Matveev G. Generalized Mignotte Sequences in Polynomial Rings. *ENTCS*. 2007. Vol. 186. P. 43–48.
9. Shamir A. How to share a secret. *Commun. ACM*. 1979. Vol. 22, No. 11. P. 612–613.
10. Asmuth C. A., Bloom J. A modular approach to key safeguarding. *IEEE Trans. Inf. Theory*. 1983. Vol. 29, issue 2. P. 208–210. DOI: 10.1109/TIT.1983.1056651.
11. Vaskouski M. M., Matveev G. V. [Polynomial verifications of the shamir scheme]. *Information Systems and Technologies* : Int. cong. comput. sci. (Minsk, 24–27 Oct., 2016). Minsk, 2016. P. 431–433 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 20.03.2017.
Received by editorial board 20.03.2017.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.2

ВАРИОГРАММНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Т. В. ЦЕХОВАЯ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследованы некоторые свойства семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса с конечным моментом второго порядка и непрерывным временем. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы непрерывная функция была семивариограммой. Определены границы центральных доверительных интервалов для семивариограммы действительного стационарного гауссовского случайного процесса. Представленный подход интервального оценивания семивариограммы основан на свойствах χ^2 -распределения. Предложенные интервальные оценки более информативны, чем ранее построенные точечные.

Ключевые слова: случайный процесс; внутренняя стационарность; семивариограмма; доверительный интервал.

VARIOGRAM ANALYSIS OF STOCHASTIC PROCESSES

T. V. TSEKHAVAYA^a

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

Properties of the semivariogram of an intrinsically stationary continuous-time random process with finite second moment are investigated. A necessary and sufficient conditions for a continuous function to be semivariogram are found.

Образец цитирования:

Цеховая Т. В. Вариограммный анализ случайных процессов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 23–27.

For citation:

Tsekhavaya T. V. Variogram analysis of stochastic processes. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 23–27 (in Russ.).

Автор:

Татьяна Вячеславовна Цеховая – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Tatsiana Tsekhavaya, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer sciences.
tsekhavaya@bsu.by

Confidence intervals for the semivariogram of Gaussian stationary stochastic process are defined. Properties of χ^2 -distribution are used for constructing confidence intervals for semivariogram. The proposed confidence intervals are more informative compared with point estimates of the semivariogram.

Key words: stochastic process; intrinsic stationarity; semivariogram; confidence interval.

Геостатистические методы интерполяции в последнее время получают широкое практическое применение. Ключевым понятием геостатистики является вариограмма – момент второго порядка, характеризующий степень линейной зависимости между составляющими рассматриваемого процесса. В связи с этим актуальны задачи исследования свойств вариограммы, а также построения и изучения оценок этой функции. Настоящая работа является продолжением исследований [1–3] в области вариограммного анализа случайных процессов.

Некоторые свойства семивариограммы

Рассмотрим действительный внутренне стационарный случайный процесс $X(t)$, $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, с математическим ожиданием $E\{X(t)\} = 0$ и вариограммой

$$2\gamma(t-s) = D\{X(t) - X(s)\},$$

где $t, s \in \mathbb{R}$; D – символ дисперсии. Функция $\gamma(t)$ называется семивариограммой. Заметим, что $\gamma(0) = 0$; $\gamma(t) = \gamma(-t)$ и $\gamma(t) \geq 0$.

Предположим, что момент второго порядка $E\{X^2(t)\} < \infty$ при любом $t \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$\Psi_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(z_1, \dots, z_n) = E \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n z_k X(t_k) \right\} \quad (1)$$

есть характеристическая функция n -го порядка случайного процесса $X(t)$, где $t_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$; $(z_1, \dots, z_n)$ – действительный вектор; $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Теорема 1. Для того чтобы непрерывная функция $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, была семивариограммой некоторого внутренне стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с конечным моментом второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, была неотрицательно определена.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\gamma(t)$ – семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса $X(t)$. Покажем, что для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$ неотрицательно определена. По [3, теорема 1] найдутся вероятностное пространство и заданный на нем действительный гауссовский случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеющий $E\{Y(t)\} = 0$ и $D\{Y(t) - Y(s)\} = 2\gamma(t-s)$ при всех $t, s \in \mathbb{R}$. Заметим, что процесс $Y(t)$ внутренне стационарен.

Положим, что $Z(s) = e^{-i\sqrt{a}Y(s)}$, и вычислим корреляционную функцию этого процесса. По определению корреляционной функции комплексного случайного процесса имеем

$$R_Z^0(s, s+t) = E\{Z(s)\overline{Z(s+t)}\} = E\{e^{i\sqrt{a}(Y(s+t)-Y(s))}\}. \quad (2)$$

С учетом (1) и свойств процесса $Y(t)$ правая часть (2) для любого $t \in \mathbb{R}$, очевидно, равна

$$\Psi_{Y(s+t)-Y(s)}(\sqrt{a}) = e^{-\frac{a}{2}D\{Y(s+t)-Y(s)\}} = e^{-a\gamma(t)}, \quad a > 0.$$

Таким образом, для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, является характеристической. Следовательно, согласно теореме Бохнера – Хинчина [4, с. 305] $e^{-a\gamma(t)}$ – неотрицательно определенная функция.

Достаточность. Пусть $e^{-a\gamma(t)}$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$, – неотрицательно определенная функция. Тогда по теореме Бохнера – Хинчина эта функция характеристическая. Дальнейшее доказательство данной теоремы повторяет доказательство достаточности теоремы 1 [1].

Следствие. Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию $E\{X^2(t)\} < \infty$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, есть корреляционная функция некоторого случайного процесса.

Теорема 2. В случае непрерывности семивариограммы $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, внутренне стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с конечным моментом второго порядка эквивалентны следующие утверждения:

- 1) $\gamma(t)$ – условно отрицательно определенная функция;
- 2) $e^{-a\gamma(t)}$ – неотрицательно определенная функция для любого $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 1 настоящей работы и из [1, теорема 1].

Полученные результаты будут использованы в дальнейшем для статистического анализа случайных процессов в частотной области, в частности для поиска спектральных представлений внутренне стационарных случайных процессов и их семивариограмм.

Интервальное оценивание семивариограммы

Рассмотрим действительный стационарный гауссовский случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, с нулевым математическим ожиданием и неизвестной семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Нетрудно видеть, что при фиксированных $t, h \in \mathbb{Z}$ величина

$$\{Y(t+h) - Y(t)\}^2 = 2\gamma(h)\chi_1^2,$$

где χ_1^2 – случайная величина, распределенная по закону χ^2 с одной степенью свободы. Следовательно,

$$E\{Y(t+h) - Y(t)\}^2 = 2\gamma(h); \quad D\{Y(t+h) - Y(t)\}^2 = 2\{2\gamma(h)\}^2.$$

Пусть $Y(1), \dots, Y(n)$ – n последовательных отсчетов процесса $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. В качестве оценки семивариограммы рассмотрим статистику вида

$$\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{t=1}^{n-h} (Y(t+h) - Y(t))^2, \quad h = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

Положим, $\tilde{\gamma}(-h) = \tilde{\gamma}(h)$, $h = 0, 1, \dots, n-1$, и $\tilde{\gamma}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Выражения для математического ожидания и дисперсии оценки семивариограммы $\tilde{\gamma}(h)$ были получены в [2] и имеют вид

$$E\{\tilde{\gamma}(h)\} = \gamma(h);$$

$$D\{\tilde{\gamma}(h)\} = \frac{1}{2(n-h)^2} \sum_{s,t=1}^{n-h} \{\gamma(s-t+h) + \gamma(s-t-h) - 2\gamma(s-t)\}^2,$$

где функция $\gamma(h)$ – семивариограмма рассматриваемого случайного процесса.

В [2] найдено также предельное распределение статистики (3) и на основе нормальной аппроксимации распределения $\tilde{\gamma}(h)$ построен центральный доверительный интервал для семивариограммы $\gamma(h)$.

Как известно [5; 6], случайная величина χ^2 применяется для приближения случайной величины, принимающей только положительные значения. В частности, в задачах аппроксимации распределений сглаженных оценок спектральных плотностей χ^2 -распределение занимает центральное место [5]. В настоящей статье рассмотрим подход, основанный на χ^2 -приближении к распределению оценки семивариограммы $\tilde{\gamma}(h)$ вида (3). Здесь и далее будем предполагать, что h выбирается фиксированным: $h = 0, 1, \dots, n-1$.

Согласно [5] распределение статистики (3) может быть аппроксимировано распределением случайной величины $c\chi_m^2$, где c – константа; χ_m^2 – случайная величина, имеющая χ^2 -распределение с m степенями свободы. Найдем параметры c и m методом моментов. Для этого приравняем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $c\chi_m^2$ к математическому ожиданию и дисперсии оценки $\tilde{\gamma}(h)$ семивариограммы. Предполагается, что моменты первого и второго порядков оценки семивариограммы известны. Тогда имеем

$$E\{\tilde{\gamma}(h)\} = cm; D\{\tilde{\gamma}(h)\} = 2c^2m.$$

Решая эти уравнения относительно c и m , получим

$$m = \frac{2(E\{\tilde{\gamma}(h)\})^2}{D\{\tilde{\gamma}(h)\}}; c = \frac{E\{\tilde{\gamma}(h)\}}{m}.$$

Принимая во внимание несмещенность оценки (3), запишем выражения для параметров аппроксимирующего распределения χ^2 в виде

$$\hat{m} = \frac{2(\gamma(h))^2}{D\{\tilde{\gamma}(h)\}}; \hat{c} = \frac{\gamma(h)}{\hat{m}}.$$

Таким образом, величина $\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)}$ имеет χ^2 -распределение с $\hat{m}$ степенями свободы. Построим для нее доверительный интервал с коэффициентом доверия $(1 - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0,5$. Согласно [6] имеем

$$P\left\{\chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} < \chi_{\hat{m}}^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = 1 - \varepsilon;$$

$$P\left\{\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} \leq \chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = P\left\{\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} \geq \chi_{\hat{m}}^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\chi_{\hat{m}}^2(\alpha) = F_{\chi_{\hat{m}}^2}^{-1}(\alpha)$ – квантиль уровня α распределения χ^2 с $\hat{m}$ степенями свободы, $\alpha \in (0, 1)$.

Отсюда вытекает, что интервал

$$\left(\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\chi_{\hat{m}}^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right)$$

с доверительной вероятностью $(1 - \varepsilon)$ является центральным доверительным интервалом для неизвестной семивариограммы $\gamma(h)$, $h = 0, 1, \dots, n - 1$.

Отметим, что при достаточно больших $\hat{m}$ доверительный интервал для семивариограммы $\gamma(h)$ может быть построен с помощью нормальной аппроксимации распределения $\tilde{\gamma}(h)$ [2].

Построение доверительных интервалов – одна из основных задач процесса оценивания. Представленные в настоящей работе результаты позволяют получить не только точечные оценки семивариограммы, но и охарактеризовать их точность посредством доверительных интервалов с заданной доверительной вероятностью.

Библиографические ссылки

1. Цеховая Т. В. Свойства вариограммы внутренне стационарных случайных процессов // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : материалы Междунар. науч. конф. (Минск, 22 апр. 2004 г.). Минск, 2004. С. 181–186.
2. Цеховая Т. В. Асимптотическое распределение оценки семивариограммы гауссовского случайного процесса // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 1. С. 89–95.

3. Цеховая Т. В. Свойства внутренне стационарных случайных процессов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 28–33.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. М., 1989.
5. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения : в 2 т. М., 1971. Т. 1.
6. Справочник по прикладной статистике : в 2 т. / под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана ; пер. с англ. Ю. Н. Тюрина. М., 1989. Т. 1: Финансы и статистика.

References

1. Tsekhavaya T. V. [The properties of the variogram of intrinsically stationary random processes]. *Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya statistika i ikh prilozheniya* : proc. Int. sci. of conf. (Minsk, 22 April, 2004). Minsk, 2004. P. 181–186 (in Russ.).
2. Tsekhavaya T. V. Asymptotic distribution of the semivariogram estimator of Gaussian stochastic process. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2015. No. 1. P. 89–95 (in Russ.).
3. Tsekhavaya T. V. Properties of the intrinsically stationary stochastic processes. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 28–33 (in Russ.).
4. Shiryaev A. N. [Probability]. Moscow, 1989 (in Russ.).
5. Djenkins G., Vatts D. [Spectral analysis and its applications] : in 2 vol. Moscow. 1971. Vol. 1 (in Russ.).
6. Lloyd E., Lederman Yu. (eds). *Spravochnik po prikladnoy statistike* [Handbook of applicable mathematics] : in 2 vol. Moscow, 1989. Vol. 1: Finansy i statistika (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 17.01.2017.
Received by editorial board 17.01.2017.

УДК 519.63;621.315.592

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ИОННОЙ ИМПЛАНТАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА – ПЛАНКА

В. И. БЕЛЬКО¹⁾, С. В. ЛЕМЕШЕВСКИЙ²⁾, М. М. ЧУЙКО²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

Рассмотрена модель переноса ионов высоких энергий в твердом теле, основанная на численном решении уравнения Фоккера – Планка, имеющего второй порядок по угловой и энергетической переменным. Построена конечно-разностная схема, аппроксимирующая начально-краевую задачу для уравнения Фоккера – Планка. Показано, что разностная схема удовлетворяет сеточному принципу максимума. Получена оценка устойчивости разностного решения по начальным данным. Приведены результаты вычислительных экспериментов по моделированию процесса переноса ионов висмута и фосфора при ионной имплантации в кремний с начальными энергиями 1 и 50 МэВ. Профили распределения по глубине остановившихся ионов, полученные в рамках данной модели и в рамках модели без учета углового рассеяния, сравниваются с результатами статистического моделирования.

Ключевые слова: высокоэнергетическая ионная имплантация; уравнение Фоккера – Планка; разностные схемы; устойчивость.

Образец цитирования:

Белько В. И., Лемешевский С. В., Чуйко М. М. Численное моделирование высокоэнергетической ионной имплантации с использованием уравнений Фоккера – Планка // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 28–36.

For citation:

Belko V. I., Lemeshevsky S. V., Chuiko M. M. Numerical modeling of high-energy ion implantation using Fokker – Planck equations. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 28–36 (in Russ.).

Авторы:

Виктор Иванович Белько – кандидат физико-математических наук; заведующий кафедрой математического моделирования и управления факультета прикладной математики и информатики.

Сергей Владимирович Лемешевский – кандидат физико-математических наук; заместитель директора.

Михаил Матвеевич Чуйко – кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник.

Authors:

Viktor Belko, PhD (physics and mathematics); head of the department of mathematical modeling and control, faculty of applied mathematics and computer sciences.

belko@bsu.by

Sergey Lemeshevsky, PhD (physics and mathematics); deputy director.

svl@im.bas-net.by

Mikhail Chuiko, PhD (physics and mathematics); leading researcher.

chuiko@im.bas-net.by

NUMERICAL MODELING OF HIGH-ENERGY ION IMPLANTATION USING FOKKER – PLANCK EQUATIONS

V. I. BELKO^a, S. V. LEMESHEVSKY^b, M. M. CHUIKO^b

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

^bInstitute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,
Surhanava Street, 11, 220072, Minsk, Belarus

Corresponding author: V. I. Belko (belko@bsu.by)

The model of transport for high energetic ions in solids based on numerical solving of the boundary value problem for the Fokker – Planck equation is considered. The Fokker – Planck equation has a second order both on energetic and angular variables. We derived the difference scheme approximating the boundary value problem. It was shown, that the difference scheme is satisfied the grid maximum principle. There is estimated the stability of the difference solutions with respect to the initial data. We present the results of computational experiments on modeling of bismuth and phosphorus ion transport under ion implantation into the silicon with the initial energy of 1 and 50 MeV. We compared depth distribution profiles of stopped particles obtained using both the presented model and the model without angular scattering with the data of statistical simulations.

Key words: the high-energy ion implantation; the Fokker – Planck equation; difference schemes; stability.

В настоящее время метод высокоэнергетической ионной имплантации является актуальным в связи с использованием его для создания ряда уникальных приборов микроэлектроники, а также систем многоуровневой электроники, когда задействуется не только приповерхностная область, но и объем кристаллов. Имплантация при высоких энергиях используется для анализа состава и свойств материалов, а также для изучения их устойчивости при воздействии ионизирующих излучений.

Применение высокоэнергетической ионной имплантации при производстве новых приборов микроэлектроники и исследовании материалов требует знания результирующих распределений остановившихся ионов и выделенной в мишень энергии с высокой степенью точности. Теоретические основы процесса переноса заряженных частиц хорошо разработаны: построена модель бинарных столкновений, найдены с удовлетворительной точностью дифференциальные сечения и коэффициенты упругого и неупругого рассеяния частиц [1; 2]. На основе данной модели могут быть найдены требуемые распределения с использованием метода статистических испытаний Монте-Карло [1] или с помощью численного решения линеаризованного интегро-дифференциального уравнения переноса Больцмана [3]. Тем не менее разработка и реализация вычислительных алгоритмов для решения уравнения переноса Больцмана требует значительных усилий. Построение распределений остановившихся частиц методом Монте-Карло с использованием, например, программы *SRIM* [4] приводит – особенно в случае высокоэнергетической имплантации – к неоправданно большому вычислительным затратам.

Физические процессы, характеризующие ионную имплантацию в области высоких энергий, отличаются преобладанием электронного торможения и малой переданной энергией в ядерных взаимодействиях, что обуславливает рассеяние преимущественно на малые углы. Поэтому интегральный оператор, описывающий упругие столкновения, может быть заменен дифференциальным оператором Фоккера – Планка [5], а интегро-дифференциальное уравнение переноса Больцмана – уравнением в частных производных второго порядка. Соответствующие уравнения типа Фоккера – Планка хорошо известны в теории переноса быстрых заряженных частиц в твердом теле [5; 6] и переноса излучения [7], а также в теории взаимодействия ионных пучков с плазмой [8].

Стандартным методом построения дифференциального оператора, аппроксимирующего интегральный, является разложение искомой функции распределения движущихся частиц и дифференциального сечения упругого рассеяния в ряд Тейлора по энергетической и угловой переменным. В зависимости от числа оставляемых членов в тейлоровском разложении могут быть получены различные уравнения в частных производных типа Фоккера – Планка. Так, уравнение Фоккера – Планка, имеющее второй порядок по угловой переменной и первый по энергетической, рассматривается в работе [9]. Для решения соответствующей начально-краевой задачи использовался явный адаптивный одношаговый конечно-разностный метод. В работе [10] предлагается алгоритм численного решения уравнения Фоккера – Планка без учета углового рассеяния, имеющего второй порядок по энергетической переменной.

С одной стороны, поскольку уравнения Фоккера – Планка являются аппроксимациями интегро-дифференциального уравнения переноса, каждое из них применимо лишь в определенном диапазоне энергий и типов ионов и мишеней. С другой стороны, эффективные алгоритмы численного решения

уравнений Фоккера – Планка могут использоваться как составная часть комбинированных алгоритмов [11; 12]. Столкновения с малой переданной энергией описываются в этом случае дифференциальным оператором, а так называемые сильные столкновения – интегральным.

В настоящей работе используется модель переноса ионов высоких энергий в твердом теле, основанная на численном решении уравнения Фоккера – Планка, имеющего второй порядок по угловой и энергетической переменным. Приводится сравнение полученных результатов с результатами статистического моделирования.

Постановка задачи

Рассмотрим постановку начально-краевой задачи для уравнения Фоккера – Планка с диффузионным слагаемым по энергии и с учетом рассеяния по углам, описывающего перенос быстрых заряженных частиц в плоском слое вещества:

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\alpha(E)}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial E} (\beta(E) \Phi) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} (Q(E) \Phi), \quad (x, E, \mu) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\Omega = \{(x, E, \mu): 0 < x < H, E_c < E < E_0, 0 < \mu < 1\},$$

где $\Phi(x, E, \mu)$ – плотность потока ионов на глубине x , имеющих энергию E и косинус μ угла φ между направлением движения и основной осью Ox , расположенной перпендикулярно к поверхности мишени; $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$; H – толщина слоя; E_c – энергия срезки (ионы с энергией ниже E_c считаются остановившимися); E_0 – начальная энергия ионов.

В качестве граничного условия при $x = 0$ задается равномерно распределенный по поверхности мишени входящий поток ионов, определяемый функцией $\Phi_0(E, \mu)$:

$$\Phi|_{x=0} = \Phi_0(E, \mu), \quad E_c \leq E < E_0, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (2)$$

которая в случае широкого моноэнергетического пучка, равномерно распределенного по поверхности мишени, имеет вид

$$\Phi_0(E, \mu) = D \delta(\mu - \mu_0) \delta(E - E_0),$$

где D – доза внедренных ионов; $\mu_0 = \cos \varphi_0$; φ_0 – угол падения ($\varphi_0 = 0$).

Обобщенный поток из области энергий $E > E_0$ равен нулю, следовательно,

$$\beta(E) \Phi + \frac{\partial}{\partial E} (Q(E) \Phi) \Big|_{E=E_0} = 0, \quad 0 < x \leq H, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (3)$$

Отсутствие частиц, проходящих через энергетический порог E_c , задается краевым условием вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E} \Big|_{E=E_c} = 0, \quad 0 < x \leq H, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (4)$$

Будем считать, что отклонение частиц на углы $\varphi > \frac{\pi}{2}$ является невозможным, поэтому

$$\Phi|_{\mu=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq H, \quad E_c \leq E \leq E_0. \quad (5)$$

Непосредственно из уравнения может быть получено условие при $\mu = 1$:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\alpha(E) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial E} (\beta(E) \Phi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} (Q(E) \Phi) \right) \Big|_{\mu=1} = 0. \quad (6)$$

Коэффициенты уравнения могут быть найдены исходя из дифференциального сечения упругого рассеяния [5; 9]. В настоящей работе для вычисления коэффициентов будем использовать «универсальное» сечение рассеяния из [1].

Пусть M_1, Z_1, M_2, Z_2 – атомные массы и номера иона и атома мишени соответственно; E – кинетическая энергия иона; T – энергия, переданная при упругом столкновении с ядрами атомов мишени. Тогда коэффициент ядерного торможения $S_n(E)$, определяющий средние потери энергии на единицу длины пути в мишени из-за упругих столкновений, задается следующей формулой:

$$S_n(E) = N \int_0^{\gamma E} T d\sigma = \frac{N\pi A_E^2}{2} \int_0^{\gamma E} T f(t^{1/2}) \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{N\pi A_E^2}{2\delta_1 E} \int_0^{\delta_1 \gamma E^2} t^{-1/2} f(t^{1/2}) dt,$$

где N – атомная плотность мишени; $d\sigma$ – дифференциальное сечение рассеяния по переданной энергии; $A_E = \frac{0,4685}{Z_1^{0,23} + Z_2^{0,23}}$ – постоянная экранирования; $\gamma = \frac{4M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}$ – кинематическая постоянная; константа $\delta_1 = \frac{M_2 A_E^2}{4M_1 Z_1^2 Z_2^2 (e^2)^2}$, $e^2 = 0,0144$ кэВ/Å; переменная $t = \delta_1 T E$.

Функция f приводится в [1] и задает «универсальное» сечение упругого рассеяния. Диффузионный коэффициент перераспределения по энергии $Q(E)$ имеет вид

$$Q(E) = N \int_0^{\gamma E} T^2 d\sigma = \frac{N\pi A_E^2}{2} \int_0^{\gamma E} T^2 f(t^{1/2}) \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{N\pi A_E^2}{2\delta_1^2 E^2} \int_0^{\delta_1 \gamma E^2} t^{1/2} f(t^{1/2}) dt,$$

а диффузионный коэффициент перераспределения по углам $\alpha(E)$ –

$$\alpha(E) = N \int_0^{\gamma E} (1 - \cos \Theta_L(E, T)) d\sigma = \frac{N\pi A_E^2}{2} \int_0^{\delta_1 \gamma E^2} \left(1 - \cos \Theta_L \left(E, \frac{t}{\delta_1 E} \right) \right) f(t^{1/2}) \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

В последней формуле Θ_L – угол рассеяния в лабораторной системе координат, который может быть найден по следующей формуле:

$$\cos \Theta_L(E, T) = 0,5 \left((1 - \tau)^{1/2} + \frac{1 - \mu\tau}{(1 - \tau)^{1/2}} \right),$$

где $\mu = \frac{M_2}{M_1}$; $\tau = \frac{T}{E}$.

В формуле для коэффициента $\beta(E)$ слагаемое $S_e(E)$ – коэффициент электронного торможения, который был получен из программы SRIM [4]:

$$\beta(E) = S_n(E) + S_e(E).$$

Для приближенного вычисления коэффициентов использовались методы численного интегрирования в нерегулярном случае [13, с. 186–187].

На основании найденной плотности потока ионов определяется профиль распределения по глубине остановившихся частиц по формуле

$$W(x) = -\frac{d}{dx} \int_{E_c}^{E_0} dE \int_0^1 \mu \Phi(x, E, \mu) d\mu.$$

Вычислительный алгоритм

Для численного решения начально-краевой задачи (1)–(6) в области Ω введем равномерную сетку

$$E_i = E_c + i\Delta E, i = 0, \dots, N_E, \Delta E = \frac{E_0 - E_c}{N_E}; \mu_j = j\Delta\mu, j = 0, \dots, N_\mu, \Delta\mu = \frac{1}{N_\mu};$$

$$x^{n+1} = x^n + \Delta x_n, n = 0, \dots, N_x, x^0 = 0.$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\alpha(E)}{2} \frac{\partial F_\mu}{\partial \mu} + \frac{\partial F_E}{\partial E}, \quad (7)$$

где

$$F_\mu = (1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}; \quad F_E = \tilde{\beta}(E) \Phi + \frac{Q(E)}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial E}, \quad \tilde{\beta}(E) = \beta(E) + \frac{1}{2} \frac{\partial Q(E)}{\partial E}.$$

На введенной в области Ω разностной сетке аппроксимируем уравнение (7) неявной консервативной разностной схемой

$$\mu_j \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta x_n} = \frac{\alpha_i}{2} \frac{F_{\mu,i,j+1/2}^{n+1} - F_{\mu,i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta \mu} + \frac{F_{E,i+1/2,j}^{n+1} - F_{E,i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta E}, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_E - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_\mu - 1,$$

где

$$F_{\mu,i,j+1/2}^{n+1} = (1 - \mu_{j+1/2}^2) \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta \mu};$$

$$F_{E,i+1/2,j}^{n+1} = 0,5 \tilde{\beta}_{i+1/2} (\Phi_{i+1,j}^{n+1} + \Phi_{i,j}^{n+1}) + (1 + \rho_{i+1/2}) \frac{Q_{i+1/2}}{2} \frac{\Phi_{i+1,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta E},$$

$$\tilde{\beta}_{i+1/2} = 0,5 (\beta_{i+1} + \beta_i) + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta E}.$$

Для обеспечения монотонности разностной схемы и сохранения второго порядка аппроксимации аналогично, как и в работе [10], при аппроксимации потока $F_{E,i+1/2,j}^{n+1}$ применен регуляризатор

$$\rho_{i+1/2} = \eta P_{i+1/2}^2, \quad P_{i+1/2} = \frac{|\tilde{\beta}_{i+1/2}| \Delta E}{Q_{i+1/2}}, \quad \eta > \frac{1}{4}.$$

При аппроксимации краевых условий (3), (4) и (6) используем исходное уравнение (1):

$$\mu_j \frac{\Phi_{N_E,j}^{n+1} - \Phi_{N_E,j}^n}{\Delta x_n} = \frac{\alpha_{N_E}}{2} \frac{F_{\mu,N_E,j+1/2}^{n+1} - F_{\mu,N_E,j-1/2}^{n+1}}{\Delta \mu} - \frac{2F_{E,N_E-1/2,j}^{n+1}}{\Delta E}, \quad (9)$$

$$\mu_j \frac{\Phi_{0,j}^{n+1} - \Phi_{0,j}^n}{\Delta x_n} = \frac{\alpha_0}{2} \frac{F_{\mu,0,j+1/2}^{n+1} - F_{\mu,0,j-1/2}^{n+1}}{\Delta \mu} + \frac{2(F_{E,1/2,j}^{n+1} - F_{E,0,j}^{n+1})}{\Delta E}, \quad j = 1, 2, \dots, N_\mu - 1; \quad (10)$$

$$\frac{\Phi_{i,N_\mu}^{n+1} - \Phi_{i,N_\mu}^n}{\Delta x_n} = -\alpha_i \frac{F_{\mu,i,N_\mu-1/2}^{n+1}}{\Delta \mu} + \frac{F_{E,i+1/2,N_\mu}^{n+1} - F_{E,i-1/2,N_\mu}^{n+1}}{\Delta E}, \quad i = 1, 2, \dots, N_E - 1, \quad (11)$$

где

$$F_{E,0,j}^{n+1} = \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \frac{Q_1 - Q_0}{\Delta E} \right) \Phi_{0,j}^{n+1}. \quad (12)$$

Условие (2) аппроксимируется следующим образом:

$$\Phi_{i,j}^0 = D \Delta(E_i - E_0) \Delta(\mu_j - \mu_0), \quad (13)$$

где $\Delta(E_i - E_0) \Delta(\mu_j - \mu_0)$ – кусочно-линейная аппроксимация двумерной δ -функции.

По значениям сеточной функции $\Phi_{i,j}^n$ и $\Phi_{i,j}^{n+1}$ вычисляется сеточная функция $W^{n+1} = \frac{I^n - I^{n+1}}{\Delta x_n}$, где I^n – интегральная сумма для $\int_{E_c}^{E_0} dE \int_0^1 \mu \Phi(x^n, E, \mu) d\mu$.

Проведем анализ предложенной разностной схемы (8)–(13), которую можно трактовать как аппроксимацию нестационарной задачи конвекции – диффузии с конвективным слагаемым в дивергентном виде для функции $\Phi(x, E, \mu)$, если под временной переменной понимать x , а в качестве пространственных выступают угловая и энергетическая переменные. В целях исследования устойчивости такого вида задач можно использовать принцип максимума в варианте диагонального преобладания по столбцам [14]. Для таких задач наиболее естественно получить оценки устойчивости в пространстве сеточных функций L_1 , снабженном нормой $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{N_\mu-1} \sum_{j=1}^{N_E-1} |u_{ij}| \Delta \mu \Delta E$.

Уравнение (8) в узлах с индексами $i = 1, 2, \dots, N_E - 1, j = 1, 2, \dots, N_\mu - 1$ запишем в виде

$$C_{ij} \Phi_{ij}^{n+1} - A_{1ij} \Phi_{i-1j}^{n+1} - B_{1ij} \Phi_{i+1j}^{n+1} - A_{2ij} \Phi_{ij-1}^{n+1} - B_{2ij} \Phi_{ij+1}^{n+1} = G_{ij}. \quad (14)$$

Соответственно, граничные условия (9) и (10) по энергетической переменной в узлах $j = 1, 2, \dots, N_\mu - 1, i = 0$ и $i = N_E$, можно записать следующим образом:

$$C_{0j} \Phi_{0j}^{n+1} - B_{10j} \Phi_{1j}^{n+1} - A_{20j} \Phi_{0j-1}^{n+1} - B_{20j} \Phi_{0j+1}^{n+1} = G_{0j}; \quad (15)$$

$$C_{N_E j} \Phi_{N_E j}^{n+1} - A_{1N_E j} \Phi_{N_E-1j}^{n+1} - A_{2N_E j} \Phi_{N_E j-1}^{n+1} - B_{2N_E j} \Phi_{N_E j+1}^{n+1} = G_{N_E j}, \quad (16)$$

а граничные условия по угловой переменной в узлах $i = 1, 2, \dots, N_E - 1, j = 0$ и $j = N_\mu$ принимают следующий вид:

$$\Phi_{i0}^{n+1} = 0, \quad (17)$$

$$C_{iN_\mu} \Phi_{iN_\mu}^{n+1} - A_{1iN_\mu} \Phi_{i-1N_\mu}^{n+1} - B_{1iN_\mu} \Phi_{i+1N_\mu}^{n+1} - A_{2iN_\mu} \Phi_{iN_\mu-1}^{n+1} = G_{iN_\mu}.$$

Коэффициенты в (14)–(17) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$A_{1ij} = -\frac{\tilde{\beta}_{i-1/2}}{2\Delta E} + \frac{(1 + \rho_{i-1/2}) \mathcal{Q}_{i-1/2}}{2\Delta E^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_E - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_\mu; \quad (18)$$

$$A_{1N_E j} = -\frac{\tilde{\beta}_{N_E-1/2}}{\Delta E} + \frac{(1 + \rho_{N_E-1/2}) \mathcal{Q}_{N_E-1/2}}{\Delta E^2}, \quad i = N_E, \quad j = 1, 2, \dots, N_\mu;$$

$$B_{1ij} = \frac{\tilde{\beta}_{i-1/2}}{2\Delta E} + \frac{(1 + \rho_{i+1/2}) \mathcal{Q}_{i+1/2}}{2\Delta E^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_E - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_\mu; \quad (19)$$

$$B_{10j} = \frac{\tilde{\beta}_{1/2}}{\Delta E} + \frac{(1 + \rho_{1/2}) \mathcal{Q}_{1/2}}{\Delta E^2}, \quad i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_\mu;$$

$$A_{2ij} = \frac{\alpha_i (1 - \mu_{j-1/2})}{2\Delta \mu^2}, \quad i = 0, 1, \dots, N_E, \quad j = 1, 2, \dots, N_\mu; \quad (20)$$

$$B_{2ij} = \frac{\alpha_i (1 - \mu_{j+1/2})}{2\Delta \mu^2}, \quad i = 0, 1, \dots, N_E, \quad j = 0, 1, \dots, N_\mu - 1.$$

При этом для коэффициентов C_{ij} имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \frac{\mu_j}{\Delta x_n} + A_{1i+1j} + B_{1i-1j} + A_{2ij+1} + B_{2ij-1}, \quad i = 1, \dots, N_E - 1, \quad j = 1, \dots, N_\mu - 1; \\ C_{0j} &= \frac{\mu_j}{\Delta x_n} + A_{11j} + A_{20j+1} + B_{20j-1}, \quad i = 0, \quad j = 1, \dots, N_\mu - 1; \\ C_{N_E j} &= \frac{\mu_j}{\Delta x_n} + B_{1N_E-1j} + A_{2N_E j+1} + B_{2N_E j-1}, \quad i = N_E, \quad j = 1, \dots, N_\mu - 1; \\ C_{iN_\mu} &= \frac{\mu_{N_\mu}}{\Delta x_n} + A_{1i+1N_\mu} + B_{1i-1N_\mu} + B_{2iN_\mu-1}, \quad i = 1, \dots, N_E - 1, \quad j = N_\mu. \end{aligned} \quad (21)$$

Правые части уравнений (14)–(17) имеют вид

$$G_{ij} = \frac{\mu_j}{\Delta x_n} \Phi_{ij}^n, \quad i = 0, \dots, N_E, \quad j = 1, \dots, N_\mu.$$

Кроме того, (14)–(17) дополняется начальным условием (13).

Запись разностной схемы (8)–(13) в виде (14)–(17) соответствует системе линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей. В [14] получены условия монотонности и основанные на них оценки устойчивости разностной схемы в сеточной норме L_1 . При этом под монотонностью схемы понимается выполнение принципа максимума для разностной схемы. Условия монотонности имеют вид

$$\begin{aligned} C_{ij} - A_{1i+1j} - B_{1i-1j} - A_{2ij+1} - B_{2ij-1} &> 0, \quad i = 1, \dots, N_E - 1, \quad j = 1, \dots, N_\mu - 1; \\ C_{0j} - A_{11j} - A_{20j+1} - B_{20j-1} &> 0, \quad i = 0, \quad j = 1, \dots, N_\mu - 1; \\ C_{N_E j} - B_{1N_E-1j} - A_{2N_E j+1} - B_{2N_E j-1} &> 0, \quad i = N_E, \quad j = 1, \dots, N_\mu - 1; \\ C_{iN_\mu} - A_{1i+1N_\mu} - B_{1i-1N_\mu} - B_{2iN_\mu-1} &> 0, \quad i = 1, \dots, N_E - 1, \quad j = N_\mu; \\ A_{kij} > 0, B_{kij} > 0 &\text{ для всех } i, j, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Из выражений для коэффициентов (18)–(21) с учетом выбора регуляризатора нетрудно показать, что для разностной схемы (14)–(21) выполнены условия (22). Таким образом, для разностной схемы (14)–(18) выполнены условия принципа максимума [15, теорема 2.19] и теоремы сравнения [15, теорема 2.20], на основе которых для решения разностной схемы (18)–(21) нетрудно получить следующую оценку устойчивости по начальным данным:

$$\|\Phi^{n+1}\|_1 \leq M \|\Phi^0\|_1.$$

Отметим, что условия (22) связаны с условием диагонального преобладания по столбцам матрицы системы линейных уравнений при естественной нумерации узлов разностного решения. Следовательно, используемый нами для решения системы линейных алгебраических уравнений с 5-диагональной матрицей модифицированный сильнонеявный метод *MSIM* Шнейдера и Зедана [15] будет сходиться.

Результаты моделирования

В вычислительных экспериментах наряду с уравнением (1) применялось уравнение Фоккера – Планка без учета углового рассеяния [10], которое может быть получено из (1), если положить $\mu = 1$ и $\alpha(E) \equiv 0$. Модель переноса ускоренных ионов в полупроводниковой мишени, основанную на уравнении Фоккера – Планка без учета рассеяния по углам, далее будем называть ФП-1, а модель с учетом углового рассеяния, основанную на уравнении (1), – ФП-2.

Вычислительные эксперименты были проведены для ионов фосфора и висмута с начальными энергиями $E_0 = 1$ МэВ и $E_0 = 50$ МэВ с использованием моделей ФП-1 и ФП-2. В обеих моделях учитывалась диффузия ионов по энергии.

Во всех экспериментах полагалось, что плоскопараллельный моноэнергетический пучок ионов направлен перпендикулярно к поверхности мишени, доза $D = 1$, энергия срезки $E_c = 1$ эВ. Шаг дискретизации по энергии для начально-краевой задачи (1)–(6) составлял $\Delta E = 200$ эВ, шаг разностной сетки по угловой переменной – $\Delta\mu = 0,01$ в случае учета углового рассеяния.

Шаг интегрирования по переменной x варьировался в зависимости от числа итераций s , необходимых для достижения заданной точности для метода *MSIM* [15]. Если $s > 6$, то шаг уменьшался на 50 %, а если на протяжении 100 шагов по x заданная точность достигалась за одну-две итерации, то шаг увеличивался на 5 %. Начальное значение шага задавалось $\Delta x_0 = 0,1 \text{ \AA}$. Максимальное значение шага ограничивалось величиной $\Delta x_{\max} = 1000 \text{ \AA}$. Для пространственной переменной x в расчетах были использованы следующие пределы изменения: для ионов фосфора с начальными энергиями 1 и 50 МэВ – 18 000 и 200 000 $\text{\AA}$ соответственно; для ионов висмута с начальными энергиями 1 и 50 МэВ – 5000 и 120 000 $\text{\AA}$ соответственно.

На рис. 1 и 2 приведены профили распределения по глубине остановившихся ионов при имплантации их в кремниевую подложку, полученные с помощью статистического моделирования (см. рис. 1 и 2, кривая 1), а также в рамках моделей ФП-1 (см. рис. 1 и 2, кривая 3) и ФП-2 (см. рис. 1 и 2, кривая 2).

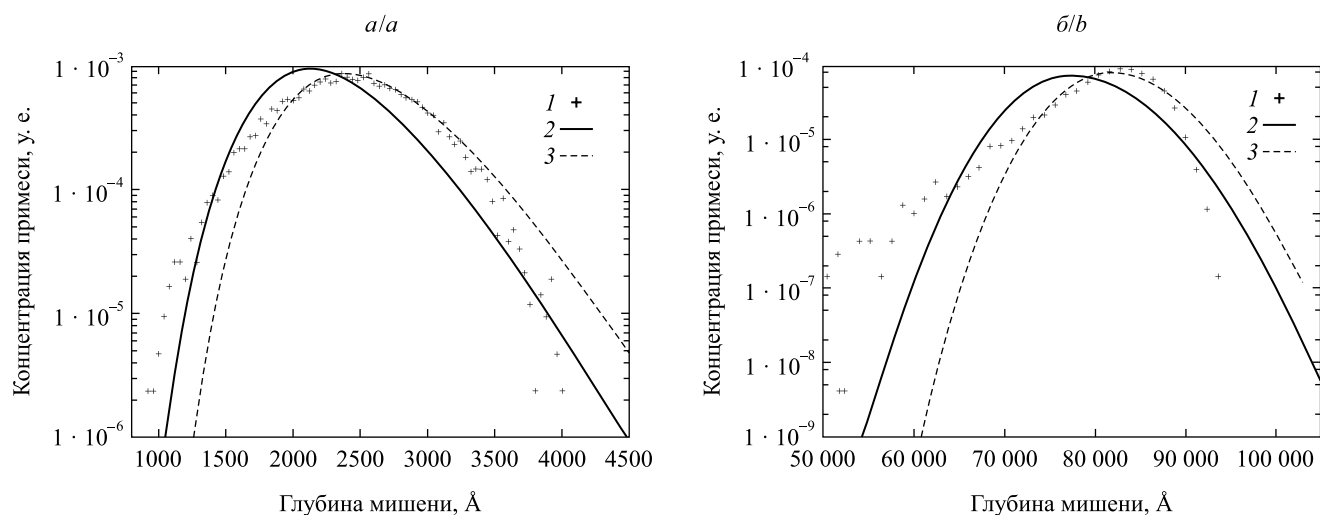


Рис. 1. Профили распределения по глубине остановившихся ионов висмута: а – 1 МэВ; б – 50 МэВ

Fig. 1. Depth distribution profiles of stopped bismuth ions: а – 1 MeV; б – 50 MeV

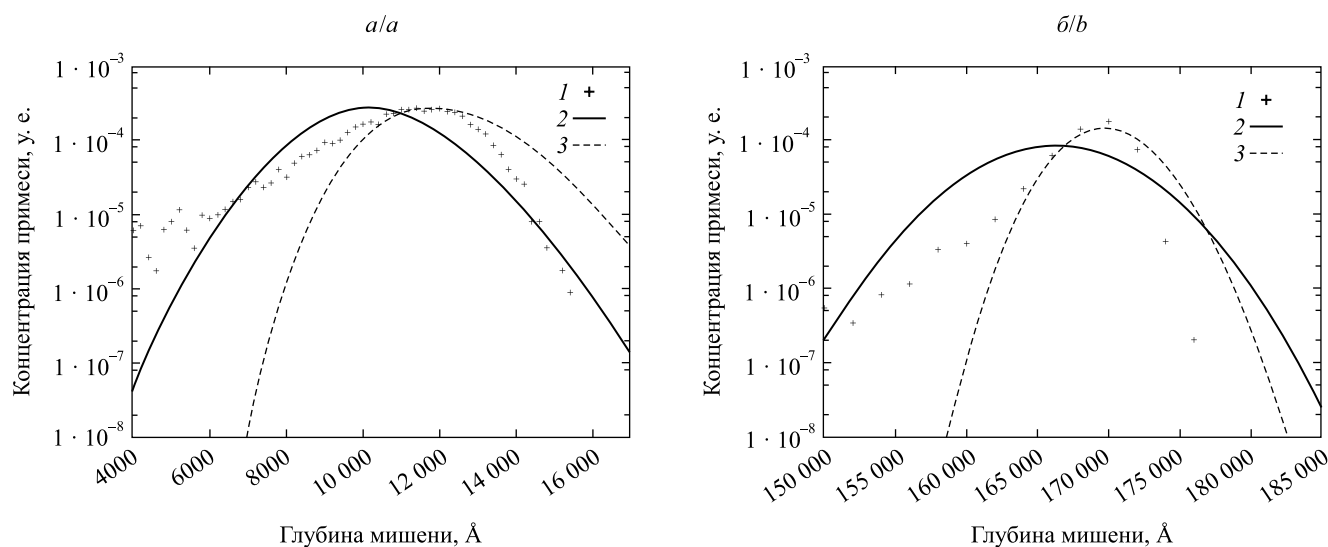


Рис. 2. Профили распределения по глубине остановившихся ионов фосфора: а – 1 МэВ; б – 50 МэВ

Fig. 2. Depth distribution profiles of stopped phosphorus ions: а – 1 MeV; б – 50 MeV

В случае имплантации ионов висмута и фосфора с начальной энергией 1 МэВ профили, полученные в рамках модели ФП-2, и результаты статистического моделирования хорошо согласуются между собой на всех глубинах за исключением области спада кривых после максимума. В то же время для профилей модели ФП-1 (без учета углового рассеяния) наблюдается заметное смещение области остановившихся ионов вглубь мишени по сравнению с данными статистического моделирования.

При имплантации ионов висмута с начальной энергией 50 МэВ профили распределения по глубине остановившихся частиц модели ФП-2 несколько смещены в глубь мишени по сравнению с результатами статистического моделирования, а профили, полученные в рамках модели ФП-1, смещены еще глубже.

Для ионов фосфора с начальной энергией 50 МэВ профиль распределения остановившихся частиц модели ФП-2 заметно шире, чем найденный путем статистического моделирования. И только в этом случае (из всех рассмотренных) профиль модели ФП-1 точнее соответствует данным статистического моделирования. Тем не менее наблюдается сдвиг названного профиля в глубь мишени и недооценка концентрации в области приповерхностного хвоста.

Таким образом, во всех вычислительных экспериментах в случае использования модели ФП-2 ширина зоны остановившихся ионов и ее положение для модели хорошо согласуются с результатами статистического моделирования. В то же время при использовании модели ФП-1 имеет место заметное смещение области остановившихся ионов в глубь мишени.

Библиографические ссылки

1. Ziegler J. F., Biersack J. P., Littmark U. Stopping and ranges of ions in solids. New York, 1985.
2. Комаров Ф. Ф., Буренков А. Ф., Новиков А. П. Ионная имплантация. Минск, 1994.
3. Burenkov A. F., Komarov F. F., Temkin M. M., et al. Ion range distribution calculation based on a numerical solution of the Boltzmann transport equation // *Radiat. Eff.* 1984. Vol. 86. P. 161–167.
4. SRIM – The stopping and range of ions in matter [Electronic resource]. URL: <http://srim.org/#SRIM/> (date of access: 14.04.2017).
5. Ремизович В. С., Rogozkin Д. Б., Рязанов М. И. Флуктуации пробегов заряженных частиц. М., 1988.
6. Pompaning G. C. The Fokker – Planck operator as an asymptotic limit // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 1992. Vol. 2. P. 21–36.
7. Kim A. D., Tranquilli P. Numerical solution of the Fokker – Planck equation with variable coefficients // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2008. Vol. 109. P. 727–740.
8. Przybylski K., Ligou J. Numerical analysis of the Boltzmann equation including Fokker – Planck terms // *Nucl. Sci. Eng.* 1982. Vol. 81. P. 92–109.
9. Komarov F. F., Mozolevski I. E., Matus P. P., et al. Distribution of implanted impurities and deposited energy in high-energy ion implantation // *Nucl. Instr. Meth. Phys.* 1997. Vol. 124. P. 478–483.
10. Mozolevski I. E., Matus P. P., Malafei D. A. The Fokker – Planck approximation of boundary value problems for the straight-ahead Boltzmann transport equation // *FDS-2000 : proc. of the conf.* (Palanga, 1–4 Sept., 2000). Palanga, 2000. P. 163–171.
11. Mozolevski I., Grande P. L. On the use of the backward Fokker – Planck equation to calculate range profiles // *Nucl. Instr. Meth. Phys.* 2000. Vol. 170. P. 45–52.
12. Mozolevski I. Modeling of high energy ion implantation based on splitting of the Boltzmann transport equation // *Comput. Mater. Sci.* 2002. Vol. 25. P. 435–446.
13. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М., 1974.
14. Самарский А. А., Вабисьевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции – диффузии. М., 1997.
15. Schneider G. E., Zedan M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems // *Numer. Heat Transf.* 1981. Vol. 4. P. 1–19.

References

1. Ziegler J. F., Biersack J. P., Littmark U. Stopping and ranges of ions in solids. New York, 1985.
2. Komarov F. F., Burenkov A. F., Novikov A. P. [Ion implantation]. Minsk, 1994 (in Russ.).
3. Burenkov A. F., Komarov F. F., Temkin M. M., et al. Ion range distribution calculation based on a numerical solution of the Boltzmann transport equation. *Radiat. Eff.* 1984. Vol. 86. P. 161–167.
4. SRIM – The stopping and range of ions in matter [Electronic resource]. URL: <http://srim.org/#SRIM/> (date of access: 14.04.2017).
5. Remizovich V. S., Rogozkin D. B., Ryazanov M. I. [Range fluctuations of charged particles]. Moscow, 1988 (in Russ.).
6. Pompaning G. C. The Fokker – Planck operator as an asymptotic limit. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 1992. Vol. 2. P. 21–36.
7. Kim A. D., Tranquilli P. Numerical solution of the Fokker – Planck equation with variable coefficients. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2008. Vol. 109. P. 727–740.
8. Przybylski K., Ligou J. Numerical analysis of the Boltzmann equation including Fokker – Planck terms. *Nucl. Sci. Eng.* 1982. Vol. 81. P. 92–109.
9. Komarov F. F., Mozolevski I. E., Matus P. P., et al. Distribution of implanted impurities and deposited energy in high-energy ion implantation. *Nucl. Instr. Meth. Phys.* 1997. Vol. 124. P. 478–483.
10. Mozolevski I. E., Matus P. P., Malafei D. A. The Fokker – Planck approximation of boundary value problems for the straight-ahead Boltzmann transport equation. *FDS-2000 : proc. of the conf.* (Palanga, 1–4 Sept., 2000). Palanga, 2000. P. 163–171.
11. Mozolevski I., Grande P. L. On the use of the backward Fokker – Planck equation to calculate range profiles. *Nucl. Instr. Meth. Phys.* 2000. Vol. 170. P. 45–52.
12. Mozolevski I. Modeling of high energy ion implantation based on splitting of the Boltzmann transport equation. *Comput. Mater. Sci.* 2002. Vol. 25. P. 435–446.
13. Bakhvalov N. S. [Numerical methods (analysis, algebra, ordinary differential equations)]. Moscow, 1974 (in Russ.).
14. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. [Numerical methods for solving the convection-diffusion problems]. Moscow, 1997 (in Russ.).
15. Schneider G. E., Zedan M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems. *Numer. Heat Transf.* 1981. Vol. 4. P. 1–19.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 512.644

МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ РАЗРЕЖЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТРАФИКА ОБОБЩЕННОГО МУЛЬТИГРАФА

Л. А. ПИЛИПЧУК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Проблема определения местонахождения датчиков в сети для мониторинга потоков стала объектом повышенного интереса в последние несколько лет из-за ее значимости в областях управления и контроля трафика. Основой для моделирования процессов оценки потоков в обобщенной мультисети является разреженная недоопределенная система линейных алгебраических уравнений специального вида. Датчики расположены в узлах мультисети для заданных долей потоков на дугах в пределах соответствующего диапазона. Рассматриваемая проблема местоположения датчиков, как известно, является NP-полной. Разработаны эффективные алгоритмы определения рангов матриц каждой из независимых подсистем, полученных в результате применения теории декомпозиции. Из равенства суммы рангов матриц независимых подсистем и числа неизвестных в независимых подсистемах следуют условия единственности решения специальной разреженной системы линейных алгебраических уравнений. Результаты исследования могут быть также применены для построения оптимальных решений задач математического программирования.

Ключевые слова: мультиграф; разреженная система; ранг; декомпозиция; опора; единственное решение.

Образец цитирования:

Пилипчук Л. А. Методы декомпозиции разреженных систем линейных алгебраических уравнений для оценки трафика обобщенного мультиграфа // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 37–43.

For citation:

Pilipchuk L. A. Decomposition methods of sparse systems of linear algebraic equations for estimation of the traffic for the generalized multigraph. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 37–43 (in Russ.).

Автор:

Людмила Андреевна Пилипчук – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Ludmila Pilipchuk, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of computer applications and systems, faculty of applied mathematics and computer sciences. pilipchuk@bsu.by

DECOMPOSITION METHODS OF SPARSE SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS FOR ESTIMATION OF THE TRAFFIC FOR THE GENERALIZED MULTIGRAPH

L. A. PILIPCHUK^a

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

The problem of locating sensors on the network to monitor flows has been object of growing interest in the past few years, due to its relevance in the field of traffic management and control. The basis for modeling the processes of estimating flows in generalized multinetwork is a sparse underdetermined system of linear algebraic equations of a special type. Sensors are located in the nodes of the multinetwork for the given traffic levels on arcs within range covered by the sensors, that would permit traffic on any unobserved flows on arcs to be exactly. The problem being addressed, which is referred to in the literature as the Sensor Location Problem (SLP), is known to be NP-complete. In this paper the effective algorithms are developed to determine the ranks of the matrices of each of the independent subsystems obtained as a result of applying the theory of decomposition. From the equality of the sum of the ranks of the matrices of independent subsystems and the number of unknowns in independent subsystems, the uniqueness conditions for the solution of a special sparse system of linear algebraic equations follow. The results of the research can also be applied to constructing optimal solutions to problems of mathematical programming.

Key words: multigraph; sparse system; rank; decomposition; support; unique solution.

Математическое моделирование процессов оценки потоков содержит в себе потенциальную информацию, при исследовании которой можно оценить потоки графа с использованием специальных методов разреженного численного анализа. Чаще всего в большом графе (сети) наблюдение за потоками ведется лишь в малой его части. Комбинаторные аспекты математического моделирования процессов оценки трафика для симметричного ориентированного графа рассмотрены в [1]. Принципы декомпозиции потока применены в [2]. Декомпозиционные методы основаны на использовании структуры системы ограничений задачи, что позволяет заменить решение одной задачи решением серии меньших задач, а также использовать современные технологии построения численных решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Задача оптимального расположения датчиков в мультиграфах исследована в работах [3; 4]. Принцип расположения минимального числа датчиков в узлах обобщенного графа приведен в [5]. Для определения условий единственности решения специальной СЛАУ в настоящей работе получены эффективные алгоритмы определения рангов матриц независимых подсистем в задаче оценки трафика обобщенного мультиграфа с использованием специальных методов разреженного численного анализа. Условия единственности решения специальной системы линейных алгебраических уравнений означают, что совокупность узлов, включенных во множество M (наблюдаемые узлы), является допустимой (может быть неоптимальной) для размещения сенсоров в определенных узлах обобщенного мультиграфа в целях наблюдения за потоками.

Если условия единственности решения исследуемой СЛАУ для множества M наблюдаемых узлов не выполняются, то система является недоопределенной. Это означает, что состав множества M наблюдаемых узлов неприемлем для размещения сенсоров в целях наблюдения за потоками обобщенного мультиграфа.

Определение условий единственности решения системы и построение искомого единственного решения исследуемой разреженной СЛАУ являются различными задачами. Нахождение рангов разреженных матриц систем без учета ее теоретико-графовых свойств и построение решений больших систем без использования результатов разреженного матричного и сетевого анализа неприемлемы для решения задач, возникающих на практике.

В настоящей работе решение указанных задач осуществляется следующим образом. В результате применения теории декомпозиции¹ [6–7] исследуемые СЛАУ могут быть представлены в виде независимых подсистем, имеющих различные типы разреженности. Общее решение системы строится на основании исследования теоретико-графовых свойств базиса пространства решений каждой независимой однородной подсистемы и с учетом типа ее разреженности. При этом число операций вычисления каждого вектора базиса пространства решений пропорционально числу его компонент. Разработаны эффективные алгоритмы определения рангов матриц каждой из независимых подсистем, полученных в результате применения теории декомпозиции. Из равенства суммы рангов матриц независимых подсистем и числа неизвестных в независимых подсистемах следуют искомые условия единственности решения специальной разреженной системы линейных алгебраических уравнений.

¹ Pilipchuk L. A. Sparse linear systems and their applications. Minsk : BSU, 2013.

Пусть $G = (I, U)$ – связный ориентированный мультиграф (мультисеть) со множеством узлов I и множеством мультидуг U , определенных на $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Представим мультиграф $G = (I, U)$ в виде множества, состоящего из $|K|$ связных графов $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K = \{1, 2, \dots, |K|\}$, $|K| < \infty$, соответствующих типам потоков $k \in K$. Определим множество $K(i) = \{k \in K : i \in I^k\}$ типов потоков, проходящих через узел $i \in I$, и $K(i, j) = \{k \in K : (i, j)^k \in U^k\}$ – множество типов потоков, проходящих через мультиду $(i, j) \in U$. Предположим, что граф $G^k = (I^k, U^k)$ является симметричным: если существует дуга $(i, j)^k \in U^k$, то существует и дуга $(j, i)^k \in U^k$, $k \in K$. Дуговой поток x_{ij}^k дуги $(i, j)^k \in U^k$ в общем случае не обязательно совпадает с дуговым потоком x_{ji}^k дуги $(j, i)^k \in U^k$. Для каждой дуги $(i, j)^k \in U^k$ графа $G^k = (I^k, U^k)$, $k \in K$, введем коэффициент $\mu_{ij}^k \in (0, 1]$, отражающий явление преобразования дугового потока x_{ij}^k . Дуговой поток x_{ij}^k исходит из узла i и поступает в узел j в виде $\mu_{ij}^k x_{ij}^k$, при этом преобразование осуществляется непосредственно перед узлом j . Граф $G^k = (I^k, U^k)$ с введенными параметрами преобразования дуговых потоков будем называть *обобщенным графом* (обобщенной сетью). Аналогично мультиграф G , который представлен в виде множества, состоящего из $|K|$ связных обобщенных графов G^k , $k \in K$, с введенными параметрами преобразования дуговых потоков графа G^k , назовем *обобщенным мультиграфом*, или обобщенной мультисетью (в дальнейшем, для краткости, слово «обобщенный» опускается, если из контекста ясно, что речь идет именно об обобщенном мультиграфе).

Основой для моделирования процессов оценки потоков обобщенного мультиграфа $G = (I, U)$ является недоопределенная система линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = \begin{cases} x_i^k, & i \in I_k^*, \\ 0, & i \in I^k \setminus I_k^*, \end{cases} \quad k \in K, \quad (1)$$

где $I_i^+(U^k) = \{j \in I : (i, j)^k \in U^k\}$; $I_i^-(U^k) = \{j \in I : (j, i)^k \in U^k\}$. В узлах множества $I_k^* \subseteq I^k$ поток создается, если $x_i^k > 0$, или поглощается, если $x_i^k < 0$. Узлы из множества I_k^* назовем узлами с переменной интенсивностью x_i^k , $i \in I_k^*$, $k \in K$. Если для компонент вектора $x = (x_{ij}^k, (i, j)^k \in U^k, x_i^k, i \in I_k^*, k \in K)$ выполняются ограничения (1), то x является решением системы (1). Компоненты вектора x принимают значения во множестве рациональных чисел. Для каждой дуги $(i, j)^k \in U^k$ обобщенного графа $G^k = (I^k, U^k)$ введем рациональное число p_{ij}^k , которое определяется следующим образом:

$$p_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k}{\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k}, \quad 0 < p_{ij}^k \leq 1,$$

и является долей суммарного дугового потока, исходящего из узла i и проходящего по дуге $(i, j)^k$. Непосредственно перед входом в узел j поток преобразуется в дуговой поток $\mu_{ij}^k x_{ij}^k$, $k \in K$.

Определение 1. Подмультиграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ обобщенного мультиграфа $G = (I, U)$ назовем ненаблюдаемым, если дуговые потоки $x_{ij}^k, (i, j)^k \in \bar{U}^k \subset U^k$, и переменные интенсивности узлов $x_i^k, i \in \bar{I}_k^* \subseteq I_k^*$, не определены, $k \in \bar{K} \subseteq K$.

Одним из новых приложений исследуемой системы (1) является проблема расположения сенсоров в узлах обобщенного мультиграфа. Задача состоит в определении местоположения наименьшего числа

сенсоров в узлах обобщенного мультиграфа $G = (I, U)$ для оценки трафика ненаблюдаемого подмультиграфа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$. Множество узлов, в которых установлены сенсоры (обозреваемые узлы), обозначим через M :

$$M = \bigcup_{k \in K} M_k, \quad M_k \subseteq I^k, \quad k \in K.$$

Для оптимальной расстановки сенсоров в узлах связного обобщенного мультиграфа $G = (I, U)$ используется следующий критерий оптимизации: *найти наименьшее число $|M|$ обозреваемых узлов обобщенного мультиграфа G , чтобы система (1) с учетом априорной информации об известных значениях дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов имела единственное решение, $M \subseteq I$.*

На основании результатов, полученных в [3; 5–7], а также с учетом априорной информации об известных значениях дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов однородная система (1) преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U}^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = \begin{cases} a_i^k + x_i^k, & i \in \bar{I}_k^*, \\ a_i^k, & i \in \bar{I}^k \setminus \bar{I}_k^*, \end{cases} \quad k \in \bar{K}; \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{U}} \sum_{k \in \bar{K}(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \beta_p, \quad p = \overline{1, q}, \quad (3)$$

где $a_i^k, i \in \bar{I}^k \setminus \bar{I}_k^*$; $\beta_p, p = \overline{1, q}$, – правые части системы (2), (3); $\lambda_{ij}^{kp}, (i, j) \in \bar{U}, k \in \bar{K}(i, j) = \{k \in \bar{K} : (i, j)^k \in \bar{U}^k\}$ – коэффициенты матрицы системы (3), которые определяются следующим образом:

$$\lambda_{ij}^{kp} = 1, \lambda_{iv_i}^{kp} = -\frac{p_{ij}^k}{p_{iv_i}^k}, \quad j \in I_i^+(\bar{U}^k) \setminus \{v_i\}, \quad \text{если } |I_i^+(\bar{U}^k)| > 1;$$

$$\lambda_{ij}^{kp} = 0, \quad j \in I_i^+(\bar{U}^k), \quad \text{если } |I_i^+(\bar{U}^k)| \leq 1, \quad i \in \bar{I}^k, \quad k \in \bar{K}; \quad \beta_p = 0, \quad p = \overline{1, q}.$$

Следовательно, система (3) имеет следующий вид:

$$x_{ij}^k - \frac{p_{ij}^k}{p_{iv_i}^k} x_{iv_i}^k = 0, \quad j \in I_i^+(\bar{U}^k) \setminus \{v_i\}, \quad |I_i^+(\bar{U}^k)| > 1, \quad i \in \bar{I}^k, \quad k \in \bar{K}, \quad (4)$$

где $x_{iv_i}^k$ – неизвестный дуговой поток произвольно выбранной дуги $(i, v_i)^k$, исходящей из узла i ; x_i^k – неизвестная интенсивность узла $i \in \bar{I}_k^*$; q – число уравнений системы (4), связывающих неизвестные дуговые потоки в исследуемой задаче оптимальной расстановки сенсоров в узлах обобщенного ненаблюдаемого мультиграфа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$. Мультиграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ может быть несвязным и несимметричным. Пусть мультиграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ состоит из множества, включающего $|\bar{K}|$ графов $\bar{G}^k = (\bar{I}^k, \bar{U}^k)$, соответствующих определенному типу потока $k \in \bar{K}$. В общем случае $\bar{G}^k$ – несвязный граф, $k \in \bar{K}$. Для некоторых компонент связности графа $\bar{G}^k$ множество узлов с переменной интенсивностью $\bar{I}_k^*$ может быть пустым, коэффициенты преобразования для всех дуг могут быть равными 1 (поток не преобразуется). Пусть $\tilde{G} = (\tilde{I}, \tilde{U})$ – любая компонента связности мультиграфа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$, которая состоит из множества, включающего $|\tilde{K}|$ связных графов $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$, соответствующих определенному типу потока $k \in \tilde{K}$; A^k – подматрица блочно-диагональной матрицы системы (2), соответствующая связному графу $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$ компоненты связности $\tilde{G} = (\tilde{I}, \tilde{U})$, $k \in \tilde{K}$. Обозначим через $\tilde{I}_k^*$ множество узлов с переменной интенсивностью связного графа $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$, $\tilde{I}_k^* \subseteq \tilde{I}^k$, $k \in \tilde{K}$.

Определение 2. Цикл в графе называется невырожденным, если выполняется следующее условие: $T = T_+ - T_- \neq 0$, где T_+ – произведение чисел μ_{ij}^k на прямых дугах цикла; T_- – произведение чисел μ_{ij}^k на обратных дугах цикла. Если все дуги цикла прямые (обратные), то полагаем $T_- = 1$ ($T_+ = 1$).

Теорема 1. Для связного графа $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$ ранг матрицы A^k равен $|\tilde{I}^k|$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- граф $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$ содержит хотя бы один невырожденный цикл;
- граф $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$ содержит хотя бы один узел с переменной интенсивностью, т. е. $\tilde{I}_k^* \neq \emptyset$.

Теорема 2. Для связного графа $\tilde{G}^k = (\tilde{I}^k, \tilde{U}^k)$ ранг матрицы A^k равен $|\tilde{I}^k| - 1$, если A^k является матрицей инцидентности графа $\tilde{G}^k$.

Доказательство теорем 1, 2 приведено в работе Л. А. Пилипчук¹.

Определение 3. Максимальная по включению элементов совокупность множеств $R_L = \{\tilde{U}_L^k, \tilde{I}_L^{*k} : k \in \tilde{K}\}$, $\tilde{U}_L^k \subset \tilde{U}^k$, $\tilde{I}_L^{*k} \subset \tilde{I}_k^*$, называется опорой связного обобщенного мультиграфа $\tilde{G} = (\tilde{I}, \tilde{U})$ для системы (2), если система

$$\sum_{j \in I_i^*(\tilde{U}_L^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^*(\tilde{U}_L^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = \begin{cases} x_i^k, & i \in \tilde{I}_L^{*k}, \\ 0, & i \in \tilde{I}^k \setminus \tilde{I}_L^{*k}, \end{cases} \quad k \in \tilde{K}, \quad (5)$$

имеет только тривиальное решение $x_{ij}^k = 0$, $(i, j)^k \in \tilde{U}_L^k$, $k \in \tilde{K}$; $x_i^k = 0$, $i \in \tilde{I}_L^{*k}$, $k \in \tilde{K}$.

Теорема 3. Совокупность множеств $R_L = \{\tilde{U}_L^k, \tilde{I}_L^{*k} : k \in \tilde{K}\}$, $\tilde{U}_L^k \subset \tilde{U}^k$, $\tilde{I}_L^{*k} \subset \tilde{I}_k^*$ является опорой связного мультиграфа $\tilde{G} = (\tilde{I}, \tilde{U})$ для системы (2) тогда и только тогда, когда для любого $k \in \tilde{K}$ граф $\tilde{G}_L^k = (\tilde{I}_L^k, \tilde{U}_L^k)$ состоит из m_k компонент связности $\tilde{G}_L^{k,t} = (I(\tilde{U}_L^{k,t}), \tilde{U}_L^{k,t})$, $\tilde{I}_L^{*k,t} \subseteq \tilde{I}_L^{*k}$, $t = \overline{1, m_k}$, $\tilde{G}_L^k = \bigcup_{t=1}^{m_k} \tilde{G}_L^{k,t}$, $\tilde{U}_L^k = \bigcup_{t=1}^{m_k} \tilde{U}_L^{k,t}$, $\tilde{I}_L^k = \bigcup_{t=1}^{m_k} I(\tilde{U}_L^{k,t})$, следующих типов:

- компонента связности $\tilde{G}_L^{k,t} = (I(\tilde{U}_L^{k,t}), \tilde{U}_L^{k,t})$ содержит единственный невырожденный цикл и $\tilde{I}_L^{*k,t} = \emptyset$;

- компонента связности $\tilde{G}_L^{k,t} = (I(\tilde{U}_L^{k,t}), \tilde{U}_L^{k,t})$ – остовное дерево графа $\tilde{G}_L^{k,t}$ и $\tilde{I}_L^{*k,t} = \emptyset$. Матрица $\tilde{A}^k$, которая соответствует уравнениям системы (5) для компоненты связности $\tilde{G}_L^{k,t} = (I(\tilde{U}_L^{k,t}), \tilde{U}_L^{k,t})$, является матрицей инцидентности графа $\tilde{G}_L^{k,t}$;

- компонента связности $\tilde{G}_L^{k,t} = (I(\tilde{U}_L^{k,t}), \tilde{U}_L^{k,t})$ – остовное дерево графа $\tilde{G}_L^{k,t}$, которое содержит единственный узел из множества $\tilde{I}_L^{*k} \neq \emptyset$, $|\tilde{I}_L^{*k,t} \cap \tilde{I}_L^{*k}| = 1$.

Ранг матрицы разреженной системы (2) блочно-диагонального вида определяется на основании теорем 1 и 2. Представим системы (2), (3) в виде независимых подсистем, при этом вид разреженности системы (2) и, следовательно, ранг матрицы системы (2) не изменяется¹ [7]. На основании теоремы 3 с учетом типа разреженности каждой независимой подсистемы и ее теоретико-графовых свойств для каждого $k \in \tilde{K}$ построим общее решение системы (2) относительно опоры $R_L = \{\tilde{U}_L^k, \tilde{I}_L^{*k} : k \in \tilde{K}\}$, $\tilde{U}_L^k \subset \tilde{U}^k$, $\tilde{I}_L^{*k} \subset \tilde{I}_k^*$. Общее решение разреженной недоопределенной системы (2) подставим в уравнения системы (3). Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k \in \tilde{K}} \left(\sum_{(\tau, \rho)^k \in \tilde{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k} \Lambda_{\tau\rho}^{kp} x_{\tau\rho}^k + \sum_{\gamma \in \tilde{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k}} \Lambda_{\gamma}^{kp} x_{\gamma}^k \right) = - \sum_{k \in \tilde{K}} \sum_{(i, j)^k \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \tilde{x}_{ij}^k - \sum_{k \in \tilde{K}} \sum_{\gamma \in \tilde{I}_L^{*k}} \lambda_{\gamma}^{kp} \tilde{x}_{\gamma}^k, \quad p = \overline{1, q}. \quad (6)$$

Вектор-столбцы $\{\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in \tilde{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k; \delta^k(\gamma), \gamma \in \tilde{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k}, k \in \tilde{K}\}$ составляют базис пространства решений однородной системы, порожденной системой (2). Числа $\Lambda_{\tau\rho}^{kp}$, Λ_{γ}^{kp} определены согласно соотношению:

¹ Pilipchuk L. A. Sparse linear systems and their applications. Minsk : BSU, 2013.

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i,j) \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \sum_{i \in \tilde{I}_L^k} \lambda_i^{kp} \delta_i^k(\tau, \rho), \quad \Lambda_{\gamma}^{kp} = \lambda_{\gamma}^{kp} + \sum_{(i,j) \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\gamma) + \sum_{i \in \tilde{I}_L^k} \lambda_i^{kp} \delta_i^k(\gamma). \quad (7)$$

Частным решением системы (2) является $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ij}^k, (i, j) \in \bar{U}^k; \tilde{x}_i^k, i \in \bar{I}_k^*, k \in \bar{K}); \tilde{x}_{ij}^k = 0, (i, j)^k \in \bar{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k, \tilde{x}_i^k = 0, i \in \bar{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k}$. Поскольку исследуемая система (3) есть разреженная система специального вида (4), то соотношения (7) имеют вид

$$\Lambda_{\tau\rho}^{kp} = \lambda_{\tau\rho}^{kp} + \sum_{(i,j) \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\tau, \rho), \quad \Lambda_{\gamma}^{kp} = \lambda_{\gamma}^{kp} + \sum_{(i,j) \in \tilde{U}_L^k} \lambda_{ij}^{kp} \delta_{ij}^k(\gamma). \quad (8)$$

Таким образом, система (2), (6) включает следующие независимые системы линейных алгебраических уравнений:

- систему (2) блочно-диагонального вида, состоящую из $|\bar{K}|$ независимых недоопределенных разреженных систем с различными типами разреженности;
- систему общего вида (6).

Для определения ранга матрицы системы (6) найдем в ней невырожденную подматрицу D максимального порядка $m \leq q$, $\det D \neq 0$, которая состоит из чисел (8):

$$D = \left(\begin{array}{c} \Lambda_{\tau\rho}^{kp}, (\tau, \rho)^k \in \tilde{U}_B^k; \Lambda_{\gamma}^{kp}, \gamma \in \tilde{I}_B^{*k} \\ p = \overline{1, m} \end{array} \right), \quad \tilde{U}_B^k \subseteq \bar{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k, \quad \tilde{I}_B^{*k} \subseteq \bar{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k}, \quad k \in \bar{K}. \quad (9)$$

Если в системе (6) будет найдена подматрица D максимального порядка m с диагональным преобладанием, то $\det D \neq 0$. Когда известна некоторая опора¹ мультиграфа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ для системы (2), (6), то матрица D вида (9) является невырожденной. Итак, если n – сумма рангов матриц независимых подсистем системы (2) (теоремы 1, 2) и m – ранг матрицы системы (6), то ранг матрицы системы (2), (6) равен $n + m$.

Таким образом, на основе применения теории декомпозиции построены эффективные алгоритмы вычисления ранга матрицы системы (2), (6). Сформулируем условия единственности решения системы (2), (6): *если для заданного множества M обозреваемых узлов обобщенного мультиграфа G ранг матрицы системы (2), (6) равен числу ее неизвестных, то система (2), (6) имеет единственное решение.*

Замечание 1. Вычисление каждого элемента $\Lambda_{\tau\rho}^{kp}, (\tau, \rho)^k \in \tilde{U}_B^k$, или $\Lambda_{\gamma}^{kp}, \gamma \in \tilde{I}_B^{*k}$, (8) матрицы D осуществляется на основе комбинаторных свойств опоры $R_L = \{\tilde{U}_L^k, \tilde{I}_L^{*k} : k \in \bar{K}\}$, $\tilde{U}_L^k \subset \bar{U}^k$, $\tilde{I}_L^{*k} \subset \bar{I}_k^*$, (теорема 3) по аналогии с вычислением соответствующего вектора $\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in \bar{U}^k \setminus \tilde{U}_L^k$, или $\delta^k(\gamma), \gamma \in \bar{I}_k^* \setminus \tilde{I}_L^{*k}$, базиса пространства решений однородной системы, порожденной системой (2), $k \in \bar{K}$. Для построения матрицы D могут быть использованы вычисления в параллельной среде.

Замечание 2. Рассмотренные в работе конструктивные методы декомпозиции, направленные на вычисление рангов матриц независимых подсистем, могут быть применены для создания эффективных алгоритмов вычисления потенциалов, подходящего направления изменения мультипотока, приращение целевой функции при создании опорных методов решения задач линейного и дробно-линейного потокового программирования. Кроме этого, при создании методов решения задач указанных классов используются современные вычислительные технологии¹ [6–7], основанные на теории декомпозиции и комбинаторных свойствах базисов (опор).

В целях установления того факта, что совокупность узлов, включенных в множество M наблюдаемых узлов, является допустимой (может быть неоптимальной) для размещения сенсоров, необходимо:

- вычислить сумму n рангов матриц независимых подсистем системы (2) (теоремы 1, 2);
- на основе комбинаторных свойств опоры (теорема 3) вычислить согласно (8) элементы матрицы D и определить m – ранг матрицы D системы (6);
- если ранг матрицы системы (2), (6), равный $n + m$, не совпадает с числом неизвестных системы (2), (6), то система (2), (6) является *недоопределенной* или *переопределенной* системой линейных

¹ Pilipchuk L. A. Sparse linear systems and their applications. Minsk : BSU, 2013.

алгебраических уравнений. Следовательно, совокупность узлов, включенных в множество M , является неприемлемой для оценки потоков на ненаблюдаемой части обобщенного графа. Если ранг матрицы системы (2), (6) равен числу ее неизвестных, то система (2), (6) имеет единственное решение, которое позволяет оценить дуговые потоки и переменные интенсивности узлов на ненаблюдаемой части обобщенного мультиграфа G .

В настоящей работе предложены конструктивная теория и эффективные методы определения рангов матриц независимых подсистем. Условия единственности решения специальной разреженной системы линейных алгебраических уравнений следуют из равенства суммы рангов матриц независимых подсистем и числа неизвестных в независимых подсистемах. Определение единственного решения системы (2), (6) основано также на применении конструктивных методов декомпозиции с учетом структуры системы уравнений, типов ее разреженности, что позволяет использовать современные технологии построения численных решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений и результаты разреженного матричного анализа¹. Следует отметить, что данный подход может использоваться для вычислений в параллельной среде.

Библиографические ссылки

1. Bianco L., Confessore G., Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem // *Ann. Oper. Res.* Vol. 144, issue 1. 2006. P. 201–234.
2. Пилипчук Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Минск, 2012.
3. Pilipchuk L. A., Vishnevetskaya T. S., Pesheva Y. H. Sensor location problem for a multigraph // *Math. Balk. New Ser.* Vol. 27. Fasc. 1–2. 2013. P. 65–75.
4. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Ramanouski Y. V. Optimal location of sensors on a multigraph with zero split ratios of some arc flows // *AIP Conf. Proc.* 2014. Vol. 1631. P. 350–353.
5. Пилипчук А. С. Расположение минимального числа обозреваемых узлов в обобщенном графе для оценки трафика его ненаблюдаемой части // *Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика.* 2015. № 1. С. 108–111.
6. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica // *AIP Conf. Proc.* 2015. Vol. 1690, issue 1.
7. Pilipchuk L. A., German O. V., Pilipchuk A. S. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph // *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. № 2. P. 91–96.

References

1. Bianco L., Confessore G., Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem. *Ann. Oper. Res.* Vol. 144, issue 1. 2006. P. 201–234. DOI: 10.1007/s10479-006-0016-9.
2. Pilipchuk L. A. [Sparse underdetermined systems of linear algebraic equations]. Minsk, 2012 (in Russ.).
3. Pilipchuk L. A., Vishnevetskaya T. S., Pesheva Y. H. Sensor location problem for a multigraph. *Math. Balk. New Ser.* Vol. 27. Fasc. 1–2. 2013. P. 65–75.
4. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Ramanouski Y. V. Optimal location of sensors on a multigraph with zero split ratios of some arc flows. *AIP Conf. Proc.* 2014. Vol. 1631. P. 350–353. DOI: 10.1063/1.4902497.
5. Pilipchuk A. S. The location of the minimum number of monitored nodes in the generalized graph for estimating traffic its unobservable part. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. No. 1. P. 108–111 (in Russ.).
6. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica. *AIP Conf. Proc.* 2015. Vol. 1690, issue 1. DOI: 10.1063/1.4936744.
7. Pilipchuk L. A., German O. V., Pilipchuk A. S. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. No. 2. P. 91–96.

Статья поступила в редколлегию 15.05.2015.
Received by editorial board 15.05.2015.

¹ Pilipchuk L. A. Sparse linear systems and their applications. Minsk : BSU, 2013.

МЕХАНИКА

ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

MECHANICS

OF DEFORMABLE SOLIDS

УДК 539.3

РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО ИЗГИБА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ВТОРОГО РОДА

В. В. КОРОЛЕВИЧ¹⁾, Д. Г. МЕДВЕДЕВ²⁾

¹⁾Филиал Национального педагогического университета им. М. Драгоманова,
ул. Язельская, 266/10, 16000, г. Прага, Чехия

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

С помощью линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода в общем виде решается задача осесимметричного изгиба полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины, который вращается вокруг нормальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0 в неоднородном тепловом поле. Под действием центробежных сил и теплового поля диск будет испытывать растяжение в своей плоскости. Воздействие осесимметричного потока раскаленного газа или пара, направленного нормально к срединной плоскости диска, а также краевых моментов и поперечных сил вызовет осесимметричный изгиб. Таким образом, диск одновременно будет испытывать растяжение и изгиб. Предполагается, что температурное поле в диске известно и оно осесимметричное. Упругие постоянные – модули Юнга и модуль сдвига – линейно зависят от температуры, а коэффициенты Пуассона считаются постоянными величинами. Расчет изгиба тонкого анизотропного диска ведется по классической

Образец цитирования:

Королевич В. В., Медведев Д. Г. Расчет осесимметричного термосилового изгиба вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 44–51.

For citation:

Karalevich U. V., Medvedev D. G. Calculation of the axisymmetric thermopower bending problem of rotating in the thermal field of the polar-orthotropic disc with variable thickness by Volterra integral equation of the second kind. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 44–51 (in Russ.).

Авторы:

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:

Uladzimir Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

теории изгиба тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа. Задача осесимметричного изгиба полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины приводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами для угла поворота нормального элемента к срединной плоскости диска. Полученное дифференциальное уравнение сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Общее решение интегрального уравнения записывается с помощью резольвенты. Указаны условия, при которых интегральное уравнение имеет единственное непрерывное решение. Приводятся расчетные формулы для изгибающих радиального и тангенциального моментов, поперечного радиального усилия и функции прогиба через разрешающую функцию. Приведены формулы для компонент радиального, тангенциального и касательных напряжений, учитывающих одновременное растяжение и изгиб анизотропного кольцевого диска переменной толщины под действием приложенных нагрузок.

Ключевые слова: полярно-ортотропный диск; неоднородное тепловое поле; температура; радиальное, тангенциальное и поперечное усилия; изгибающие радиальный и тангенциальный моменты; функция прогиба; угол поворота нормали; дифференциальные и интегральные уравнения; резольвента; радиальная, тангенциальная и касательные компоненты напряжений.

CALCULATION OF THE AXISYMMETRIC THERMOPOWER BENDING PROBLEM OF ROTATING IN THE THERMAL FIELD OF THE POLAR-ORTHOTROPIC DISC WITH VARIABLE THICKNESS BY VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND

U. V. KARALEVICH^a, D. G. MEDVEDEV^b

^aBranch office National Pedagogical University M. Dragomanov,
Jaziel'skaja Street, 266/10, 16000, Praha, Czech Republic

^bBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

Corresponding author: U. V. Karalevich (v.korolevich@mail.ru)

With the help of linear Volterra integral equation of the second kind the problem of the axisymmetric bending polar orthotropic annular disk of variable thickness, rotating around the normal axis with constant angular velocity ω_0 in an inhomogeneous thermal field is solved in the general form. Under the influence of centrifugal forces and thermal field the disk will experience stretch on its plane. The effect of the axisymmetric flow of incandescent gas or steam, directed normal by to the median plane of the disk, as well as the boundary moments and shear forces cause axisymmetric bending. Thus, the disk will experience the stretch and flexural bending at the same time. It is assumed that the temperature field in the disk is known and it is axisymmetric. The elastic constants – Young's modulus and shear modulus – are linearly temperature dependent, and Poisson's coefficient are considered to be constant. Calculation of bending of the anisotropic thin disk is carried out according to the classical theory of bending of thin plates, based on Kirchhoff hypothesis. The problem of the axisymmetric bending polar-orthotropic annular disc of variable thickness is reduced to the integration of the ordinary differential equation of second order with variable coefficients for a rotation angle of a normal cell to the median plane of the disk. The resulting differential equation is reduced to a linear integral Volterra equation of the second kind. The general solution of the integral equation is written down the resolvent is used for this purpose. The conditions under which the integral equation has a unique continuous solution are given. Calculation formulas are given for the radial and tangential bending moments, transverse radial forces and radial deflection function through resolution function. Formula for the components of the radial, tangential and shear stresses, taking into account the simultaneous stretching and bending of anisotropic annular disc of variable thickness under the influence of applied loads is written.

Key words: polar-orthotropic disc; inhomogeneous thermal field; temperature; radial, tangential and shear forces; the radial and tangential bending moments; deflection function; the rotation angle of the normal; differential and integral equations; resolvent; radial, tangential and shear stress components.

С помощью линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода решается в общем случае задача осесимметричного изгиба полярно-ортотропного диска, вращающегося вокруг нормальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0 в неоднородном тепловом поле.

Постановка задачи

Пусть раскаленный поток газа или пара направлен перпендикулярно к срединной плоскости вращающегося анизотропного диска. В результате действия центробежных сил и теплового поля диск будет испытывать растягивающие усилия в его плоскости. Воздействие осесимметричного потока газа

интенсивностью $q_z(r)$, направленного нормально к срединной плоскости диска, а также краевых моментов и поперечных сил вызовет осесимметричный изгиб. Таким образом, полярно-ортотропный кольцевой диск переменной толщины будет одновременно испытывать растяжение и изгиб под действием приложенных нагрузок [1].

Предполагается, что известно распределение температуры T в анизотропном диске и оно осесимметричное, т. е. зависит только от радиуса r . Пусть на внутреннем контуре (при $r = r_0$) диска поддерживается постоянная температура T_0^* , а на внешнем контуре (при $r = R$) – T_1^* . Упругие постоянные – модули Юнга E_r, E_θ и модуль сдвига $G_{r\theta}$ – линейно зависят от температуры [2]:

$$E_r(T) = E_r^{(0)} [1 - \gamma T(r)];$$

$$E_\theta(T) = E_\theta^{(0)} [1 - \gamma T(r)];$$

$$G_{r\theta}(T) = G_{r\theta}^{(0)} [1 - \gamma T(r)],$$

где $E_r^{(0)}, E_\theta^{(0)}, G_{r\theta}^{(0)}$ – значения упругих постоянных при начальной температуре T_0 ; γ – параметр. Коэффициенты Пуассона $\nu_{r\theta}, \nu_{\theta r}$ будем считать постоянными величинами.

Диск изготовлен из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, и в каждой точке тела имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Внутренний радиус кольцевого диска обозначим r_0 , а внешний – R ; p_0, p_1 – давление на внутреннем и внешнем контурах диска соответственно. Толщина диска $h(r)$ меняется вдоль радиуса r по заданному закону и на внутреннем контуре равна h_0 , а на внешнем – h_1 .

Решение задачи

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z , поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска и направив ось z вертикально вниз. Ось вращения диска совпадает с осью анизотропии.

Расчет изгиба анизотропного кольцевого диска будем вести в рамках классической теории изгиба тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа.

Обозначим перемещения точек срединной поверхности диска в направлении оси z через $w(r)$ и далее будем называть ее функцией прогиба.

Выделим из диска с двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и с двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент диска толщиной dz . Запишем уравнения равновесия этого элемента в усилиях и моментах для случая осесимметричной деформации [3]:

$$\begin{cases} \frac{dN_r(r)}{dr} + \frac{[N_r(r) - N_\theta(r)]}{r} + h(r)\rho\omega_0^2 r = 0, \\ \frac{d}{dr}(rQ_r(r)) - \frac{d}{dr}(rN_r(r)\vartheta_r(r)) + q_z(r)r = 0, \\ \frac{d}{dr}(rM_r(r)) - M_\theta(r) - rQ_r(r) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $N_r(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(r) dz$ – радиальное усилие; $N_\theta(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta(r) dz$ – тангенциальное усилие; $Q_r(r) =$

$= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz}(r) dz$ – поперечное радиальное усилие; $M_r(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(r) z dz$ – изгибающий радиальный момент;

$M_\theta(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta(r) z dz$ – изгибающий тангенциальный момент; $\vartheta_r(r) = -\frac{dw(r)}{dr}$ – малый угол поворота

нормали к срединной плоскости вокруг оси θ ; ρ – плотность композитного материала диска.

Все внутренние силовые факторы – усилия N_r , N_θ , Q_r и моменты M_r , M_θ – действуют в срединной поверхности диска.

Зададим граничные условия. Пусть диск с натягом посажен на вал так, что отсутствуют перемещения его по вертикали и повороты сечения в радиальном направлении. На внешнем контуре диска приложено постоянное радиальное усилие, краевые – изгибающий момент M_0 и поперечная сила Q_0 . Таким образом, граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} N_r(r_0) &= -h_0 p_0, \quad w(r_0) = 0, \quad \vartheta_r(r_0) = 0; \\ N_r(R) &= h_1 p_1, \quad M_r(R) = M_0, \quad Q_r(R) = Q_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим, что граничные условия можно задавать и в других видах (что не влияет на ход решения задачи) и они используются только на конечном этапе для определения неизвестных постоянных.

Выразим из последнего уравнения системы (1) поперечное усилие $Q_r(r)$ через изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$:

$$Q_r(r) = \frac{dM_r(r)}{dr} + \frac{[M_r(r) - M_\theta(r)]}{r}. \quad (3)$$

Проинтегрируем второе уравнение системы (1):

$$rQ_r(r) - rN_r(r)\vartheta_r(r) = C_1 - \int_{r_0}^r sq_z(s)ds, \quad (4)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Подставляя в уравнение (4) выражение для поперечного усилия $Q_r(r)$ из (3), получим уравнение для изгибающих моментов:

$$\frac{dM_r(r)}{dr} + \frac{[M_r(r) - M_\theta(r)]}{r} - N_r(r)\vartheta_r(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{1}{r} \int_{r_0}^r sq_z(s)ds. \quad (5)$$

Радиальное $N_r(r)$ и тангенциальное $N_\theta(r)$ усилия и радиальное перемещение $u(r)$ во вращающемся в неоднородном тепловом поле полярно-ортотропном кольцевом диске переменной толщины приводятся в работе [4] и рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} N_r(r) &= \frac{1}{r} \left\{ \int_{r_0}^r (r-s)\varphi_T(s)ds + N_\theta(r_0) \cdot (r-r_0) + N_r(r_0)r_0 - h_0\rho\omega_0^2 r_0^2 (r-r_0) \right\}, \\ N_\theta(r) &= \left[\int_{r_0}^r \varphi_T(s)ds + N_\theta(r_0) + h(r)\rho\omega_0^2 r^2 - h_0\rho\omega_0^2 r_0^2 \right], \\ u(r) &= \frac{1}{E_\theta(T)h(r)} \left\{ \int_{r_0}^r [(1-\nu_{\theta r})r + \nu_{\theta r}s]\varphi_T(s)ds + (1-\nu_{\theta r})N_\theta(r_0)r + \nu_{\theta r}r_0[N_\theta(r_0) - N_r(r_0)] + \right. \\ &\quad \left. + h(r)\rho\omega_0^2 r^3 - [(1-\nu_{\theta r})r + \nu_{\theta r}r_0]h_0\rho\omega_0^2 r_0^2 \right\} + r\alpha_\theta(T)(T(r) - T_0). \end{aligned}$$

В этих формулах неизвестные постоянные $N_r(r_0)$, $N_\theta(r_0)$ определяются из граничных условий (2); α_θ – тангенциальный коэффициент температурного расширения.

Разрешающая функция $\varphi_T(r)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерры второго рода:

$$\varphi_T(r) = \lambda \int_{r_0}^r K^{(T)}(r, s)\varphi_T(s)ds + f_T(r),$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $f_T(r) = \frac{\partial K^{(T)}(r, s)}{\partial s} r_0 h(r_0) \sigma_r(r_0) - K^{(T)}(r, r_0) h(r_0) \sigma_\theta(r_0) + K^{(T)}(r, r_0) \times$
 $\times h(r_0) \rho \omega_0^2 r_0^2 - \left[(3 + \nu_{\theta r}) + r \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} \right] h(r) \rho \omega_0^2 r - E_\theta(T) h(r) \left[\frac{d\Theta_\theta}{dr} + \frac{(\Theta_\theta(r) - \Theta_r(r))}{r} \right] -$ свободный
 член интегрального уравнения; $K^{(T)}(r, s) = \left\{ \left[\frac{1}{r} - \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} \right] + \left[\frac{\nu_{\theta r}}{r} \left(\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} \right) - \right.$
 $\left. - \frac{k^2(T)}{r^2} \right] (r - s) \right\} -$ ядро интегрального уравнения; $\gamma^* = \gamma E_\theta^{(0)}$.

Выразим изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$ и поперечное усилие $Q_r(r)$ через функцию прогиба $w(r)$ [3]:

$$\begin{aligned} M_r(r) &= -D_{11}^{(T)}(r) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_{\theta r}}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad M_\theta(r) = -D_{11}^{(T)}(r) \left(\nu_{\theta r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{k_0^2}{r} \frac{dw}{dr} \right); \\ Q_r(r) &= -D_{11}^{(T)}(r) \left[\frac{d^3 w}{dr^3} + \left(\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(\nu_{\theta r} \frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $D_{11}^{(T)}(r) = \frac{E_\theta(T) h^3(r)}{12(k_0^2 - \nu_{\theta r}^2)}$ – цилиндрическая жесткость изгиба полярно-ортотропной пластины в тепловом поле; $k_0^2 = \frac{E_\theta^{(0)}}{E_r^{(0)}}$.

Подставляя выражения (6) в уравнение (5), получим *основное дифференциальное уравнение осесимметричного изгиба вращающегося в неоднородном тепловом поле полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины*:

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \left(\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(\frac{\nu_{\theta r}}{r} \frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r^2} - \frac{N_r(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} \right) \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r D_{11}^{(T)}(r)} \int_{r_0}^r s q_z(s) ds - \frac{C_1}{r D_{11}^{(T)}(r)}. \quad (7)$$

Порядок дифференциального уравнения (7) можно понизить на единицу, если вместо функции прогиба $w(r)$ рассматривать угол поворота нормали $\vartheta_r(r) = -\frac{dw(r)}{dr}$. Получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + \left(\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{d\vartheta_r}{dr} + \left(\frac{\nu_{\theta r}}{r} \frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r^2} - \frac{N_r(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} \right) \vartheta_r(r) = \frac{C_1}{r D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{1}{r D_{11}^{(T)}(r)} \int_{r_0}^r s q_z(s) ds. \quad (8)$$

Приведем дифференциальное уравнение (8) к соответствующему линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода [5].

Полагаем, что

$$\frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} = \chi_T(r). \quad (9)$$

Последовательно интегрируя выражение (9), получим

$$\frac{d\vartheta_r}{dr} = \int_{r_0}^r \chi_T(s) ds + \vartheta_r'(r_0); \quad \vartheta_r(r) = \int_{r_0}^r (r-s) \chi_T(s) ds + \vartheta_r'(r_0) \cdot (r-r_0) + \vartheta_r(r_0). \quad (10)$$

Здесь использовалась формула Дирихле

$$\underbrace{\int_{r_0}^r dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \dots \int_{r_0}^{r_{n-1}} \varphi_T(r_n) dr_n}_{n\text{-раз}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{r_0}^r (r-s)^{n-1} \varphi_T(s) ds.$$

Подставляя в уравнение (8) вместо угла поворота нормали $\vartheta_r(r)$ и его производных правые части выражений (9), (10), получим искомое линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$\chi_T(r) = \lambda \int_{r_0}^r K_w^{(T)}(r, s) \chi_T(s) ds + g_T(r), \quad (11)$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $K_w^{(T)}(r, s) = \left\{ \left[\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r} \right] + \left[\frac{v_{\theta r}}{r} \frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r^2} - \frac{N_r(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} \right] (r-s) \right\}$ – ядро интегрального уравнения; $g_T(r) = \frac{\partial K_w^{(T)}(r, s)}{\partial s} \vartheta_r(r_0) - K_w^{(T)}(r, r_0) \vartheta_r'(r_0) + \frac{C_1}{r D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{1}{r D_{11}^{(T)}(r)} \int_{r_0}^r s q_z(s) ds$ – свободный член интегрального уравнения.

Значения угла поворота нормали $\vartheta_r(r_0)$ и его производной $\vartheta_r'(r_0)$ на внутреннем контуре диска определяются из граничных условий.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода (11) записывается с помощью резольвенты $R_w^{(T)}(r, s; \lambda)$ в виде [5]

$$\chi_T(r) = \lambda \int_{r_0}^r R_w^{(T)}(r, s; \lambda) g_T(s) ds + g_T(r), \quad (12)$$

где функция $R_w^{(T)}(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом:

$$R_w^{(T)}(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{w, m+1}^{(T)}(r, s),$$

который для непрерывных ядер $K_{w, m}^{(T)}(r, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или итерированные, ядра $K_{w, m}^{(T)}(r, s)$ определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} K_{w, 1}^{(T)}(r, s) &= K_w^{(T)}(r, s), \\ K_{w, 2}^{(T)}(r, s) &= \int_s^r K_w^{(T)}(r, t) K_{w, 1}^{(T)}(t, s) dt, \\ &\dots\dots\dots \\ K_{w, m}^{(T)}(r, s) &= \int_s^r K_w^{(T)}(r, t) K_{w, m-1}^{(T)}(t, s) dt. \end{aligned}$$

Если свободный член $g_T(r)$ непрерывен в $[r_0, R]$, а ядро $K_w^{(T)}(r, s)$ непрерывно при $r_0 \leq r \leq R$, $r_0 \leq s \leq r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода (11) имеет при любом параметре λ ($\lambda \neq 0$) единственное непрерывное решение, определяемое формулой (12).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры второго рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [6].

Выразим изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$, поперечное усилие $Q_r(r)$ и прогиб $w(r)$ через разрешающую функцию $\chi_T(r)$:

$$\begin{aligned}
 M_r(r) &= D_{11}^{(T)}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{M_r}(r, s) \chi_T(s) ds + K_{M_r}(r, r_0) \vartheta'_r(r_0) - \frac{\partial K_{M_r}(r, s)}{\partial s} \vartheta_r(r_0) \right], \\
 M_\theta(r) &= D_{11}^{(T)}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{M_\theta}(r, s) \chi_T(s) ds + K_{M_\theta}(r, r_0) \vartheta'_r(r_0) - \frac{\partial K_{M_\theta}(r, s)}{\partial s} \vartheta_r(r_0) \right], \\
 Q_r(r) &= D_{11}^{(T)}(r) \left[\chi_T(r) + \int_{r_0}^r K_{Q_r}(r, s) \chi_T(s) ds + K_{Q_r}(r, r_0) \vartheta'_r(r_0) - \frac{\partial K_{Q_r}(r, s)}{\partial s} \vartheta_r(r_0) \right], \\
 w(r) &= - \left[\frac{1}{2} \int_{r_0}^r (r-s)^2 \chi_T(s) ds + \frac{1}{2} (r-r_0)^2 \vartheta'_r(r_0) + (r-r_0) \vartheta_r(r_0) \right] + w(r_0),
 \end{aligned}$$

где передаточные (весовые) функции имеют вид:

$$\begin{aligned}
 K_{M_r}(r, s) &= \left[(1 + \nu_{\theta r}) - \frac{\nu_{\theta r}}{r} s \right], \quad K_{M_\theta}(r, s) = \left[(k_0^2 + \nu_{\theta r}) - \frac{k_0^2}{r} s \right], \\
 K_{Q_r}(r, s) &= \left[\left(\frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} + \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{\nu_{\theta r}}{r} \frac{\dot{D}_{11}^{(T)}(r)}{D_{11}^{(T)}(r)} - \frac{k_0^2}{r^2} \right) (r-s) \right].
 \end{aligned}$$

Радиальная $\sigma_r(r, z)$, тангенциальная $\sigma_\theta(r, z)$ и касательные $\tau_{rz}(r)$ компоненты напряжений, возникающие в профилированном полярно-ортотропном диске, вращающемся в неоднородном тепловом поле и нагруженном осесимметричной распределенной поперечной нагрузкой $q_z(r)$, а также краевыми силами и моментами, рассчитываются по формулам [7]:

$$\sigma_r(r, z) = \frac{N_r(r)}{h(r)} + z \frac{12M_r(r)}{h^3(r)}, \quad \sigma_\theta(r, z) = \frac{N_\theta(r)}{h(r)} + z \frac{12M_\theta(r)}{h^3(r)}, \quad \tau_{rz}(r) = \frac{Q_r(r)}{h(r)}.$$

Максимум нормальных напряжений достигается на внешних сторонах диска при $z = \pm \frac{h}{2}$.

Библиографические ссылки

1. Воробей В. В., Морозов Е. В., Татарников О. В. Расчет термонапряженных конструкций из композиционных материалов. М., 1992.
2. Дургарьян С. М. Температурный расчет ортотропной слоистой пластинки при упругих постоянных и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры // Изв. Акад. наук Арм. ССР. Физ.-мат. науки. 1960. Т. XIII, № 2. С. 73–88.
3. Королевич В. В., Медведев Д. Г. Интегральные уравнения Вольтерры второго рода в задачах изгиба вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 108–116.
4. Королевич В. В., Медведев Д. Г. Решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 47–52.
5. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.
6. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев, 1986.
7. Бояришинов С. В. Основы строительной механики машин. М., 1973.

References

1. Vorobei V. V., Morozov E. V., Tatarnikov O. V. [Calculation of termostressed structure from composite materials]. Moscow, 1992 (in Russ.).
2. Durgar'yan S. M. [Temperature calculation of the orthotropic layered plate with depending on the temperature the elastic constants and thermal expansion coefficient]. *Izv. Akad. nauk Arm. SSR. Fiz.-mat. nauki*. 1960. Vol. XIII, No. 2. P. 73–88 (in Russ.).

3. Karalevich U. V., Medvedev D. G. Integral equations by Volterra of the second kind for the sums of curving rotating polar-orthotropic discs of variable thickness. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2012. No. 3. P. 108–116 (in Russ.)
4. Karalevich U. V., Medvedev D. G. Solution of the axisymmetric plane thermoelasticity problem for a polar-orthotropic disc of variable thickness in the rotating thermal field by Volterra integral equation of the second kind. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 47–52 (in Russ.).
5. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow, 2007 (in Russ.).
6. Verlan' A. F., Sizikov V. S. [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev, 1986 (in Russ.).
7. Boyarshinov S. V. [Fundamentals of structural mechanics of machines]. Moscow, 1973 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 07.12.2016.
Received by editorial board 07.12.2016.

УДК 539.3+(616.314-089.23)

ВЫБОР ТОЛЩИНЫ ХРЯЩЕВОГО ТРАНСПЛАНТАТА ДЛЯ ХИРУРГИЧЕСКОГО ЛЕЧЕНИЯ РЕТРАКЦИОННОГО КАРМАНА ТИМПАНАЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ НА ОСНОВАНИИ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СРЕДНЕГО УХА

Г. И. МИХАСЕВ¹⁾, С. М. БОСЯКОВ¹⁾, К. С. ЮРКЕВИЧ¹⁾,
А. А. ДУТИНА¹⁾, Л. Г. ПЕТРОВА²⁾, М. М. МАЙСЮК³⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусская медицинская академия последипломного образования,
ул. П. Бровки, 3, корп. 3, 220013, г. Минск, Беларусь

³⁾Республиканский научно-практический центр отоларингологии,
ул. Сухая, 8, 220004, г. Минск, Беларусь

Сформулированы рекомендации для проведения хирургических операций по устранению ретракционного кармана тимпанальной мембраны и улучшению слуха. Выполнены конечно-элементные расчеты собственных частот колебательных систем среднего уха в норме, а также с патологией тимпанальной мембраны и с хрящевым трансплантатом. Конечно-элементная модель среднего уха состоит из тимпанальной мембраны, молоточка, наковальни и стремени. Патологические изменения упругих свойств тимпанальной мембраны описываются посредством изменения модуля упругости. Определены геометрические размеры хрящевого трансплантата тимпанальной мембраны для создания акустических условий, соответствующих функциям здоровой барабанной перепонки. Полученные результаты могут быть использованы для оценки толщины хрящевого трансплантата, необходимого для восстановления функций среднего уха посредством реконструкции тимпанальной мембраны с ретракционным карманом.

Ключевые слова: среднее ухо; тимпанальная мембрана; ретракционный карман; хрящевой трансплантат; конечно-элементный анализ.

Образец цитирования:

Михасев Г. И., Босяков С. М., Юркевич К. С., Дутина А. А., Петрова Л. Г., Майсюк М. М. Выбор толщины хрящевого трансплантата для хирургического лечения ретракционного кармана тимпанальной мембраны на основании модального анализа колебательной системы среднего уха // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 52–58.

For citation:

Mikhasev G. I., Bosiakov S. M., Yurkevich K. S., Dutina A. A., Petrova L. G., Maisyuk M. M. Graft thickness assessment for surgery of retraction pocket of the middle ear based on finite-element analysis of eigenfrequencies of the eardrum oscillating system. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 52–58 (in Russ.).

Авторы:

Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.

Сергей Михайлович Босяков – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.

Кирилл Сергеевич Юркевич – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

Алина Александровна Дутина – аспирантка кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Людмила Григорьевна Петрова – доктор медицинских наук, профессор; заведующий кафедрой ЛОР-болезней.

Марина Михайловна Майсюк – заведующий оториноларингологическим отделением для детей.

Authors:

Gennadi Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

mikhasev@bsu.by

Sergei Bosiakov, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty mechanics and mathematics.

bosiakov@bsu.by

Kirill Yurkevich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

kirill.bsu@gmail.com

Alina Dutina, postgraduate student at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.

alinammf@gmail.com

Lyudmila Petrova, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of laryngology diseases.

bsm21@mail.ru

Marina Maisyuk, head of the department of otorhinolaryngology for children.

merylmmm@mail.ru

GRAFT THICKNESS ASSESSMENT FOR SURGERY OF RETRACTION POCKET OF THE MIDDLE EAR BASED ON FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF EIGENFREQUENCIES OF THE EARDRUM OSCILLATING SYSTEM

G. I. MIKHASEV^a, S. M. BOSIAKOV^a, K. S. YURKEVICH^a,
A. A. DUTINA^a, L. G. PETROVA^b, M. M. MAISYUK^c

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

^bBelarusian Academy of Postgraduate Education, P. Broŭki Street, 3, building 3, 220013, Minsk, Belarus

^cRepublican Center for Research and Practice in Otolaryngology, Suchaja Street, 8, 220004, Minsk, Belarus

Corresponding author: S. M. Bosiakov (bosiakov@bsu.by)

The aim of this study is to formulate recommendations for surgery of retraction pocket of the tympanic membrane and improving of hearing. Finite-element analysis of the eigenfrequencies of the oscillatory systems for normal middle ear, middle ear with pathology of tympanic membrane and middle ear with cartilage graft are carried out. The finite-element model of the middle ear consists of a tympanic membrane, a malleus, an anvil and a stapes. Pathological changes of the tympanic membrane elastic properties are described by a change of the modulus of elasticity. The geometric dimensions of the cartilage graft of the tympanic membrane are assessed to generate the acoustic conditions corresponding to the hearing functions of the normal tympanic membrane. The obtained results can be employed to estimate the thickness of the cartilage graft for restoring of the middle ear functions by means of reconstruction of the tympanic membrane with a retraction pocket.

Key words: middle ear; tympanic membrane; retraction pocket; cartilage graft; finite-element analysis.

Введение

Ретракционный карман тимпанальной мембраны (ТМ) является клиническим проявлением среднего отита [1–3]. К его формированию может привести дисбаланс давления в полостях среднего уха, а также изменение структуры самой ТМ (истончение и изменение ее физических свойств) [4]. Особенность этого заболевания – его скрытый характер из-за первоначально неясных симптомов и динамики патологии. Ретракционный карман может прогрессировать до более тяжелых форм и осложнений (инфекции, полипы, перфорация), а в некоторых случаях – переходить в холестеатому [5; 6] и приводить к тугоухости [7].

Одной из профилактических мер развития холестеатомы среднего уха является хирургическое лечение ретракционного кармана на раннем этапе его формирования. В этом случае устанавливается хрящевой трансплантат в области задневерхнего квадранта (post-superior quadrant, PSQ) ТМ для увеличения ее жесткости и обеспечения слуховой проводимости, которая соответствует здоровому среднему уху [8; 9]. Несмотря на то что хрящевая ткань широко используется для обеспечения механической устойчивости тимпанальной мембраны [3; 10], количественные характеристики влияния хрящевого трансплантата на слуховую проводимость среднего уха не исследовались. Только несколько конечно-элементных исследований рассматривают акустические свойства ТМ с хрящевыми трансплантатами. Так, в работах [11–13] использована конечно-элементная модель для исследования техники наложения трансплантата при мирингопластике. В частности, в работе [11] на основании биомеханического анализа установлено, что оптимальная толщина хрящевого трансплантата составляет от 0,1 до 0,2 мм для средних и больших перфораций ТМ. Однако отсутствуют объективные рекомендации по выбору толщины хряща, необходимого для восстановления функции среднего уха посредством реконструкции ТМ, при устранении ретракционных карманов в области PSQ.

Цель настоящего исследования – сформулировать рекомендации по определению геометрических размеров хрящевого трансплантата при различных патологиях ТМ для создания акустических условий, соответствующих функциям здоровой барабанной перепонки, а также рекомендации для операций по устранению ретракционного кармана ТМ и улучшению слуха.

Конечно-элементное моделирование

Конечно-элементная модель среднего уха получена на основании томографических данных. Она состоит из молоточка, наковальни, стремечка и тимпанальной мембраны. Твердотельная и конечно-элементная модели среднего уха подробно описаны в работе [14]. В нашем случае согласно

работам [15–18] контур ТМ жестко закреплен, что соответствует окостенению области контакта ТМ и тимпанального кольца. Модуль упругости молоточка, наковальни и стремени составляет 13,7 ГПа, коэффициент Пуассона равен 0,3 [19–21]. Модули упругости всех частей ТМ – pars tensa (PT) и pars flaccida (PF) – составляют 33,4 и 11,1 МПа соответственно (за исключением PSQ); коэффициент Пуассона для этих двух областей – 0,4 [21; 22]. Модуль упругости PSQ равен 33,4 МПа для уха в норме. Для среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств РТ модуль упругости PSQ принимался равным 22; 11; 9; 3; 0,1 МПа и 34 кПа. Отрицательное давление в барабанной полости, которое приводит к втягиванию ТМ и образованию ретракционного кармана, моделировалось приложением статической равномерно распределенной нормальной нагрузки на внешней стороне барабанной перепонки. В нашем случае задавалось давление 20 Па.

Хрящевой трансплантат накладывался на PSQ с внутренней стороны ТМ среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств. При конечно-элементном расчете толщина трансплантата принимала дискретные значения, равные 250; 500; 750; 1000; 1500 мкм. Модуль упругости хрящевой ткани составляет 3,4 МПа, коэффициент Пуассона – 0,3 [23]. При расчете частот свободных колебаний среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств и хрящевым трансплантатом контур ТМ и часть контура трансплантата, расположенная вдоль контура ТМ, жестко закреплялись.

Среднее ухо в норме и среднее ухо с патологией PSQ

Для первых тридцати главных форм на рис. 1 представлены собственные частоты свободных колебаний (ω) среднего уха в норме и с патологическими изменениями упругих свойств PSQ при образовании ретракционного кармана.

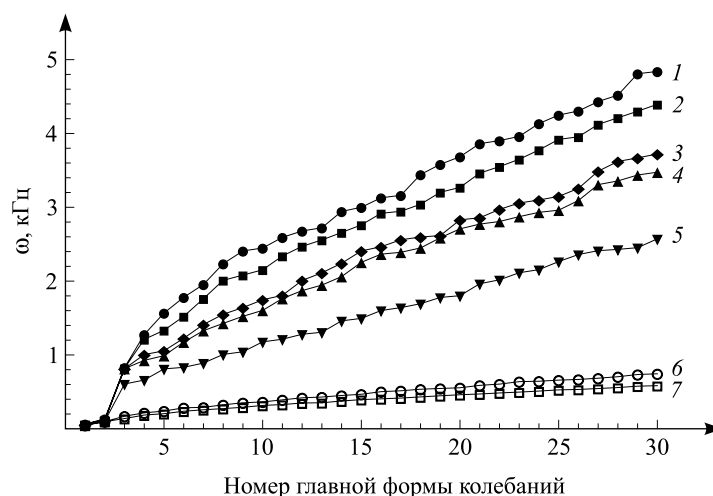


Рис. 1. Собственные частоты свободных колебаний для первых тридцати главных форм:

- 1 – среднее ухо в норме; 2 – среднее ухо с модулем упругости PSQ, равным 22 МПа;
3 – среднее ухо с модулем упругости PSQ, равным 11 МПа; 4 – среднее ухо с модулем упругости PSQ, равным 9 МПа;
5 – среднее ухо с модулем упругости PSQ, равным 3 МПа; 6 – среднее ухо с модулем упругости PSQ, равным 0,1 МПа;
7 – среднее ухо с модулем упругости PSQ, равным 34 кПа

Fig. 1. The eigenfrequencies for the first thirty modes:

- 1 – normal middle ear; 2 – elastic modulus of the middle ear PSQ is 22 MPa;
3 – elastic modulus of the middle ear PSQ is 11 MPa; 4 – elastic modulus of the middle ear PSQ is 9 MPa;
5 – elastic modulus of the middle ear PSQ is 3 MPa; 6 – elastic modulus of the middle ear PSQ is 0.1 MPa;
7 – elastic modulus of the middle ear PSQ is 34 kPa

Уменьшение модуля упругости PSQ, как следует из рис. 1, приводит к уменьшению значений собственных частот для соответствующих главных форм. С увеличением номера главной формы различие между значениями собственных частот увеличивается. В то же время для первых двух главных форм колебаний значения частот свободных колебаний совпадают между собой независимо от модуля упругости PSQ.

Определение толщины хрящевого трансплантата

Оценка толщины хрящевого трансплантата, накладываемого на PSQ, осуществлялась при условии приближенного равенства частоты свободных колебаний для соответствующей главной формы колебаний среднего уха в норме и с различными патологическими изменениями упругих свойств PSQ.

В качестве аргумента функции регрессии для каждой моды использовалась толщина хрящевых трансплантатов; значениями функции являлись значения частот свободных колебаний среднего уха с хрящевым трансплантатом соответствующей толщины; регрессия осуществлялась на основании экспоненциальных и степенных функций; среднеквадратичная погрешность не превышала 8 %. В результате численного решения трансцендентного уравнения в виде равенства функции регрессии значению собственной частоты свободных колебаний среднего уха в норме для соответствующей моды определялась приближенная толщина хрящевого трансплантата.

Диаграммы, связывающие частоты (ω) свободных колебаний уха в норме с толщиной хрящевого трансплантата h , которые следует наложить на PSQ с патологическими изменениями, чтобы добиться совпадения частот свободных колебаний среднего уха в норме и с патологией ТМ, представлены на рис. 2. Диаграммы получены на основании численного решения нелинейных уравнений, сформулированных на основании функций регрессии. Номера точек на диаграммах указывают на номер главной формы.

Толщина хрящевого трансплантата для PSQ с модулем упругости 22 МПа как для низких, так и для высоких частот свободных колебаний находится в широком диапазоне значений, что видно из рис. 2. В частности, для низких частот толщина трансплантата изменяется от 200 до 890 мкм (рис. 2, а). Для частот из слухового диапазона толщина трансплантата может изменяться от 40 до 1800 мкм; среднее значение толщины трансплантата для частот из слухового диапазона составляет 160–180 мкм. Для среднего уха с модулем упругости PSQ 11 МПа для компенсации потери упругих свойств на частотах из слухового диапазона среднее значение толщины трансплантата составляет приблизительно 360 мкм (рис. 2, б). Для среднего уха с модулем упругости 9 и 3 МПа посредством наложения на PSQ хрящевого трансплантата определенной толщины можно добиться совпадения значений практически всех собственных частот среднего уха с патологией с собственными частотами свободных колебаний среднего уха в норме. Тем не менее для среднего уха с модулем упругости PSQ 9 МПа толщина хрящевого трансплантата на низких частотах все еще находится в широком диапазоне (400–600 мкм), а на высоких частотах – в более узком (550–650 мкм) (рис. 2, в). Для среднего уха с модулем упругости PSQ 3 МПа толщина хрящевого трансплантата составляет 450–580 мкм для рассматриваемого диапазона частот (рис. 2, г). В связи с этим можно сделать вывод о том, что хирургическое лечение ретракционного кармана наиболее эффективно при уменьшении модуля упругости задневерхнего квадранта ТМ в 11 раз по сравнению со средним ухом в норме. Эффективность хирургического лечения обусловлена возможностью улучшения слуховой проводимости на всех частотах и достаточно точным значением толщины самого трансплантата. При дальнейшем уменьшении модуля упругости PSQ (ниже 3 МПа) толщина хрящевого трансплантата изменяется в больших пределах и не позволяет добиться одновременного совпадения частот в разных диапазонах (рис. 2, д, е).

В таблице систематизированы диапазоны разной толщины хрящевого трансплантата, накладываемого на ретракционный карман, для различных модулей упругости PSQ. Кроме того, в ней приведены диапазоны собственных частот среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств PSQ после установки хрящевого трансплантата, приближенно совпадающие с соответствующим диапазоном собственных частот среднего уха в норме.

**Толщина хрящевого трансплантата для ретракционного кармана
при различных модулях упругости PSQ и диапазон собственных частот свободных колебаний,
на которых возможно осуществить компенсацию потери слуха после тимпанопластики**

**Thickness of cartilaginous graft for retraction pocket with various elastic moduli of PSQ
and range of eigenfrequencies, on which it is possible to compensate for hearing loss after tympanoplasty**

Модуль упругости PSQ, МПа	Диапазон выбора толщины хрящевого трансплантата, мкм	Диапазон компенсации частот потери слуха, кГц
22	40–650	2,0–5
11	360–450	2,3–5
9	400–650	Все собственные частоты
3	450–580	Все собственные частоты
0,1	1800–2200	2,5–4
0,034	2000–2200	2,5–3,5

Для практического применения данных таблицы можно использовать соотношение между прогибом ретракционного кармана при отрицательном звуковом давлении для уха в норме и уха с патологическими изменениями упругих свойств PSQ. Статический конечно-элементный анализ прогибов ТМ

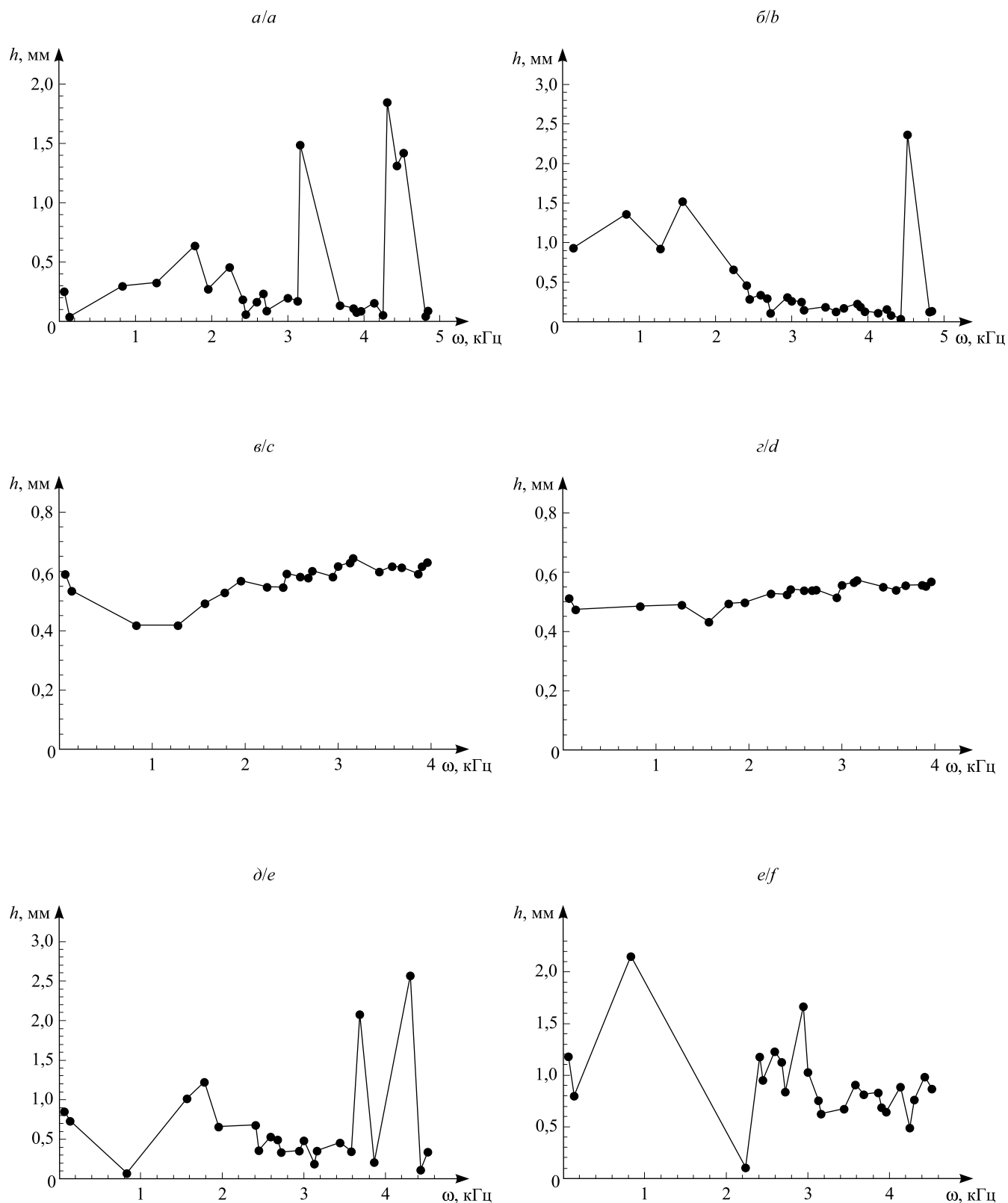


Рис. 2. Зависимость собственной частоты свободных колебаний среднего уха в норме от толщины хрящевого трансплантата.

Хрящевой трансплантат накладывается на PSQ среднего уха с модулем упругости:
а – 22 МПа; б – 11 МПа; в – 9 МПа; г – 3 МПа; д – 0,1 МПа; е – 34 кПа

Fig. 2. Eigenfrequency for the normal middle ear versus thickness of the cartilaginous graft.

Cartilaginous graft is superimposed on the middle ear PSQ with modulus of elasticity:
а – 22 МПа; б – 11 МПа; в – 9 МПа; г – 3 МПа; д – 0.1 МПа; е – 34 кПа

показывает, что хрящевой трансплантат целесообразно использовать при увеличении прогиба PSQ более чем в три раза (соответствует снижению модуля упругости PSQ до 9 МПа), но менее чем в десять раз (соответствует снижению модуля упругости PSQ до 3 МПа) под действием отрицательного давления на ТМ. Средняя толщина хрящевого трансплантата в первом случае составляет 525 мкм, во втором – 515 мкм. Применение тимпаноластики в этих случаях позволяет практически полностью приблизить слуховую проводимость среднего уха с ретракционным карманом к слуховой проводимости среднего уха в норме.

Заключение

Собственные частоты свободных колебаний среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств PSQ, которые описываются посредством уменьшенного модуля упругости, снижаются по сравнению с собственными частотами свободных колебаний среднего уха в норме. Различие между частотами свободных колебаний возрастает при увеличении моды свободных колебаний. Собственные частоты свободных колебаний среднего уха практически совпадают для различных модулей упругости PSQ первых двух мод. Толщина хрящевого трансплантата, используемого для хирургического лечения ретракционного кармана на ранних этапах его формирования, зависит от модуля упругости ретракционного кармана. Для сохранения слуховой проводимости и функциональных показателей, а также снижения риска развития рецидива заболевания необходимо использовать хрящевой трансплантат определенной толщины.

Наиболее целесообразным является применение хрящевого трансплантата для среднего уха с модулями упругости PSQ в диапазоне от 3 до 9 МПа. В этом случае за счет установки хрящевого трансплантата возможно приблизить слуховые функции среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств к нормальным слуховым функциям. Средняя толщина хрящевого трансплантата, соответствующая модулю упругости PSQ 3 и 9 МПа, составляет 515 и 525 мкм соответственно; использовать такие трансплантаты следует в том случае, если максимальный прогиб ретракционного кармана при отрицательном звуковом давлении приблизительно в 3,5 раза и в 10 раз соответственно превышает максимальный прогиб PSQ среднего уха в норме.

Установка хрящевого трансплантата не позволяет добиться полной компенсации слуховой проводимости среднего уха с ретракционным карманом на всех частотах. Если модуль упругости PSQ снижается до 9 МПа, возможна компенсация слуховой функции среднего уха на диапазоне от 2,3 до 5 кГц. Средняя толщина хрящевого трансплантата составляет приблизительно 375 мкм. Если модуль упругости PSQ уменьшается менее, чем в 11 раз, использование хрящевого трансплантата не вполне целесообразно, поскольку существенно снижается диапазон компенсируемых слуховых частот (приблизительно от 2,5 до 3,5 кГц). Толщина хрящевого трансплантата при этом составляет приблизительно 2 мм. Чем шире диапазон выбора толщины хрящевого трансплантата, тем технически сложнее добиться одновременной компенсации высоких и низких частот.

Библиографические ссылки

1. *Ars B., Decraemer W.* Tympanic membrane lamina propria and middle ear cholesteatoma // *Cholesteatoma and Mastoid Surgery* / M. Tos, J. Thomsen, E. Peitersen (eds.). Amsterdam ; Berkeley ; Milano, 1989. P. 429–432.
2. *Beer H.-J., Bornitz M., Hardke H.-J., et al.* Modeling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behavior // *Audiol. Neurotol.* 1999. Vol. 4. P. 156–162.
3. *Cassano M., Cassano P.* Retraction pockets of pars tensa in pediatric patients: Clinical evolution and treatment // *Int. J. Pediat. Otorhin.* 2010. Vol. 74, issue 2. P. 178–182.
4. *Couloigner V., Molony N., Viala P., et al.* Cartilage tympanoplasty for posterosuperior retraction pockets of the pars tensa in children // *Otol. Neurot.* 2003. Vol. 24. P. 264–269.
5. *Elkhoury N., Liu H., Funnell W. R. J.* Low-frequency finite-element modeling of the gerbil middle ear // *J. Assoc. Res. Otolaryngol.* 2006. Vol. 7, № 4. P. 399–413.
6. *Esteve D., Dubreuil Ch., Delia Vedova Cl., et al.* Physiologic et physiopathologie de la fonction d'ouverture de la trompe auditive : Apports de la tubomanometrie // *J. Fr. ORL.* 2001. Vol. 50, № 5. P. 233–241.
7. *Fung Y. C.* Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. New York, 1993.
8. *Funnell W. R. J., Laszlo C.* Modelling of the cat eardrum as a thin shell using the finite-element method // *J. Acoust. Soc. Am.* 1978. Vol. 63, № 5. P. 1461–1467.
9. *Kirika J.* The structure and function of middle ear. Tokyo, 1960.
10. *Ladak H. M., Funnell W. R., Decraemer W. F., et al.* A geometrically nonlinear finite-element model of the cat eardrum // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. Vol. 119, issue 5. P. 2859–2868.
11. *Larsen P. L., Tos M.* Ear polyps in posterior superior retraction pockets, herodian. Histopathological and pathogenetic aspects // *J. Oto-Rhino-Laryngol.* 1992. Vol. 54, № 6. P. 328–330.
12. *Lee C. F., Chen J. H., Chou Y. F., et al.* Optimal graft thickness for different sizes of tympanic membrane perforation in cartilage myringoplasty: a finite element analysis // *Laryngoscope.* 2007. Vol. 117, № 4. P. 725–730.

13. Lee C.-F., Hsu L.-P., Chen P.-R., et al. Biomechanical modeling and design optimization of cartilage myringoplasty using finite element analysis // *Audiol. Neurot.* 2006. Vol. 11, № 6. P. 380–388.
14. Lesser T. H. J., Williams K. R. The tympanic membrane in cross section: a finite element analysis // *J. Laryngol. Otol.* 1988. Vol. 102, issue 3. P. 209–214.
15. Mikhasev G. I., Bosiakov S. M., Petrova L. G., et al. Finite-element modelling of the tympanic membrane retraction pocket under negative pressure in the tympanic cavity // *Facta Univ. Ser. Mech. Eng.* 2015. Vol. 13, № 3. P. 249–257.
16. Mikhasev G., Ermochenko S., Bornitz M. On the strain – stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus – incus prosthesis // *Math. Med. Biol.* 2010. Vol. 27. P. 289–312.
17. Neumann A., Jahnke K. Trommelfellrekonstruktion mit Knorpel: Indikationen, Techniken und Ergebnisse // *HNO.* 2005. Vol. 53, issue 6. P. 573–586.
18. Ohnishi T., Shirahata Y., Fukami M., et al. The atelectatic ear and its classification // *Auris-Nasus-Larynx.* 1985. Vol. 12, suppl. 1. P. 211–213.
19. Tos M., Stangerup S. E., Larsen P. Dynamics of eardrum changes following secretory otitis. A prospective study // *Arch. Otolaryngol. Head Neck Surg.* 1987. Vol. 113, № 4. P. 380–385.
20. Wada H., Koike T., Kobayashi T. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery* / K.-B. Huttenbrink (ed.). Dresden, 1997. P. 76–81.
21. Wells M. D., Micheals L. Role of retraction pockets in cholesteatoma formation // *Clinic. Otolaryn.* 1983. Vol. 8, issue 1. P. 39–45.
22. Wen Yu.-H., Hsu L.-P., Chen P.-R., et al. Design optimization of cartilage myringoplasty using finite // *Tzu Chi Med. J.* 2006. Vol. 18. P. 370–377.
23. Yung M. Cartilage tympanoplasty: literature review // *J. Laryngol. Otol.* 2008. Vol. 122, issue 7. P. 663–672.

References

1. Ars B., Decraemer W. Tympanic membrane lamina propria and middle ear cholesteatoma. In: M. Tos, J. Thomsen, E. Peitersen (eds). *Cholesteatoma and Mastoid Surgery*. Amsterdam ; Berkeley ; Milano, 1989. P. 429–432.
2. Beer H.-J., Bornitz M., Hardke H.-J., et al. Modeling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behavior. *Audiol. Neurotol.* 1999. Vol. 4. P. 156–162.
3. Cassano M., Cassano P. Retraction pockets of pars tensa in pediatric patients: Clinical evolution and treatment. *Int. J. Pediat. Otorhin.* 2010. Vol. 74, issue 2. P. 178–182. DOI: 10.1016/j.ijporl.2009.11.004.
4. Couloigner V., Molony N., Viala P., et al. Cartilage tympanoplasty for posterosuperior retraction pockets of the pars tensa in children. *Otol. Neurot.* 2003. Vol. 24. P. 264–269.
5. Elkhouri N., Liu H., Funnell W. R. J. Low-frequency finite-element modeling of the gerbil middle ear. *J. Assoc. Res. Otolaryngol.* 2006. Vol. 7, No. 4. P. 399–413.
6. Esteve D., Dubreuil Ch., Delia Vedova Cl., et al. Physiology and physiopathology of the eustachian tube opening function : Interest of tubomanometry. *J. Fr. ORL.* 2001. Vol. 50, No. 5. P. 233–241 (in Fr.). DOI: 14559, 35400010218205.0020.
7. Fung Y. C. Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. New York, 1993.
8. Funnell W. R. J., Laszlo C. Modelling of the cat eardrum as a thin shell using the finite-element method. *J. Acoust. Soc. Am.* 1978. Vol. 63, No. 5. P. 1461–1467.
9. Kirikae J. The structure and function of middle ear. Tokyo, 1960.
10. Ladak H. M., Funnell W. R., Decraemer W. F., et al. A geometrically nonlinear finite-element model of the cat eardrum. *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. Vol. 119, issue 5. P. 2859–2868. DOI: 10.1121/1.2188370.
11. Larsen P. L., Tos M. Ear polyps in posterior superior retraction pockets, herodion. Histopathological and pathogenetic aspects. *J. Oto-Rhino-Laryngol.* 1992. Vol. 54, No. 6. P. 328–330. DOI:10.1159/000276325.
12. Lee C. F., Chen J. H., Chou Y. F., et al. Optimal graft thickness for different sizes of tympanic membrane perforation in cartilage myringoplasty: a finite element analysis. *Laryngoscope.* 2007. Vol. 117, No. 4. P. 725–730.
13. Lee C.-F., Hsu L.-P., Chen P.-R., et al. Biomechanical modeling and design optimization of cartilage myringoplasty using finite element analysis. *Audiol. Neurot.* 2006. Vol. 11, No. 6. P. 380–388.
14. Lesser T. H. J., Williams K. R. The tympanic membrane in cross section: a finite element analysis. *J. Laryngol. Otol.* 1988. Vol. 102, issue 3. P. 209–214. DOI: 10.1017/S0022215100104542.
15. Mikhasev G. I., Bosiakov S. M., Petrova L. G., et al. Finite-element modelling of the tympanic membrane retraction pocket under negative pressure in the tympanic cavity. *Facta Univ. Ser. Mech. Eng.* 2015. Vol. 13, No. 3. P. 249–257.
16. Mikhasev G., Ermochenko S., Bornitz M. On the strain – stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus – incus prosthesis. *Math. Med. Biol.* 2010. Vol. 27. P. 289–312.
17. Neumann A., Jahnke K. Reconstruction of the tympanic membrane applying cartilage: Techniques, indications and results. *HNO.* 2005. Vol. 53, issue 6. P. 573–586 (in Ger.). DOI: 10.1007/s00106-005-1280-8.
18. Ohnishi T., Shirahata Y., Fukami M., et al. The atelectatic ear and its classification. *Auris-Nasus-Larynx.* 1985. Vol. 12, suppl. 1. P. 211–213. DOI: 10.1016/S0385-8146(85)80152-8.
19. Tos M., Stangerup S. E., Larsen P. Dynamics of eardrum changes following secretory otitis. A prospective study. *Arch. Otolaryngol. Head Neck Surg.* 1987. Vol. 113, No. 4. P. 380–385. DOI:10.1001/archotol.1987.01860040042014.
20. Wada H., Koike T., Kobayashi T. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear. In: K.-B. Huttenbrink (ed.). *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery*. Dresden, 1997. P. 76–81.
21. Wells M. D., Micheals L. Role of retraction pockets in cholesteatoma formation. *Clinic. Otolaryn.* 1983. Vol. 8, issue 1. P. 39–45. DOI: 10.1111/j.1365-2273.1983.tb01670.x.
22. Wen Yu.-H., Hsu L.-P., Chen P.-R., et al. Design optimization of cartilage myringoplasty using finite. *Tzu Chi Med. J.* 2006. Vol. 18. P. 370–377.
23. Yung M. Cartilage tympanoplasty: literature review. *J. Laryngol. Otol.* 2008. Vol. 122, issue 7. P. 663–672. DOI: 10.1017/S0022215108001813.

Статья поступила в редакцию 17.02.2017.
Received by editorial board 17.02.2017.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЖЕСТКОГО ДИСКА И ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. С. КРАВЧУК¹⁾, А. И. КРАВЧУК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

С помощью метода аналитических функций приближенно решена контактная задача теории упругости для жесткого недеформируемого диска и упругой плоскости с круглым вырезом без использования сингулярных уравнений. Сделано предположение, что в области контакта распределение напряжений представлено в виде ряда Фурье. Коэффициенты разложений в ряд аналитических функций выражаются через коэффициенты ряда Фурье контактных напряжений. В конце решения ряд Фурье и, соответственно, ряды аналитических функций усекаются до минимально возможного количества членов. В качестве краевого условия по перемещениям в области контакта используется известное выражение Левиной – Решетова. Впервые получены квадратурные формулы, позволяющие инженерам выполнять расчеты сопряжений типа вал – втулка с учетом простого теоретически обоснованного распределения напряжений в области контакта. Констатируется, что предлагаемая методика позволяет разработать прикладную теорию износостойкости подшипников скольжения с учетом микрогеометрических параметров их поверхностей.

Ключевые слова: сопряжение вал – втулка; напряженное состояние; аналитические функции; формулы Коло-сова – Мусхелишвили; комплексные числа; упругая плоскость с отверстием; ряд Фурье.

AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM FOR THE HARD DISK AND PLANE WITH A CIRCULAR HOLE WITHOUT APPLICATION OF SINGULAR EQUATIONS

A. S. KRAVCHUK^a, A. I. KRAVCHUK^a

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

Corresponding author: A. S. Kravchuk (ask_belarus@inbox.ru)

For the first time the contact problem of elasticity theory for the rigid (not deformable) disk and elastic plane with a hole was approximately solved using the method of analytic functions without the application of singular equations. It is assumed that the stress distribution in the area of contact is represented by the Fourier series. The coefficients of the series expansion of analytic functions are expressed in terms of the coefficients of the Fourier series of contact stress. At the end of the solution the Fourier series and, respectively, series of analytic functions is truncated to the lowest possible number of members. The familiar Lewin-Reshetova expression for the contact displacements was used as a boundary condition

Образец цитирования:

Кравчук А. С., Кравчук А. И. Приближенное решение контактной задачи для жесткого диска и плоскости с круговым вырезом без использования сингулярных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 59–64.

For citation:

Kravchuk A. S., Kravchuk A. I. An approximate solution of the contact problem for the hard disk and plane with a circular hole without application of singular equations. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 59–64 (in Russ.).

Авторы:

Александр Степанович Кравчук – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

Анжелика Ивановна Кравчук – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Authors:

Alexander Kravchuk, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of bio- and nano-mechanics, faculty of mechanics and mathematics.

ask_belarus@inbox.ru

Anzhelika Kravchuk, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web technologies and computer modeling, faculty of mechanics and mathematics.

anzhelika.kravchuk@gmail.com

for this problem. The quadrature formula of solution allowing engineers to perform calculations of interfaces such as shaft – bush was obtained. The proposed method allows authors to develop the applied theory of wear resistance of sliding bearings taking into consideration microgeometrical parameters of their surfaces.

Key words: conjugation shaft sleeve; the state of stress; analytic functions; formulas Kolosov – Muskhelishvili; complex numbers; elastic plane with a hole; a Fourier series.

Введение

При решении плоских контактных задач в научной литературе традиционно используются интегралы типа Коши, с помощью которых такая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению [1, с. 412; 2, с. 145]. Однако его решение во многих случаях представляет довольно сложную проблему. Кроме того, построенные таким образом решения невозможно применить на практике при инженерных расчетах.

Цель настоящей статьи – разработка методики решения контактной задачи с помощью усеченных рядов аналитических функций без промежуточного использования интегралов типа Коши, что обеспечивает достаточную простоту получаемых уравнений распределения напряжений в области контакта и определения полуугла области контакта в зависимости от величины приложенной силы.

Общие формулы для плоскости с круглым вырезом в случае отсутствия трения на границе отверстия

Формулы Колосова – Мусхелишвили в декартовых координатах [1, с. 404; 2, с. 123–124] имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa \cdot \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – функции, голоморфные в S^- (плоскости с отверстием) (см. рисунок, а); $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$;

E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; κ – константа, определяемая видом напряженного состояния:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{– при плоской деформации,} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{– при плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Компоненты перемещений (u_r, u_θ) в полярной системе координат с перемещениями в декартовой системе координат (u_x, u_y) связаны уравнением [1, с. 133]:

$$u_r + iu_\theta = (u_x + iu_y)e^{-i\theta}. \quad (2)$$

В полярной системе координат для напряжений σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ можно получить уравнение [1, с. 447]:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\varphi''(z) - \frac{z}{\bar{z}}\psi'(z). \quad (3)$$

Учитывая, что напряжения в плоскости с вырезом исчезают на бесконечности, примем, что при ненулевом главном векторе сил $((F_x, F_y) \neq 0$, где F_x, F_y – проекции главного вектора сил в декартовой системе координат) функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ приобретают вид, указанный в [2, с. 127] (см. рисунок):

$$\varphi(z) = -\frac{F_x + iF_y}{2\pi(1+\kappa)}\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad \psi(z) = \kappa \frac{F_x - iF_y}{2\pi(1+\kappa)}\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad (4)$$

где $a_k, b_k, k = 1, \infty$, – комплексные коэффициенты, определяемые из краевых условий.

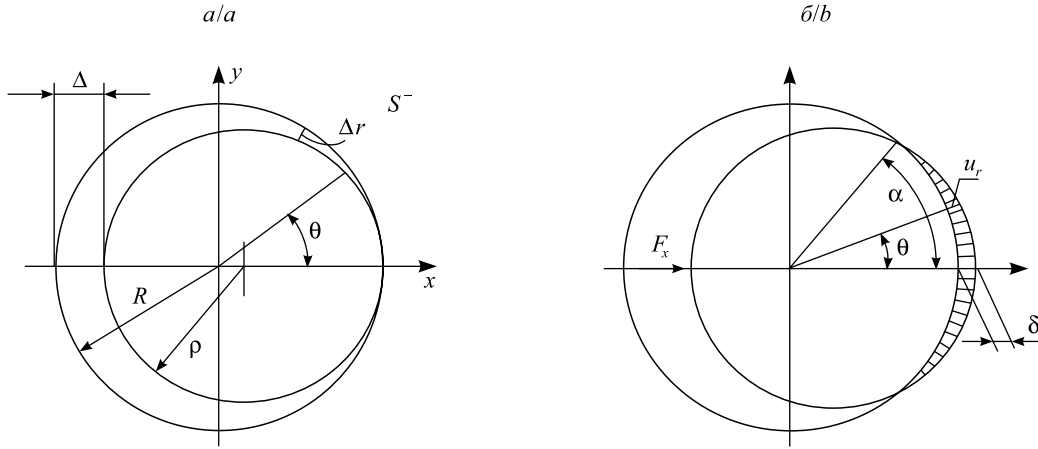


Схема взаимного расположения жесткого диска и упругой плоскости с круговым вырезом:

a – при касании жесткого диска кругового отверстия;

б – при внедрении жесткого диска в плоскость с круговым вырезом

Diagram of the relative position of the hard disk and the classic plane with circular hole:

a – a hard disk is touched to the circular hole;

b – a hard disk is penetrated into the circular hole

При нулевых касательных напряжениях на контуре отверстия $\sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0$ справедливо уравнение:

$$F_x + iF_y = -R \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}|_{r=R} \cdot e^{i\theta} d\theta, \quad (5)$$

где $L = R \cdot e^{i\theta}$ – граница отверстия, $\theta \in [0, 2\pi]$; R – радиус отверстия.

Вычисляя необходимые для уравнения (3) производные от аналитических функций $\phi(z)$ и $\psi(z)$, получаем

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= -\frac{F_x + iF_y}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_k}{z^{k+1}}, \quad \phi''(z) = \frac{F_x + iF_y}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_k}{z^{k+2}}; \\ \psi'(z) &= \kappa \frac{F_x - iF_y}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k}{z^{k+1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Постановка задачи в напряжениях

Рассмотрим упругую плоскость с отверстием радиусом R (см. рисунок). Будем считать, что в отверстие в плоскости вставляется круговой недеформируемый диск радиусом ρ (см. рисунок). Наиболее общим условием для определения $\sigma_{rr}|_{r=R} = \sigma_{rr}(R, \theta)$ в области контакта $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ является его задание с помощью ряда Фурье (см. рисунок). При условии отсутствия трения ($\sigma_{r\theta}|_{r=R} = \sigma_{r\theta}(R, \theta) = 0$) на границе отверстия распределение контактных напряжений $\sigma_{rr}(R, \theta)$ есть четная относительно θ функция. Тогда

$$\sigma_{rr}(R, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(j \cdot \theta), \quad (7)$$

где A_j – вещественные коэффициенты ряда Фурье, для которых выполнено

$$A_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}(R, \theta) \cos(j \cdot \theta) d\theta, \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Используя (5) и (7), можно определить, что главный вектор сил направлен вдоль оси Ox ($F_y = 0$), а проекция F_x определяется уравнением

$$\begin{aligned} F_x &= -R \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}|_{r=R} \cdot e^{i\theta} d\theta = -R \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(j \cdot \theta) \right) (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) d\theta = \\ &= -R A_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)^2 d\theta = -R A_1 \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для построения приближенного решения контактной задачи будем считать, что основными коэффициентами, обуславливающими силовое взаимодействие в области контакта при $\theta \in [-\alpha, \alpha]$, являются A_0 и A_1 , т. е.

$$\sigma_{rr}(R, \theta) \approx \begin{cases} \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\theta), & \theta \in [-\alpha, \alpha], \\ 0, & \theta \notin [-\alpha, \alpha]. \end{cases} \quad (9)$$

Остальные коэффициенты, определяющие перераспределение напряжений с учетом перемещений в области контакта, с достаточной точностью равны нулю:

$$A_{j, j=2, \infty} \approx 0. \quad (10)$$

Подставляя (6) в (3) и заменяя $z = re^{i\theta}$, с учетом (8) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} &= -\frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{e^{-i\theta}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_k e^{-i(k+1)\theta}}{r^{k+1}} - \\ &- \frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{e^{i\theta}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_k} e^{i(k+1)\theta}}{r^{k+1}} - \\ &- \frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{e^{-i\theta}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_k e^{-i(k+1)\theta}}{r^{k+1}} - \\ &- \kappa \frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{e^{i\theta}}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_k e^{-i(k-1)\theta}}{r^{k+1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Переходя к пределу $r \rightarrow R$ в (11), разделяя вещественную и мнимую части и подставляя краевое условие (9) для $\sigma_{rr}(R, \theta)$ и $\sigma_{r\theta}(R, \theta) = 0$, вычислим коэффициенты разложений аналитических функций (4).

Исходя из четырех систем уравнений (11) отдельно для вещественных и мнимых частей, при гипотезе (5) получаем, что главный вектор сил, приложенных к контуру отверстия, действует в направлении оси Ox , т. е. все мнимые части коэффициентов a_k, b_k ($k = \overline{1, \infty}$) равны нулю:

$$\operatorname{Im}(a_k) = \operatorname{Im}(b_k) = 0. \quad (12)$$

Тогда из (11), (12) и краевого условия получаем:

$$b_1 = -\frac{A_0}{2} R^2, \quad b_2 = -(3+\kappa) \frac{F_x}{4\pi(1+\kappa)} - \frac{A_1}{2} R, \quad b_2 = -(1-\kappa) \frac{F_x}{4\pi(1+\kappa)} R^2. \quad (13)$$

Система (13) является непротиворечивой с учетом равенства (8) для A_1 . Для любых $j \geq 2$ можно получить систему уравнений:

$$\begin{aligned} -(j+2)(j-1)a_{j-1} - (j+1)b_{j+1} &= A_j R^j, \\ (j-1)ja_{j-1} + (j+1)b_{j+1} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Исходя из условия (10) и системы (14), получаем, что $a_{j-1} = b_{j+1} = 0$ для любого $j \geq 2$. Таким образом, из (4) для уравнений (1) получаем, что с принятыми гипотезами контактную задачу решают аналитические функции в виде

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z), \quad \varphi'(z) = -\frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z}; \\ \psi(z) &= \kappa \frac{F_x}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z) - \frac{A_0}{2} \frac{R^2}{z} - (1-\kappa) \frac{F_x}{4\pi(1+\kappa)} \frac{R^2}{z^2}.\end{aligned}\quad (15)$$

Очевидно, что в (15) остается неопределенной только одна константа A_0 .

Краевое условие по перемещениям

В литературе самым распространенным и простым является краевое условие из работы [3, с. 52] (см. рисунок).

При внутреннем касании круга радиусом ρ и отверстия в плоскости радиусом R радиальный зазор под углом θ

$$\Delta_r = (R - \rho)(1 - \cos(\theta)). \quad (16)$$

Упругое радиальное перемещение диска относительно втулки под углом θ

$$u_r = \delta \cos(\theta) - \Delta_r, \quad (17)$$

где δ – глубина максимального внедрения диска в плоскость с отверстием.

Подставляя (16) в (17), получаем уравнение в случае малой разности радиусов ($\frac{R - \rho}{R}$ – малая величина), которое можно вывести и иным способом [4, с. 20]:

$$u_r(\theta) = (\delta + (R - \rho)) \cos(\theta) - (R - \rho). \quad (18)$$

Дважды дифференцируя (18) по θ и складывая результат с исходным уравнением (18), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u_r(\theta)}{d\theta^2} + u_r(\theta) = -(R - \rho). \quad (19)$$

Использование уравнения (19) вместо (18) позволит освободиться от логарифмических членов при подстановке (15) в (1). Для нормальных радиальных перемещений из (1), (2) и (15) на границе отверстия получаем

$$\begin{aligned}2\mu u_r &= \operatorname{Re} \left[\kappa \varphi(R \cdot e^{i\theta}) e^{-i\theta} - R \overline{\varphi'(R \cdot e^{i\theta})} - \overline{\psi(R \cdot e^{i\theta})} \cdot e^{-i\theta} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[-\kappa \frac{F_x}{\pi(1+\kappa)} \ln(R) \cdot e^{-i\theta} + \frac{(3-\kappa)F_x}{4\pi(1+\kappa)} e^{i\theta} + \frac{A_0}{2} R \right] = \\ &= \left(\frac{(3-\kappa)F_x}{4\pi(1+\kappa)} - \kappa \frac{F_x}{\pi(1+\kappa)} \ln(R) \right) \cos(\theta) + \frac{A_0}{2} R.\end{aligned}\quad (20)$$

Дифференцируя (20) дважды по θ и складывая результат с (20), получаем

$$2\mu \frac{d^2 u_r}{d\theta^2} + 2\mu u_r = \frac{A_0}{2} R. \quad (21)$$

Приближенное распределение напряжений

Сравнивая (19) и (21), получаем, что

$$A_0 = -4\mu \frac{(R - \rho)}{R}. \quad (22)$$

При подстановке (22) в (9)

$$\sigma_{rr}(R, \theta) \approx \begin{cases} -\frac{E}{(1+\nu)} \frac{(R-\rho)}{R} - \frac{F_x}{R\pi} \cos(\theta), & \theta \in [-\alpha, \alpha], \\ 0, & \theta \notin [-\alpha, \alpha]. \end{cases} \quad (23)$$

Последним действием является определение размеров области контакта по величине действующей силы. Подставляя (23) в (5), получаем

$$\begin{aligned} F_x &= R \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(-\frac{E}{(1+\nu)} \frac{(R-\rho)}{R} + \frac{F_x}{R\pi} \cos(\theta) \right) \cos(\theta) d\theta = \\ &= 2 \frac{E}{(1+\nu)} (R-\rho) \sin(\alpha) + \frac{F_x}{\pi} (\alpha + \cos(\alpha) \sin(\alpha)). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) можно получить

$$F_x = 2\pi \frac{E}{(1+\nu)} \frac{(R-\rho) \sin(\alpha)}{(\pi - \alpha - \cos(\alpha) \sin(\alpha))}. \quad (25)$$

Заключение

С помощью метода аналитических функций приближенно решена контактная задача теории упругости для жесткого недеформируемого диска и упругой плоскости с вырезом.

Впервые получены квадратурные формулы (23) и (25), позволяющие инженерам выполнять расчеты сопряжений вал – втулка с учетом простого теоретически обоснованного распределения напряжений в области контакта.

Предлагаемая методика позволяет разработать прикладную теорию износостойкости подшипников скольжения с учетом микрогеометрических параметров их поверхностей.

Библиографические ссылки

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М., 1976.
3. Левина З. М., Решетов Д. Н. Контактная жесткость машин. М., 1971.
4. Кравчук А. С., Чигарев А. В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Минск, 2000.

References

1. Muskhelishvili N. I. [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, 1966 (in Russ.).
2. Amenzade Yu. A. [Theory of elasticity]. Moscow, 1976 (in Russ.).
3. Levina Z. M., Reshetov D. N. [Contact stiffness of machines]. Moscow, 1971 (in Russ.).
4. Kravchuk A. S., Chigarev A. V. [Contact mechanics of bodies with circular boundaries]. Minsk, 2000 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 01.06.2016.
Received by editorial board 01.06.2016.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004.9,004.94

КАЧЕСТВО ОБСЛУЖИВАНИЯ В БЕСПРОВОДНЫХ СЕНСОРНЫХ СЕТЯХ

К. С. МУЛЯРЧИК¹⁾, А. С. ПОЛОЧАНСКИЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Дано определение понятию «качество обслуживания» для беспроводных сенсорных сетей. Проанализировано различие в качестве обслуживания в беспроводных сенсорных и классических компьютерных сетях. Выделены особенности беспроводных сенсорных сетей и требования, предъявляемые к качеству обслуживания. Определены характеристики качества обслуживания с учетом особенностей беспроводных сенсорных сетей: задержка доставки пакета, пропускная способность, надежность доставки, время жизни сети, покрытие заданной области, устойчивость к изменению топологии. Проанализированы взаимосвязь характеристик качества обслуживания с технологиями различных уровней сетевой модели и влияние используемых технологий на значения связанных с ними характеристик качества обслуживания. На основе различий в модели передачи данных проведена классификация задач, решаемых посредством беспроводных сенсорных сетей. Отдельно рассмотрены сети с постоянной и изменчивой топологией.

Ключевые слова: беспроводная сенсорная сеть; качество обслуживания; характеристики качества обслуживания; классы задач для беспроводных сенсорных сетей.

Образец цитирования:

Мулярчик К. С., Полочанский А. С. Качество обслуживания в беспроводных сенсорных сетях // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 65–70.

For citation:

Mulyarchik K. S., Polochanskiy A. S. Quality of service in wireless sensor networks. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 65–70 (in Russ.).

Авторы:

Константин Сергеевич Мулярчик – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры телекоммуникаций и информационных технологий факультета радиоп физики и компьютерных технологий.

Алексей Сергеевич Полочанский – аспирант кафедры телекоммуникаций и информационных технологий факультета радиоп физики и компьютерных технологий. Научный руководитель – К. С. Мулярчик.

Authors:

Konstantin Mulyarchik, PhD (engineering), docent; associate professor at the department of telecommunications and information technologies, faculty of radiophysics and computer technologies.

k.mulyarchik@gmail.com

Aleksei Polochanskiy, postgraduate student at the department of telecommunications and information technologies, faculty of radiophysics and computer technologies.

QUALITY OF SERVICE IN WIRELESS SENSOR NETWORKS

K. S. MULYARCHIK^a, A. S. POLOCHANSKIY^a

^aBelarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus

Corresponding author: K. S. Mulyarchik (k.mulyarchik@gmail.com)

The definition for the concept «quality of service» for wireless sensor networks has been given. The differences of the concept «quality of service» for wireless sensor networks from classic computer networks has been analyzed. Wireless sensor networks features have been analyzed as well as the requirements related to the quality of service. Based on the results of the analysis of wireless sensor networks features the following quality of service characteristics have been defined: latency, bandwidth, packet loss, network lifetime, area coverage and tolerance to change in the topology. The dependency of the quality of service characteristics on technologies used at different network model layers has been analyzed as well as the influence of the used technologies on the values of the corresponding quality of service characteristics. Classification of problems that can be solved by wireless sensor networks has been introduced based on different network traffic models, networks with constant and variable topology have been considered separately.

Key words: wireless sensor network; quality of service; quality of service characteristics; classes of tasks of wireless sensor networks.

Введение

Телекоммуникационная сеть является программно-аппаратной системой. Основная ее задача – предоставление оконечным устройствам сервиса по передаче данных. Для телекоммуникационных сетей вводится понятие «качество обслуживания» в целях задания количественных характеристик сервиса по передаче данных и определения соответствия этих характеристик заданным требованиям в заданных условиях. Качество обслуживания является интегральным показателем, описывает сервис по передаче данных как таковой и состоит из набора количественных характеристик сервиса, при этом каждая из них связана с определенным аспектом функционирования самой телекоммуникационной системы.

В классических компьютерных сетях количественными характеристиками сервиса выступают временная задержка при передаче пакета, разброс задержек, пропускная способность канала связи, а также доля потерь пакетов в канале связи (или вероятность доставки пакета).

Телекоммуникационные сети используются для решения большого количества задач, а соответствующий им трафик в сети имеет разнообразный характер. Так, для задачи потоковой передачи аудио-или видеоинформации трафик выступает как непрерывный поток больших по размеру пакетов, а для задачи обмена текстовыми сообщениями между различными пользователями – как нестационарный поток пакетов небольшого размера. Таким образом, можно обобщить и выделить набор классов решаемых задач, в рамках которых трафик характеризуется определенным паттерном. В свою очередь, в зависимости от решаемой задачи к сервису по передаче данных предъявляются разные требования, характеристики функционирования сети получают определенный приоритет, а также используются соответствующие механизмы обработки трафика [1]. Классические телекоммуникационные сети используются, как правило, для одновременного решения различных классов задач.

Беспроводные сенсорные сети представляют собой особый класс информационно-телекоммуникационных систем. С точки зрения архитектуры и физического построения они состоят из большого количества миниатюрных передатчиков с автономным источником питания. Беспроводные сенсорные сети предназначены для решения широкого круга мониторинговых и управленческих задач в таких сферах, как промышленность, сельское хозяйство, медицина, защита от чрезвычайных ситуаций и т. д. К основным свойствам беспроводных сенсорных сетей можно отнести самоорганизацию, автономность, наличие или отсутствие мобильности узлов, одноранговую топологию. Таким образом, беспроводные сенсорные сети, в отличие от классических, представляют собой сервис не только по передаче данных, но и по их сбору и обработке. Соответственно, понятие «качество обслуживания» для беспроводных сенсорных сетей и его характеристики несколько отличаются от классического представления [2–4] и требуют переопределения. Необходимо произвести классификацию задач, которые решаются при помощи беспроводных сенсорных сетей, и установить соответствующие им требования к качеству обслуживания.

Особенности качества обслуживания в беспроводных сенсорных сетях

Выделим характерные для беспроводных сенсорных сетей особенности, которые определяются условиями их функционирования, влияющими на определение качества обслуживания.

Ограниченные ресурсы. Одной из основных особенностей беспроводных сенсорных сетей является ограниченность ресурсов узла. Поскольку узел сети должен быть минимизирован по размеру и стоимости, он обладает небольшими вычислительными возможностями, размером буфера, мощностью передачи, а также ограниченным временем функционирования. В связи с этим одной из задач качества обслуживания является эффективное использование имеющихся ресурсов для более длительного поддержания функционирования сети.

Устойчивость. Беспроводные сенсорные сети состоят из большого числа сенсоров и должны быть устойчивыми к изменениям топологии – добавлению нового узла, выходу из строя или перемещению имеющегося узла, перераспределению по кластерам и т. д. С точки зрения качества обслуживания все эти изменения не должны повлиять на функционирование и доступность сети.

Различные виды трафика. В зависимости от назначения беспроводной сенсорной сети к передаваемому трафику могут предъявляться определенные требования. Например, задержка передачи пакета может играть разную роль в различных приложениях. Требования к качеству обслуживания варьируются в зависимости от класса задач.

Модель передачи данных. Беспроводная сенсорная сеть может обладать одной из трех моделей передачи данных: узлы передают данные на базовую станцию с определенным периодом; станция сама инициирует передачу данных, запрашивая информацию о состоянии определенного узла или их группы; узел посылает пакет данных при определенном событии.

Характер сбора данных. В беспроводных сенсорных сетях данные, полученные от каждого отдельно взятого узла, как правило, не играют большой роли. Обычно данные принимаются с нескольких датчиков, которые расположены внутри некоторой области, а передается их усредненное значение. Поскольку ресурсы, затрачиваемые на передачу данных, сравнительно велики, предварительная обработка данных может быть осуществлена в самих узлах для уменьшения количества передаваемых данных. Гарантия доставки отдельно взятого пакета имеет небольшое значение для качества обслуживания при сборе информации с региона.

Мобильность. Для некоторых приложений узлы сенсорной сети не устанавливаются статично, их местоположение может изменяться. Это вносит дополнительные сложности при маршрутизации, определении координат и др.

Таким образом, качество обслуживания в беспроводных сенсорных сетях – это интегральная характеристика, которая определяет возможность сети выполнять сбор, обработку и передачу данных при тех или иных заданных условиях (ограниченность ресурсов, мобильность узлов, модель передачи данных и др.).

Характеристики качества обслуживания в беспроводных сенсорных сетях

Выделим критерии, относящиеся к передаче данных в беспроводных сенсорных сетях, по которым можно оценивать качество обслуживания.

Задержка. Анализируя задержку в беспроводных сенсорных сетях, необходимо учитывать используемую в сети модель передачи данных. При периодической трансляции данных на базовую станцию задержка будет состоять из времени передачи пакета от узла к узлу, построения маршрута, ожидания узлом свободного канала передачи и, возможно, времени предварительной обработки, осуществляемой на узлах. Когда на узел поступает запрос со станции, задержка равна времени, которое прошло с момента отправки запроса и до получения пакета данных. При событийной модели задержка будет состоять из времени, прошедшего от наступления события, до его получения базовой станцией. Задержка в беспроводных сенсорных сетях зависит от времени передачи и обработки данных на узлах, а также от алгоритма маршрутизации и механизма доступа к среде. В общем виде время задержки можно выразить следующим образом:

$$\Delta t_3 = \Delta t_d + \Delta t_m + \sum_n (\Delta t_{ож} + \Delta t_{обр} + \Delta t_{пер}),$$

где Δt_d – время, требуемое на детектирование события; Δt_m – время построения маршрута; $\Delta t_{ож}$ – время ожидания свободного канала связи; $\Delta t_{обр}$ – время обработки пакета на узле; $\Delta t_{пер}$ – время передачи пакета между узлами.

Пропускная способность. Пропускная способность сети определяет количество данных, которые могут быть переданы в единицу времени, и измеряется в битах в секунду. Скорость передачи данных, как и задержка, зависит от выбора маршрута, ресурсов отдельных датчиков и сети в целом. В беспроводных сенсорных сетях количество передаваемых пакетов зависит от специфики задачи. Оно может варьироваться от нескольких пакетов в час до сотен пакетов в секунду. Пропускная способность выражается через количество пакетов, которые узел способен обработать за единицу времени:

$$B = n \cdot \langle S \rangle,$$

где n – максимальное количество пакетов, обрабатываемых на узле за 1 с; $\langle S \rangle$ – средний размер пакета.

Потери. Потери пакетов данных в беспроводных сенсорных сетях на канальном уровне могут возникать из-за коллизий, а на уровне маршрутизации – из-за неправильно построенного маршрута или при выходе из строя какого-либо узла. Потери выражаются через отношение потерянных пакетов к общему количеству:

$$\eta = \frac{N_{\text{пот}}}{N_{\text{общ}}},$$

где $N_{\text{пот}}$ – количество потерянных пакетов; $N_{\text{общ}}$ – общее количество.

Время жизни сети. Один из параметров качества обслуживания для беспроводных сенсорных сетей – время, в течение которого сеть сможет обеспечивать передачу данных. Поскольку время работы датчиков ограничено, необходимо минимизировать затраты при установке сети, обработке и, что особенно важно, при передаче данных. На энергетические затраты влияют выбор маршрута, режим прослушивания канала (спящий или активный режим работы сенсора), объем передаваемых данных и др.

Покрывание заданной области. Качество обслуживания беспроводной сенсорной сети оценивается относительно того, какая часть области, с которой собираются данные или ведется контроль, находится в радиусе действия сенсоров. Таким образом определяется полнота информации, которой потенциально располагает система. Этот параметр может быть выражен в количестве n сенсоров, необходимых для покрытия области площадью S с минимально допустимым уровнем сигнала.

Устойчивость к изменению топологии. Как уже упоминалось, беспроводная сенсорная сеть должна функционировать в условиях изменения топологии: при выходе узла из строя, по истечении срока его действия, при добавлении новых или перемещении существующих узлов. Для беспроводных сенсорных сетей устойчивость является одним из основных критериев качества обслуживания, поскольку они могут быть распределены таким образом, что контроль каждого узла, замена батареи или починка невозможны или сильно затруднены. Количественно эта характеристика может выражаться во времени, которое прошло с момента изменения топологии сети до восстановления ее функционирования. На характеристику устойчивости в первую очередь влияет то, как организована маршрутизация в сети, а также способ получения узлами сети информации друг о друге (таблицы маршрутизации, периодическая нотификация соседних узлов).

Обеспечение качества обслуживания зависит от особенностей протокола на каждом уровне сетевой модели [5, р. 130–141]: на физическом уровне качество обслуживания зависит от уровня шума, способа кодировки и др., на канальном – от времени доступа к среде и надежности доставки пакетов. В зависимости от реализации алгоритма маршрутизации могут изменяться расход энергии сети, задержка и скорость доставки сообщений. В табл. 1 приведены факторы, которые влияют на характеристики качества обслуживания, относящиеся к тому или иному уровню сетевой модели.

Таблица 1

**Взаимосвязь характеристик качества обслуживания
с различными факторами реализации сетевой модели**

Table 1

**Relation of quality of service characteristics
with network model implementation factors**

Характеристика качества обслуживания	Физический уровень	Канальный уровень	Сетевой уровень
Задержка	Способ кодировки	Расписание доступа к каналу	Время определения маршрута, длина пути
Пропускная способность	Размер сообщений	Синхронизация доступа к каналу, избыточные пакеты	Маршрутизация по нескольким путям, дополнительные данные маршрутизации в пакете, кластеризация
Потери	Уровень шума	Коллизии	Тупиковые маршруты, заикливания
Время жизни сети	Способ кодировки, мощность передачи	Время активного и пассивного режимов, повторная передача пакетов	Использование одних и тех же узлов при построении маршрута, кластеризация

Окончание табл. 1

Ending table 1

Характеристика качества обслуживания	Физический уровень	Канальный уровень	Сетевой уровень
Покрытие	Мощность передачи	–	–
Устойчивость	Мощность передачи	Период смены режимов	Динамическая маршрутизация, кластеризация

Классы задач качества обслуживания

Для того чтобы выяснить, какие параметры качества обслуживания являются существенными в каждой конкретной задаче, необходимо выделить классы задач, решаемых при помощи беспроводных сенсорных сетей, а также определить, какие показатели являются наиболее важными. Можно выделить следующие классы задач (или классы обслуживания в беспроводных сенсорных сетях в зависимости от реализуемой модели передачи данных) [6].

Задачи, связанные с мониторингом окружающей среды, состояния промышленных объектов. Узлы сети измеряют некоторые параметры (температуру, давление, влажность) и отправляют данные через равные промежутки времени. В связи с предсказуемостью трафика доступ к каналу может быть синхронизирован и определено время доставки. В данном случае главный критерий качества обслуживания – время жизни сети, поскольку в реальных условиях замена датчиков или их батарей может быть затруднена. Время жизни сети возможно увеличить за счет равномерного использования узлов при маршрутизации, а также введения спящего режима во время неактивности узла.

Поскольку время доставки в таких приложениях особой роли не играет, оно может достигать нескольких десятков секунд. Время жизни таких систем должно достигать от нескольких месяцев до нескольких лет.

Задачи, в которых датчики должны постоянно измерять какой-либо показатель и сразу передавать его на базовую станцию. Здесь приоритетным показателем является скорость доставки (задержка) и пропускная способность сети, обуславливающая возможность обрабатывать одновременно большое количество пакетов. Узлы отправляют пакеты без синхронизированного расписания доступа к каналу, соответственно, в этом классе задач наблюдается низкая гарантия доставки пакетов.

Задачи, связанные с детектированием некоторого события (датчики движения, сигнализация и др.). Главным критерием качества обслуживания в таких задачах является гарантия доставки данных за приемлемый промежуток времени. Трафик в такой сети генерируется непредсказуемо.

Задачи, в которых измерение показателя среды узлами сети происходит не постоянно, а по запросу, исходящему от базовой станции. Энергопотребление узлов такой сети уменьшается, поскольку большую часть времени они находятся в пассивном режиме, кроме того, доступ к каналу передачи данных может контролироваться на уровне базовой станции, что упрощает реализацию MAC-протокола в узлах. Для задач такого типа приоритетными параметрами качества обслуживания являются гарантия доставки пакета и задержка, т. е. время, прошедшее с момента генерации запроса до момента получения данных базовой станцией.

Беспроводные сенсорные сети также могут разделяться по характеру изменения своей физической топологии во времени:

- сети со статичными узлами. Во многих задачах беспроводных сенсорных сетей местоположение сенсоров не меняется с течением времени. Для получения информации о взаимном расположении узлов и построения таблиц маршрутизации необходимо провести начальную настройку сети, в процессе которой узлы обмениваются информацией о своем положении и определяются уровни сигнала, который доходит от одного узла к другому. В соответствии с этими данными в зависимости от реализации протокола маршрутизации будет происходить построение маршрута и передача данных от узла к узлу. Повторная настройка сети проводится только при добавлении нового или выходе из строя старого узла;

- сети с мобильными узлами. Существует ряд задач, в которых взаимное расположение узлов (физическая топология) беспроводной сенсорной сети не является фиксированным. Узлы в такой системе должны периодически обмениваться данными о своем положении. В зависимости от изменения топологии конфигурация сети может изменяться – кластеры переформировываться, маршруты меняться и т. д. В таких задачах приоритетным является непрерывное функционирование сети в условиях изменения топологии, даже если оно будет достигаться за счет увеличения задержки или уменьшения пропускной способности.

Следует отметить, что в зависимости от среды (окружения), в которой расположена сеть, между узлами могут появляться и исчезать препятствия, затрудняющие передачу сигнала, а также возникать

помехи в канале связи, что приводит к изменению уровня радиосигнала между узлами. Это эквивалентно изменению их взаимного расположения, или топологии. В данном случае даже сеть со статическими узлами может рассматриваться как мобильная.

В табл. 2 приведены приоритетные показатели качества обслуживания для выделенных классов задач, решаемых при помощи беспроводных сенсорных сетей, по топологии сети и по модели передачи данных.

Таблица 2

**Приоритетные показатели качества обслуживания
для различных классов задач беспроводных сенсорных сетей**

Table 2

**Quality of service priority characteristics
for different wireless sensor networks problem classes**

Класс задачи	Сети со статическими узлами	Сети с мобильными узлами
Периодическое измерение показателя	Время жизни	Время жизни
Постоянное измерение показателя	Задержка, пропускная способность	Устойчивость, задержка
Детектирование события	Гарантия доставки (надежность) за предсказуемый период времени	Устойчивость, потери
Измерение показателя по запросу	Потери, задержка	Устойчивость, потери

Заключение

Качество обслуживания в беспроводных сенсорных сетях определяется способностью сети обеспечить определенный уровень сервиса по сбору, обработке и передаче данных в заданных условиях. Для эффективного использования беспроводных сенсорных сетей необходимо при их построении применять технологии, позволяющие обеспечить требуемый уровень качества обслуживания. В этих целях были определены характеристики качества обслуживания, существенные для беспроводных сенсорных сетей, и проанализирована их зависимость от использования технологий и протоколов на тех или иных уровнях сетевой модели. В зависимости от специфики задачи приоритетными являются те или иные показатели качества обслуживания. Проведенная классификация задач позволяет определить требуемый класс обслуживания для каждой конкретной задачи, решаемой при помощи беспроводных сенсорных сетей.

Библиографические ссылки

1. Firoiu V., Le Boudec J. Y., Towsley D., et al. Theories and Models for Internet Quality of Service // *Proc. IEEE*. 2002. Vol. 90, issue 9. P. 1565–1591.
2. Xia F. QoS challenges and opportunities in wireless sensor/actuator networks // *Sensors*. 2008. Vol. 8, issue 2. P. 1099–1110.
3. Balen J., Zagar D., Martinovic G. Quality of service in wireless sensor networks: a survey and related patents // *Recent Pat. Comput. Sci.* 2011. Vol. 4, № 3. P. 188–202.
4. Wang Y., Liu X., Yin J. Requirements of quality of service in wireless sensor network // *International Conference on Systems and International Conference on Mobile Communications and Learning Technologies* : proc. int. conf. on netw. Washington, 2006. P. 116.
5. Ramassamy C., Fouchal H., Hunel P. Impact of application layers over wireless sensor networks. Bonn, 2012.
6. Мулярчик К. С., Полочанский А. С. Анализ характеристик качества обслуживания в беспроводных сенсорных сетях [Электронный ресурс] // *Международный конгресс по информатике: информационные системы и технологии : материалы междунар. науч. конгресса (Минск, 24–27 окт. 2016 г.)*. URL: <http://www.elib.bsu.by/handle/123456789/160468> (дата обращения: 10.12.2016).

References

1. Firoiu V., Le Boudec J. Y., Towsley D., et al. Theories and Models for Internet Quality of Service. *Proc. IEEE*. 2002. Vol. 90, issue 9. P. 1565–1591. DOI: 10.1109/JPROC.2002.802002.
2. Xia F. QoS challenges and opportunities in wireless sensor/actuator networks. *Sensors*. 2008. Vol. 8, issue 2. P. 1099–1110. DOI: 10.3390/s8021099.
3. Balen J., Zagar D., Martinovic G. Quality of service in wireless sensor networks: a survey and related patents. *Recent Pat. Comput. Sci.* 2011. Vol. 4, No. 3. P. 188–202. DOI: 10.2174/2213275911104030188.
4. Wang Y., Liu X., Yin J. Requirements of quality of service in wireless sensor network. *International Conference on Systems and International Conference on Mobile Communications and Learning Technologies* : proc. int. conf. on netw. Washington, 2006. P. 116.
5. Ramassamy C., Fouchal H., Hunel P. Impact of application layers over wireless sensor networks. Bonn, 2012.
6. Mulyarchik K. S., Polochanskiy A. S. Quality of service characteristics analysis in wireless sensor networks. *International congress on informatics: information systems and technologies* : mater. of the int. sci. congr. (Minsk, 24–27 Oct., 2016). URL: <http://www.elib.bsu.by/handle/123456789/160468> (date of access: 10.12.2016) (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 19.12.2016.
Received by editorial board 19.12.2016.

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

OUR JUBILEE

**Анатолий Иосифович
КАЛИНИН**

**Anatoly Iosifovich
KALININ**



Исполнилось 70 лет профессору кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики БГУ доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Иосифовичу Калинину.

А. И. Калинин родился 23 марта 1947 г. в г. Бобруйске. После окончания физико-математической школы-интерната при МГУ в 1964 г. он поступил на математический факультет Белорусского государственного университета, который окончил с отличием в 1970 г. Затем продолжил учебу в аспирантуре при кафедре методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики. После защиты в 1973 г. кандидатской диссертации работал на указанной кафедре в должности ассистента, после – старшего преподавателя, с 1975 по 1980 г. – доцента кафедры теории вероятностей и математической статистики, а с 1981 г. – доцента кафедры методов оптимального управления.

С 1975 по 1978 г. А. И. Калинин преподавал математику в университете г. Константина (Алжир). В 1990 г. Анатолий Иосифович защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы решения возмущенных задач оптимального

управления», в 1993 г. ему присвоено ученое звание профессора. В 1991–2000 гг. и в настоящее время А. И. Калинин – профессор кафедры методов оптимального управления, с сентября 2000 г. до апреля 2016 г. он руководил названной кафедрой.

Профессор А. И. Калинин – признанный специалист в области математической теории оптимальных процессов. Им создан универсальный метод исследования оптимальных управлений в непрерывных и дискретных динамических системах, получивший название метода приращений в пространстве состояний, а также предложена методика исследования задач оптимизации динамических систем с малыми параметрами, с помощью которой разработаны алгоритмы асимптотического решения широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач оптимального управления. Ученый ввел в теорию сингулярных возмущений новые предельные задачи, решения которых вместе с решениями вырожденных задач полностью определяют структуру оптимальных управлений в сингулярно возмущенных системах, благодаря чему, в частности, была решена проблема построения асимптотических приближений

к оптимальным управлениям в задачах оптимизации линейных систем.

А. И. Калинин опубликовал более 170 научных работ. Под его руководством защищены 7 кандидатских диссертаций. Он неоднократно получал гранты Министерства образования Республики Беларусь и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ). В рамках международного сотрудничества А. И. Калинин выезжал во Францию, Болгарию, Германию, Китай и Россию для чтения лекций и проведения совместных научных исследований с зарубежными коллегами.

Анатолий Иосифович ведет интенсивную педагогическую работу на факультете прикладной математики и информатики. Им разработаны и прочитаны базовые курсы лекций «Методы оптимизации», «Теоретическая механика», «Теория вероятностей и математическая статистика», а также ряд специальных курсов. А. И. Калинин принимал активное участие в создании специальности «Экономическая кибернетика» и читал студентам базовый курс «Экономическая теория».

А. И. Калинин является членом экспертной комиссии БРФФИ, а также специализированного совета по защите диссертаций, входит в состав редколлегии журналов «Проблемы физики, мате-

матики и техники», «Вестник Гродненского государственного университета».

За достижения в научной и педагогической работе, многолетний и плодотворный труд по подготовке высококвалифицированных кадров А. И. Калинин награжден почетными грамотами Министерства образования Республики Беларусь и ректората БГУ, а за продуктивное научное сотрудничество – медалью Пекинского научно-технологического университета.

Основные труды А. И. Калинина: О связи между функцией Беллмана и матричными импульсами // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 8. С. 1501–1504; Асимптотический метод построения оптимальных управлений с особыми участками // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 1. С. 62–67; Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104–114; Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск, 2000. 188 с.; Методы оптимизации. Минск, 2011. 412 с. (в соавт.).

Коллектив кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики сердечно поздравляет Анатолия Иосифовича с юбилеем и желает ему крепкого здоровья и новых творческих успехов.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN THE BSU

УДК 517(075.8)

Математический анализ [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-31 04 06 «Ядерная физика и технологии», 1-31 04 07 «Физика наноматериалов и нанотехнологий», 1-31 04 08 «Компьютерная физика», 1-31 04 01 «Физика (по направлениям)», направление специальности 1-31 04 01-01 «Физика (научно-исследовательская деятельность)» / сост.: В. В. Кашевский, Н. И. Ильинкова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2017. 244 с. : ил. Библиогр.: с. 236. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/170018>. Загл. с экрана. Деп. 29.03.2017, № 002029032017.

Подготовлен в соответствии с типовой учебной программой «Математический анализ». Составлен по модульной системе. Основная часть комплекса включает в себя 15 модулей. Каждый из них содержит базовые теоретические сведения по соответствующему разделу программы, примеры решения важных задач, а также контрольные вопросы. Последовательное изучение всех модулей поможет студенту освоить программу курса «Математический анализ».

УДК 33:004(075.8)+005:004(075.8)

Белецкая Л. В. Информационные технологии в экономике и управлении [Электронный ресурс] : учеб.-метод. комплекс для спец. 1-25 81 04 «Финансы и кредит» / Л. В. Белецкая, В. П. Киреенко ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2017. 104 с. : табл. Библиогр.: с. 101–104. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/172375>. Загл. с экрана. Деп. 12.05.2017, № 003112052017.

Содержит учебный материал по дисциплине «Информационные технологии в экономике и управлении». Адресуется студентам второй ступени получения высшего образования (магистратура) специальности 1-25 81 04 «Финансы и кредит» Государственного института управления и социальных технологий БГУ.

УДК 004(075.8)

Киреенко В. П. Основы информационных технологий [Электронный ресурс] : учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-21 80 14 «Искусствоведение», 1-23 80 03 «Психология», 1-24 80 01 «Юриспруденция», 1-26 80 01 «Управление в социальных и экономических системах» / В. П. Киреенко, Т. В. Борздова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2017. 458 с. : табл. Библиогр.: с. 456–458. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/172378>. Загл. с экрана. Деп. 12.05.2017, № 003212052017.

Содержит учебный материал по основам информационных технологий. Включает в себя четыре раздела – теоретическую часть, примеры выполнения практических заданий, перечень контрольных вопросов и список необходимой литературы.

УДК 514.12(075.8)+512.64(075.8)

Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс по учебной дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для спец.: 1-31 04 01 «Физика (по направлениям)», 1-31 04 06 «Ядерная физика и технологии», 1-31 04 07 «Физика наноматериалов и нанотехнологий», 1-31 04 08 «Компьютерная физика» / сост.: Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2016. 177 с. : ил. Библиогр.: с. 176–177. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/173448>. Загл. с экрана. Деп. 06.06.2017, № 004506062017.

Подготовлен в соответствии с типовыми учебными программами G527 от 13.08.2015 г. и G529 от 13.08.2015 г. в целях учебно-методического обеспечения студентов первого курса физического факультета БГУ. Задачей настоящего комплекса является систематизация изучения студентами курса «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», а также помощь начинающим преподавателям в организации практических занятий.

УДК 512.643.74(075.8)

Матрицы и определители [Электронный ресурс] : учеб.-метод. разработка для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий / Л. Л. Березкина [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2017. 53 с. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/176724>. Загл. с экрана. Деп. 07.07.2017, № 005107072017.

Включает в себя темы «Матрицы и линейные операции над ними», «Умножение матриц», «Транспонирование матриц», «Определители», «Обратная матрица», входящие в курс «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», который читается на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ. Кратко изложена теория, необходимая для успешного усвоения этих тем и решения практических задач по ним. Представлено большое количество примеров различного уровня сложности, а также приведены задачи для самостоятельного решения (с ответами). Содержание и структура учебно-методической разработки позволяют студентам использовать ее для самостоятельной работы над данными темами.

СОДЕРЖАНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Садовский А. П., Маковецкая Т. В., Чергинец Д. Н.</i> Радикал идеала фокусных величин комплексной системы Куклеса	4
--	---

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

<i>Курсов В. В.</i> Скрещенное произведение тела кватернионов и четверной группы	12
<i>Васьковский М. М., Матвеев Г. В.</i> Верификация модулярного разделения секрета	17

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Цеховая Т. В.</i> Вариограммный анализ случайных процессов	23
---	----

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Белько В. И., Лемешевский С. В., Чуйко М. М.</i> Численное моделирование высокоэнергетической ионной имплантации с использованием уравнений Фоккера – Планка	28
---	----

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

<i>Пилипчук Л. А.</i> Методы декомпозиции разреженных систем линейных алгебраических уравнений для оценки трафика обобщенного мультиграфа	37
---	----

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

<i>Королевич В. В., Медведев Д. Г.</i> Расчет осесимметричного термосилового изгиба вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода	44
<i>Михасев Г. И., Босяков С. М., Юркевич К. С., Дутина А. А., Петрова Л. Г., Майсюк М. М.</i> Выбор толщины хрящевого трансплантата для хирургического лечения ретракционного кармана тимпанальной мембраны на основании модального анализа колебательной системы среднего уха	52
<i>Кравчук А. С., Кравчук А. И.</i> Приближенное решение контактной задачи для жесткого диска и плоскости с круговым вырезом без использования сингулярных уравнений	59

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Мулярчик К. С., Полочанский А. С.</i> Качество обслуживания в беспроводных сенсорных сетях	65
---	----

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

<i>Анатолий Иосифович Калинин</i>	71
Аннотации депонированных в БГУ работ	73

CONTENTS

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Sadovskii A. P., Makavetskaya T. V., Cherginets D. N.</i> The radical of the focal values ideal of the complex Kukles system	4
---	---

GEOMETRY AND ALGEBRA

<i>Kursov V. V.</i> A crossed product of a skew field of quaternions and four-group	12
<i>Vaskouski M. M., Matveev G. V.</i> Verification of modular secret sharing	17

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Tsekhavaya T. V.</i> Variogram analysis of stochastic processes	23
--	----

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

<i>Belko V. I., Lemeshevsky S. V., Chuiko M. M.</i> Numerical modeling of high-energy ion implantation using Fokker – Planck equations	28
--	----

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

<i>Pilipchuk L. A.</i> Decomposition methods of sparse systems of linear algebraic equations for estimation of the traffic for the generalized multigraph	37
---	----

MECHANICS OF DEFORMABLE SOLIDS

<i>Karalevich U. V., Medvedev D. G.</i> Calculation of the axisymmetric thermopower bending problem of rotating in the thermal field of the polar-orthotropic disc with variable thickness by Volterra integral equation of the second kind	44
<i>Mikhasev G. I., Bosiakov S. M., Yurkevich K. S., Dutina A. A., Petrova L. G., Maisyuk M. M.</i> Graft thickness assessment for surgery of retraction pocket of the middle ear based on finite-element analysis of eigenfrequencies of the eardrum oscillating system	52
<i>Kravchuk A. S., Kravchuk A. I.</i> An approximate solution of the contact problem for the hard disk and plane with a circular hole without application of singular equations	59

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Mulyarchik K. S., Polochanskiy A. S.</i> Quality of service in wireless sensor networks	65
--	----

OUR JUBILEE

<i>Anatoly Iosifovich Kalinin</i>	71
Indicative abstracts of the papers deposited in the BSU	73

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 2. 2017**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.
Почтовый адрес: ул. Кальварийская, 9, каб. 636, 637,
220004, г. Минск.
Тел. 259-70-74, 259-70-75.
E-mail: vestnikbsu@mail.ru
vestnikbsu@bsu.by

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Бабашова, Е. В. Павлова*
Технический редактор *В. В. Кильдишева*
Корректоры *М. А. Подголина, К. Б. Скакун, Д. В. Русс*

Подписано в печать 02.08.2017.
Тираж 100 экз. Заказ 508.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского
государственного университета».
ЛП № 02330/117 от 14.04.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, г. Минск.

© БГУ, 2017

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 2. 2017**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: Nezavisimosti ave., 4,
220030, Minsk.
Correspondence address: Kal'variiskaya str., 9, office 636, 637,
220004, Minsk.
Tel. 259-70-74, 259-70-75.
E-mail: vestnikbsu@mail.ru
vestnikbsu@bsu.by

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Babashova, E. V. Pavlova*
Technical editor *V. V. Kil'disheva*
Proofreaders *M. A. Podgolina, K. B. Skakun, D. V. Russ*

Signed print 02.08.2017.
Edition 100 copies. Order number 508.

Publishing Center of BSU.
License for publishing No. 02330/117, 14 April, 2014.
Krasnoarmeiskaya str., 6, 220030, Minsk.

© BSU, 2017