



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

1

2017

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики БГУ, заведующий кафедрой математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

Ответственный секретарь **МАТЕЙКО О. М.** — кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демид Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Дудкин А. А. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Дымков М. П. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Княжище Л. Б. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Краснопрошин В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Кротов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Макаров Е. К. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Мандрик П. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Матус П. П. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Медведев Д. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Михасев Г. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Ровба Е. А. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь.
Сафонов В. Г. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Скиба А. Н. Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
Тузинов А. В. Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Чижик С. А. Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Янчевский В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

- | | |
|----------------------------|---|
| Editor-in-chief | KHARIN Y. S. , doctor of science (physics and mathematics), full professor, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, head of the department of mathematical modelling and data analysis of the faculty of applied mathematics and computer science of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: kharin@bsu.by |
| Executive secretary | MATEIKO O. M. , PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science of the faculty of mechanics and mathematics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: matseika@bsu.by |
-
- | | |
|------------------------------|--|
| Ablameyko S. V. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Altenbach H. | Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany. |
| Beniash-Kryvets V. V. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Gladkov A. L. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Golovko V. A. | Brest State Technical University, Brest, Belarus. |
| Gorokhovik V. V. | Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |
| Gromak V. I. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Dzemyda G. | Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania. |
| Doudkin A. A. | United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |
| Dymkov M. P. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Egorov A. D. | Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |
| Zoladek H. | Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland. |
| Zhuravkov M. A. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Zubkov A. M. | Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. |
| Kashin B. S. | Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia. |
| Knyazhishche L. B. | Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |
| Kozhanov A. I. | Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia. |
| Kotov V. M. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Krasnoproshin V. V. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Krotov V. G. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Makarov E. K. | Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |
| Mandrik P. A. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Matus P. P. | Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |
| Medvedev D. G. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Mikhasev G. I. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Rovba E. A. | Yanka Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus. |
| Safonov V. G. | Belarusian State University, Minsk, Belarus. |
| Skiba A. N. | Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus. |
| Tuzikov A. V. | Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |
| Chizhik S. A. | National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |
| Yanchevskii V. I. | Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. |

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С δ -ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. Г. КОТ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Описано поведение собственных значений аппроксимирующих операторов и установлено, каким образом в пределе из них получается одно собственное значение. Ранее построены аппроксимации выражения $L_0 u = -\Delta u + a(\epsilon)\delta u = f$ операторами конечного ранга; найден явный вид резольвенты аппроксимирующего семейства; определен предел резольвенты и выделены случаи резонанса. Продолжено решение поставленной задачи и изложен этап, связанный с описанием спектра построенных предельных операторов и исследованием поведения собственных значений аппроксимирующих операторов, с использованием метода диаграмм Ньютона. В результате были найдены собственные значения оператора.

Ключевые слова: обобщенная функция; собственные значения; метод Ньютона; асимптотическое поведение.

Образец цитирования:

Кот М. Г. Асимптотика собственных значений операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ -образными коэффициентами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 4–10.

For citation:

Kot M. G. Asymptotics of the eigenvalues of approximating differential equations with δ -different coefficients. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 4–10 (in Russ.).

Автор:

Марина Геннадьевна Кот – аспирантка кафедры функционального анализа механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Антонец.

Author:

Marina Kot, postgraduate student at the department of functional analysis, faculty of mechanics and mathematics. mtorkaylo@mail.ru

ASYMPTOTICS OF THE EIGENVALUES OF APPROXIMATING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH δ -DIFFERENT COEFFICIENTS

M. G. KOT^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

The overall objective is to describe the behavior of the eigenvalues of approximating operators and figuring out how to limit one turns one's own importance. Earlier we have done the following: built approximation expression $L_0 u = -\Delta u + a(\epsilon)\delta u = f$ operators of finite rank; explicit form approximating the resolvent family; resolutions and found the limit cases of resonance highlighted. In this article, we will continue to address this problem and set out a step associated with the description of the spectrum constructed limit operators and study the behavior of the eigenvalues of approximating operators, using Newton's diagram method. As a result of eigenvalues of the operator were found.

Key words: generalized function; eigenvalues; Newton's method; asymptotic behavior.

Введение

Уравнения, которые символически записываются в виде

$$L_0 u = -\Delta u + a(\epsilon)\delta u = f, \quad (1)$$

где δ – δ -функция Дирака, рассматриваются в разных приложениях [1; 2] и интенсивно изучаются [1–3]. Эта запись уравнения символическая потому, что произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций.

Один из основных подходов к определению понятия «решение уравнения» и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ϵ и нахождении предела резольвент

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (L_\epsilon - \lambda)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, соответствующего рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(R^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$, но возможны случаи резонанса, когда $R(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$ [1–4]. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f = E_\lambda^* f,$$

где $*$ – свертка функций; $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u - \lambda u$, заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\text{Re} \mu > 0$. Отметим, что $E_\lambda \in L_2(R^3)$.

Спектр оператора $-\Delta$ есть положительная полупрямая, причем спектр не содержит собственных значений. А у предельных операторов, отличных от $-\Delta$, имеется одно собственное значение. У аппроксимирующего оператора L_ϵ спектр может содержать в зависимости от выбранного способа аппроксимации конечный или даже бесконечный набор собственных значений. Поэтому общая задача заключается в описании поведения собственных значений аппроксимирующих операторов и выяснении того, как в пределе из них получается одно собственное значение. В настоящей работе найдена асимптотика собственных значений для аппроксимаций, построенных в работе [4].

Аппроксимирующее семейство для одной системы уравнений

В [4] рассмотрена система уравнений (1)

$$-\Delta u_1 + a_1(\epsilon)\delta u_2 = f_1,$$

$$-\Delta u_2 + a_2(\epsilon)\delta u_1 = f_2,$$

где $u = (u_1, u_2)$ – матрица коэффициентов вида

$$a(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & a_1(\varepsilon) \\ a_2(\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот специальный вид соответствует тому, что в рассматриваемой системе вторая компонента воздействует на первую, а первая – на вторую.

Для построения операторов L_ε в [4] использовались аппроксимации оператора умножения на δ -функцию операторами ранга 2, построенные с помощью финитной функции φ из пространства Шварца $D(R^3)$ такой, что $\int \varphi(x) dx = 1$. Эти аппроксимации действуют по формуле

$$u \rightarrow \int u(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x),$$

где

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Аппроксимирующее семейство L_ε действует на вектор-функцию $u = (u_1, u_2)$ по формуле

$$L_\varepsilon(u)_1 = -\Delta u_1 + a_1(\varepsilon) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x),$$

$$L_\varepsilon(u)_2 = -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x).$$

Резольвента оператора L_ε задается формулой

$$(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} = R_0(\lambda) f - S(\varepsilon, \lambda) \cdot \tilde{f} \cdot (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(x),$$

где

$$R_0(\lambda) f = \begin{bmatrix} R_0(\lambda) f_1 \\ R_0(\lambda) f_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda) f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \quad \tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy;$$

$S(\varepsilon, \lambda)$ – матрица вида

$$S(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{1 - a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon) b^2(\varepsilon, \lambda)} \begin{bmatrix} a_1(\varepsilon) & -a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon) b(\varepsilon, \lambda) \\ -a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon) b(\varepsilon, \lambda) & a_2(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$b(\varepsilon, \lambda) = \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

Резольвента определена, если $\lambda \notin R^+$ и $1 - a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon) b^2(\varepsilon, \lambda) \neq 0$.

Функция $b(\varepsilon, \lambda)$ является аналитической при $\varepsilon \neq 0$ и для нее имеет место разложение [3]

$$b(\varepsilon, \lambda) = \frac{M_{-1}}{\varepsilon} - \frac{\mu}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \mu^{k+1} \varepsilon^k,$$

где $M_k = \frac{1}{4\pi} \int \left(\int \varphi(y) \bar{\varphi}(x-y) dy \right) \|x\|^k dx$.

Далее, считаем, что

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1, \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2, \quad (2)$$

так как в этой тематике содержательные результаты получаются именно для таких коэффициентов.

Если предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon, \lambda) := D(\lambda) \quad (3)$$

есть нуль, то предел резольвент есть резольвента невозмущенного оператора $-\Delta$. В [4] показано, что для коэффициентов $a_1(\epsilon)$ и $a_2(\epsilon)$ вида (2) предел (3) может быть ненулевым только в трех случаях, которые называются *случаями резонанса*:

1) если $k_{-2}^1 = 0$, $k_{-1}^1 = 0$ и $k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2 \neq 0$, т. е. если

$$\frac{1}{a_1(\epsilon)} = k_0^1 + k_1^1 \epsilon + k_2^1 \epsilon^2 + o(\epsilon), \quad \frac{1}{a_2(\epsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\epsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\epsilon} + k_0^2 + o(\epsilon),$$

тогда $D(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{k_{-2}^2}{k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

В случае когда $k_0^1 k_{-2}^2 = M_{-1}^2$, предел (3) равен бесконечности;

2) если $k_{-2}^1 = 0$, $k_{-2}^2 = 0$ и при этом $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$,

$$\frac{1}{a_1(\epsilon)} = k_{-1}^1 \frac{1}{\epsilon} + k_0^1 + k_1^1 \epsilon + o(\epsilon), \quad \frac{1}{a_2(\epsilon)} = k_{-1}^2 \frac{1}{\epsilon} + k_0^2 + k_1^2 \epsilon + o(\epsilon),$$

тогда $D(\lambda) = \frac{1}{k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M_{-1} \mu}{2\pi}} \begin{bmatrix} k_{-1}^2 & -M_{-1} \\ -M_{-1} & k_{-1}^1 \end{bmatrix}$;

3) если $k_{-2}^2 = 0$, $k_{-1}^2 = 0$ и $k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}^2 \neq 0$,

$$\frac{1}{a_1(\epsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\epsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\epsilon} + k_0^1 + o(\epsilon), \quad \frac{1}{a_2(\epsilon)} = k_0^2 + k_1^2 \epsilon + k_2^2 \epsilon^2 + o(\epsilon),$$

следовательно, $D(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{-2}^1}{k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}^2} \end{bmatrix}$.

В случае когда $k_0^2 k_{-2}^1 = M_{-1}^2$, предел (3) равен бесконечности.

Из построения резольвенты видно, что при фиксированном ϵ собственные значения для L_ϵ определяются из равенства

$$f(\epsilon, \lambda) := \frac{1}{a_1(\epsilon) a_2(\epsilon)} - b^2(\epsilon, \lambda) = 0, \quad (4)$$

где $b(\epsilon, \lambda)$ зависит от способа аппроксимации. Таким образом, данное равенство устанавливает связь между способом аппроксимации и поведением коэффициентов и задает зависимость собственных значений от ϵ . Здесь левая часть, $f(\epsilon, \lambda)$, есть аналитическая функция от ϵ, μ при $\epsilon \neq 0$. У таких уравнений, как правило, имеется несколько гладких ветвей решений. Задача заключается в описании поведения этих ветвей в зависимости от выбранных коэффициентов и выбранной функции ϕ .

В настоящей работе исследуется поведение собственных значений аппроксимирующих операторов, показано, что для этого применим метод диаграмм Ньютона, причем разным случаям резонанса соответствуют разные диаграммы.

Метод диаграмм Ньютона

Пусть переменные x и y связаны уравнением

$$f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y) = \sum c_{kj} x^k y^j$ – аналитическая функция. Задача заключается в построении неявных функций, заданных этим уравнением, представимых в виде рядов по дробным степеням независимой переменной:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{v_k}. \quad (5)$$

В этой записи предполагается, что показатели степени x – числа v_k – возрастают ($v_{k+1} > v_k$) и коэффициенты α_k ненулевые. Если f является полиномом, сформулированная задача решается с помощью метода диаграмм Ньютона [5–8].

Основной шаг заключается в нахождении главного члена разложения, т. е. чисел v_0 и α_0 . Для краткости обозначим эти коэффициенты через v и α ; будем искать решения вида

$$y(x) = \alpha x^v + o(x^v), \quad \alpha \neq 0. \quad (6)$$

Подставив $y(x)$ вида (6) в уравнение (5) и преобразовав его, получаем выражение вида

$$\sum c_{kj} x^k (\alpha x^v)^j = \sum \sum c_{kj} \alpha^j (x^{k+vj} + o(x^{k+vj})). \quad (7)$$

Далее, рассматриваются только те k, j , при которых показатель $k + vj$ имеет наименьшее значение θ , так как главный член разложения зависит только от этих слагаемых. Легко видеть, что если такая пара k, j только одна, то решения требуемого вида не существует. Таким образом, искомое v может существовать только тогда, когда таких пар несколько.

В случае многочлена для выбора тех значений v , которые дают решение, Ньютон предложил следующий геометрический прием. На плоскости xu рассматривается множество точек (k, j) , соответствующих ненулевым коэффициентам c_{kj} . Выпуклая оболочка множества таких точек называется многогранником Ньютона для полинома $f(x, y)$. Тогда искомые числа v могут быть только тангенсами угла наклона сторон полученного многогранника, данных чисел может быть только конечное число и при таких v уравнение для нахождения коэффициента α содержит конечное число слагаемых, т. е. α находится как корень некоторого многочлена.

Асимптотика собственных значений

При рассмотрении аналитических функций часть из приведенных выше рассуждений сохраняются. Пусть теперь f есть функция из левой части (4). Аналогично случаю полинома рассмотрим множество M_f , состоящее из точек (k, j) , соответствующих ненулевым коэффициентам c_{kj} . Функция f имеет разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1(\epsilon)a_2(\epsilon)} - b^2(\epsilon, \lambda) &= k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\epsilon^4} + (k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2) \frac{1}{\epsilon^3} + \\ &+ (k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2) \frac{1}{\epsilon^2} + \left(k_{-2}^1 + k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2 + \frac{M_{-1}\mu}{2\pi} \right) \frac{1}{\epsilon} + \\ &+ \left(k_{-2}^1 k_2^2 + k_{-1}^1 k_1^2 + k_1^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_0^2 + k_2^1 k_{-2}^2 - \frac{\mu^2}{16\pi^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2} \epsilon^k, \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты C_k выражаются через M_k .

В общем случае диаграмма Ньютона M_f имеет вид, представленный на рис. 1, а. Здесь первое слагаемое в сумме (8) растет быстрее остальных, откуда следует, что при малых ϵ оператор L_ϵ не имеет собственных значений. Геометрически это проявляется в следующем. Граница выпуклой оболочки множества M_f содержит полупрямую $y = x + 3$, $x \geq -3$, а на этой полупрямой есть только одна точка из множества M_f . Поэтому уравнение для нахождения первого члена асимптотики содержит только одно слагаемое и не имеет решения.

Первому случаю резонанса соответствует диаграмма Ньютона на рис. 1, б. Диаграммы на рис. 1, а, и 1, б, отличаются только отрезком $[-3; -2]$. Но диаграмма на рис. 1, б, содержит часть прямой $\mu = 2 + \epsilon$, лежащую на границе выпуклой оболочки. Поэтому могут быть решения, у которых главный член асимптотики имеет вид $\mu(\epsilon) = \alpha \epsilon^{-1}$, $\alpha \neq 0$.

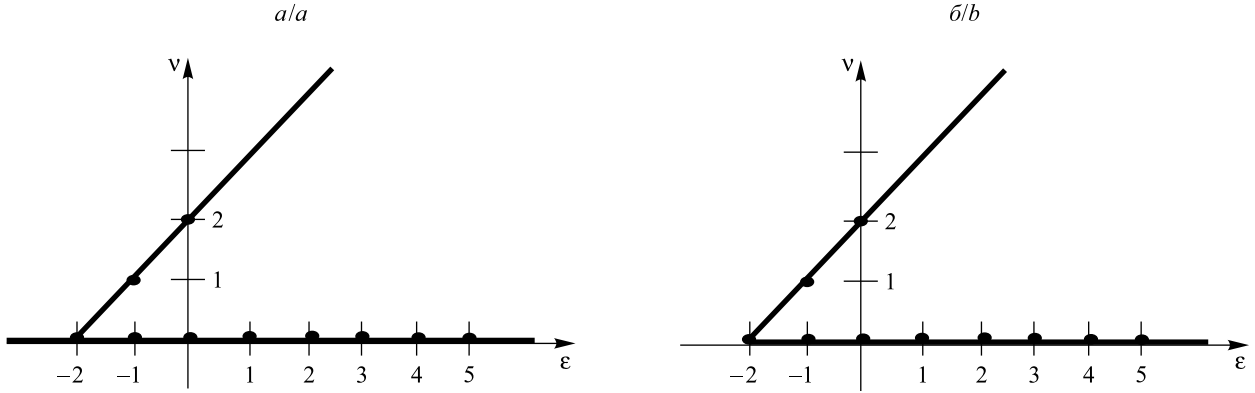


Рис. 1. Диаграмма Ньютона: a – для уравнения (8); b – для уравнения (8) в случае первого резонанса
Fig. 1. Newton's diagram: a – for the equation (8); b – for the equation (8) in the case of the first resonance

Запишем сумму членов разложения функции f из (4), соответствующих прямой $\mu = 2 + \varepsilon$. Получаем, что эта сумма имеет вид

$$\left(k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2\right) \frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{M_{-1} \mu}{2\pi}\right) \frac{1}{\varepsilon} + \left(-\frac{\mu^2}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2} \varepsilon^k = \mu^2 \psi(\varepsilon \mu),$$

где $\psi(\varepsilon) = \left(k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2\right) \frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{M_{-1}}{2\pi}\right) \frac{1}{\varepsilon} + \left(-\frac{1}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varepsilon^k$.

При подстановке $\mu(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^{-1}$, $\alpha \neq 0$, получаем равенство $\mu^2 \psi(\alpha) = 0$. Таким образом, если $\psi(\alpha) = 0$, то $\mu(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^{-1} + o(\varepsilon)$, $\alpha \neq 0$, является главным членом асимптотики собственного значения. Функция ψ определяется способом аппроксимации, каждый корень уравнения $\psi(\alpha) = 0$ порождает собственное значение, стремящееся к бесконечности, $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом не существует других решений, имеющих степенную асимптотику. Это согласовано с тем, что предельный оператор в этом случае резонанса не имеет собственных значений.

Наиболее интересным является второй случай резонанса, когда $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$.

Теорема. В случае выполнения условий второго резонанса существует одна ветвь решения уравнения (4), которое имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, а остальные ветви уходят на бесконечность со скоростью $\frac{1}{\varepsilon}$.

Доказательство. Для этого случая диаграмма Ньютона выглядит следующим образом (рис. 2).

Различие в виде диаграмм приводит к разному поведению собственных значений – корней уравнения (4).

На полученной диаграмме Ньютона имеется вертикальный отрезок, которому соответствуют, как и в случае многочленов, ветви решений, имеющие конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Асимптотическое поведение этих ветвей определяется из уравнения, соответствующего этому вертикальному отрезку:

$$\left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M_{-1} \mu}{2\pi}\right) \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

У этого уравнения имеется решение

$$\mu_0 = -\frac{2\pi(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2)}{M_{-1}}.$$

Заметим, что это число есть единственное собственное значение предельного оператора, соответствующего этому случаю резонанса. Таким образом, у аппроксимирующих операторов существуют собственные значения, стремящиеся к собственному значению предельного оператора.

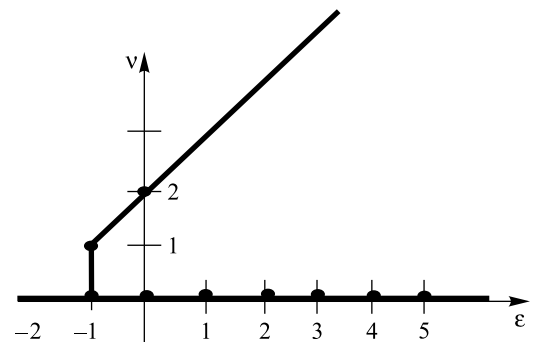


Рис. 2. Диаграмма Ньютона для уравнения (8) в случае второго резонанса
Fig. 2. Diagram of Newton's equation (8) for the second resonance

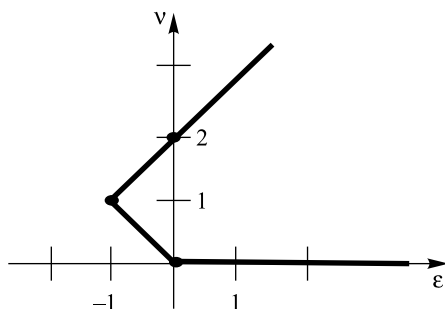


Рис. 3. Диаграмма Ньютона для нахождения $\mu_1(\epsilon)$

Fig. 3. Newton's diagram to find $\mu_1(\epsilon)$

Одной из граней выпуклой оболочки, как и в случае первого резонанса, является бесконечная полупрямая. Уравнение, соответствующее этой грани, имеет вид

$$\left(-\frac{\mu^2}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2} \epsilon^k = \mu^2 \psi_1(\epsilon \mu).$$

Аналогично получаем, что решения, соответствующие этой грани, есть функции вида $\mu = \frac{\alpha}{\epsilon}$, где α – корень уравнения $\psi_1(\alpha) = 0$. Все такие решения уходят на бесконечность при $\epsilon \rightarrow 0$.

Как и в классическом случае многочлена, может быть найден второй и последующие члены разложения. Для нахождения второго члена разложения будем искать решение в виде $\mu(\epsilon) = \mu_0 + \gamma(\epsilon)$, где главный член $\mu_1(\epsilon)$ разложения $\gamma(\epsilon) = \mu_1 \epsilon + o(\epsilon)$ определяется из диаграммы Ньютона (рис. 3).

Таким образом, в данной работе описано поведение собственных значений аппроксимирующих операторов в различных случаях резонанса.

Библиографические ссылки

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.]. М., 1991.
2. Антоневиц А. Б., Романчук Т. А. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. Гродн. гос. ун-та им. Я. Купалы / редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. Гродно, 2008. С. 11–28.
3. Антоневиц А. Б., Романчук Т. А. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций. Саарбрюккен, 2012.
4. Кот М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений δ -образными коэффициентами // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 3. С. 111–117.
5. Кащенко И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений. Ярославль, 2011.
6. Васильев В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 3. С. 1–11.
7. Забрейко П. П., Кривко-Красько А. В. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые // Тр. Ин-та матем. 2014. Т. 22, № 2. С. 32–45.
8. Забрейко П. П., Кривко-Красько А. В. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые. II // Тр. Ин-та матем. 2015. Т. 23, № 1. С. 64–75.

References

1. Al'beverio S., Gestezi F., Kheeg-Kron R., et al. Reshaemye modeli v kvantovoi mekhanike. Moscow, 1991 (in Russ.).
2. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. Approksimatsii operatorov s del'ta-obraznymi koeffitsientami [On a construction of the solution of some elliptic equations with generalized coefficients]. *Aktual. probl. mat.* : collect. of sci. proc. of the Yanka Kupala State Univ. of Grodno. Grodno, 2008. P. 11–28 (in Russ.).
3. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. Uravneniya s del'ta-obraznymi koeffitsientami: metod konechno-mernykh approksimatsii. Saarbrücken, 2012 (in Russ.).
4. Kot M. G. About resolvent convergence of operator approximating system of equations with δ -shaped coefficients. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. No. 3. P. 111–117 (in Russ.).
5. Kashchenko I. S. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenii uravnenii. Yaroslavl', 2011 (in Russ.).
6. Vasil'ev V. A. Asimptotika eksponentsial'nykh integralov, diagramma N'yutona i klassifikatsiya tochek minimum [Asymptotic exponential integrals, Newton's diagram and classification of minimum points]. *Funkts. anal. i ego prilozh.* 1977. Vol. 11, issue 3. P. 1–11 (in Russ.).
7. Zabreiko P. P., Krivko-Kras'ko A. V. Diagrammy N'yutona i algebraicheskie krivye [Newton diagrams and algebraic curves]. *Tr. Inst. mat.* 2014. Vol. 22, No. 2. P. 32–45 (in Russ.).
8. Zabreiko P. P., Krivko-Kras'ko A. V. Diagrammy N'yutona i algebraicheskie krivye. II [Newton diagrams and algebraic curves. II]. *Tr. Inst. mat.* 2015. Vol. 23, No. 1. P. 64–75 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 18.05.2016.
Received by editorial board 18.05.2016.

УДК 514.752.23

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ КВАДРИКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

В. В. ЛЫСЕНКО¹⁾, В. Л. ТИМОХОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Отмечено, что при исследовании локальных свойств пространственной кривой часто используются сопутствующие объекты, имеющие достаточно высокие аппроксимационные свойства. Важнейшие из них – соприкасающаяся плоскость и соприкасающаяся сфера. Известно, что соприкасающаяся плоскость имеет с кривой касание порядка не ниже второго, а соприкасающаяся сфера – не ниже третьего. Решается задача нахождения поверхности второго порядка (соприкасающейся квадрики), имеющей с кривой касание порядка не ниже шестого. Доказано, что соприкасающаяся квадрика существует, и описана методика ее построения. Указано, что возможно получение соприкасающейся квадрики любого из основных типов поверхностей второго порядка.

Ключевые слова: пространственная кривая; соприкасающаяся сфера; соприкасающаяся квадрика.

OSCULATING QUADRIC OF THE SPATIAL CURVE

V. V. LYSENKO^a, V. L. TIMOKHOVICH^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: valery.sholomitskaya@gmail.com

In the investigation of local properties of a space curve associated objects which have good approximation characteristics are often used. The main ones – the osculating plane and the osculating sphere. As known, the osculating plane has tangency of at least 2nd degree with the curve, while the osculating sphere – at least 3rd degree. In the paper a problem of

Образец цитирования:

Лысенко В. В., Тимохович В. Л. Соприкасающаяся квадрика пространственной кривой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 11–15.

For citation:

Lysenko V. V., Timokhovich V. L. Osculating quadric of the spatial curve. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 11–15 (in Russ.).

Авторы:

Валерия Владимировна Лысенко – студентка механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методов преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:

Valery Lysenko, student at the faculty of mechanics and mathematics.

valery.sholomitskaya@gmail.com

Vladimir Timokhovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.

finding of 2nd degree surface (the osculating quadric) which has tangency of at least 6th degree is considered. It is proved the osculating quadric exists and a method of its construction is described. Also existence of osculating quadric of any basic type of 2nd degree surface is pointed out.

Key words: space curve; osculating sphere; osculating quadric.

Рассмотрим гладкую кривую γ в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , заданную натуральной параметризацией $\bar{\rho}(s)$, $s \in (-\epsilon; \epsilon)$. Будем считать, что $\bar{\rho}(s_1) \neq \bar{\rho}(s_2)$ при $s_1 \neq s_2$, а в точке $\rho_0 = \rho(0)$ кривизна κ и кручение τ отличны от нуля и репер Френе $\{\rho; \bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ совпадает с фиксированным репером $\{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ (здесь и далее $\rho(s)$ – точка с радиус-вектором $\bar{\rho}(s)$).

Пусть $\mathcal{L}$ – некоторая фигура в E^3 (кривая или поверхность), содержащая точку ρ_0 . Скажем, что $\mathcal{L}$ имеет с кривой γ в точке ρ_0 соприкосновение порядка не ниже n -го, если $\frac{\delta(s)}{s^{n+1}}$ ограничено при $s \rightarrow 0$, где $\delta(s)$ – расстояние от точки $\rho(s)$ до $\mathcal{L}$.

В любом, достаточно подробном курсе классической дифференциальной геометрии [1; 2] доказывается, что порядок соприкосновения касательной прямой с γ в точке ρ_0 не ниже первого, соприкасающихся плоскости и окружности – не ниже второго, соприкасающейся сферы – не ниже третьего порядка. В настоящей работе доказывается существование поверхности второго порядка (квадрики), имеющей с γ в точке ρ_0 соприкосновение не ниже шестого порядка. Начнем с предварительных рассмотрений.

Пусть $\mathcal{L}$ – квадрика, содержащая точку ρ_0 , заданная (в репере $\{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$) уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, где

$$\Phi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz \text{ и } G^2 + H^2 + I^2 \neq 0.$$

Фиксируем вектор $\bar{n} = (G, H, I)$. Отметим, что $\bar{n}$ ортогонален $\mathcal{L}$ в точке ρ_0 , поскольку $\bar{n} = \frac{1}{2} \nabla \Phi(0, 0, 0)$, где $\nabla \Phi(0, 0, 0)$ – вектор-градиент для Φ в точке ρ_0 . Через точку $\rho(s)$ на кривой γ проведем прямую $\Delta(s)$ с направляющим вектором $\bar{n}$. При достаточно малом s $\Delta(s)$ пересекает $\mathcal{L}$ в некоторой точке $p(s)$ и

$$\bar{p}(s) = \bar{\rho}(s) + \lambda(s)\bar{n},$$

где $\lambda(s)$ – некоторый переменный коэффициент и $\lambda(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$. Очевидно, что $\delta(s)$ (расстояние от $\rho(s)$ до $\mathcal{L}$) и $\lambda(s)$ – бесконечно малые (при $s \rightarrow 0$) одного и того же порядка.

Пусть $\rho(s) = (u(s), v(s), w(s))$. Тогда $p(s) = (u(s) + \lambda(s)G, v(s) + \lambda(s)H, w(s) + \lambda(s)I)$. Подставляя координаты $p(s)$ в уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ и преобразуя полученное тождество, приходим к следующему соотношению, имеющему вид квадратного уравнения относительно λ :

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (AG^2 + BH^2 + CI^2 + 2DGH + 2EGI + 2FHI) + \\ & + 2\lambda [(AG + DH + EI)u + (BH + DG + FI)v + (CI + EG + FH)w + G^2 + H^2 + I^2] + \\ & + Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw + 2Gu + 2Hv + 2Iw = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(здесь и далее при возможности опускаем аргумент s).

Положим

$$\Phi(x, y, z) = \Psi(x, y, z) + L(x, y, z),$$

где $\Psi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$ – квадратичная часть; $L(x, y, z) = 2Gx + 2Hy + 2Iz$ – линейная часть; $l(x, y, z) = (AG + DH + EI)x + (BH + DG + FI)y + (CI + EG + FH)z$. Тогда (1) получает более простой вид:

$$\Psi(\bar{n})\lambda^2 + 2[\bar{n}^2 + l(u, v, w)]\lambda + \Phi(u, v, w) = 0. \quad (2)$$

При $s = 0$ (при этом $u = v = w = 0$) уравнение (2) принимает вид

$$\Psi(\bar{n})\lambda^2 + 2\bar{n}^2\lambda = 0. \quad (3)$$

Если $\Psi(\bar{n}) = 0$, то (2) имеет единственное решение

$$\lambda = -\frac{\Phi(u, v, w)}{2[\bar{n}^2 + l(u, v, w)]}$$

(прямая $\Delta(s)$ пересекает $\mathcal{L}$ в одной точке) и порядок малости λ тот же, что и у $\Phi(u, v, w)$.

Если же $\Psi(\bar{n}) \neq 0$, то корни (3) есть $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\frac{2\bar{n}^2}{\Psi(\bar{n})} \neq 0$. Но тогда, поскольку корни $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ квадратного уравнения (2) обращаются при $s = 0$ в корни λ_1 и λ_2 уравнения (3), порядок малости $\lambda_1(s)$ (очевидно, именно его следует выбрать) тот же, что и у произведения $\lambda_1(s)\lambda_2(s) = \frac{\Phi(u, v, w)}{\Psi(\bar{n})}$, которое, в свою очередь, того же порядка малости, что и $\Phi(u, v, w)$.

Итак, в обоих случаях приходим к задаче отыскания коэффициентов $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, при которых функция $\Phi(u, v, w)$ является бесконечно малой (при $s \rightarrow 0$) наивысшего возможного порядка.

Разложим $\bar{\rho}(s)$ по формуле Тейлора. Учитывая, что $\bar{\rho}(0) = \bar{0}$,

$$\bar{\rho}(s) = \sum_{n=1}^m \frac{s^n}{n!} \bar{\rho}^{(n)}(0) + s^{m+1} \bar{g}(s) \quad (4)$$

(m достаточно велико, $\bar{g}(s) = (g_1(s), g_2(s), g_3(s))$, и функция $|\bar{g}(s)|$ ограничена при $s \rightarrow 0$).

Пусть

$$\bar{\rho}^{(n)} = a_n \bar{\tau} + b_n \bar{v} + c_n \bar{\beta} \quad (5)$$

(a_n, b_n, c_n – функции параметра s). Применяя формулы Френе ($\dot{\bar{\tau}} = \kappa \bar{v}$, $\dot{\bar{v}} = -\kappa \bar{\tau} + \varkappa \bar{\beta}$, $\dot{\bar{\beta}} = -\varkappa \bar{v}$), находим

$$\begin{cases} \dot{\bar{\rho}} = \bar{\tau}, \\ \ddot{\bar{\rho}} = \kappa \bar{v}, \\ \dddot{\bar{\rho}} = -\kappa^2 \bar{\tau} + \dot{\kappa} \bar{v} + \kappa \varkappa \bar{\beta}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ b_1 = 0, \\ c_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 0, \\ b_2 = \kappa, \\ c_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = -\kappa^2, \\ b_3 = \dot{\kappa}, \\ c_3 = \kappa \varkappa. \end{cases} \quad (6)$$

Далее, $\bar{\rho}^{(n+1)} = (a_n \bar{\tau} + b_n \bar{v} + c_n \bar{\beta})' = (\dot{a}_n - \kappa b_n) \bar{\tau} + (\dot{b}_n - \kappa a_n - \varkappa c_n) \bar{v} + (\dot{c}_n - \varkappa b_n) \bar{\beta}$ и таким образом получаем рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dot{a}_n - \kappa b_n, \\ b_{n+1} = \dot{b}_n + \kappa a_n - \varkappa c_n, \\ c_{n+1} = \dot{c}_n + \varkappa b_n. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая (5), (6) и совпадение при $s = 0$ репера Френе с репером $\{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, перепишем (4) по координатно:

$$\begin{cases} u(s) = s + \sum_{n=3}^m \frac{a_n}{n!} s^n + g_1(s) s^{m+1}, \\ v(s) = \frac{\kappa}{2} s^2 + \sum_{n=3}^m \frac{b_n}{n!} s^n + g_2(s) s^{m+1}, \\ w(s) = \sum_{n=3}^m \frac{c_n}{n!} s^n + g_3(s) s^{m+1} \end{cases} \quad (8)$$

(здесь и далее a_n, b_n, c_n при $s = 0$). Подставим выражения (8) в $\Phi(u, v, w)$. При этом положим $G = 0$ (иначе $\Phi(u, v, w)$ – бесконечно малая того же порядка, что и s). Преобразуя полученное, приходим к представлению вида

$$\begin{aligned}\Phi(u, v, w) = & (m_{11}A + m_{12}D + m_{13}E + m_{14}F + m_{15}C + m_{16}B + m_{17}I + m_{18}H)s^2 + \\ & + (m_{21}A + m_{22}D + m_{23}E + m_{24}F + m_{25}C + m_{26}B + m_{27}I + m_{28}H)s^3 + \dots \\ & \dots + (m_{51}A + m_{52}D + m_{53}E + m_{54}F + m_{55}C + m_{56}B + m_{57}I + m_{58}H)s^6 + \dots,\end{aligned}$$

где величины m_{ij} выражаются через a_n, b_n, c_n (считаем, в (4) $m \geq 6$). Приравнявая к нулю коэффициенты при степенях s со второй по шестую, получаем систему линейных уравнений, которая дает возможность выразить A, D, E, F, C через B, H, I и имеет вид (векторно-матричный)

$$M \begin{pmatrix} A \\ D \\ E \\ F \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{18}H \\ -m_{27}I - m_{28}H \\ -m_{36}B - m_{37}I - m_{38}H \\ -m_{46}B - m_{47}I - m_{48}H \\ -m_{56}B - m_{57}I - m_{58}H \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{pmatrix} \text{ и } \det M \neq 0.$$

Действительно, (6) и (7) позволяют вычислить все величины m_{ij} , в частности

$$\begin{aligned}m_{11} = 1, m_{12} = \dots = m_{17} = 0; m_{22} = b_2 = \kappa, m_{23} = \dots = m_{26} = 0; \\ m_{33} = \frac{c_3}{3} = \frac{\kappa\chi}{3}, m_{34} = m_{35} = 0; m_{44} = \frac{b_2c_3}{6} = \frac{\kappa^2\chi}{6}, m_{45} = 0; m_{55} = \frac{c_3^2}{36} = \frac{(\kappa\chi)^2}{36},\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\det M = m_{11}m_{22}m_{33}m_{44}m_{55} = \frac{\kappa^6\chi^4}{648} \neq 0.$$

Отметим, что, поскольку $m_{18} = b_2 = k$ и $m_{27} = \frac{c_3}{3} = \frac{\kappa\chi}{3}$, правый столбец в (9) ненулевой и, следовательно, в силу невырожденности матрицы M левый столбец тоже ненулевой, т. е. $\Phi(x, y, z)$ имеет нетривиальные (ненулевые) квадратичную $\Psi(x, y, z)$ и линейную $L(x, y, z)$ части.

Все вышерассмотренное позволяет сформулировать следующее.

Теорема. Существует содержащая точку ρ_0 квадрика, имеющая с кривой γ в точке ρ_0 соприкосновение порядка не ниже шестого.

Замечание. Описанная здесь квадрика достаточно вариативна. Уже для винтовой линии с $\kappa = \chi = 1$, осуществляя на компьютере различные наборы констант B, I, H , можно получить эллипсоид, эллиптический и гиперболический параболоиды, однополостный и двуполостный гиперболоиды, а также конус. Отметим также, что если попытаться повысить порядок соприкосновения, формируя систему, аналогичную (9), но состоящую уже из шести уравнений (полагая в (4) $m \geq 7$), то условие $\det M \neq 0$ определит некоторую взаимосвязь между значениями кривизны κ , кручения χ и их производных при $s = 0$ (т. е. κ и χ перестанут быть независимыми).

Библиографические ссылки

1. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия. М. ; Л., 1949.
2. *Фиников С. П.* Курс дифференциальной геометрии. М., 1952.

References

1. Vygodsky M. Y. *Differentsial'naya geometriya* [Differential geometry]. Moscow ; Leningrad, 1949 (in Russ.).
2. Finikov S. P. *Kurs differentsial'noi geometrii* [Course of differential geometry]. Moscow, 1952 (in Russ.).

*Статья поступила в редколлегию 05.11.2015.
Received by editorial board 05.11.2015.*

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.2

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ БИНОМИАЛЬНОЙ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ

М. К. ЖУРАК¹⁾, Ю. С. ХАРИН¹⁾

¹⁾Учреждение БГУ «Научно-исследовательский институт прикладных
проблем математики и информатики», пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Построена новая, биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных, которая является многомерной неоднородной марковской цепью с конечным пространством состояний. Использован метод максимального правдоподобия для статистического оценивания параметров модели. Доказано, что построенные оценки являются состоятельными и асимптотически нормально распределенными. Вычислена информационная матрица Фишера, которая имеет блочно-диагональный вид и является невырожденной. Результаты анализа асимптотических свойств оценок максимального правдоподобия использованы при построении статистики для статистической проверки гипотез о значениях параметров биномиальной условно авторегрессионной модели. Построено решающее правило для статистической проверки гипотез и получено асимптотическое выражение мощности теста для семейства континуальных альтернатив. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных для анализа эффективности построенного решающего правила. Представлены графики зависимостей экспериментальных и теоретических оценок вероятности ошибки первого рода и мощности теста от длительности наблюдений, иллюстрирующие согласие теоретических и экспериментальных результатов.

Ключевые слова: пространственно-временные данные; векторная цепь Маркова; оценки максимального правдоподобия; проверка гипотез.

Образец цитирования:

Журак М. К., Харин Ю. С. Статистическая проверка гипотез о значениях параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 16–22.

For citation:

Zhurak M. K., Kharin Y. S. Statistical hypotheses testing for parameters of binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 16–22 (in Russ.).

Авторы:

Марина Константиновна Журак – младший научный сотрудник.

Юрий Семенович Харин – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; директор.

Authors:

Marina Zhurak, junior scientific researcher.
mzhurak@gmail.com

Yuriy Kharin, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics), full professor; director.
kharin@bsu.by

STATISTICAL HYPOTHESES TESTING FOR PARAMETERS OF BINOMIAL CONDITIONALLY AUTOREGRESSIVE MODEL OF SPATIO-TEMPORAL DATA

M. K. ZHURAK^a, Y. S. KHARIN^a

^aResearch Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University,
Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: kharin@bsu.by

This paper is devoted to new binomial conditional autoregressive model of spatio-temporal data. This model is multi-dimensional non-homogeneous Markov chain with a finite state space. We use the maximum likelihood method for statistical estimation of the model parameters. We show that these estimators are consistent and asymptotically normally distributed. Fisher information matrix is calculated; it takes block-diagonal form and is nonsingular. The results of the analysis of the asymptotic properties of the maximum likelihood estimators are used to construct a statistic for statistical testing of hypotheses about the values of the parameters of the binomial conditional autoregressive model. Decision rule for statistical hypotheses testing is built and an asymptotic expression of the power of the test is obtained for a family of contiguous alternatives. Experiments have been conducted on simulated data to evaluate performance of the constructed decision rule. Plots of experimental and theoretical estimates of the first type error probability and power of the test in dependence on the length of the observation period are presented, they illustrate adequacy of theoretical and experimental results.

Key words: spatio-temporal data; vector Markov chain; maximum likelihood estimator; statistical hypotheses testing.

Введение

Моделирование и анализ пространственно-временных данных являются актуальной теоретической и прикладной задачей [1–6]. Байесовская пространственно-временная модель применялась для анализа случаев заболевания раком [1]. Байесовская пространственно-временная геостатистическая модель [2] использовалась для решения задач при большом объеме данных. В [3] решается задача предсказания скорости ветра на основе пространственно-временных данных. Пуассоновская авторегрессионная модель, которая была применена для анализа финансовых данных фондовых операций, изучена в [4].

В [5] разработана биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и предложен алгоритм вычисления оценок максимального правдоподобия (ОМП). Результаты теоретического анализа свойств построенных ОМП представлены в [6]. В настоящей статье развиваются исследования [5; 6] и решается задача статистической проверки гипотез о параметрах биномиальной условно авторегрессионной модели на основе наблюдаемых пространственно-временных данных.

Биномиальная условно авторегрессионная модель

Введем обозначения: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – основное вероятностное пространство; N – множество натуральных чисел; Z – множество целых чисел; R – множество действительных чисел; $s \in S = \{1, 2, \dots, n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (далее будем называть их сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область; n – число сайтов; $t \in Z$ – дискретное время; $x_{s,t} \in A = \{0, 1, \dots, N\}$ – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени t в сайте s , принимающая значения из множества A ; $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau \leq t-1\} \subset F$ – σ -алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{j,t} \in R^1, j = 1, \dots, m$, – наблюдаемый (известный) набор значений m внешних факторов в момент времени t ; $L\{\xi\}$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ ; $E\{\cdot\}$, $D\{\cdot\}$, $\text{cov}\{\cdot\}$ – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации случайных величин соответственно; $Bi(\cdot; N, p)$ – биномиальный закон распределения вероятностей с параметрами $N \in N, 0 \leq p \leq 1$ для случайной величины ξ :

$$P\{\xi = l\} = Bi(l; N, p) ::= C_N^l p^l (1-p)^{N-l}, l \in A, L\{\xi\} = Bi(\cdot; N, p), \quad (1)$$

где $C_N^l = (N!/(N-l)!l!)$.

Определим биномиальную условно авторегрессионную модель пространственно-временных данных, следуя [5]. Предполагается, что при фиксированной предыстории $F_{<t} = \{x_{s,\tau} : s \in S, \tau \leq t-1\}$ случайные величины $x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}$ условно независимы и имеют биномиальный закон распределения вероятностей (1):

$$L\{x_{s,t} | F_{<t}\} = Bi(\cdot; N, p_{s,t}), \quad (2)$$

причем параметр $p_{s,t}$ удовлетворяет соотношению

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^m b_{s,j} z_{j,t}, \quad s \in S, t \in Z, \quad (3)$$

где $a_s = (a_{s,1}, \dots, a_{s,n})' \in R^n$; $b_s = (b_{s,1}, \dots, b_{s,m})' \in R^m$; $\theta_s = (a'_s, b'_s)' \in R^{n+m}$; $s \in S$; $\theta = (\theta'_1, \dots, \theta'_n)' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор-столбец параметров модели; штрих обозначает транспонирование.

Справедливо следующее выражение для вычисления вероятности $p_{s,t}$, вытекающее из (3):

$$p_{s,t} = p_s(X_{t-1}, Z_t) ::= \exp(\theta'_s Y_t) (1 + \exp(\theta'_s Y_t))^{-1}, \quad s \in S, t \in Z, \quad (4)$$

где $Z_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \dots, z_{m,t})' \in R^m$ – вектор-столбец, задающий значения m внешних факторов в момент времени t ; $X_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t})' \in R^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления по всем n сайтам в момент времени $t \in Z$; $Y_t = (X'_{t-1}, Z'_t)' \in R^{n+m}$ – составной вектор-столбец «предопределенных» переменных в (4). Обозначим: $L = \left\{ l_j = (l_{1,j}, \dots, l_{n,j})' \in A^n : j = 1, 2, \dots, v^n \right\}$ – лексикографически упорядоченное множество $v = (N+1)^n$ всевозможных значений, которые принимает вектор $X_t : |L| = v$.

Теорема 1 [5]. Если имеет место модель (2), (3), то наблюдаемый векторный временной ряд X_t является конечной неоднородной n -мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний L и матрицей вероятностей одношаговых переходов $Q = Q(\theta, t) = (q_{I,J}(\theta, t)) \in [0, 1]^{v \times v}$, $I = (I_s), J = (J_s) \in L$:

$$q_{I,J} = q_{I_s, J_s}(\theta, t) ::= \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \left(\exp(a'_s I + b'_s Z_{t-1}) \right)^{J_s} \left(1 + \exp(a'_s I + b'_s Z_{t-1}) \right)^{-N}, \quad t \in Z. \quad (5)$$

В условиях теоремы 1, если вектор внешних факторов не зависит от t , матрица вероятностей одношаговых переходов (5) также не зависит от t и цепь Маркова является однородной.

Оценки максимального правдоподобия параметров модели и их асимптотические свойства

Примем обозначения: $\theta = (\theta'_1, \dots, \theta'_n)' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор $n(n+m)$ параметров, подлежащих оцениванию; $O_m \in R^m$ – m -нулевой вектор-столбец.

В рамках модели (2), (3) логарифмическая функция правдоподобия для $n \times T$ пространственно-временных наблюдений $\{x_{s,t} : s \in S, t = 1, 2, \dots, T\}$, где T – длительность наблюдения, имеет аддитивный по $\theta_1, \dots, \theta_n$ вид [5]

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^n l_s(\theta_s), \quad l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^T \left(x_{s,t} \theta'_s Y_t - N \ln(1 + \exp(\theta'_s Y_t)) + \ln C_N^{x_{s,t}} \right).$$

ОМП $\hat{\theta} \in R^{n(n+m)}$ составного вектора параметров определяется как решение следующей экстремальной задачи [5]:

$$l(\theta) \rightarrow \max_{\theta}. \quad (6)$$

Теорема 2 [6]. Если имеет место модель (2), (3), $m = 1$, внешний параметр $z_{1t} = z \neq 0$ не зависит от времени t и векторная цепь Маркова $X_t \in L$ является стационарной, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in \mathbf{R}^1$ информационная матрица Фишера является невырожденной и имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$G = N \operatorname{diag} \left\{ E \left\{ Y_i Y_i' p_i(X_{i-1}, z) (1 - p_i(X_{i-1}, z)) \right\} \right\}, \quad Y_i = (X_{i-1}', z)', \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Теорема 3 [6]. Если $m = 1$, $z_{1t} = z \neq 0$ не зависит от t и цепь Маркова $X_t \in L$ стационарна, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in \mathbf{R}^1$ построенные согласно (6) оценки максимального правдоподобия $\{\hat{\theta}_s\}$ при $T \rightarrow +\infty$ являются состоятельными и асимптотически нормально распределенными:

$$L \left\{ \sqrt{T} (\hat{\theta} - \theta^0) \right\} \longrightarrow N_{n(n+1)}(0, G^{-1}), \quad (8)$$

где информационная матрица Фишера G вычисляется по формуле (7).

Статистическая проверка гипотез

По наблюдаемым пространственно-временным данным $\{x_{s,t} : s \in S, t = 1, 2, \dots, T\}$ необходимо проверить простую гипотезу $H_0 : \theta^0 = \theta^*$ о том, что вектор параметров θ^0 совпадает с наперед заданным вектором $\theta^* \in \mathbf{R}^{n(n+1)}$ против сложной альтернативы $H_1 = \bar{H}_0 : \theta^0 \neq \theta^*$.

Построим статистику

$$g_T = g(X_1, \dots, X_T) ::= T(\hat{\theta} - \theta^*)' G(\hat{\theta} - \theta^*) \geq 0, \quad (9)$$

где $\hat{\theta}$ – оценка максимального правдоподобия параметров модели, определяемая (6), а матрица G найдена в теореме 2.

Теорема 4. Если верна гипотеза H_0 , то при $T \rightarrow \infty$ имеет место сходимость статистики g_T по распределению вероятностей к центральному χ^2 -распределению с $n(n+1)$ степенью свободы

$$L_{H_0} \{g_T\} \rightarrow \chi_{n(n+1)}^2. \quad (10)$$

Доказательство. Воспользуемся асимптотическим свойством (8) из теоремы 3. Рассмотрим последовательность случайных векторов

$$\xi_T = (\xi_{Tk}) = \sqrt{T} G^{1/2} (\hat{\theta} - \theta^*) \in \mathbf{R}^{n(n+1)}. \quad (11)$$

Если верна гипотеза H_0 , то в силу (8), (11) имеем сходимость

$$L_{H_0} \{\xi_T\} \rightarrow N_{n(n+1)}(0, I_{n(n+1)}),$$

т. е.

$$\xi_T \xrightarrow{D} \eta = (\eta_k) \in \mathbf{R}^{n(n+1)}, \quad L\{\eta\} = N_{n(n+1)}(0, I_{n(n+1)}), \quad (12)$$

где I_m – единичная $(m \times m)$ -матрица. Согласно (9), (11) статистика g_T представима в виде

$$g_T = T(\hat{\theta} - \theta^*)' G(\hat{\theta} - \theta^*) = \xi_T' \xi_T,$$

откуда согласно (12) имеем при $T \rightarrow \infty$

$$g_T \xrightarrow{D} \eta' \eta = \sum_{k=1}^{n(n+1)} \eta_k^2.$$

Поэтому в силу определения центрального χ^2 -распределения получаем утверждение (10) теоремы. ■

Построим решающее правило для статистической проверки гипотез H_0, H_1 :

$$d = d(X_1, \dots, X_T) = \begin{cases} 0, & g_T < \Delta, \\ 1, & g_T \geq \Delta. \end{cases} \quad (13)$$

Следствие. Если пороговое значение Δ в решающем правиле (13) имеет вид

$$\Delta = F_{\chi_{n(n+1)}^2}^{-1}(1 - \alpha),$$

где $F_{\chi_{n(n+1)}^2}(\cdot)$ – функция распределения χ^2 -распределения вероятностей с $n(n+1)$ степенями свободы, то при $T \rightarrow \infty$ асимптотический размер теста (13) равен заданному уровню значимости $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство. Покажем, что при пороговом значении $\Delta = F_{\chi_{n(n+1)}^2}^{-1}(1 - \alpha)$ вероятность ошибки первого рода сходится к заданному уровню значимости α :

$$P\{H_1|H_0\} = 1 - P_{H_0}\{g_T < \Delta\} \rightarrow 1 - F_{\chi_{n(n+1)}^2}(\Delta) = 1 - F_{\chi_{n(n+1)}^2}\left(F_{\chi_{n(n+1)}^2}^{-1}(1 - \alpha)\right) = \alpha. \blacksquare$$

Теорема 5. Если рассматривается семейство контигуальных простых альтернатив $H_{1T} : \theta^0 = \theta^* + \frac{1}{\sqrt{T}}a$, где a – некоторый ненулевой вектор из $R^{n(n+1)}$, то при $T \rightarrow \infty$ имеет место сходимость распределения вероятностей статистики g_T к нецентральному χ^2 -распределению с $n(n+1)$ степенями свободы и параметром нецентральности $\Delta^2 = a'Ga$

$$L_{H_{1T}}\{g_T\} \rightarrow \chi_{\Delta^2, n(n+1)}^2. \quad (14)$$

При этом справедливо следующее асимптотическое выражение мощности теста (13):

$$w_T = P_{H_{1T}}(d=1) \rightarrow w^* = 1 - F_{\chi_{\Delta^2, n(n+1)}^2}\left(F_{\chi_{n(n+1)}^2}^{-1}(1 - \alpha)\right). \quad (15)$$

Доказательство. Из (8), если верна гипотеза H_{1T} , при $T \rightarrow \infty$,

$$L_{H_{1T}}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{\theta} - \theta^* - \frac{1}{\sqrt{T}}a\right)\right\} = L\left\{\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^*) - a\right\} \rightarrow N_{n(n+1)}(0, G^{-1}). \quad (16)$$

Рассмотрим случайный вектор ξ_T , определенный (11). В силу (16) имеем

$$L_{H_{1T}}\{\xi_T\} \rightarrow N_{n(n+1)}(G^{1/2}a, I_{n(n+1)}),$$

т. е.

$$\xi_T = (\xi_{Tk}) \xrightarrow{D} \eta = (\eta_k) \in R^{n(n+1)}, \quad L\{\eta\} = N_{n(n+1)}(G^{1/2}a, I_{n(n+1)}). \quad (17)$$

Тогда статистика g_T теста (13) представима в виде суммы квадратов:

$$g_T = T(\hat{\theta} - \theta^*)'G(\hat{\theta} - \theta^*) = \xi_T'\xi_T \rightarrow \eta'\eta = \sum_{k=1}^{n(n+1)} \eta_k^2, \quad (18)$$

причем $\{\eta_k\}$ асимптотически нормально распределены согласно (17). В силу определения нецентрального χ^2 -распределения (см., например, [7]) получаем первое утверждение теоремы (14).

Вычислим теперь асимптотическую мощность теста, используя (18) и (14):

$$\begin{aligned} w_T &:= P\{H_{1T}|H_{1T}\} = P_{H_{1T}}\{g_T \geq \Delta\} = \\ &= 1 - P_{H_{1T}}\{g_T < \Delta\} \rightarrow 1 - F_{\chi_{\Delta^2, n(n+1)}^2}(\Delta) = 1 - F_{\chi_{\Delta^2, n(n+1)}^2}\left(F_{\chi_{n(n+1)}^2}^{-1}(1 - \alpha)\right). \blacksquare \end{aligned}$$

Результаты компьютерного моделирования

Компьютерные эксперименты проводились на модельных данных. Рассматривалась модель (2), (3) при следующих числовых значениях параметров: $m = 1$, $z = 2$, $N = 4$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n = 3$, $S = \{1, 2, 3\}$, $\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0)$, $\theta_1^0 = (-0,20; 0,18; -0,15; 0,20)'$, $\theta_2^0 = (-0,18; 0,24; -0,05; -0,10)'$, $\theta_3^0 = (0,13; -0,13; -0,29; 0,30)'$, $v = (N+1)^n = 125$.

Проверим гипотезу о равенстве вектора параметров нулевому вектору ($\theta^* = \mathbf{0}_{12} = \mathbf{0} \in R^{12}$):

$$H_0 : \theta^0 = \mathbf{0},$$

$$H_1 = \bar{H}_0 : \theta^0 \neq \mathbf{0}.$$

Согласно (3) в этом случае гипотеза H_0 означает, что $\{x_{s,i}\}$ – «чисто случайная» последовательность, т. е. последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с законом распределения вероятностей $Bi\left(\cdot; N, \frac{1}{2}\right)$, не зависящим ни от прошлого состояния, ни от внешних факторов.

Зададим уровень значимости $\alpha = 0,05$ и найдем пороговое значение в (13) $\Delta = F_{\chi_{12}^2}^{-1}(1 - 0,05) = 21,03$. Тогда в силу (15)

$$w_T \rightarrow 1 - F_{\chi_{\Delta^2, 12}^2}(21,03),$$

где параметр нецентральности $\Delta^2 = T\theta^{0'}G\theta^0$. Тогда решающее правило (13) примет вид

$$d = d(X_1, \dots, X_T) = \begin{cases} 0, & T\hat{\theta}'G\hat{\theta} < 21,03, \\ 1, & T\hat{\theta}'G\hat{\theta} \geq 21,03. \end{cases}$$

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимостей экспериментальных и теоретических оценок вероятности ошибки первого рода и мощности теста в зависимости от длительности наблюдений T ($T \in [20, 300]$). Экспериментальные (выборочные) оценки вероятности ошибки первого рода и мощности теста вычислялись по методу Монте-Карло по M реализациям:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M I\left\{T\hat{\theta}^{(k)'}G\hat{\theta}^{(k)} \geq 21,03 \mid \theta = \mathbf{0}\right\},$$

$$\hat{w}_T = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M I\left\{T\hat{\theta}^{(k)'}G\hat{\theta}^{(k)} \geq 21,03 \mid \theta = \theta^0\right\},$$

где $I\{\cdot\}$ – индикаторная функция; $\hat{\theta}^{(k)}$ – оценка максимального правдоподобия вектора 12 параметров по k -й реализации пространственно-временных данных; θ – истинное значение вектора параметров; $M = 1000$ – количество реализаций Монте-Карло.

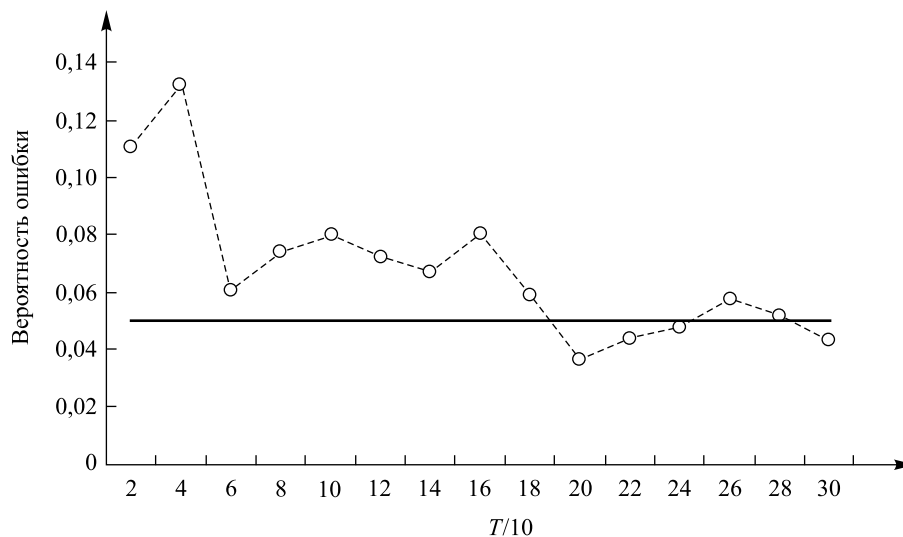


Рис. 1. Зависимость вероятности ошибки первого рода от длительности наблюдений:

— заданный уровень значимости; -o- - экспериментальная вероятность ошибки первого рода

Fig. 1. Dependence of the first type error probability on the length of the observation period:

— defined significance level; -o- - experimental first type error probability

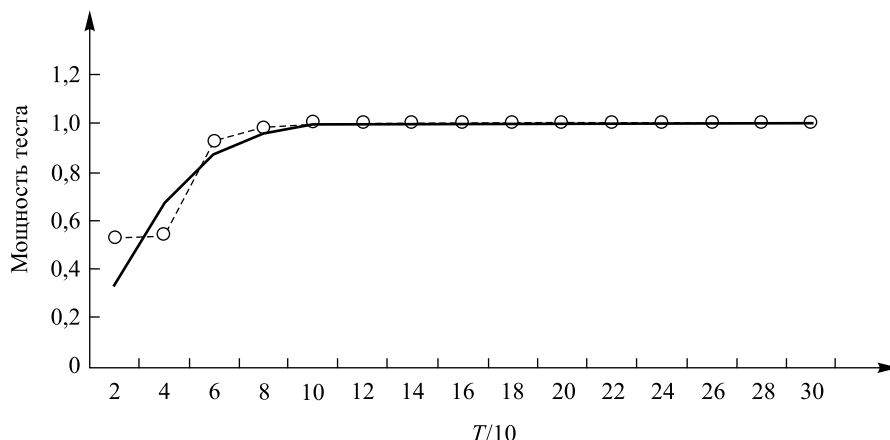


Рис. 2. Зависимость мощности теста от длительности наблюдений:

— теоретическая мощность; --○-- экспериментальная мощность

Fig. 2. Dependence of the power of the test on the length of the observation period:

— theoretical power of the test; --○-- experimental power of the test

Из рис. 1 и 2 видно согласие теоретических и экспериментальных результатов.

Заключение

Таким образом, в работе построен статистический тест для проверки гипотез о значениях параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. Найдено асимптотическое выражение мощности построенного теста. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных, показавшие согласие теоретических и экспериментальных результатов.

Библиографические ссылки

1. Case Study for Modelling Cancer Incidence Using Bayesian Spatio-Temporal Models / S. Kang [et al.] // *Aust. & N. Z. J. Stat.* 2015. Vol. 57, issue 3. P. 325–345.
2. Xu G., Liang F., Genton M. G. A Bayesian spatio-temporal geostatistical model with an auxiliary lattice for large datasets // *Stat. Sinica*. 2015. Vol. 25. P. 61–79.
3. Space-time wind speed forecasting for improved power system dispatch (with discussion and rejoinder) / X. Zhu [et al.] // *TEST*. 2014. Vol. 23. P. 1–25.
4. Zhu F., Liu S., Shi L. Local influence analysis for Poisson autoregression with an application to stock transaction data // *Stat. Neerlandica*. 2016. Vol. 7/1. P. 4–25.
5. Харин Ю. С., Журак М. К. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и ее вероятностно-статистический анализ // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 6. С. 5–12.
6. Харин Ю. С., Журак М. К. Асимптотический анализ оценок максимального правдоподобия параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 2016. № 1. С. 36–45.
7. Харин Ю. С., Зувев Н. М., Жук Е. Е. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика. Минск, 2011.

References

1. Kang S., McGreel J., Baade P., et al. Case Study for Modelling Cancer Incidence Using Bayesian Spatio-Temporal Models. *Aust. & N. Z. J. Stat.* 2015. Vol. 57, issue 3. P. 325–345.
2. Xu G., Liang F., Genton M. G. A Bayesian spatio-temporal geostatistical model with an auxiliary lattice for large datasets. *Stat. Sinica*. 2015. Vol. 25. P. 61–79.
3. Zhu X., Genton M. G., Gu Y., et al. Space-time wind speed forecasting for improved power system dispatch (with discussion and rejoinder). *TEST*. 2014. Vol. 23. P. 1–25.
4. Zhu F., Liu S., Shi L. Local influence analysis for Poisson autoregression with an application to stock transaction data. *Stat. Neerlandica*. 2016. Vol. 7/1. P. 4–25.
5. Kharin Y. S., Zhurak M. K. Binomial'naya uslovno avtoregressionnaya model' prostranstvenno-vremennykh dannykh i ee veroyatnostno-statisticheskii analiz [The binomial conditional autoregressive model of the spatio-temporal data and its probabilistic and statistical analysis]. *Dokl. Nats. akad. nauk Belarusi*. 2015. Vol. 59, No. 6. P. 5–12 (in Russ.).
6. Kharin Y. S., Zhurak M. K. Asimptoticheskii analiz otsenok maksimal'nogo pravdopodobiya parametrov binomial'noi uslovno avtoregressionnoi modeli prostranstvenno-vremennykh dannykh [Asymptotic analysis of maximum likelihood estimators for parameters of binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data]. *Izv. Nats. akad. nauk Belarusi. Ser. fiz.-mat. nauk*. 2016. No. 1. P. 36–45 (in Russ.).
7. Kharin Y. S., Zuev N. M., Zhuk E. E. Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya i prikladnaya statistika [Probability theory, mathematical and applied statistics]. Minsk, 2011 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 15.04.2016.
Received by editorial board 15.04.2016.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Е. А. ГАЙТЮКЕВИЧ¹⁾, Н. Н. ТРУШ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Изучены характеристики случайных процессов, обладающих свойствами фрактальности и самоподобия. В основе исследования лежит рассмотрение численных характеристик процессов, таких как математическое ожидание, дисперсия, ковариация, асимметрия и эксцесс, а также моментов и семиинвариантов высших порядков, которые в дальнейшем могут быть использованы при оценке качества, выборе наилучшего алгоритма моделирования и изучении реальных данных. Исследование проведено для широко используемого на практике случайного процесса фрактального броуновского движения. Отмечено, что данный процесс обладает свойством стационарности приращений, однако в общем случае его приращения зависимы, что значительно усложняет алгоритмы, используемые при моделировании процесса.

Ключевые слова: фрактальное броуновское движение; характеристики случайных процессов; зависимость и независимость приращений процессов.

SOME PROPERTIES OF FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

K. A. HAITSIUKEVICH^a, M. M. TROUSH^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: troushNN@bsu.by

This article is dedicated to the study of the characteristics of random processes, with properties of self-similarity and fractality. The study is based on the consideration of numerical characteristics of processes such as mean, variance, covariance, skewness and kurtosis, and the moments and cumulants of higher order, which can then be used to assess the quality and selection of the best simulation algorithm and research real-world data. The study was conducted for the random process of fractional Brownian motion, which is widely used. The article also noted that this process has the property of stationary increments, but in general, it increments dependent, which significantly complicates the algorithms used in the modeling process of fractional Brownian motion.

Key words: fractional Brownian motion; characteristics of random processes; dependence and independence of process increments.

Образец цитирования:

Гайтюкевич Е. А., Труш Н. Н. Некоторые свойства фрактального броуновского движения // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 23–27.

For citation:

Haitsiukevich K. A., Trough M. M. Some properties of fractional Brownian motion. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 23–27 (in Russ.).

Авторы:

Екатерина Александровна Гайтюкевич – студентка факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – Н. Н. Труш.

Николай Николаевич Труш – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Katsiaryna Haitsiukevich, student at the faculty of applied mathematics and computer science.

egajtyukevich@mail.ru

Mikalai Trough, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theory of probability and mathematical statistic, faculty of applied mathematics and computer sciences.

troushNN@bsu.by

В последнее время исследование фрактальных случайных процессов становится все более актуальным. Это связано с тем, что они находят широкое применение на практике. Так, например, в работе [1] большое внимание уделяется случайным процессам фрактальности и самоподобия, сформулированы основные теоретические результаты. В свою очередь, случайные процессы, обладающие этими свойствами, положены в основу многих практических моделей, среди которых выделяют фрактальное броуновское движение и фрактальный гауссовский шум. Изучение фрактальных процессов тесно связано со стохастическим исчислением [2]. В [3] содержатся как теоретические основы, так и практические результаты для свойств фрактальности на примере фрактального броуновского движения, с помощью которого осуществляются оценка и прогнозирование уровня воды в реках. В настоящее время этот процесс используют для оценки динамики некоторых финансовых индексов, а также качества передачи и возможных потерь для сетевого трафика [4].

Введем определение процесса фрактального броуновского движения (ФБД) [5].

Определение. Фрактальным броуновским движением $B_H = \{B_H(t) : t \geq 0\}$ с параметром Харста $0 < H < 1$ называют случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

- 1) $B_H(0) \stackrel{n.n.}{=} 0$ и $\mathbb{E}\{B_H(t+s) - B_H(s)\} = 0$ для $t, s \geq 0$;
- 2) $B_H(t)$ имеет стационарные приращения;
- 3) $B_H(t+s) - B_H(s) = B_H(t) - B_H(0) = B_H(t) \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2 t^{2H})$ имеет гауссовское распределение для $t, s \geq 0$, σ^2 – положительная константа, называемая коэффициентом диффузии.

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Теорема 1. Для процесса фрактального броуновского движения ковариация имеет следующий вид:

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \sigma^2 (t_2^{2H} + t_1^{2H} - |t_2 - t_1|^{2H}), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ и } 0 < H < 1. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $t_1 < t_2$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$. По определению ковариации и процесса фрактального броуновского движения

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\{B_H(t_1)B_H(t_2)\} - \mathbb{E}\{B_H(t_1)\} \mathbb{E}\{B_H(t_2)\} = \mathbb{E}\{B_H(t_1) \cdot B_H(t_2)\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{2} \left(B_H(t_2)^2 + B_H(t_1)^2 - (B_H(t_2) - B_H(t_1))^2 \right)\right\} = \frac{1}{2} \sigma^2 (t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}). \end{aligned}$$

Если $t_1 > t_2$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \sigma^2 (t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}).$$

Объединяя результаты, имеем требуемое.

Следствие 1. Коэффициент корреляции процесса фрактального броуновского движения имеет вид

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{1}{2} (t_1 \cdot t_2)^{-H} (t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_2 - t_1|^{2H}), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ и } 0 < H < 1. \quad (2)$$

Доказательство. Используя определение коэффициента корреляции и равенство (1), имеем (2).

Теорема 2. Приращения случайного процесса фрактального броуновского движения с параметром Харста H , где $0 < H < 1$, являются зависимыми, за исключением случая $H = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $t_1 < t_2 < t_3$ и $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}_+$. Будем использовать метод от противного.

Применяя определение ковариации и ФБД, получим

$$\begin{aligned} \text{cov}(B_H(t_3) - B_H(t_2), B_H(t_2) - B_H(t_1)) &= \mathbb{E}((B_H(t_3) - B_H(t_2))(B_H(t_2) - B_H(t_1))) = \\ &= \mathbb{E}(B_H(t_3)B_H(t_2)) + \mathbb{E}(B_H(t_2)B_H(t_1)) - \mathbb{E}(B_H(t_3)B_H(t_1)) - \mathbb{E}(B_H(t_2)B_H(t_2)). \end{aligned}$$

Учитывая (1), имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}(B_H(t_3) - B_H(t_2), B_H(t_2) - B_H(t_1)) &= \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 (t_3^{2H} + t_2^{2H} - (t_3 - t_2)^{2H} + t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H} - t_3^{2H} - t_1^{2H} + (t_3 - t_1)^{2H} - 2t_2^{2H}) = \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 ((t_3 - t_1)^{2H} - (t_3 - t_2)^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}). \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно видеть, что рассматриваемая ковариация равна нулю только для случая $H = \frac{1}{2}$, т. е. приращения будут независимыми, в то время как для остальных H приращения зависимы. Теорема доказана.

Теорема 3. Для процесса фрактального броуновского движения имеют место нижеперечисленные характеристики:

1) начальные и центральные моменты n -го порядка, $n = 1, 2, \dots$, совпадают и имеют вид

$$m_n(t) = \mathbb{E} \left[(B_H(t) - \mathbb{E}[B_H(t)])^n \right] = \mathbb{E} \left[(B_H(t))^n \right] = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (n-1)!! \sigma^n t^{nH}, & \text{если } n \text{ четно;} \end{cases}$$

2) семиинварианты n -го порядка, $n = 1, 2, \dots$, выражаются следующим равенством:

$$c_n(t) = \begin{cases} \sigma^2 t^{2H}, & \text{если } n = 2, \\ 0, & \text{для остальных } n. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $B_H(0) \stackrel{\text{п.н.}}{=} 0$ и n нечетно, то

$$\mathbb{E} \left[(B_H(t))^n \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t^H}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma t^H} \right)^2 \right) dx = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции.

Для четных n , применив метод математической индукции, можно показать, что

$$\mathbb{E} \left[(B_H(t))^n \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma t^H}} \int_0^{+\infty} x^n \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma t^H} \right)^2 \right) dx.$$

При замене переменной интегрирования $s = \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma t^H}}$ правая часть последнего равенства будет равна

$$\frac{(\sqrt{2\pi\sigma t^H})^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} 2s^n \exp(-s^2) ds = \frac{(\sqrt{2\pi\sigma t^H})^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} s^{n-1} d(\exp(-s^2)).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\mathbb{E} \left[(B_H(t))^n \right] = (n-1) \left(\sqrt{\sigma^2 t^{2H}} \right)^2 \mathbb{E} \left[(B_H(t))^{n-2} \right] = (n-1)!! \sigma^n t^{nH},$$

что и требовалось доказать.

Характеристическая функция $B_H(t)$ имеет вид

$$\Phi_{B_H(t)}(x) = e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H} x^2}.$$

А это означает, что семиинварианты выражаются равенствами:

$$c_n(t) = \frac{\partial^n \ln \Phi_{B_H(t)}(x)}{\partial x^n} \Big|_{x=0} = \begin{cases} \sigma^2 t^{2H}, & \text{если } n = 2, \\ 0, & \text{для остальных } n. \end{cases}$$

Следствие 2. Асимметрия для процесса ФБД

$$\text{skew}[B_H(t)] = 0.$$

Доказательство. Исходя из теоремы 3, можем записать

$$\text{skew}[B_H(t)] = \frac{\mathbb{E}[(B_H(t))^3]}{(\mathbb{E}[(B_H(t))^2])^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Следствие 3. Эксцесс для процесса ФБД

$$\text{kur}[B_H(t)] = 0.$$

Доказательство.

$$\text{kur}[B_H(t)] = \frac{\mathbb{E}[(B_H(t))^4]}{(\mathbb{E}[(B_H(t))^2])^2} - 3 = \frac{3!!\sigma^4 t^{4H}}{(\sigma^2 t^{2H})^2} - 3 = 0.$$

Фрактальное броуновское движение является частным случаем фрактального движения Леви. Данные процессы используются для моделирования сетевого трафика. В [6] модель, построенная с использованием в качестве шума фрактального броуновского движения, имеет вид

$$\hat{A}(t) = mt + \sqrt{am}B_H(t),$$

где $m > 0$, $a > 0$ – константы; $B_H(t)$ – процесс фрактального броуновского движения; $\hat{A}(t)$, $t \in (0, \infty)$, – непрерывный интегральный процесс поступления трафика в сети.

Однако в приведенной выше модели процесс ФБД может быть заменен фрактальным процессом Леви, тогда полученная модель будет обладать большей гибкостью, в частности когда интенсивность трафика или скорость его передачи имеют большие разбросы. Тем не менее стоит отметить, что усложнение модели приводит к снижению производительности и является более трудозатратным для практического применения.

При прогнозировании доходности фондового рынка также может применяться фрактальное броуновское движение, которое является обобщением броуновского движения и используется для построения моделей флуктуационных процессов. Поскольку фрактальное броуновское движение обладает тем свойством, что его приращения скоррелированы, то модели, построенные на его основании, могут учитывать ситуации, когда серии событий влияют на итоговый результат, что невозможно при моделировании с помощью броуновского движения, которое является марковским процессом. Однако при указанном подходе появляются арбитражные возможности, но условия, приводящие к арбитражу, носят теоретический характер и не могут быть достигнуты на практике, как показано в работе [7]. Поэтому в настоящее время многие биржевые индексы можно оценивать при помощи данного процесса [8].

Библиографические ссылки

1. Mandelbrot B. B., van Ness J. W. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications // SIAM Rev. 1968. Vol. 10, № 4. P. 422–437.
2. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable non-Gaussian random processes. New York, 1994.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической и финансовой математики. М., 1998.
4. Lakhel E., McKibben M. A. Controllability of neutral stochastic integro-differential evolution equations driven by a fractional Brownian motion // Afr. Mat. 2016. № 7. P. 1–14.
5. Dieker T. Simulation of fractional Brownian motion / CWI and University of Twente Department of Mathematical Sciences. Amsterdam, 2004. P. 12.
6. Norros I. A Storage Model with Self-Similar Input // Queuing Syst. 1994. Vol. 16, issue 3. P. 387–396.
7. Cheredito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models // Finance Stoch. 2003. Vol. 7, issue 4. P. 533–553.
8. Ilalan D. Elliott wave principle and the corresponding fractional Brownian motion in stock markets: Evidence from Nikkei 225 index // Chaos, Solitons & Fractals. 2016. Vol. 92. P. 137–141.

References

1. Mandelbrot B. B., van Ness J. W. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Rev.* 1968. Vol. 10, No. 4. P. 422–437. DOI: 10.1137/1010093.
2. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable non-Gaussian random processes. New York, 1994.
3. Shiryaev A. N. *Osnovy stokhasticheskoi i finansovoi matematiki*. Moscow, 1998 (in Russ.).
4. Lakhel E., McKibben M. A. Controllability of neutral stochastic integro-differential evolution equations driven by a fractional Brownian motion. *Afr. Mat.* 2016. No. 7. P. 1–14.
5. Dieker T. *Simulation of fractional Brownian motion*. CWI and University of Twente Department of Mathematical Sciences. Amsterdam, 2004. P. 12.
6. Norros I. A Storage Model with Self-Similar Input. *Queueing Syst.* 1994. Vol. 16, issue 3. P. 387–396.
7. Cheredito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance Stoch.* 2003. Vol. 7, issue 4. P. 533–553. DOI: 10.1007/s007800300101.
8. Ilalan D. Elliott wave principle and the corresponding fractional Brownian motion in stock markets: Evidence from Nikkei 225 index. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016. Vol. 92. P. 137–141. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.09.018.

Статья поступила в редколлегию 23.09.2016.
Received by editorial board 23.09.2016.

УДК 519.2

СВОЙСТВА ВНУТРЕННЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Т. В. ЦЕХОВАЯ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Исследованы внутренне стационарные случайные процессы с непрерывным временем. Изучена их связь со стационарными в широком смысле процессами и процессами со стационарными в широком смысле приращениями. Рассмотрены свойства семивариограмм стационарных случайных процессов. Найдены необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратическом смысле внутренне стационарных случайных процессов в терминах их семивариограмм. При этом показано, что производная в среднем квадратическом смысле внутренне стационарного случайного процесса с конечным моментом второго порядка является стационарным в широком смысле случайным процессом.

Ключевые слова: случайный процесс; внутренняя стационарность; вариограмма; стохастический анализ.

PROPERTIES OF THE INTRINSICALLY STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES

T. V. TSEKHAVAYA^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Intrinsically stationary random processes with continuous time are investigated. Their connections with second-order stationary processes and processes with the second-order stationary increments are studied. The properties of semivariogram of the stationary random processes are investigated. Necessary and sufficient conditions for continuity, differentiability and integrability in the mean square sense of the intrinsically stationary stochastic processes in terms of their semivariogram are found. It is shown that the derivative in the mean square sense of the intrinsically stationary random process, for which the second-order moment is exists, is a second-order stationary random process.

Key words: stochastic process; intrinsic stationarity; variogram; stochastic analysis.

Для современной теории случайных процессов характерно, что ее модели, методы и результаты представляют не только самостоятельный математический интерес, но и находят многочисленные приложения. При этом, как правило, особое внимание уделяется стационарным случайным процессам и случайным процессам со стационарными приращениями.

Определения стационарного в узком смысле случайного процесса, случайного процесса со стационарными в узком смысле приращениями можно найти, например, в работах [1–3]. Отметим, что условие стационарности в узком смысле является очень строгим, поэтому на практике используются более мягкие условия иных типов стационарности: стационарности в широком смысле, внутренней стационарности.

Образец цитирования:

Цеховая Т. В. Свойства внутренне стационарных случайных процессов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 28–33.

For citation:

Tsekhavaya T. V. Properties of the intrinsically stationary stochastic processes. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 28–33 (in Russ.).

Автор:

Татьяна Вячеславовна Цеховая – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Tatsiana Tsekhavaya, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer sciences.
tsekhavaya@bsu.by

Цель настоящей статьи – исследование связи внутренне стационарных случайных процессов со стационарными в широком смысле случайными процессами и процессами со стационарными в широком смысле приращениями, а также определение необходимых и достаточных условий непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратическом внутренне стационарных случайных процессов.

Некоторые виды стационарности случайных процессов и связь между ними

Рассмотрим действительный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Определение 1 [1; 4]. Случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с математическим ожиданием $m(t) = E\{Y(t)\}$, ковариационной функцией

$$R(t, s) = \text{cov}\{Y(t), Y(s)\} = E\{(Y(t) - m(t))(Y(s) - m(s))\}$$

называется стационарным в широком смысле, если момент второго порядка $E\{Y^2(t)\} < \infty$ при любом $t \in \mathbb{R}$ и выполняются следующие условия:

$$m(t) = m = \text{const}, \quad R(t, s) = R(t - s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Определение 2 [4]. Вариограммой случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется функция вида

$$2\gamma(t, s) = D\{Y(t) - Y(s)\}, \quad (1)$$

где $t, s \in \mathbb{R}$; D – символ дисперсии. Функция $\gamma(t, s)$ называется семивариограммой.

Основоположителем вариограммного анализа временных рядов является Ж. Матерон (G. Mathe-ron) [5]. Однако функцию вида (1) можно найти в научной литературе более раннего периода [2; 6].

Из определения вариограммы случайного процесса $Y(t)$ нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \gamma(t, s) &\geq 0, \quad \gamma(t, t) = 0, \\ 2\gamma(t, s) &= D(t) - 2R(t, s) + D(s), \end{aligned} \quad (2)$$

где $R(t, s)$ – ковариационная функция; $D(t)$ – дисперсия случайного процесса $Y(t)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Нередко на практике оказывается, что процесс не обладает конечной дисперсией, но конечную дисперсию имеют его приращения. В таких ситуациях часто делается предположение о внутренней стационарности исследуемого процесса и применяются методы вариограммного анализа, что позволяет существенно расширить круг решаемых проблем.

Определение 3 [4]. Случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется внутренне стационарным, если

$$E\{Y(t) - Y(s)\} = 0, \quad (3)$$

$$D\{Y(t) - Y(s)\} = 2\gamma(t - s), \quad (4)$$

где функция $2\gamma(t)$ – вариограмма случайного процесса $Y(t)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Если случайный процесс является стационарным в широком смысле, то он будет и внутренне стационарным. Из (4) легко получить, что ковариационная функция $R(t)$ и семивариограмма $\gamma(t)$ стационарного в широком смысле случайного процесса $Y(t)$ связаны соотношением

$$\gamma(t) = R(0) - R(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Внутренне стационарный случайный процесс не является стационарным в широком смысле, поскольку для него могут не существовать моменты второго порядка. Однако внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для которого имеет место условие

$$E\{Y^2(t)\} = \text{const} < +\infty \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R},$$

является также и стационарным в широком смысле.

Для действительного гауссовского случайного процесса стационарность в узком смысле, стационарность в широком смысле и внутренняя стационарность эквивалентны, так как гауссовские распределения однозначно определяются своими первыми и вторыми моментами.

Определение 4 [4; 5]. Действительная функция $\gamma(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, называется условно отрицательно определенной, если для любого $n \geq 1$, произвольных моментов времени $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ и любого ненулевого действительного вектора $(z_1, \dots, z_n)$ такого, что $\sum_{i=1}^n z_i = 0$, справедливо неравенство $\sum_{i,j=1}^n z_i z_j \gamma(t_i, t_j) \leq 0$.

Теорема 1. Пусть имеются произвольная действительная функция $m(t) = m$ и симметричная условно отрицательно определенная действительная функция $\gamma(t, s)$, где $t, s \in \mathbb{R}$. Тогда найдутся вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и заданный на нем действительный гауссовский случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что $E\{Y(t)\} = m$ и $D\{Y(t) - Y(s)\} = 2\gamma(t, s)$ при всех $t, s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Используем свойства семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса [7] и рассуждаем аналогично [1, с. 52].

Следствие. Класс симметричных условно отрицательно определенных действительных функций совпадает с классом семивариограмм действительных гауссовских случайных процессов.

Определение 5 [2; 3]. Непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется процессом со стационарными в широком смысле приращениями, если функции

$$E\{Y(t+h) - Y(t)\} = ch, \quad (5)$$

$$\text{cov}\{Y(t+h_1) - Y(t), Y(t+s+h_2) - Y(t+s)\} = K(s, h_1, h_2), \quad (6)$$

где $c = \text{const}$, определены при любых $t, h, s, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ и не зависят от t .

Теорема 2. Непрерывный в среднем квадратическом внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является процессом со стационарными в широком смысле приращениями.

Доказательство. Проверим выполнение условий (5), (6) определения процесса со стационарными в широком смысле приращениями. Равенство (5) получается очевидным образом из (3) при $c = 0$.

Используя представление ковариации приращений внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$ [8] и свойства семивариограммы $\gamma(t)$, запишем равенство

$$\text{cov}\{Y(t+h_1) - Y(t), Y(t+s+h_2) - Y(t+s)\} = \gamma(s+h_2) + \gamma(s-h_1) - \gamma(s) - \gamma(s+h_2-h_1).$$

Отсюда видно, что правая часть последнего равенства существует и не зависит от t . Теорема доказана.

Теорема 3. Непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с постоянным математическим ожиданием и стационарными в широком смысле приращениями является внутренне стационарным.

Доказательство. Учитывая, что $Y(t)$ – случайный процесс с постоянным математическим ожиданием, имеем (3).

Далее, покажем, что дисперсия приращений $Y(t+h) - Y(t)$, $t, h \in \mathbb{R}$, процесса $Y(t)$ является функцией от одной переменной h . Выражение для дисперсии приращений нетрудно получить из равенства (6), если положить $s = 0$, $h_1 = h_2 = h$. Тогда

$$\text{cov}\{Y(t+h) - Y(t), Y(t+h) - Y(t)\} = D\{Y(t+h) - Y(t)\} = K(0, h, h),$$

что и требовалось доказать.

Элементы стохастического анализа

Рассмотрим действительный внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с конечным моментом второго порядка и семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Из (3) вытекает, что $E\{Y(t)\} = \text{const} < \infty$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $m(t) = E\{Y(t)\} = 0$, $t \in \mathbb{R}$. В противном случае можно рассмотреть процесс $Y(t) - m(t)$.

Теорема 4. Внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывен в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда его семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = 0. \quad (7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть случайный процесс $Y(t)$ непрерывен в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$. Тогда из определения непрерывности в среднем квадратическом в произвольной точке $s \in \mathbb{R}$, учитывая представление (4) вариограммы действительного внутренне стационарного случайного процесса, запишем

$$\lim_{t \rightarrow 0} E \left\{ (Y(s+t) - Y(s))^2 \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} 2\gamma(t) = 0,$$

откуда вытекает (7).

Достаточность. Пусть семивариограмма $\gamma(t)$ действительного внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$ удовлетворяет условию (7). С учетом (4) получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 0,5D \{Y(s+t) - Y(s)\} = \lim_{t \rightarrow 0} 0,5E \left\{ (Y(s+t) - Y(s))^2 \right\} = 0.$$

В силу определения непрерывности в среднем квадратическом заключаем, что случайный процесс $Y(t)$ непрерывен в среднем квадратическом в точке $s \in \mathbb{R}$. Следовательно, это утверждение справедливо и для любой точки множества $\mathbb{R}$. Теорема доказана.

Теорема 5. Для того чтобы внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, был дифференцируемым в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы его семивариограмма $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяла условию

$$\gamma''(0) < +\infty, \quad (8)$$

где $\gamma''(0)$ – вторая производная семивариограммы в точке $t = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$ с конечным моментом второго порядка является дифференцируемым в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$. Тогда из критерия дифференцируемости в среднем квадратическом и [9, с. 493, следствие 1] заключаем, что ковариационная функция $R(t, s)$ процесса $Y(t)$ имеет конечную производную второго порядка $\frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t \partial s}$ в точках $t = s$. Таким образом, учитывая соотношение (2), запишем

$$2\gamma(t, s) = R(t, t) - 2R(t, s) + R(s, s),$$

$$\frac{\partial^2 \gamma(t, s)}{\partial t \partial s} = -\frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t \partial s}, \quad (9)$$

т. е. функция $-\gamma(t, s)$ также имеет конечную производную второго порядка в точках $t = s$.

Далее, в силу определения семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса получаем

$$-\frac{\partial^2 \gamma(t, s)}{\partial t \partial s} \Big|_{t=s} = \frac{\partial^2 \gamma(t-s)}{\partial t \partial s} \Big|_{t=s} = \gamma''(0) < +\infty, \quad (10)$$

что и требовалось показать.

Достаточность. Пусть семивариограмма действительного внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$ с конечным моментом второго порядка удовлетворяет условию (8). Принимая во внимание (9), (10) и (2), имеем

$$\frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t \partial s} \Big|_{t=s} = \gamma''(0) < +\infty, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Это и есть достаточное условие дифференцируемости в среднем квадратическом случайного процесса $Y(t)$ на множестве $\mathbb{R}$ [1; 9; 10]. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – дифференцируемый в среднем квадратическом внутренне стационарный случайный процесс с конечным вторым моментом. Тогда его производная в среднем квадратическом смысле $Y'(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является стационарным в широком смысле случайным процессом.

Доказательство. Проверим условия определения 1. Из [10] и определения внутренне стационарного случайного процесса запишем

$$E\{Y'(t)\} = (E\{Y(t)\})' = 0.$$

Вычислим ковариационную функцию процесса $Y'(t)$. Для этого воспользуемся [10], равенством (2) и определением внутренне стационарного случайного процесса. Тогда

$$R_{Y'}(t, s) = \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t \partial s} = -\frac{\partial^2 \gamma(t, s)}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 \gamma(t-s)}{\partial t \partial s} = R_{Y'}(t-s).$$

Очевидно, что момент второго порядка процесса $Y'(t)$ конечен, т. е.

$$D\{Y'(t)\} = R_{Y'}(t, t) = \gamma''(0) < +\infty.$$

Таким образом, все условия определения стационарного в широком смысле случайного процесса выполнены. Теорема доказана.

Перейдем к интегрированию в среднем квадратическом смысле внутренне стационарных случайных процессов с конечным моментом второго порядка.

Теорема 7. Интеграл в среднем квадратическом $I = \int_a^b Y(t)dt$ существует тогда и только тогда, когда

$$(b-a) \int_a^b D(t)dt - 2 \int_0^{b-a} (b-a-t) \gamma(t)dt < \infty,$$

где $-\infty \leq a < b \leq \infty$; $D(t)$ – дисперсия; $\gamma(t)$ – семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из [1] следует, что существование интеграла Римана $\int_a^b \int_a^b R(t, s)dt ds$ является необходимым и достаточным условием существования интеграла в среднем квадратическом смысле $I = \int_a^b Y(t)dt$. Из соотношения (2), определения семивариограммы внутренне стационарного процесса (4) запишем

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b R(t, s)dt ds &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b D(t)dt ds + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b D(s)dt ds - \int_a^b \int_a^b \gamma(t, s)dt ds = \\ &= (b-a) \int_a^b D(t)dt - \int_a^b \int_a^b \gamma(t-s)dt ds. \end{aligned}$$

Во втором интеграле сделаем замену переменных интегрирования: $t = t$, $t-s = u$. Тогда, учитывая свойства семивариограммы [7], имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b R(t, s)dt ds &= (b-a) \int_a^b D(t)dt - \int_{-(b-a)}^0 \gamma(u)du \int_a^{u+b} dt - \int_0^{b-a} \gamma(u)du \int_{u+a}^b dt = \\ &= (b-a) \int_a^b D(t)dt - \int_{-(b-a)}^{b-a} (b-a-|u|) \gamma(u)du = (b-a) \int_a^b D(t)dt - 2 \int_0^{b-a} (b-a-u) \gamma(u)du, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Исследование непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов в среднем квадратическом смысле сводится, как правило, к изучению соответствующих свойств их математических ожиданий и ковариационных функций. В настоящей статье сформулированы критерии непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратическом внутренне стационарного случайного процесса в терминах его семивариограммы. Полученные результаты будут использованы в дальнейшем для поиска спектральных представлений внутренне стационарных случайных процессов и их семивариограмм.

Библиографические ссылки

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М., 2005.
2. Яглом А. М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n -ми приращениями // Матем. сб. 1955. Т. 37 (79), № 1. С. 141–196.
3. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений // Докл. Акад. наук СССР. 1940. Т. 26, № 1. С. 6–9.
4. Cressie N. Statistics for Spatial Data. New York, 1991.
5. Matheron G. Principles of Geostatistics // Econ. Geol. 1963. Vol. 58. P. 1246–1266.
6. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. Акад. наук СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
7. Цеховая Т. В. Свойства вариограммы внутренне стационарных случайных процессов // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : материалы Междунар. науч. конф. (Минск, 22 апр. 2004 г.). Минск, 2004. С. 181–186.
8. Цеховая Т. В. Первые два момента оценки вариограммы гауссовского случайного процесса // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры : материалы Междунар. матем. конф. (Брест, 5–8 окт. 2005 г.) : в 2 ч. Брест, 2005. Ч. 2. С. 78–82.
9. Лозе М. Теория вероятностей. М., 1962.
10. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М., 1975.

References

1. Bulinskii A. V., Shiryayev A. N. Teoriya sluchainykh protsessov [The theory of stochastic processes]. Moscow, 2005 (in Russ.).
2. Yaglom A. M. Korrelyatsionnaya teoriya protsessov so sluchainymi statsionarnymi n -mi priirashcheniyami. *Mat. sb.* 1955. Vol. 37 (79), No. 1. P. 141–196 (in Russ.).
3. Kolmogorov A. N. Krivye v gil'bertovom prostranstve, invariantnye po otnosheniyu k odnoparametricheskoi grupe dvizhenii [Curves in Hilbert space that are invariant with respect to the one-parameter group of motions]. *Dokl. Akad. nauk SSSR*. 1940. Vol. 26, No. 1. P. 6–9 (in Russ.).
4. Cressie N. Statistics for Spatial Data. New York, 1991.
5. Matheron G. Principles of Geostatistics. *Econ. Geol.* 1963. Vol. 58. P. 1246–1266.
6. Kolmogorov A. N. Lokal'naya struktura turbulentnosti v neszhimaemoy vyazkoi zhidkosti pri ochen' bol'shikh chislakh Reynol'dsa [The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers]. *Dokl. Akad. nauk SSSR*. 1941. Vol. 30, No. 4. P. 299–303 (in Russ.).
7. Tsekhovaya T. V. Svoistva variogrammy vnutrenne statsionarnykh sluchainykh protsessov [The properties of the variogram of intrinsically stationary random processes]. *Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya statistika i ikh prilozheniya* : proc. of Int. Sci. Conf. (Minsk, 22 April, 2004). Minsk, 2004. P. 181–186 (in Russ.).
8. Tsekhovaya T. V. Pervye dva momenta otsenki variogrammy gaussovskogo sluchainogo protsessa [The first two moments of the variogram estimator of a Gaussian stochastic process]. *Differentsial'nye uravneniya i sistemy komp'yuternoi algebry* : proc. of Int. Math. Conf. (Brest, 5–8 Oct., 2005) : in 2 parts. Brest, 2005. Part 2. P. 78–82 (in Russ.).
9. Loev M. Teoriya veroyatnostei [Probability theory]. Moscow, 1962 (in Russ.).
10. Venttsel' A. D. Kurs teorii sluchainykh protsessov [The course of the theory of random processes]. Moscow, 1975 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 28.03.2016.
Received by editorial board 28.03.2016.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.8

К НАХОЖДЕНИЮ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ МИНИМАЛЬНОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА

Е. Д. ЖИВИЦА¹⁾, К. Г. КУЗЬМИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Рассмотрена задача о нахождении минимального остовного дерева при условии, что вес ребер подвержен независимым изменениям. Изучена одна из количественных характеристик устойчивости оптимальных решений этой задачи, известная как радиус устойчивости и определяемая как предельный уровень изменений веса ребер, при котором выбранное наперед оптимальное решение все еще сохраняет свою оптимальность. Выведена точная формула радиуса устойчивости минимального остовного дерева, позволяющая вычислять этот радиус за время, близкое к линейному относительно числа ребер графа. Этот результат значительно улучшает формулу радиуса устойчивости оптимального решения линейной комбинаторной задачи в общей постановке, поскольку последняя формула требует полного перебора по множеству допустимых решений, мощность которого может расти экспоненциально.

Ключевые слова: задача о минимальном остовном дереве; второй оптимальный остов; анализ чувствительности решений; радиус устойчивости.

Образец цитирования:

Живица Е. Д., Кузьмин К. Г. К нахождению радиуса устойчивости минимального остовного дерева // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 34–38.

For citation:

Zhyvitsa Ya. D., Kuzmin K. G. On calculation of the stability radius for a minimum spanning tree. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 34–38 (in Russ.).

Авторы:

Евгений Дмитриевич Живица – магистрант кафедры математической кибернетики механико-математического факультета. Научный руководитель – К. Г. Кузьмин.

Кирилл Геннадьевич Кузьмин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Authors:

Yauheni Zhyvitsa, master's degree student at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.

j.zhyvitsa@gmail.com

Kiril Kuzmin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.

kuzminkg@mail.ru

ON CALCULATION OF THE STABILITY RADIUS FOR A MINIMUM SPANNING TREE

Ya. D. ZHYVITSYA^a, K. G. KUZMIN^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: j.zhivitsa@gmail.com

We consider a minimum spanning tree problem in the situation where weights of edges are exposed to independent perturbations. We study a quantitative characteristic of stability for a given optimal solutions of the problem. The characteristic is called the stability radius and defined as the limit level of edges weights perturbations which preserve optimality of a particular solution. We present an exact formula for the stability radius that allows calculating the radius in time which is extremely close to linear with respect to number of graph edges. This improves upon a well-known formula of an optimal solution for a linear combinatorial problem which requires complete enumeration of feasible solutions set whose cardinality may grow exponentially.

Key words: minimum spanning tree problem; second-best spanning tree; sensitivity analysis of solutions; stability radius.

Рассмотрим хорошо известную задачу нахождения минимального остовного дерева в неориентированном связном взвешенном графе $G = G(V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E . Пусть $|V| = n$ и $|E| = m$, причем $m \geq n$. Множество всевозможных остовов графа G обозначим через T , а сами остовы – t . Таким образом, каждый остов $t \in T$ представляет собой подмножество множества E , состоящее из $n - 1$ ребер.

Будем полагать, что все ребра $e \in E$ пронумерованы и каждому ребру с номером i приписан вес $a_i = a(e_i) \in \mathbf{R}$. Тем самым образуется весовой вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$, и каждый остов $t \in T$ получает вес

$$f(t, a) = \sum_{e_i \in t} a_i.$$

Множество остовов с минимальным весом будем называть множеством оптимальных решений и обозначать $Opt(a)$, а саму задачу – $Z(a)$.

Исследуем количественную меру устойчивости оптимальных решений $t \in Opt(a)$ к возмущениям вектора a , которые традиционно [1–5] моделируются прибавлением к нему возмущающего вектора $a' \in \mathbf{R}^m$. В качестве количественной характеристики устойчивости оптимального решения $t \in Opt(a)$ выберем радиус его устойчивости (в чебышевской метрике), определяемый [2–5] по формуле

$$\rho(t, a) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall a' \in \Omega(\varepsilon) (t \in Opt(a + a'))\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{a' \in \mathbf{R}^m : \|a'\|_\infty < \varepsilon\},$$

$$\|a'\|_\infty = \max_{i=1}^m |a'_i|.$$

Известно [2; 3], что радиус устойчивости может быть найден по формуле

$$\rho(t, a) = \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \frac{f(t', a) - f(t, a)}{\Delta(t, t')}, \quad (1)$$

где $\Delta(t, t')$ – число ребер в симметрической разности остовов t и t' , иными словами, $\Delta(t, t') = |t \cup t'| - |t \cap t'|$.

Эта формула имеет существенный недостаток: она требует полного перебора по всему множеству решений, что фактически делает ее неприменимой на практике. Докажем, что на самом деле для задачи о нахождении минимального остовного дерева такого перебора не требуется.

Пусть $t^I \in Opt(a)$. Обозначим через t^II второй по величине минимальный остов задачи $Z(a)$. Таким образом, остов t^II удовлетворяет условию

$$f(t^II, a) = \min_{t \in T \setminus \{t^I\}} f(t, a).$$

Заметим, что t^II вполне может как принадлежать множеству $Opt(a)$ при $|Opt(a)| \geq 2$, так и не принадлежать ему при $|Opt(a)| = 1$.

Кроме того, будем использовать символы $+$ ($-$) для обозначения операций добавления ребра к подграфу или его удаления из подграфа. Тем самым для любых $e \in E$ и $G' \subseteq G$

$$G' + e = G' \cup \{e\}, \quad G' - e = G' \setminus \{e\}.$$

Лемма. Пусть $t^I \in Opt(a)$. Тогда существует второй по величине минимальный остов t_*^{II} , отличающийся от t^I ровно одной парой ребер e' и e'' , т. е.

$$t^I - e' = t_*^{II} - e'', \quad (2)$$

где $e' \in t^I$; $e'' \in t_*^{II}$.

Доказательство. Среди множества всех вторых по величине остовов t^II выберем такой остов t_0^{II} , который отличается от t^I наименьшим числом ребер. Поскольку остовы t^I и t_0^{II} различны, то можно выбрать ребро $e_1 \in t^I \setminus t_0^{II}$. Добавив это ребро к остову t_0^{II} , получим единственный цикл C , на котором обязательно найдется ребро $e_2 \in t_0^{II} \setminus t^I$, так как в противном случае $C \subseteq t^I$, что невозможно.

Далее, убедимся, что вес a_1 ребра e_1 меньше веса a_2 ребра e_2 . Действительно, случай $a_1 > a_2$ невозможен, поскольку иначе мы предъявим остов $t^I - e_1 + e_2$ с меньшим весом, чем остов t^I . Случай $a_1 = a_2$ также невозможен, поскольку иначе мы бы получили остов $t_0^{II} + e_1 - e_2$, который содержит больше общих ребер с t^I , чем остов t_0^{II} .

Таким образом, $a_1 < a_2$. Тогда верны соотношения

$$f(t_0^{II} + e_1 - e_2, a) = f(t_0^{II}, a) + a_1 - a_2 < f(t_0^{II}, a),$$

свидетельствующие о том, что остов $t_0^{II} + e_1 - e_2$ и есть остов t^I . Следовательно, выполняется равенство (2), где $e' = e_1$ и $e'' = e_2$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть t^I – оптимальное решение задачи $Z(a)$ о нахождении минимального остовного дерева. Тогда радиус устойчивости $\rho(t^I, a)$ решения t^I определяется формулой

$$\rho(t^I, a) = \frac{f(t^II, a) - f(t^I, a)}{2}. \quad (3)$$

Доказательство. Для краткости дальнейшего изложения правую часть формулы (3) обозначим через ϕ . Сначала покажем справедливость неравенства $\rho(t^I, a) \leq \phi$. Для этого достаточно доказать, что для всякого числа $\varepsilon > \phi$ существует такой возмущающий вектор $a^0 \in \Omega(\varepsilon)$, при котором выполняется неравенство

$$f(t^II, a + a^0) < f(t^I, a + a^0). \quad (4)$$

Поскольку $t^II \neq t^I$, то множества $t^I \setminus t^II$ и $t^II \setminus t^I$ непусты и можно выбрать ребра $e^I \in t^I \setminus t^II$ и $e^II \in t^II \setminus t^I$. Поэтому возмущающий вектор $a^0 \in \Omega(\varepsilon)$ можно задать следующим образом:

$$a^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если } e^i = e^I, \\ -\delta, & \text{если } e^i = e^II, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где число δ подчинено условиям $\varepsilon > \delta > \varphi$. Тогда верны соотношения

$$f(t^{\text{II}}, a + a^0) - f(t^{\text{I}}, a + a^0) = f(t^{\text{II}}, a) - \delta - f(t^{\text{I}}, a) - \delta < f(t^{\text{II}}, a) - f(t^{\text{I}}, a) - 2\varphi = 0,$$

которые убеждают нас в справедливости неравенства (4). Следовательно, $\rho(t^{\text{I}}, a) \leq \varphi$.

Для завершения доказательства формулы (3) нужно показать, что $\rho(t^{\text{I}}, a) \geq \varphi$. Поскольку каждый из остовов $t \in T$ содержит ровно $n - 1$ ребер, то на основании (1) найдется такой остов $t' \in T \setminus \{t^{\text{I}}\}$, что выполняется равенство

$$\rho(t^{\text{I}}, a) = \frac{f(t', a) - f(t^{\text{I}}, a)}{2\kappa(t', t^{\text{I}})},$$

где $\kappa = \kappa(t', t^{\text{I}})$ – число пар ребер, отличающих остовы t' и t^{I} . Для доказательства нужного нам неравенства $\rho(t^{\text{I}}, a) \geq \varphi$ остается убедиться, что

$$f(t', a) - f(t^{\text{I}}, a) \geq 2\varphi\kappa(t', t^{\text{I}}).$$

Остовы t' и t^{I} отличаются 2κ ребрами. Выберем некоторое ребро $e'_1 \in t' \setminus t^{\text{I}}$ и добавим его к остову t^{I} . При этом образуется единственный цикл, который обязательно содержит некоторое ребро $e_1^{\text{I}} \in t^{\text{I}} \setminus t'$, поскольку в противном случае остов t^{I} содержал бы этот цикл, что невозможно. Удалив ребро e_1^{I} , получим остов $t^{\text{I}} + e'_1 - e_1^{\text{I}}$, после чего очередное ребро $e'_2 \in t' \setminus t^{\text{I}}$ добавим к остову t^{I} . Вновь образуется единственный цикл, из которого удалим ребро $e_2^{\text{I}} \in t^{\text{I}} \setminus t'$ и получим новый остов. Проведя эту процедуру κ раз, мы разобьем ребра $e'_1, e'_2, \dots, e'_\kappa \in t' \setminus t^{\text{I}}$ и $e_1^{\text{I}}, e_2^{\text{I}}, \dots, e_\kappa^{\text{I}} \in t^{\text{I}} \setminus t'$ на пары так, что e'_j и e_j^{I} , $j \in \{1, 2, \dots, \kappa\}$, лежат на одном цикле. Далее, оценим вес этих ребер.

На основании леммы найдется второй по величине остов t_*^{II} , отличающийся от остова t^{I} двумя ребрами. Поэтому для всякого $j \in \{1, 2, \dots, \kappa\}$ выводим

$$a(e'_j) - a(e_j^{\text{I}}) = f(t^{\text{I}} + e'_j - e_j^{\text{I}}, a) - f(t_*^{\text{II}}, a) - f(t^{\text{I}}, a).$$

Итак, имеет место формула

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, \kappa\}, \quad (a(e'_j) - a(e_j^{\text{I}})) \geq f(t_*^{\text{II}}, a) - f(t^{\text{I}}, a),$$

откуда окончательно находим

$$f(t', a) - f(t^{\text{I}}, a) = \sum_{j=1}^{\kappa} a(e'_j) - \sum_{j=1}^{\kappa} a(e_j^{\text{I}}) \geq \kappa(f(t_*^{\text{II}}, a) - f(t^{\text{I}}, a)) = 2\varphi\kappa(t', t^{\text{I}}).$$

Теорема доказана.

Оптимальное решение t^{I} называется [2; 3; 5] устойчивым, если $\rho(t^{\text{I}}, a) > 0$.

Следствие 1. *Оптимальное решение t^{I} задачи $Z(a)$ устойчиво тогда и только тогда, когда оно единственно.*

Следствие 2. *Если все ребра графа G имеют разный вес, то оптимальное решение t^{I} задачи $Z(a)$ устойчиво.*

Следствие 3. *Если $\text{Opt}(a) = \{t^{\text{I}}\}$, то все вторые по величине остовы отличаются от t^{I} ровно одной парой ребер.*

Известно [6; 7], что два лучших решения задачи о минимальном остове могут быть найдены за $O(m \log \beta(m, n))$, где

$$\beta(m, n) = \left\{ j \in \mathbb{N} : \log^{(j)} n \leq \frac{m}{n} \right\},$$

$\log^{(j)} n$ обозначает взятый j раз логарифм от числа n . Таким образом, функция $\log \beta(m, n)$ очень близка к константе.

Следствие 4. Радиус устойчивости $\rho(t^1, a)$ оптимального решения t^1 задачи $Z(a)$ может быть найден за время $O(m \log \beta(m, n))$.

Отметим, что количественная мера устойчивости оптимальных решений в ряде исследований определяется не как радиус устойчивости, а как допуск ребер (дуг), т. е. для каждого ребра (дуги) находится наибольший уровень возмущений, сохраняющих оптимальность выбранного решения задачи. Наилучший результат в этом направлении получен в работе [8], где доказано, что допуски ребер для задачи о минимальном остове могут быть вычислены за время $O(m \log \alpha(m, n))$, где $\alpha(m, n)$ – обратная функция Аккермана.

Библиографические ссылки

1. Гордеев Э. Н. Исследование устойчивости задачи о кратчайшем остовном дереве в метрике I_1 // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1999. Т. 39, № 5. С. 770–778.
2. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев, 2003.
3. Emelichev V., Podkopaev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming // Discret. Optim. 2010. Vol. 7, № 1/2. P. 48–63.
4. Roland J., Smet Y. De, Figueira J. R. On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization // 4OR. 2012. Vol. 10, № 4. P. 379–389.
5. Кузьмин К. Г. Единый подход к нахождению радиусов устойчивости в многокритериальной задаче о максимальном разрезе графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 30–51.
6. Eppstein D. Finding the k smallest spanning trees // BIT Numer. Math. 1992. Vol. 32, № 2. P. 237–248.
7. Frederickson G. N. Ambivalent Data Structures for Dynamic 2-Edge-Connectivity and Smallest Spanning Trees Time // SIAM J. Comput. 1997. Vol. 26, № 2. P. 484–538.
8. Pettie S. Sensitivity Analysis of Minimum Spanning Trees in Sub-Inverse-Ackermann Time // J. Graph Algorithms Appl. 2015. Vol. 19, № 1. P. 375–391.

References

1. Gordeev Je. N. Issledovanie ustojchivosti zadachi o krachajshem ostovnom dereve v metrike I_1 [Stability analysis of the minimum spanning tree problem]. Zh. vychislitel. mat. mat. fiz. 1999. Vol. 39, No. 5. P. 770–778 (in Russ.).
2. Sergienko I. V., Shilo V. P. Zadachi diskretnoj optimizacii. Problemy, metody reshenija, issledovanija [Discrete Optimization Problems. Challenges, Solution Techniques, and Analysis]. Kiev, 2003 (in Russ.).
3. Emelichev V., Podkopaev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming. Discret. Optim. 2010. Vol. 7, No. 1/2. P. 48–63.
4. Roland J., Smet Y. De, Figueira J. R. On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization. 4OR. 2012. Vol. 10, No. 4. P. 379–389.
5. Kuz'min K. G. Edinyj podhod k nahozhdeniju radiusov ustojchivosti v mnogokriterial'noj zadache o maksimal'nom razreze grafa [A general approach to the calculation of stability radii for the max-cut problem with multiple criteria]. Diskretn. anal. issled. oper. 2015. Vol. 22, No. 5. P. 30–51 (in Russ.).
6. Eppstein D. Finding the k smallest spanning trees. BIT Numer. Math. 1992. Vol. 32, No. 2. P. 237–248.
7. Frederickson G. N. Ambivalent Data Structures for Dynamic 2-Edge-Connectivity and Smallest Spanning Trees Time. SIAM J. Comput. 1997. Vol. 26, No. 2. P. 484–538.
8. Pettie S. Sensitivity Analysis of Minimum Spanning Trees in Sub-Inverse-Ackermann Time. J. Graph Algorithms Appl. 2015. Vol. 19, No. 1. P. 375–391.

Статья поступила в редколлегию 15.10.2016.
Received by editorial board 15.10.2016.

МЕХАНИКА

ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

MECHANICS

OF DEFORMABLE SOLIDS

УДК 539.3

ВЯЗКОУПРУГИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННЫХ РАДИУСА КРИВИЗНЫ И ЖЕСТКОСТИ

В. А. ТОМИЛО¹⁾, Е. В. КОЧИК²⁾, И. А. ТАРАСЮК³⁾, А. С. КРАВЧУК³⁾

¹⁾Физико-технический институт НАН Беларуси,
ул. Купревича, 10, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

²⁾Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь

³⁾Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

На примере плоских пружин симметричного профиля переменной толщины предложено обобщение метода Е. П. Попова, обеспечивающего расчет плоского изгиба упругих стержней при больших перемещениях, для случая вязкоупругих стержней переменных радиуса кривизны и жесткости. Посредством разбиения исходного стержня

Образец цитирования:

Томило В. А., Кочик Е. В., Тарасюк И. А., Кравчук А. С. Вязкоупругий изгиб стержней переменных радиуса кривизны и жесткости // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 39–46.

For citation:

Tamila V. A., Kochyk Y. V., Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S. Viscoelastic bending of beams of variable curvature radius and stiffness. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 39–46 (in Russ.).

Авторы:

Вячеслав Анатольевич Томило – доктор технических наук, доцент; начальник Научно-исследовательского центра деформационных и литейных технологий.

Евгения Вячеславовна Кочик – преподаватель кафедры сопротивления материалов машиностроительного профиля машиностроительного факультета.

Иван Александрович Тарасюк – аспирант кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета. Научный руководитель – А. С. Кравчук.

Александр Степанович Кравчук – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.

Authors:

Viachaslau Tamila, doctor of science (technics), docent; head of the research center of deformation and casting technologies. stamila@rambler.ru

Yauheniya Kochyk, lecturer at the department of mechanical engineering profile materials resistance, faculty of mechanical engineering.

zhenjatomilo@gmail.com

Ivan Tarasyuk, postgraduate student at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

ivan.a.tarasyuk@gmail.com

Alexander Kravchuk, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.

ask_belarus@inbox.ru

на участки с постоянными радиусами кривизны и жесткостями производится редукция поставленной задачи к решению ряда краевых задач ползучести с условиями связей на стыках участков. Решения строятся на точном нелинеаризованном уравнении перемещений криволинейных участков (уравнение колебаний нелинейного маятника) с учетом изменения величины изгибающего момента при ползучести стержня. Определены значения радиуса кривизны и величины хода стержней, подверженных деформации ползучести. В качестве примера аналитически решена задача вязкоупругого изгиба плоской полимерной пружины переменных радиуса кривизны и жесткости.

Ключевые слова: вязкоупругий изгиб; большие перемещения; полимерный материал.

VISCOELASTIC BENDING OF BEAMS OF VARIABLE CURVATURE RADIUS AND STIFFNESS

V. A. TAMILA^a, Y. V. KOCHYK^b, I. A. TARASYUK^c, A. S. KRAVCHUK^c

^aPhysical-Engineering Institute of the National Academy of Sciences of Belarus,
Kuprevicha street, 10, 220141, Minsk, Republic of Belarus

^bBelarusian National Technical University, Nezavisimosti avenue, 65, 220013, Minsk, Republic of Belarus

^cBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: ivan.a.tarasyuk@gmail.com

E. P. Popov method of analysis of elastic beams flat bending with large displacements was generalized to the case of viscoelastic beams of variable curvature radius and stiffness using an example of bending of flat springs of variable thickness symmetrical profile. The problem is reduced to the solution of a number of boundary creep problems with link conditions on section joints by means of partitioning the original beam into sections with a constant curvature radius and stiffness. The solutions are based on exact non-linearized equation of curved sections motion (so-called nonlinear pendulum vibration equation) taking into account the changes in the magnitude of the bending moment under creep. Values of curvature radius and displacement of beams subjected to creep deformation were determined. Viscoelastic bending problem of flat polymeric spring of variable curvature radius and stiffness was solved analytically as an example.

Key words: viscoelastic bending; large displacements; polymeric material.

Введение

В настоящее время активно используются конструкционные композиционные материалы, созданные на основе полимеров. Они имеют ряд достоинств: не подвержены коррозии, обладают химической стойкостью и, несмотря на свою легкость, прочны и эластичны. Однако такие конструкционные материалы достаточно активно проявляют реологические свойства даже при относительно низких температурах, что влечет за собой необходимость оценки изменения геометрии образца, подверженного длительной нагрузке. Особенность использования полимерных и композиционных материалов на их основе в различных отраслях техники в качестве упругих элементов заключается в том, что их длительное нагружение приводит к изменению радиуса кривизны и, следовательно, изменению их энергоемкости и жесткостных характеристик.

В настоящей работе на примере плоских пружин симметричного профиля переменной толщины предложено обобщение метода Е. П. Попова [1], обеспечивающего расчет плоского изгиба упругих стержней при больших перемещениях, для случая вязкоупругих стержней переменных радиуса кривизны и жесткости, что позволяет определять значения радиуса кривизны и величины хода стержней, подверженных деформации ползучести. В качестве примера аналитически решена задача вязкоупругого изгиба плоской полимерной пружины переменных радиуса кривизны и жесткости.

Постановка задачи изгиба плоской вязкоупругой пружины

Плоская вязкоупругая пружина подвергается сжатию постоянной нагрузкой P_0 . Левый край рессоры имеет неподвижное шарнирное закрепление, правый край рессоры может свободно перемещаться вдоль оси Ox и под нагрузкой смещается на расстояние u_x за время t_0 такое, что влияние ползучести на деформирование пренебрежимо мало. В момент времени t с рессоры мгновенно снимается нагрузка и определяется изменение радиуса кривизны.

Симметричный относительно середины профиль плоской пружины имеет переменную толщину $h(s) = f\left(s - \frac{L}{2}\right)$,

$s \in [0, L]$, которая определяется по нормали к нижней грани. Нижняя грань профиля представляет собой дугу окружности радиусом r_0 (рис. 1). Здесь $f(z)$ – некоторая четная функция; $L = r_0\varphi_0$ – длина нижней грани профиля; $\varphi_0 = 2\arcsin\left(\frac{L_0}{r_0}\right)$ – центральный угол профиля; L_0 – полуудлина проекции изогнутой нижней грани профиля;

$R_0(s) = r_0 + \frac{h(s)}{2}$ – радиус кривизны срединной линии профиля; b – ширина пружины; h_{def} – прогиб центральной части нижней грани профиля. В связи с симметричностью профиля для решения задачи достаточно рассмотреть лишь половину рессоры.

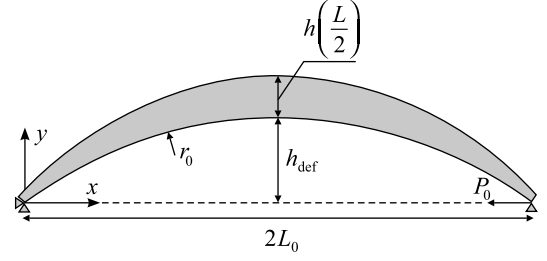


Рис. 1. Профиль рессоры переменной толщины
Fig. 1. Profile of flat spring of variable thickness

Определение изгибающих моментов плоской вязкоупругой пружины

Нелинеаризованное уравнение перемещений плоской пружины имеет вид [1, с. 14]

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{M}{H} = \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{d\theta}{ds}, \quad s \in [0, l], \quad (1)$$

где θ – угол наклона касательной в текущей точке начальной кривой; ϑ – угол наклона касательной в текущей точке срединной линии; $\frac{1}{R_0}$ – кривизна в текущей точке начальной кривой; $\frac{1}{R}$ – кривизна в текущей точке срединной линии; M – изгибающий момент; H – изгибная жесткость поперечного сечения; s – длина дуги срединной линии; l – длина срединной линии.

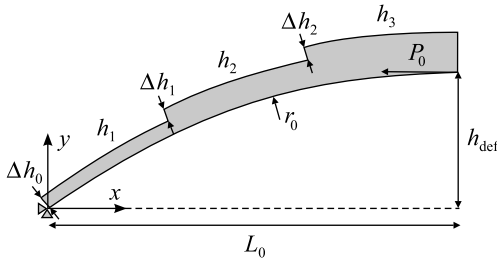


Рис. 2. Разбиение профиля рессоры переменной толщины

Fig. 2. Partition of profile of flat spring of variable thickness

Поскольку аналитическое решение уравнения (1) в случае переменных радиуса кривизны и жесткости получить не представляется возможным, следует разбить всю длину срединной линии половины рессоры на N участков с равными центральными углами $\varphi = \frac{\varphi_0}{2N}$ (рис. 2). Внутри каждого из участков радиус кривизны и жесткость считаются постоянными, но различными для разных участков ($i = \overline{1, N}$):

$$R_{i,0} = r_0 + \frac{h_i}{2}, \quad H_i = \frac{E h_i^3 b}{12}, \quad h_i = h\left(\frac{i-1}{N-1} \frac{L}{2}\right), \quad l_i = R_{i,0} \varphi. \quad (2)$$

В этом случае дифференциальное уравнение перемещений срединной линии записывается отдельно для каждого участка, а на стыках участков записываются условия связей.

Дифференцируя уравнение (1) по s для i -го участка, учитывая постоянство H_i и $\frac{1}{R_{i,0}}$ (2) и вводя обозначение $\zeta_i = \vartheta_i + \delta$, где $\delta = 0$ – угол между направлением силы P и осью Ox , перейдем к уравнению равновесия срединной линии i -го участка в безразмерном виде ($i = \overline{1, N}$)

$$\frac{d^2 \zeta_i}{ds^2} = -\frac{P}{H_i} \sin \zeta_i. \quad (3)$$

Первым интегралом выражения (3) является уравнение ($i = \overline{1, N}$)

$$\left(\frac{d\zeta_i}{ds}\right)^2 = 4\frac{P}{H_i}\left(C_i - \sin^2\frac{\zeta_i}{2}\right), \quad (4)$$

где C_i – произвольная постоянная, определяемая начальными условиями.

С помощью уравнения (4) находится значение кривизны в произвольной точке срединной линии. Учитывая, что в данной схеме изгиба кривизна начальной кривой i -го участка $\frac{1}{R_{i,0}} \neq 0$ и в начальном состоянии внешний изгибающий момент $M_i = 0$, в начале процесса изгиба $\frac{1}{R_i} \neq 0$ и срединная линия примет форму бесперегибного рода. Вводя обозначения $C_i = \frac{1}{k_i^2}$, $\sin\left(\frac{\zeta_i}{2}\right) = \sin\psi_i$, для форм срединной линии бесперегибного рода уравнение (4) можно записать в виде ($i = \overline{1, N}$)

$$\frac{d\psi_i}{ds} = \frac{1}{k_i} \sqrt{\frac{P}{H_i}} \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \psi_i}. \quad (5)$$

Величина изгибающего момента в произвольной точке i -го участка, как следует из (1) и (4), будет равна ($i = \overline{1, N}$)

$$M_i = \frac{2}{k_i} \sqrt{PH_i} \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \psi_i} - \frac{H_i}{R_{i,0}}, \quad s \in [0, l_i]. \quad (6)$$

Решением уравнения (5) является ($i = \overline{1, N}$)

$$s \sqrt{\frac{P}{H_i}} = k_i F(\psi_i, k_i) - k_i F(\psi_{i,0}, k_i), \quad s \in [0, l_i], \quad (7)$$

где $\psi_{i,0} = \psi_i(0)$; $F(\psi, k)$ – эллиптический интеграл Лежандра первого рода.

Координаты конца i -го участка определяются уравнениями ($i = \overline{1, N}$):

$$\begin{aligned} x_{i,1} &= \frac{2}{k_i} \sqrt{\frac{H_i}{P}} \left[E(\psi_{i,1}, k_i) - E(\psi_{i,0}, k_i) \right] - \left(\frac{2}{k_i^2} - 1 \right) l_i + \frac{\Delta h_{i-1}}{2} \sin 2\psi_{i,0} + x_{i-1,1}; \\ y_{i,1} &= \frac{2}{k_i} \sqrt{\frac{H_i}{P}} \left(\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \psi_{i,1}} - \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \psi_{i,0}} \right) + \frac{\Delta h_{i-1}}{2} \cos 2\psi_{i,0} + y_{i-1,1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\psi_{i,1} = \psi_i(l_i)$; $\Delta h_i = h_{i+1} - h_i$; $x_{0,1} = y_{0,1} = h_0 = 0$; $E(\psi, k)$ – эллиптический интеграл Лежандра второго рода.

На основании (6) и (8) граничные условия примут вид

$$M_{1,0} = P \frac{\Delta h_0}{2} \cos 2\psi_{1,0}, \quad x_{N,1} = L_0 - \frac{u_x}{2}, \quad \psi_{N,1} = 0, \quad (9)$$

а условия связей на стыках участков ($i = \overline{1, N-1}$)

$$\vartheta_{i,1} = \vartheta_{i+1,0}, \quad M_{i,1} + P \frac{\Delta h_i}{2} \cos 2\psi_{i+1,0} = M_{i+1,0}. \quad (10)$$

Таким образом, срединная линия изогнутой пружины определяется уравнениями (7), (10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{N,1} = 0, \quad \psi_{i,1} = \psi_{i+1,0}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \sqrt{\frac{Pl_i^2}{H_i}} = k_i F(\psi_{i,1}, k_i) - k_i F(\psi_{i,0}, k_i), \quad i = \overline{1, N}, \\ \frac{2}{k_i} \sqrt{PH_i} \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \psi_{i,1}} - \frac{H_i}{R_{i,0}} + P \frac{\Delta h_i}{2} \cos 2\psi_{i+1,0} = \\ = \frac{2}{k_{i+1}} \sqrt{PH_{i+1}} \sqrt{1 - k_{i+1}^2 \sin^2 \psi_{i+1,0}} - \frac{H_{i+1}}{R_{i+1,0}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \end{array} \right. \quad (11)$$

с граничными условиями (9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{k_1} \sqrt{PH_1} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi_{1,0}} - \frac{H_1}{R_{1,0}} = P \frac{\Delta h_0}{2} \cos 2\psi_{1,0}, \\ \sum_{i=1}^N \left[\frac{2}{k_i} \sqrt{\frac{H_i}{P}} \left[E(\psi_{i,1}, k_i) - E(\psi_{i,0}, k_i) \right] - \left(\frac{2}{k_i^2} - 1 \right) l_i + \frac{\Delta h_{i-1}}{2} \sin 2\psi_{i,0} \right] = L_0 - \frac{u_x}{2}. \end{array} \right. \quad (12)$$

При решении системы (11) с граничными условиями (12) относительно P, k_i, ψ_i ($i = \overline{1, N}$) определяется величина нагрузки P_0 , а из (6) – изгибающие моменты M'_i в расчетных точках.

Определение радиуса кривизны плоской вязкоупругой пружины

Согласно [2, с. 49] радиус кривизны плоской вязкоупругой пружины под действием постоянного изгибающего момента M от нагрузки P определяется уравнением

$$\frac{1}{R(t)} - \frac{1}{R_0} = \frac{M}{H} \left(1 + \int_0^t K(t, \tau) d\tau \right), \quad (13)$$

где $K(t, \tau)$ – ядро ползучести материала; t – время измерения.

Поскольку время изгиба рессоры t_0 до достижения радиуса кривизны $R(t_0)$ таково, что влияние ползучести на ее деформирование пренебрежимо мало, т. е.

$$\int_0^{t_0} K(t, \tau) d\tau \approx 0, \quad (14)$$

не нарушая общности, будем считать, что $t_0 = 0$ и $R(0)$ – мгновенная величина.

Таким образом, радиус кривизны ненагруженной плоской пружины после мгновенного снятия нагрузки P_0 в момент времени t с учетом формулы (14) равен

$$R'_0(t) = \left(\frac{M'}{H} \int_0^t K(t, \tau) d\tau + \frac{1}{R_0} \right)^{-1}. \quad (15)$$

Очевидно, что радиус кривизны $R'_0(t)$ рессоры будет уменьшаться во времени в соответствии с ядром ползучести $K(t, \tau)$.

Исходя из соотношения (13), для определения геометрии ненагруженной плоской пружины, подверженной деформации ползучести, после мгновенного снятия нагрузки P_0 необходимо решить систему (11) относительно P, k_i, ψ_i ($i = \overline{1, N}$) со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{2}{k_1} \sqrt{PH_1} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi_{1,0}} - \frac{H_1}{R_{1,0}} = M'_{1,0} \int_0^t K(t, \tau) d\tau, \\ \frac{2}{k_N} \sqrt{PH_N} \sqrt{1 - k_N^2 \sin^2 \psi_{N,1}} - \frac{H_N}{R_{N,0}} = M'_{N,1} \int_0^t K(t, \tau) d\tau. \end{cases} \quad (16)$$

Координаты x'_i и y'_i срединной линии ненагруженной рессоры, подверженной деформации ползучести, находятся по формулам (8).

Для определения перемещения u'_x правого края плоской пружины, подверженной деформации ползучести и находящейся под нагрузкой P_0 , необходимо решить систему (11) относительно P , k_i , ψ_i ($i = \overline{1, N}$), где вместо исходных радиусов кривизны $R_{i,0}$ следует использовать радиусы $R'_{i,0}(t)$, полученные из (15), со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} P = P_0, \\ \frac{2}{k_1} \sqrt{PH_1} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi_{1,0}} - \frac{H_1}{R'_{1,0}} = P \frac{\Delta h_0}{2} \cos 2\psi_{1,0}. \end{cases} \quad (17)$$

Координаты x''_i и y''_i срединной линии рессоры, подверженной деформации ползучести, под нагрузкой P_0 находятся по формулам (8). Тогда величина перемещения u'_x правого края рессоры, подверженной деформации ползучести, под нагрузкой P_0

$$u'_x = 2(x'_{N,1} - x''_{N,1}), \quad (18)$$

где $x'_{N,1}$ и $x''_{N,1}$ – координаты середины профиля ненагруженной и нагруженной плоских пружин соответственно, подверженных деформации ползучести.

Плоская пружина из стеклопластика контактного формования

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе симметричной плоской пружины переменной толщины из стеклопластика контактного формования. Предположим, что деформация рессоры происходит линейно вязкоупруго без проявления вязкопластического поведения вне зависимости от величины напряжений. В качестве ядра ползучести стеклопластика контактного формования используется дробно-экспоненциальная функция Работнова [3, с. 29]

$$K(t - \tau) = \frac{\lambda}{t - \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (19)$$

где $\Gamma[z]$ – гамма-функция; α , β , λ – параметры ядра, определяемые экспериментально. Тогда

$$\int_0^t K(t - \tau) d\tau = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)+1]},$$

где $\alpha = -0,573$; $\beta = 0,08765 \text{ ч}^{-0,427}$; $\lambda = 0,16 \text{ ч}^{0,427}$ [4, с. 188].

Профиль плоской пружины шириной $b = 5 \cdot 10^{-2}$ м имеет переменную толщину $h(s) = h_{\max} - e \left(1 - \sin \left(\frac{\pi s}{L} \right) \right)$, $s \in [0, L]$ (см. рис. 1). Максимальная толщина профиля рессоры $h_{\max} = h \left(\frac{L}{2} \right) = 1,2 \cdot 10^{-2}$ м, эксцентриситет прокатного валка $e = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м, полудлина проекции изогнутой нижней грани профиля $L_0 = 40 \cdot 10^{-2}$ м, прогиб центральной части нижней грани профиля $h_{\text{def}} = 4 \cdot 10^{-2}$ м, радиус кривизны нижней грани профиля $r_0 = \frac{(h_{\text{def}}^2 + L_0^2)}{2h_{\text{def}}}$, ход рессоры $u_x = 5 \cdot 10^{-2}$ м под нагрузкой P_0 , модуль упругости стеклопластика $E = 4 \cdot 10^9$ Па.

Величина нагрузки определяется из (11) с граничными условиями (12) – $P_0 = 227,2$ Н, а из (6) – изгибающий момент M' (рис. 3).

Радиус кривизны ненагруженной плоской пружины после мгновенного снятия нагрузки в момент времени t в соответствии с ядром ползучести (19), согласно (15), равен (рис. 4)

$$R'_0(t) = \left(\lambda \frac{M'}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)+1]} + \frac{1}{R_0} \right)^{-1}.$$

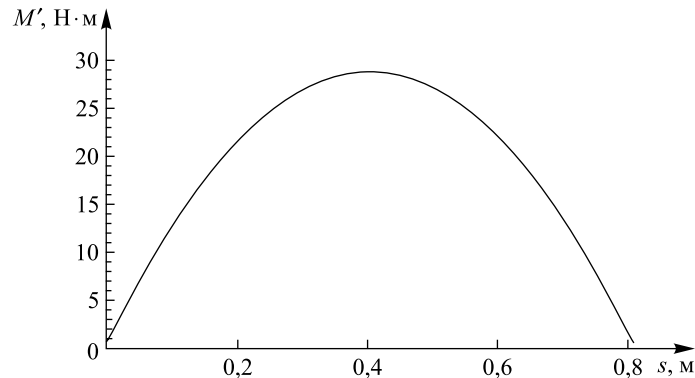


Рис. 3. Величина изгибающего момента M' в сечении s срединной линии плоской пружины

Fig. 3. Magnitude of the bending moment M' in the section s of the middle line of flat spring

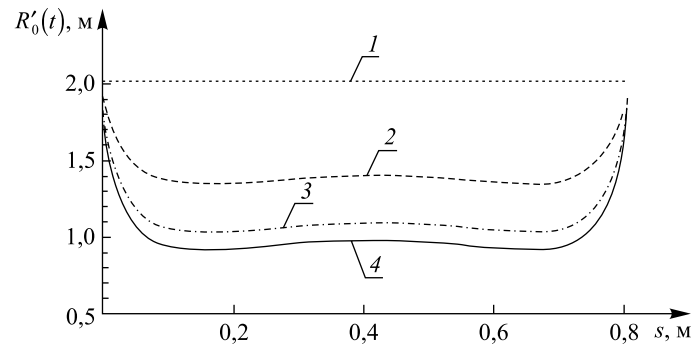


Рис. 4. Величина радиуса кривизны $R'_0(t)$ в сечении s срединной линии плоской пружины при t , ч:
 $1 - 0$; $2 - 2$; $3 - 12$; $4 - 24$

Fig. 4. Magnitude of the curvature radius $R'_0(t)$ in the section s of the middle line of flat spring t , h:
 $1 - 0$; $2 - 2$; $3 - 12$; $4 - 24$

Определяя по формулам (8) координаты x'_i и y'_i срединной линии ненагруженной рессоры, подверженной деформации ползучести (из системы (11) с граничными условиями (16)), и координаты x''_i и y''_i срединной линии рессоры, подверженной деформации ползучести и находящейся под нагрузкой $P_0 = 227,2$ Н (из системы (11) с граничными условиями (17)), из (18) получим величину перемещения u'_x правого края рессоры, подверженной деформации ползучести, под нагрузкой силой $P_0 = 227,2$ Н. При $t = 2$ ч величина хода составляет $8,304 \cdot 10^{-2}$ м, при $t = 12$ ч – $11,389 \cdot 10^{-2}$ м, при $t = 24$ ч – $12,995 \cdot 10^{-2}$ м.

Закключение

Предложена методика анализа больших перемещений стержней переменных радиуса кривизны и жесткости при плоском вязкоупругом изгибе, основанная на точном решении дифференциального

уравнения перемещений срединной линии и являющаяся обобщением теории Е. П. Попова [1], обеспечивающей расчет гибких стержней. Данная методика позволяет учитывать влияние деформации ползучести на величины радиуса кривизны и хода реологически активных стержней. Методика применена для решения задачи вязкоупругого изгиба плоской рессоры из стеклопластика.

Библиографические ссылки

1. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М., 1986.
2. Кравчук А. С., Томило Е. В. Вязкоупругий чистый изгиб слоистых и композиционных призматических брусьев // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 3 (28). С. 48–52.
3. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.
4. Фернати П. В. Моделирование нелинейных процессов ползучести на основе кубической теории вязкоупругости // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ». Темат. вып. : Информатика и моделирование. 2010. № 21. С. 182–192.

References

1. Popov E. P. Teoriya i raschet gibkikh uprugikh sterzhnei [Theory and Design of flexible elastic beams]. Moscow, 1986 (in Russ.).
2. Kravchuk A. S., Tomilo E. V. Vyazkouprugii chisty izgib sloistykh i kompozitsionnykh prizmaticheskikh brus'ev [Viscoelastic pure bending of laminated and composite prismatic beams]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov*. 2014. No. 3 (28). P. 48–52 (in Russ.).
3. Rabotnov Y. N. Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow, 1977 (in Russ.).
4. Fernati P. V. Modelirovanie nelineinykh protsessov polzuchesti na osnove kubicheskoi teorii vyazkouprugosti [The modeling of nonlinear process of creep on the cube theory of viscoelasticity]. *Vestnik Natsional'nogo Tekhnicheskogo Univ. «KhPI». Temat. vyp. : Informatika i modelirovanie*. 2010. No. 21. P. 182–192 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 02.05.2016.
Received by editorial board 02.05.2016.

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ВТОРОГО РОДА

В. В. КОРОЛЕВИЧ¹⁾, Д. Г. МЕДВЕДЕВ²⁾

¹⁾Филиал Национального педагогического университета им. М. Драгоманова,
ул. Язельская, 266/10, 16000, г. Прага, Чешская Республика

²⁾Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

С помощью линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода приводится в общем виде решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины. Предполагается, что температурное поле в диске известно и оно осесимметричное. Упругие постоянные – модули Юнга и модуль сдвига – линейно зависят от температуры, а коэффициенты Пуассона считаются постоянными величинами. С применением функции напряжений осесимметричная плоская задача термоупругости сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. На контурах диска задаются постоянные усилия. Полученное дифференциальное уравнение сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Общее решение интегрального уравнения записывается с помощью резольвенты. Указаны условия, при которых интегральное уравнение имеет единственное непрерывное решение. Для расчета сплошных дисков рассматривается диск с малым центральным отверстием, радиус которого менее $\frac{1}{20}$ радиуса внешнего контура, и выполнением условия равенства радиального и тангенциального напряжений на внутреннем контуре. Приводятся расчетные формулы для компонент радиального, тангенциального напряжений и радиального перемещения.

Ключевые слова: полярно-ортотропный диск; неоднородное тепловое поле; температура; соотношения термоупругости; дифференциальные и интегральные уравнения; резольвента; радиальная и тангенциальная компоненты напряжений; радиальное перемещение.

Образец цитирования:

Королевич В. В., Медведев Д. Г. Решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 47–52.

For citation:

Karalevich U. V., Medvedev D. G. Solution of the axisymmetric plane thermoelasticity problem for a polar-orthotropic disc of variable thickness in the rotating thermal field by Volterra integral equation of the second kind. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 47–52 (in Russ.).

Авторы:

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:

Uladzimir Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

SOLUTION OF THE AXISYMMETRIC PLANE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A POLAR-ORTHOTROPIC DISC OF VARIABLE THICKNESS IN THE ROTATING THERMAL FIELD BY VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND

U. V. KARALEVICH^a, D. G. MEDVEDEV^b

^aBranch office National Pedagogical University M. Dragomanov,
Jaselska street, 266/10, 16000, Praha, Czech Republic

^bBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: medvedev@bsu.by

With the help of linear Volterra integral equation of the second kind the solution of the axisymmetric plane thermoelasticity problem for a polar-orthotropic disk of variable thickness in the rotating thermal field is generally given. It is assumed that the temperature field in the disk is known and it is axisymmetric. The elastic constants – Young's modulus and shear modulus – are linearly temperature dependent, and Poisson's coefficient are considered to be constant. With the stress function axisymmetric plane thermoelasticity problem is reduced to solving the differential equation of the second kind with variable coefficients. Constant efforts are set on the disc contours. The resulting differential equation is reduced to a linear integral Volterra equation of the second kind. The general solution of the integral equation is written down the resolvent is used. The conditions under which the integral equation has a unique continuous solution are given.

To calculate the solid drives the disk with a small central hole the radius of which is less than $\frac{1}{20}$ of the radius of the outer contour and the implementation of the condition that the radial and tangential stresses in the domestic circuit is implemented. Calculation formulas are given for the component of the radial, tangential stress and radial displacement.

Key words: polar-orthotropic disc; inhomogeneous thermal field; temperature; ratio thermoelasticity; differential and integral equations; resolvent; radial and tangential stress components; radial displacement.

С помощью линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода приводится общее решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$, вращающегося вокруг нормальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0 в неоднородном тепловом поле. Диск при этом одновременно будет испытывать механическую деформацию от действия центробежных сил и температурную деформацию – от теплового поля [1]. Предполагается, что температурное поле в диске известно и оно осесимметричное, т. е. зависит только от радиуса r . Упругие постоянные – модули Юнга E_r , E_θ , модуль сдвига $G_{r\theta}$ – линейно зависят от температуры $T(r)$ [2]:

$$E_r(T) = E_r^{(0)} [1 - \gamma T(r)], \quad E_\theta(T) = E_\theta^{(0)} [1 - \gamma T(r)],$$

$$G_{r\theta}(T) = G_{r\theta}^{(0)} [1 - \gamma T(r)],$$

где $E_r^{(0)}$, $E_\theta^{(0)}$, $G_{r\theta}^{(0)}$ – значения упругих постоянных при начальной температуре T_0 ; γ – параметр. Коэффициенты Пуассона $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ будем считать постоянными величинами.

Диск изготовлен из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, и в каждой точке тела имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Внутренний радиус кольцевого диска обозначим r_0 , а внешний – R . Толщина диска $h(r)$ меняется вдоль радиуса r по заданному закону и на внутреннем контуре равна h_0 .

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z , поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска. Ось вращения диска совпадает с осью анизотропии.

Выделим из диска двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент диска. Запишем уравнение равновесия этого элемента в случае осесимметричной деформации [3]:

$$\frac{d\sigma_r(r)}{dr} + \frac{h'(r)}{h(r)} \cdot \sigma_r(r) + \frac{[\sigma_r(r) - \sigma_\theta(r)]}{r} + \rho \omega_0^2 r = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_r(r)$, $\sigma_\theta(r)$ – радиальная и тангенциальная компоненты напряжений соответственно; ρ – плотность композитного материала диска. Касательные $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ напряжения в диске в этом случае отсутствуют.

Для первой основной задачи теории упругости граничные условия имеют вид

$$\sigma_r(r_0) = -p_0, \quad \sigma_r(R) = p_1,$$

где p_0, p_1 – постоянные краевые нагрузки.

Радиальная $\sigma_r(r)$ и тангенциальная $\sigma_\theta(r)$ компоненты напряжений связаны с функцией напряжений $\psi_T(r)$ соотношениями [4]:

$$\sigma_r(r) = \frac{\psi_T(r)}{rh(r)}, \quad \sigma_\theta(r) = \frac{1}{h(r)} \frac{d\psi_T}{dr} + \rho\omega_0^2 r^2. \quad (2)$$

Подстановка выражений (2) в уравнение равновесия (1) обращает его тождественно в нуль.

Соотношения термоупругости в полярных координатах для цилиндрически ортотропного тела в случае осесимметричного плоского напряженного состояния есть [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(r) &= \frac{1}{E_r(T)} \sigma_r(r) - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta(T)} \sigma_\theta(r) + \Theta_r(r) = \frac{1}{E_\theta(T)} [k^2(T) \sigma_r(r) - \nu_{\theta r} \sigma_\theta(r)] + \Theta_r(r), \\ \varepsilon_\theta(r) &= -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r(T)} \sigma_r(r) + \frac{1}{E_\theta(T)} \sigma_\theta(r) + \Theta_\theta(r) = \frac{1}{E_\theta(T)} [-\nu_{\theta r} \sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)] + \Theta_\theta(r), \end{aligned} \quad (3)$$

где $k^2(T) = \frac{E_\theta(T)}{E_r(T)}$; $\Theta_r(r) = \alpha_r(T)(T(r) - T_0) = \alpha_r(T) \cdot \Delta T(r)$ – радиальная температурная деформация;

$\Theta_\theta(r) = \alpha_\theta(T)(T(r) - T_0) = \alpha_\theta(T) \cdot \Delta T(r)$ – тангенциальная температурная деформация; $\alpha_r(T)$, $\alpha_\theta(T)$ – радиальный и тангенциальный коэффициенты линейного температурного расширения материала соответственно, зависящие в общем случае от температуры $T(r)$; $\Delta T(r) = (T(r) - T_0)$ – перепад температур, T_0 – начальная температура (обычно $T_0 = 273$ К (0 °С) или $T_0 = 293$ К (20 °С)).

Для полярно-ортотропного тела справедливо соотношение $\frac{\nu_{r\theta}}{E_r(T)} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta(T)}$.

Уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\frac{d\varepsilon_\theta(r)}{dr} + \frac{[\varepsilon_\theta(r) - \varepsilon_r(r)]}{r} = 0. \quad (4)$$

Подставляя выражения (2) в соотношения (3), а затем деформации, выраженные через функцию напряжений, в уравнение (4), получим дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами для функции напряжений $\psi_T(r)$, описывающей осесимметричное термоупругое напряженное состояние полярно-ортотропного диска переменной толщины, вращающегося в неоднородном тепловом поле:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_T}{dr^2} - \left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{d\psi_T}{dr} + \left[\frac{\nu_{\theta r}}{r} \left(\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} \right) - \frac{k^2(T)}{r^2} \right] \psi_T(r) = \\ = - \left[(3 + \nu_{\theta r}) + r \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} \right] h(r) \rho \omega_0^2 r - E_\theta(T) h(r) \left[\frac{d\Theta_\theta}{dr} + \frac{(\Theta_\theta(r) - \Theta_r(r))}{r} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\gamma^* = \gamma E_\theta^{(0)}$.

Приведем дифференциальное уравнение (5) к соответствующему линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода [5].

Полагаем

$$\frac{d^2 \psi_T}{dr^2} = \varphi_T(r). \quad (6)$$

Последовательно интегрируя выражение (6), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_T}{dr} &= \int_{r_0}^r \varphi_T(s) ds + \psi'_T(r_0) = \int_{r_0}^r \varphi_T(s) ds + h(r_0)\sigma_\theta(r_0) - h(r_0)\rho\omega_0^2 r_0^2, \\ \psi_T(r) &= \int_{r_0}^r (r-s)\varphi_T(s) ds + \psi'_T(r_0)(r-r_0) + \psi_T(r_0) = \int_{r_0}^r (r-s)\varphi_T(s) ds + \\ &+ h(r_0)\sigma_\theta(r_0) \cdot (r-r_0) + h(r_0)\sigma_r(r_0) \cdot r_0 - h(r_0)\rho\omega_0^2 r_0^2 \cdot (r-r_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь использовались соотношения (2) и формула Дирихле:

$$\underbrace{\int_{r_0}^r dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \dots \int_{r_0}^{r_{n-1}} \varphi_T(r_n) dr_n}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{r_0}^r (r-s)^{n-1} \varphi_T(s) ds.$$

Подставляя в уравнение (5) вместо функции напряжений $\psi_T(r)$ и ее производных правые части выражений (6), (7), получим искомое линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$\varphi_T^{(1)}(r) = \lambda \int_{r_0}^r K \varphi_T(r) = \lambda \int_{r_0}^r K^{(T)}(r, s) \varphi_T(s) ds + f_T(r), \quad (8)$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $K^{(T)}(r, s) = \left\{ \left[\frac{1}{r} - \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} \right] + \left[\frac{v_{\theta r}}{r} \left(\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} \right) - \frac{k^2(T)}{r^2} \right] (r-s) \right\}$ – ядро интегрального уравнения; $f_T(r) = \frac{\partial K^{(T)}(r, s)}{\partial s} \cdot r_0 h(r_0) \sigma_r(r_0) - K^{(T)}(r, r_0) \times$
 $\times h(r_0) \sigma_\theta(r_0) + K^{(T)}(r, r_0) \cdot h(r_0) \rho \omega_0^2 r_0^2 - \left[(3 + v_{\theta r}) + r \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)} \frac{dT}{dr} \right] h(r) \rho \omega_0^2 r - E_\theta(T) h(r) \left[\frac{d\Theta_\theta}{dr} + \right.$
 $\left. + \frac{(\Theta_\theta(r) - \Theta_r(r))}{r} \right]$ – свободный член интегрального уравнения. Значения напряжений $\sigma_r(r_0)$, $\sigma_\theta(r_0)$

на внутреннем контуре диска определяются из граничных условий.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода (8) записывается с помощью резольвенты $R^{(T)}(r, s; \lambda)$ в виде [5]

$$\varphi_T(r) = \lambda \int_{r_0}^r R^{(T)}(r, s; \lambda) f_T(s) ds + f_T(r). \quad (9)$$

Здесь функция $R^{(T)}(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом

$$R^{(T)}(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}^{(T)}(r, s),$$

который для непрерывных ядер $K_m^{(T)}(r, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или итерированные, ядра $K_m^{(T)}(r, s)$ определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$K_1^{(T)}(r, s) = K^{(T)}(r, s),$$

$$K_2^{(T)}(r, s) = \int_s^r K^{(T)}(r, t) K_1^{(T)}(t, s) dt,$$

.....

$$K_m^{(T)}(r, s) = \int_s^r K^{(T)}(r, t) K_{m-1}^{(T)}(t, s) dt.$$

Если свободный член $f_T(r)$ непрерывен в $[r_0, R]$, а ядро $K^{(T)}(r, s)$ непрерывно при $r_0 \leq r \leq R$, $r_0 \leq s \leq r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода (8) имеет при любом параметре $\lambda (\lambda \neq 0)$ единственное непрерывное решение, определяемое формулой (9).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры второго рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [6].

При расчете сплошного полярно-ортотропного диска переменной толщины рассматривают диск с малым центральным отверстием $r_0 \cong \frac{1}{20} R$ и принимают на его внутреннем контуре $\sigma_r(r_0) = \sigma_\theta(r_0)$ [7].

Радиальная $\sigma_r(r)$ и тангенциальная $\sigma_\theta(r)$ компоненты напряжений и радиальное перемещение $u(r)$ во вращающемся в неоднородном тепловом поле полярно-ортотропном диске переменной толщины рассчитываются по следующим формулам:

$$\sigma_r(r) = \frac{1}{rh(r)} \left\{ \int_{r_0}^r (r-s) \Phi_T(s) ds + h_0 \sigma_\theta(r_0) \cdot (r-r_0) + h_0 \sigma_r(r_0) r_0 - h_0 \rho \omega_0^2 r_0^2 (r-r_0) \right\}; \quad (10)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{1}{h(r)} \left[\int_{r_0}^r \Phi_T(s) ds + h_0 \sigma_\theta(r_0) + h(r) \rho \omega_0^2 r^2 - h_0 \rho \omega_0^2 r_0^2 \right]; \quad (11)$$

$$u(r) = \frac{1}{E_\theta(T)h(r)} \left\{ \int_{r_0}^r [(1-\nu_{\theta r})r + \nu_{\theta r}s] \Phi_T(s) ds + (1-\nu_{\theta r})h_0 \sigma_\theta(r_0)r + \nu_{\theta r}h_0 r_0 [\sigma_\theta(r_0) - \sigma_r(r_0)] + \right. \\ \left. + h(r) \rho \omega_0^2 r^3 - [(1-\nu_{\theta r})r + \nu_{\theta r}r_0] h_0 \rho \omega_0^2 r_0^2 \right\} + r \cdot \alpha_\theta(T) (T(r) - T_0). \quad (12)$$

В этих формулах уже используется первое граничное условие $\sigma_r(r_0) = -p_0$. Незвестная постоянная $\sigma_\theta(r_0)$ находится из второго граничного условия $\sigma_r(R) = p_1$.

Приведенные формулы (10)–(12) полностью определяют напряженно-деформированное состояние вращающегося в неоднородном тепловом поле профилированного анизотропного кольцевого диска.

Библиографические ссылки

1. Воробей В. В., Морозов Е. В., Татарников О. В. Расчет термонапряженных конструкций из композиционных материалов. М., 1992.
2. Дургарьян С. М. Температурный расчет ортотропной слоистой пластинки при упругих постоянных и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры // Изв. Акад. наук Арм. ССР. Физ.-матем. науки. 1960. Т. XIII, № 2. С. 73–87.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1979.
4. Бурмистров Е. Ф., Маслов Н. М. Напряжения в ортотропных вращающихся дисках переменной толщины // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел : сб. науч. ст. Саратов. гос. ун-та им. Н. Г. Чернышевского. Саратов, 1970. Вып. 5. С. 80–86.
5. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.
6. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев, 1986.
7. Бояришинов С. В. Основы строительной механики машин. М., 1973.

References

1. Vorobei V. V., Morozov E. V., Tatarnikov O. V. Raschet termonapryazhennykh konstruktov iz kompozitsionnykh materialov. Moscow, 1992 (in Russ.).
2. Durgar'yan S. M. Temperaturnyi raschet ortotropnoi sloistoi plastinki pri uprugikh postoyannykh i koeffitsiente temperaturnogo rasshireniya, zavisyashchikh ot temperatury [Temperature calculation of the orthotropic layered plate with depending on the temperature the elastic constants and thermal expansion coefficient]. *Izv. Akad. nauk Arm. SSR. Fiz.-mat. nauki*. 1960. Vol. XIII, No. 2. P. 73–87 (in Russ.).
3. Timoshenko S. P., Gud'er Dzh. Teoriya uprugosti. Moscow, 1979 (in Russ.).
4. Burmistrov E. F., Maslov N. M. Napryazheniya v ortotropnykh vrashchayushchikhsya diskakh peremennoi tolshchiny [Stresses in the orthotropic rotating disks of variable thickness]. *Nekotorye zadachi teorii uprugosti o kontsentratsii napryazhenii i deformatsii uprugikh tel* : collect. of sci. articles of the Saratov State Univ. named after N. G. Chernyshevsky. Saratov, 1970. Issue 5. P. 80–86 (in Russ.).
5. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami. Moscow, 2007 (in Russ.).
6. Verlan' A. F., Sizikov V. S. Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy. Kiev, 1986 (in Russ.).
7. Boyarshinov S. V. Osnovy stroitel'noi mekhaniki mashin. Moscow, 1973 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 12.05.2016.
Received by editorial board 12.05.2016.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004.93'1:932

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ ГИСТОГРАММ НАПРАВЛЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ДАКТИЛОСКОПИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В. А. КУЛИНКОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Предложен метод классификации дактилоскопических изображений, который может найти применение в различных задачах идентификации и биометрического анализа. Выведены закономерности зависимости типа папиллярного узора от распределения локальных направлений. Рассмотрены два подхода к анализу эффективности предложенного метода: непосредственно реализация и искусственная нейронная сеть. Теоретически и экспериментально доказано, что гистограмма распределения направлений имеет различные характеристики для дактилоскопических изображений с различными типами узоров. Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы и доказывающие эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: дактилоскопическое изображение; классификация; локальное направление; поле направлений; гистограмма; нейронная сеть.

Образец цитирования:

Куликович В. А. Применение методики гистограмм направленных градиентов для классификации дактилоскопических изображений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 53–60.

For citation:

Kulinkovich V. A. Using histogram of oriented gradients for fingerprint classification. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 53–60 (in Russ.).

Автор:

Виктория Александровна Куликович – старший преподаватель кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Viktoryia Kulinkovich, senior lecturer at the department of computer applications and systems, faculty of applied mathematics and computer sciences.
kulinkovichva@gmail.com

USING HISTOGRAM OF ORIENTED GRADIENTS FOR FINGERPRINT CLASSIFICATION

V. A. KULINKOVICH^a

^aBelarusian State University,
Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

This article proposes method for classifying fingerprints. The proposed method can be used for fingerprint identification and biometric analysis. Article describes correlations between fingertip patterns and local area gradient orientation distribution. Method effectiveness is analyzed using two approaches: with simple implementation and with artificial neural network. Theoretical and experimental research proves that the orientation histogram has different characteristics for fingerprints containing different types of patterns. The results of numerical experiments confirm the theoretical conclusions and prove the efficiency of the proposed algorithm.

Key words: fingerprint; classification; local orientation; orientation field; histogram; neural network.

Введение

Классификация дактилоскопических изображений является неотъемлемой составляющей в задачах идентификации по отпечаткам пальцев. Определение типа узора на первоначальном этапе идентификации позволяет сузить область поиска, что значительно снижает вычислительные и временные затраты. Для биометрического анализа классификация дактилоскопических изображений также играет немаловажную роль – определение типа узора позволяет провести дальнейшую оценку и получить необходимую биометрическую информацию. В целом рассматриваемая задача классификации является достаточно сложной и трудоемкой, во-первых, в связи с достаточно большим разнообразием структур папиллярных линий, а во-вторых, из-за наличия всевозможных дефектов и искажений на дактилоскопическом изображении, получаемых при сканировании.

Цель работы – исследование базовой классификации папиллярных узоров – арки, треугольной арки, петли (правая, левая), завитка [1; 2]. Предлагаемый метод классификации основан на построении и анализе гистограммы распределения направлений папиллярных линий на дактилоскопическом изображении. Результаты численных экспериментов подтверждают надежность данной методики.

Гистограмма направленных градиентов

Гистограмма направленных градиентов (англ. Histogram of Oriented Gradients, HOG) – это методика, используемая в компьютерном зрении и обработке изображений в целях распознавания объектов [3; 4]. Данный подход основан на подсчете направлений градиента яркости (интенсивности) в локальных областях изображения и базируется на том факте, что распределение градиентов яркости на каком-либо участке изображения дает представление о внешнем виде и форме объекта, расположенного на этом участке (даже без учета точного расположения этих направлений). Суть метода состоит в том, что изображение плотной равномерной сеткой разбивается на области, для каждой из которых строится локальная гистограмма направлений градиентов яркости. Для обеспечения инвариантности по отношению к освещению гистограммы подвергаются нормализации по контрасту с мерой яркости, вычисленной по большему фрагменту. Совокупность построенных нормализованных гистограмм будет являться дескриптором объекта. Такие дескрипторы инвариантны к освещению, геометрическим и фотометрическим преобразованиям (за исключением ориентации самого объекта). Последним этапом в распознавании является классификация дескрипторов при помощи обучения с учителем.

Применение методики HOG к классификации дактилоскопических изображений

Рассматриваемый подход к классификации дактилоскопических изображений основан на анализе гистограммы распределения направлений на поле направлений, которое является одной из основных характеристик дактилоскопического изображения и представляет собой локальную ориентацию папиллярных линий. Существует большое количество алгоритмов для построения поля направлений [5; 6], среди которых одним из наиболее популярных является метод, основанный на вычислении градиентных характеристик изображения. В данном случае используется метод построения сглаженного поля направлений из [7].

Используемые обозначения

Для классифицируемого дактилоскопического изображения рассматривается блочное дискретное поле направлений $\hat{D}_s = \{\hat{d}_s(m_s, n_s)\}_{(m_s, n_s) \in M_s \cdot N_s}$, где $\hat{d}_s(m_s, n_s) \in \{1, \dots, 8\}$ – одно из восьми дискретных направлений в блоке с центром в точке (m_s, n_s) , которое соответствует преобладающей в данном блоке ориентации папиллярных линий. Направление $d_s = 1$ соответствует диапазону $\left[\frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{16}\right)$, направление $d_s = 2$ – диапазону $\left[\frac{3\pi}{16}; \frac{5\pi}{16}\right)$ и т. д. (угол отсчитывается от отрицательного направления оси Ox). В точках фона и точках, где направление оказывается неопределенным (модуль градиента равен либо близок к нулю), полагаем, что дискретное направление равно нулю [7].

Гистограмма распределения направлений строится по формуле

$$H(d_s) = \sum_{m, n} \xi(m, n), \quad d_s = \overline{1, 8},$$

где $\xi(m, n)$ – двузначный признак, принимающий единичное значение, если направление в точке (m, n) совпадает с d_s .

Анализ гистограммы распределения направлений для различных типов папиллярных узоров

Если имеет место арочный тип узора, папиллярные линии пересекают пальцевую подушечку в горизонтальном направлении от одного края к другому, слегка изгибаясь в центре. В случае такой структуры узора на гистограмме распределения направлений преобладают направления, близкие к горизонтальному. При этом вертикальное направление и близкие к нему ($d_s = 3; 4; 5$) либо отсутствуют, либо будут представлены весьма несущественными значениями (рис. 1).

Для треугольной арки характерна схожая конфигурация. Отличие состоит в том, что при прежнем горизонтальном преобладании папиллярные линии в центре имеют восходящую направленность, что обеспечивает наличие одной особой точки – дельты. На гистограмме при таком типе узора будут в незначительной степени присутствовать направления, близкие к вертикальному ($d_s = 3; 4; 5$) (рис. 2).

Петля представляет собой полузамкнутый узор, папиллярные линии в котором, начинаясь от одного края пальцевой подушечки, изгибаются в сторону центра, огибают его и возвращаются к тому краю, с которого начались. Такая структура характеризуется наличием ярко выраженного направления, что делает гистограмму распределения направлений унимодальной, причем положение пика дает представление о подтипе петли (правая или левая). Все восемь дискретных направлений с большой вероятностью будут присутствовать на гистограмме, при этом чаще всего существует второй локальный максимум, соответствующий направлению, ортогональному преимущественному либо соседнему с ним (рис. 3).

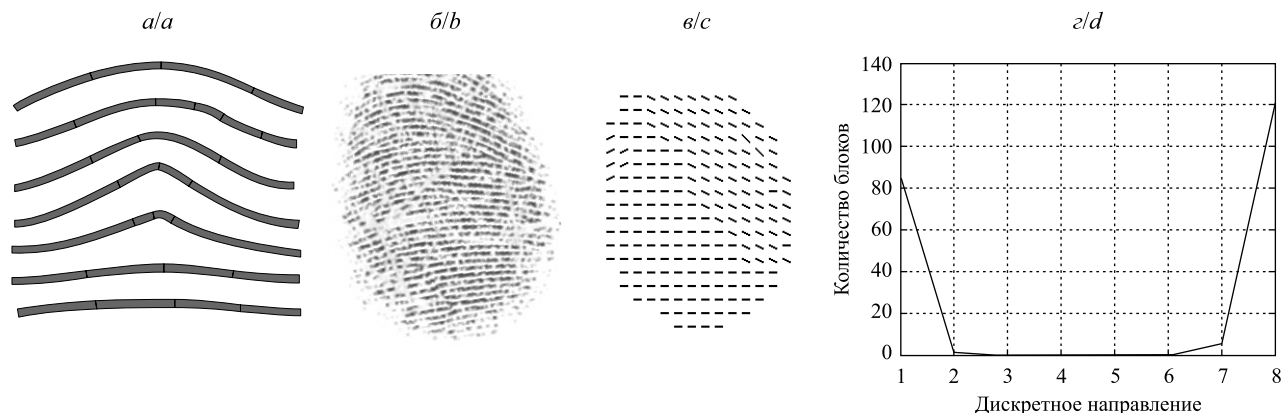


Рис. 1. Гистограмма распределения направлений для папиллярного узора арочного типа:
а – схематичное изображение узора; б – дактилоскопическое изображение с папиллярным узором арочного типа;
в – сглаженное поле направлений; г – гистограмма распределения направлений

Fig. 1. Orientation histogram for fingerprint with «arch» pattern:
a – schematic image of pattern; b – fingerprint with «arch» pattern;
c – fingerprint orientation field; d – orientation histogram

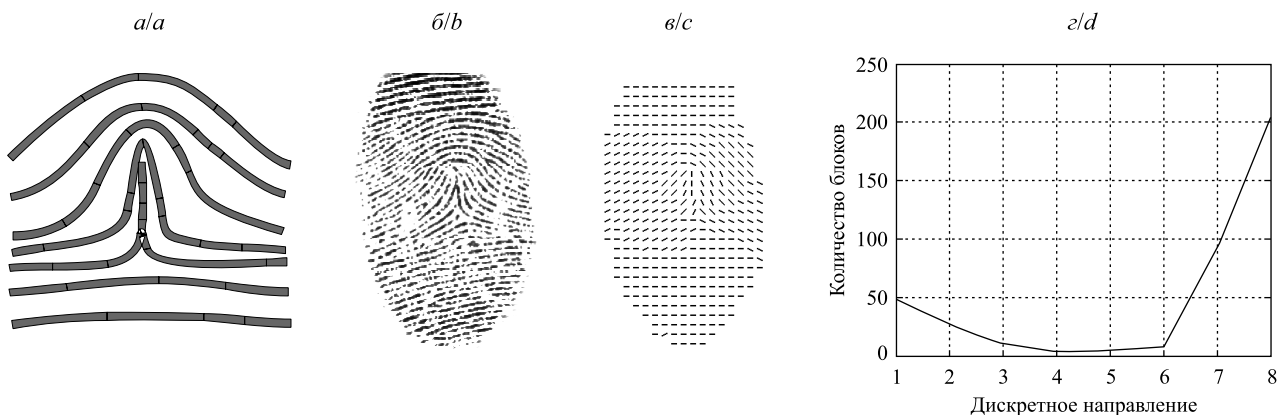


Рис. 2. Гистограмма распределения направлений для папиллярного узора типа «треугольная арка»:

a – схематичное изображение узора; b – дактилоскопическое изображение с папиллярным узором типа «треугольная арка»;
 v – сглаженное поле направлений; z – гистограмма распределения направлений

Fig. 2. Orientation histogram for fingerprint with «tented arch» pattern:

a – schematic image of pattern; b – fingerprint with «tented arch» pattern;
 c – fingerprint orientation field; d – orientation histogram

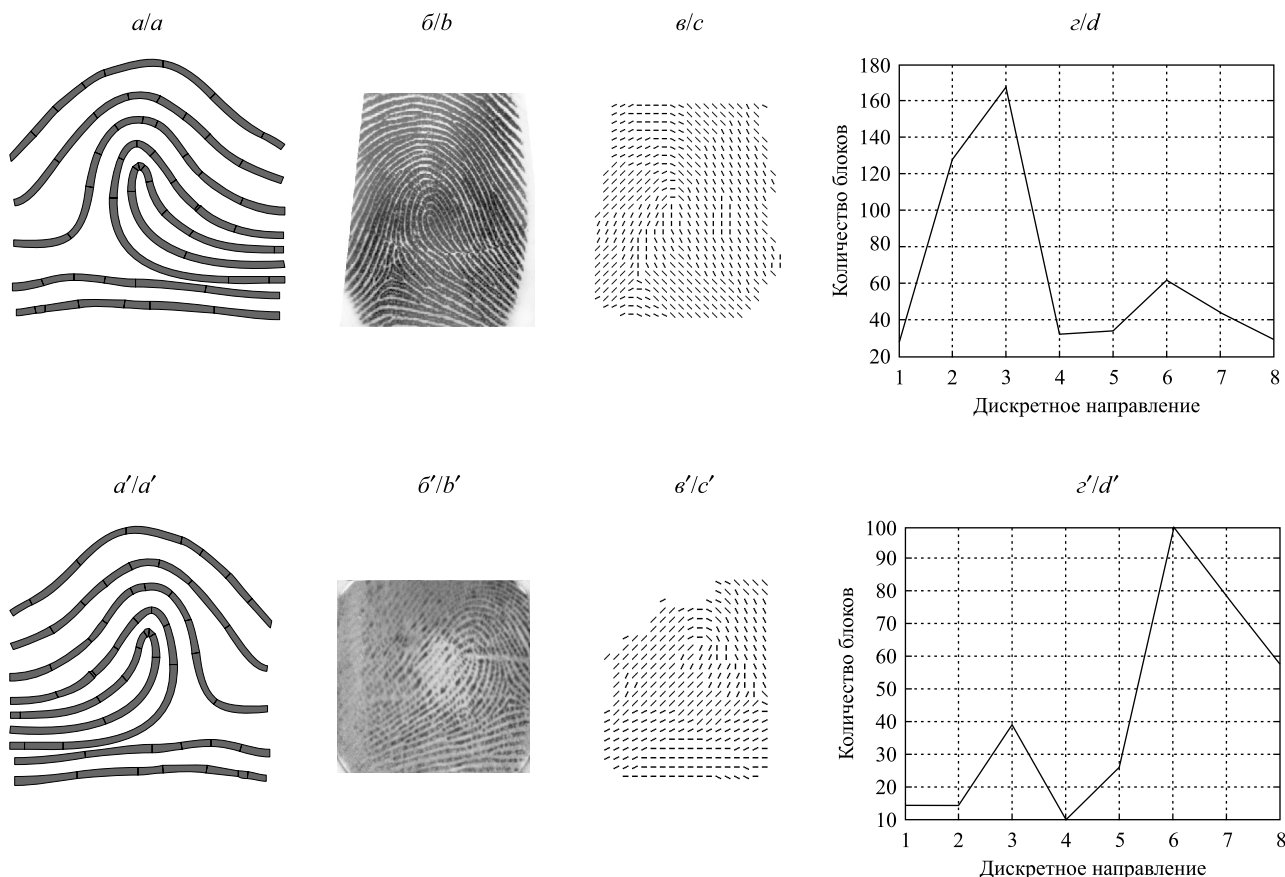


Рис. 3. Гистограмма распределения направлений для папиллярного узора типа «петля»:

a – схематичное изображение узора типа «правая петля»;
 a' – схематичное изображение узора типа «левая петля»;
 b – дактилоскопическое изображение с папиллярным узором типа «правая петля»;
 b' – дактилоскопическое изображение с папиллярным узором типа «левая петля»;
 v, v' – сглаженное поле направлений; z, z' – гистограмма распределения направлений

Fig. 3. Orientation histogram for fingerprint with «loop» pattern:

a – schematic image of pattern with «right loop»; a' – schematic image of pattern with «left loop»;
 b – fingerprint with «right loop» pattern; b' – fingerprint with «left loop» pattern;
 c, c' – fingerprint orientation field; d, d' – orientation histogram

При типе узора «завиток» папиллярные линии в центральной части образуют замкнутый контур. Такой тип узора имеет две дельты и одно либо два ядра. Объем и форма могут сильно варьироваться. При различных формах узора (кольцевая, эллипсоидная, спиральная) возможны следующие характеристики гистограмм: гистограмма имеет унимодальный характер, однако в отличие от петлевого типа пик преимущественно попадает на центральную часть гистограммы (на направления $d_s = 3; 4; 5$ соответственно), при этом локальные максимумы отсутствуют; на гистограмме равномерно представлены все восемь дискретных направлений; гистограмма является бимодальной (рис. 4).

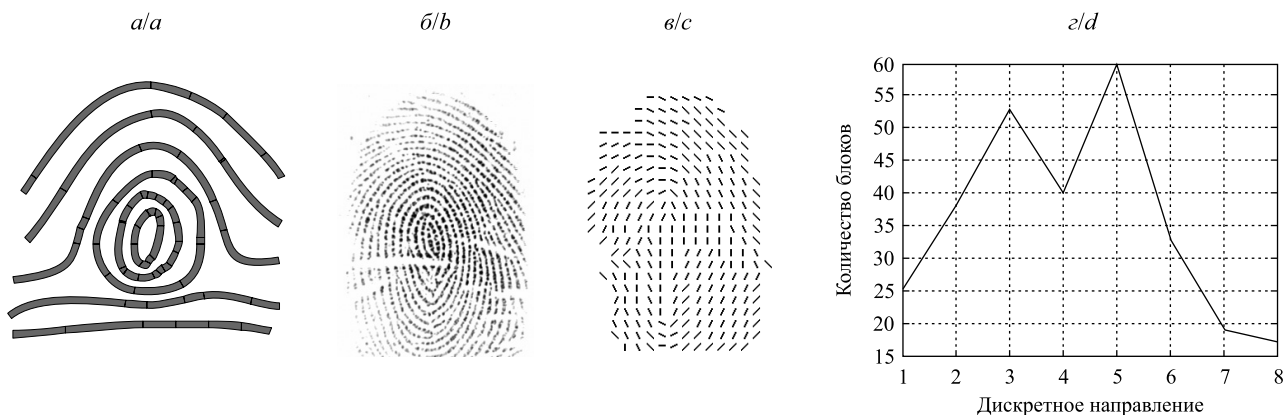


Рис. 4. Гистограмма распределенных направлений для папиллярного узора типа «завиток»: а – схематичное изображение узора; б – дактилоскопическое изображение с папиллярным узором типа «завиток»; в – сглаженное поле направлений; г – гистограмма распределения направлений

Fig. 4. Orientation histogram for fingerprint with «whorl» pattern: а – schematic image of pattern; б – fingerprint with «whorl» pattern; в – fingerprint orientation field; г – orientation histogram

Следует отметить, что все вышеперечисленные закономерности справедливы для случая идеального геометрического расположения отпечатка, т. е. даже небольшие повороты могут привести к значительному искажению результата (допустимы повороты менее чем на угол, равный $\frac{\pi}{16}$, что составляет половину дискрета при разбиении на восемь направлений). Поэтому при использовании данной методики делаются следующие допущения:

- изображение горизонтально ориентированное, т. е. предполагается, что при сканировании подушечки не допускались отклонения от вертикального положения пальца;
- информативная часть папиллярного узора (т. е. содержащая особые точки – дельты и ядра) занимает большую часть сканируемого изображения.

Численные эксперименты

На основании выведенных закономерностей была разработана программа-классификатор, получающая на вход дактилоскопическое изображение и возвращающая вероятности принадлежности данного изображения к одному из пяти стандартных типов. Схема работы программы-классификатора следующая: для входного изображения строится усредненное поле направлений по блокам размером 13×13 точек по методу [7], после чего формируется гистограмма распределения направлений. Затем по полученным значениям гистограммы формируется вектор признаков, компоненты которого соответствуют ключевым характеристикам гистограммы, обозначенным выше (количество пиков, значения локальных максимумов и минимумов, их взаимное расположение и т. д.). В соответствии со значением каждой из компонент вектора признаков меняется вероятность принадлежности гистограммы к одному из определяемых типов. Результатом работы классификатора является вектор из пяти значений в диапазоне от 0 до 1, определяющий итоговые вероятности принадлежности гистограммы к одному из типов узора (1 – арка, 2 – треугольная арка, 3 – левая петля, 4 – правая петля, 5 – завиток). Все формируемые признаки, а также соответствующие им изменения вероятностей были определены эмпирически на основании многочисленных наблюдений.

Примеры работы классификатора представлены на рис. 5: вероятность принадлежности к одному из типов равна единице (см. рис. 5, а); вероятность принадлежности к одному из типов меньше единицы (см. рис. 5, б); неверное определение типа узора (см. рис. 5, в).

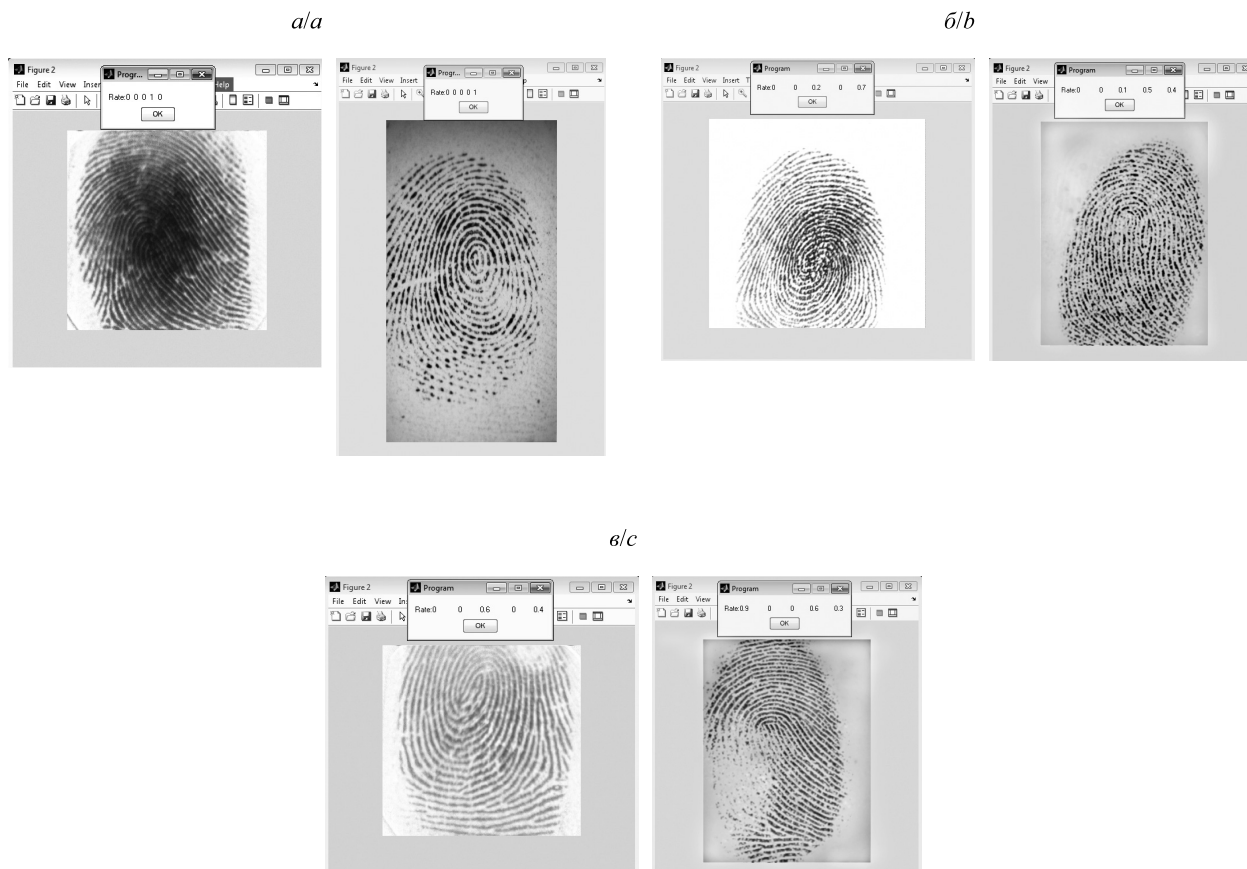


Рис. 5. Результаты классификации:
а – точная; б – частично точная; в – ошибочная
Fig. 5. Classification results:
а – accurate; б – partially accurate; в – inaccurate

Для исследования точности работы классификатора была сформирована тестовая выборка из баз FVC2000, FVC2002, FVC2004 [8]. Из этой выборки на основании визуального анализа отброшены заведомо неподходящие изображения, не удовлетворяющие вышеуказанным требованиям. Из тестовой выборки 81 % изображений были успешно классифицированы.

Использование нейросетевого аппроксиматора для классификации дактилоскопических изображений

Исследована также возможность применения нейросетевых методов для аппроксимации зависимостей между значениями гистограммы распределения направлений и типом узора на соответствующем дактилоскопическом изображении. В результате многочисленных экспериментов в качестве нейросетевого аппроксиматора была выбрана трехслойная однонаправленная нейронная сеть, обучаемая с применением алгоритма обратного распространения. Данная модель имеет восемь входов, соответствующих значениям гистограммы распределения направлений, и пять выходов, которые определяют вероятность принадлежности входной гистограммы к одному из вышеперечисленных классов. Количество нейронов скрытого слоя варьируется в зависимости от размера обучающей выборки таким образом, чтобы число весовых коэффициентов не превышало количества примеров для обучения; в качестве активационных функций выбраны гиперболический тангенс для входного слоя и линейные функции активации для скрытого и выходного слоев. Перед созданием и обучением сети выполняется нормирование входных данных. Схема работы нейронной сети представлена на рис. 6.

Обучающая и тестовая выборки формируются из дактилоскопических изображений FVC2000, FVC2002, FVC2004 [8]. Пользователям в свободном доступе предоставлены по четыре множества во всех базах, содержащих изображения, полученные с помощью разного типа датчиков. В каждом из этих множеств содержатся 80 изображений – десять пальцевых подушечек, отсканированных в восьми вариациях.

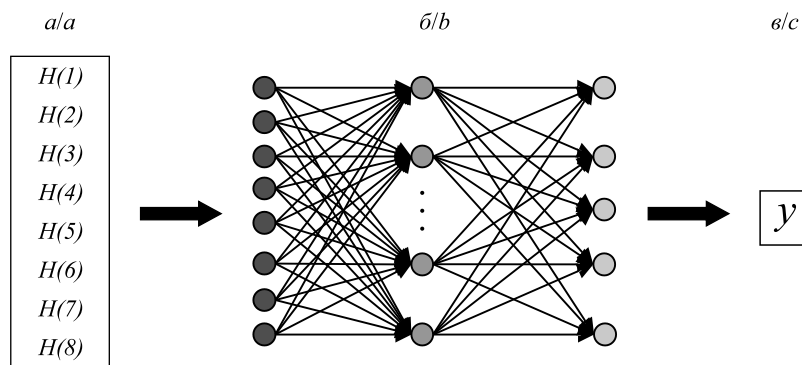


Рис. 6. Схема работы нейронной сети:
а – входы нейронной сети; б – структура нейронной сети;
в – выход нейронной сети
Fig. 6. Neural network graph:
а – neural network inputs; б – neural network structure;
с – neural network output

Наблюдения из обучающей выборки были классифицированы без ошибок. Результаты классификации при различных обучающих и тестовых множествах представлены в таблице.

Точность классификации
для различных обучающих и тестовых множеств

Наименование показателя	База данных дактилоскопических изображений					
	FVC2000/DB1	FVC2000/DB1*	FVC2000/DB2	FVC2000/DB1 + + FVC2000/DB2	FVC2000/DB1 + + FVC2000/DB2**	FVC2000 + + FVC2002 + + FVC2004***
Размерность обучающей выборки/ тестовой выборки изображений	70/10	56/3	70/10	140/20	70/10	769/31
Точность классификации (усредненное значение), %	98,5	94	88	91,25	79	66

* В тестовом множестве отсутствуют вариации отпечатков из обучающего множества.

** Обучающая выборка сформирована из DB1, тестовая выборка – из DB2.

*** Низкая точность обусловлена большим разбросом значений входных данных.

С одной стороны, обучающая выборка должна быть репрезентативной и содержать достаточное для качественного обучения количество примеров. С другой стороны, объем обучающей выборки должен быть минимально возможным в целях сокращения временных и вычислительных затрат. При наличии в обучающих и тестовых множествах вариаций одного и того же отпечатка точность классификации приближается к 100 % и такой результат не является показательным. В случае использования в качестве примеров изображений разных размеров и разрешений, полученных с помощью различных датчиков, точность значительно уменьшается.

Заключение

Предложенный метод позволяет достаточно точно классифицировать папиллярные узоры, однако его недостатком являются ограничения, накладываемые на классифицируемое изображение. Данную методику можно использовать в совокупности с другими алгоритмами для повышения точности классификации в задачах идентификации и биометрического анализа.

Библиографические ссылки

1. Handbook of Fingerprint Recognition / D. Maltoni [et al.]. New York, 2003.
2. Гладкова Т. Д. Кожные узоры кисти и стопы обезьян и человека. М., 1966.
3. Dalal N., Triggs B. Histograms of oriented gradients for human detection // Computer Vision and Pattern Recognition : IEEE Comput. Soc. Conf. (San Diego, 20–25 June, 2005). San Diego, 2005. Vol. 1. P. 886–893.

4. Гистограмма направленных градиентов [Электронный ресурс]. 2010. URL: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1700368> (дата обращения: 05.04.2016).
5. Kass M., Witkin A. Analyzing oriented pattern // *Comput. Vis., Graph., Image Process.* 1987. Vol. 37, issue 3. P. 362–397.
6. Zhou J., Gu J. A model-based method for the computation of fingerprints orientation field // *IEEE Trans. Image Process.* 2004. Vol. 13, issue 6. P. 821–835.
7. Селянинов М. Ю., Куликович В. А. Построение поля направлений папиллярных линий дактилоскопических отпечатков в системах биометрического анализа // *Электроника инфо.* 2015. № 9(123). С. 56–59.
8. Fingerprint verification Competition 2004 [Electronic resource]. 2004. URL: <http://bias.csr.unibo.it/fvc2004> (date of access: 29.07.2016).

References

1. Maltoni D., Maio D., Jain A. K., et al. Handbook of Fingerprint Recognition. New York, 2003.
2. Gladkova T. D. Kozhnye uzory kisti i stopy obez'yan i cheloveka [Skin Patterns of Hand and Foot in Monkeys and Humans]. Moscow, 1966 (in Russ.).
3. Dalal N., Triggs B. Histograms of oriented gradients for human detection. *Computer Vision and Pattern Recognition* : IEEE Comput. Soc. Conf. (San Diego, 20–25 June, 2005). San Diego, 2005. Vol. 1. P. 886–893.
4. Gistogramma napravlennykh gradientov [Histogram of oriented gradients] [Electronic resource]. 2010. URL: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1700368> (date of access: 05.04.2016) (in Russ.).
5. Kass M., Witkin A. Analyzing oriented pattern. *Comput. Vis., Graph., Image Process.* 1987. Vol. 37, issue 3. P. 362–397.
6. Zhou J., Gu J. A model-based method for the computation of fingerprints orientation field. *IEEE Trans. Image Process.* 2004. Vol. 13, issue 6. P. 821–835.
7. Selyaninov M. Y., Kulinkovich V. A. Postroenie polya napravlenii papillyarnykh linii daktiloskopicheskikh otpechatkov v sistemakh biometricheskogo analiza [Computation of fingerprints orientation field in biometric systems]. *Elektronika info.* 2015. No. 9(123). P. 56–59 (in Russ.).
8. Fingerprint verification Competition 2004 [Electronic resource]. 2004. URL: <http://bias.csr.unibo.it/fvc2004> (date of access: 29.07.2016).

Статья поступила в редколлегию 23.09.2016.
Received by editorial board 23.09.2016.

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

OUR JUBILEE

Эдмунд Иванович
ЗВЕРОВИЧ

Edmund Ivanovich
ZVEROVICH



Исполнилось 80 лет видному белорусскому математику, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному работнику БГУ Эдмунду Ивановичу Зверовичу.

Э. И. Зверович родился 30 декабря 1936 г. в станице Нововладимирской Краснодарского края. По окончании Ростовского государственного университета и аспирантуры в г. Москве работал в учреждениях высшего образования городов Ростова и Одессы.

В 1975 г. доктор физико-математических наук Э. И. Зверович переезжает в г. Минск и приступает к работе на механико-математическом факультете БГУ в должности заведующего кафедрой теории функций. Эдмунд Иванович заведовал кафедрой на протяжении 27 лет, а с 2002 г. и по настоящее время он профессор этой кафедры.

Э. И. Зверович – известный специалист по математическому анализу, имеющий большой авторитет среди математиков многих стран мира. Эдмундом Ивановичем получены фундаментальные результаты по теории краевых задач для аналитических функций. В первую очередь это относится к построенной им теории краевых задач на римановых поверхностях. Попытки разработать эту теорию в 1960–70-х гг. предпринимались в ра-

ботах ряда видных математиков, однако привели лишь к установлению частных результатов. До появления трудов Эдмунда Ивановича не было принципиального понимания подходов к решению таких задач. Он разработал также метод локально-конформного склеивания, позволяющий решать все известные двухэлементные краевые задачи в наиболее общей постановке, исследовал многие особые интегральные уравнения, вопросы теории римановых поверхностей, конструктивно решил ряд сложных задач теории упругости и электродинамики. К важнейшим результатам, полученным Эдмундом Ивановичем в последнее время, относится решение проблемы особого случая в краевых задачах на римановых поверхностях. Список научных публикаций Э. И. Зверовича насчитывает около 200 работ.

Профессор Э. И. Зверович подготовил 23 кандидата наук, четверо его учеников стали докторами наук. Всем руководимым им аспирантам он передал свою увлеченность и любовь к математической науке, а также честность и точность в получении научных результатов.

В настоящее время ученики Эдмунда Ивановича работают в Беларуси, России, Украине, Молдове, Таджикистане, Польше, Германии, Эквадоре,

Канаде и добросовестно служат математической науке и математическому образованию, следуя принципам своего учителя.

За многие годы работы в БГУ Эдмунд Иванович прочитал десятки курсов лекций по разным разделам математики. И каждая лекция — это доступность и одновременно глубина изложения материала, строгость изложения и неизменный интерес слушателя. Итогом плодотворной многолетней преподавательской работы стало издание Эдмундом Ивановичем в 2006–2008 гг. учебного пособия «Вещественный и комплексный анализ» (в 4 книгах). Пособие содержит современные, во многом новые методические подходы к изучению классического базового раздела высшей математики. Кроме того, на основе спецкурсов, преподаваемых Э. И. Зверовичем, написаны и изданы пособия «Элементы тэорыі імавернасцей» (2013) (в соавторстве с А. Я. Радыно) и «Линейные краевые задачи теории аналитических функций» (2015).

Талант математика и педагога притягивает к Эдмунду Ивановичу студентов, сотрудников университета и всех, кому приходится с ним общаться. К Эдмунду Ивановичу можно обратиться и за оценкой математического результата, и за жизненным советом. Преданность науке, мудрость учителя счастливо сочетаются в нем с неизменным оптимизмом и остроумием. Все это особенно хорошо известно тем, кто посещает научный семинар кафедры теории функций имени академика Ф. Д. Гахова, которым Эдмунд Иванович руководит уже несколько десятилетий. Кстати, и сам руководитель ежегодно выступает на этом семинаре со своими новыми научными результатами и регулярно публикует их в авторитетных математических журналах.

Коллектив кафедры теории функций, ученики, а также сотрудники, аспиранты и студенты механико-математического факультета сердечно поздравляют Эдмунда Ивановича с юбилеем, желают ему крепкого здоровья, семейного благополучия и новых творческих успехов.

**Анатолий Борисович
АНТОНЕВИЧ**

**Anatolii Borisovich
ANTONEVICH**



Исполнилось 75 лет известному белорусскому ученому — доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Борисовичу Антоневичу.

А. Б. Антоневи́ч родился 9 января 1942 г. в с. Меловатка Волгоградской области. В 1963 г. окончил математический факультет БГУ. Работает в БГУ с 1967 г., с 1990 г. — профессор кафедры функционального анализа. Докторскую диссертацию защитил в 1989 г. в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Основные научные интересы А. Б. Антоневи́ча связаны с теорией функциональных операторов и порожденных ими операторных алгебр. Функциональные операторы являются существенно нелокальными операторами, включение которых в различные классы уравнений принципиально усложняет исследование, так как стандартные методы, разработанные для анализа локальных операторов, неприменимы в такой ситуации.

Первые научные работы А. Б. Антоневи́ча, принесшие ему известность среди ученых-математиков, были связаны с проблемой индекса нелокальных операторов. В 1969 г. Анатолием Борисовичем получена формула, которая выражает индекс псевдодифференциального оператора с конечной группой сдвигов через топологические инварианты, называемые числами Лефшеца эквивариантного оператора. Это была одна из первых работ в СССР, в которых использовалась К-теория, незадолго до этого построенная известным английским математиком М. Атьи, имевшая широкий международный резонанс.

Для исследования функциональных операторов и соответствующих нелокальных уравнений в общей ситуации А. Б. Антоневи́ч разработал подход, базирующийся на исследовании специфики операторных алгебр, порожденных функциональными операторами. Основополагающими результатами, полученными профессором А. Б. Антоневи́чем в этом направлении, являются

теоремы об изоморфизме C^* -алгебр, порожденных динамическими системами, теорема о гомоморфности линейного расширения, ассоциированного с операторами взвешенного сдвига, конструкция символа функционально-дифференциального оператора, аналог условия Лопатинского для нелокальных краевых задач. Данные результаты были опубликованы в научных журналах с высоким рейтингом, а также систематизированы в монографиях, изданных в Беларуси и ведущих зарубежных издательствах: А. Б. Антоневи́ч. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход (1988) (переведена на английский язык: А. Б. Antonevich. Linear Functional Equations. Operator Approach (Birkhauser, 1996); А. Antonevich, А. Lebedev. Functional differential equations: I. C^* -theory (Longman, 1994); А. Antonevich, М. Belousov, А. Lebedev. Functional differential equations: II. C^* -applications. Part 1. Equations with continuous coefficients (Longman, 1998); А. Antonevich, М. Belousov, А. Lebedev. Functional differential equations: II. C^* -applications. Part 2. Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems (Longman, 1998); А. Б. Antonevich, С. В. Dolicanin. Dynamical systems generated by linear maps (2012, второе издание — 2014, Springer).

В последние годы профессором А. Б. Антоневи́чем впервые получены условия односторонней обратимости и описаны существенные спектры функциональных операторов, обнаружено новое свойство нечеткой дихотомии, связанное с существованием корректных краевых задач для функциональных и дифференциальных уравнений, описаны квазипериодические обобщенные функции и их приложения к теории квазикристаллов, новые формулы (вариационные принципы) для подсчета спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига (аналогами или частными случаями этих формул являются известные в термодинамике и статистической физике вариационные принципы).

С 1990 г. круг научных интересов Анатолия Борисовича расширился за счет тематики, связанной с проблемой умножения обобщенных функций, современные подходы к решению которой базируются на введении вместо обобщенных функций новых объектов, называемых мнемофункциями, допускающих корректное задание произведения и при этом сохраняющих основные свойства обобщенных. Совместно с Я. В. Радыно разработан общий подход к построению алгебр мнемофункций, сконструирован ряд новых алгебр. Даны приложения к исследованию уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом и сингулярных решений (типа бесконечно узкого солитона и типа ударной волны) для некоторых нелинейных уравнений с частными производными. Составлена таблица умножения (в смысле теории мнемофункций) базовых обобщенных функций. Часть результатов разработки этого направления представлены в монографии А. Б. Антоневи́ча, Т. А. Романчук «Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций» (LAMBERT Academic Publishing, 2012).

А. Б. Антоневи́ч опубликовал свыше 200 научных работ, среди его соавторов более 50 специалистов из разных стран. Он подготовил 22 кандидата наук и продолжает активно работать с аспирантами (готовы к защите еще три кандидатские диссертации). Среди его учеников – граждане Беларуси, России, Вьетнама, Польши, Сенегала, Сербии, трое из них (А. В. Лебедев, Данг Суан Тхань, Данг Хань Хой) стали докторами наук.

Анатолий Борисович является не только выдающимся ученым, но и замечательным педагогом. Совместно с Я. В. Радыно и П. Н. Князевым им еще в 1978 г. был написан первый в СССР задачник по функциональному анализу, переизданный четыре раза и переведенный на испанский язык.

Неослабевающей популярностью как в Беларуси, так и на постсоветском пространстве пользуется написанный совместно с Я. В. Радыно учебник по функциональному анализу, издававшийся трижды (1984, 2003, 2006), а также ряд других учебных пособий по функциональному анализу, теории меры и интегральным уравнениям, в совокупности составляющих учебно-методический комплекс по функциональному анализу.

Профессор А. Б. Антоневи́ч – лауреат премии имени А. Н. Севченко (1995), он удостоен званий «Заслуженный работник БГУ», «Отличник народного образования», «Соросовский профессор», награждался почетными грамотами Министерства образования Республики Беларусь, Президиума НАН Беларуси, Белорусского государственного университета.

Математика – не единственное увлечение Анатолия Борисовича. Он мастер спорта СССР по классической (греко-римской) борьбе, был чемпионом Белоруссии и победителем молодежного чемпионата СССР. Ему покорялись не только научные высоты, но и труднопроходимые крутые маршруты в горах Кавказа, Памира, Тянь-Шаня, Алтая, Саян, Камчатки, Урала, Хибин и хребта Черского, за что было присвоено также звание мастера спорта СССР по горному туризму.

Сердечно поздравляем Анатолия Борисовича Антоневи́ча с 75-летием и желаем ему крепкого здоровья, большого счастья и новых творческих успехов.

*В. И. Бахтин, В. И. Берник, И. В. Гайшун,
Е. А. Горин, В. В. Гороховик, Ч. Доличанин,
В. А. Еровенко, П. П. Забрейко, Н. Д. Копачевский,
В. И. Корзюк, В. Г. Кротов, Н. В. Лазакович,
А. В. Лебедев, М. Х. Мазель, В. Е. Назайкинский,
А. Одзиевич, А. М. Степин, Данг Суан Тхань,
А. И. Шафаревич, Н. И. Юрчук, Л. А. Янович*

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

TO THE MEMORY OF SCIENTIST

**Яков Валентинович
РАДЫНО**

**Yakov Valentinovich
RADYNO**



9 декабря 2016 г. ушел из жизни известный белорусский математик, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор заведующий кафедрой функционального анализа механико-математического факультета БГУ Яков Валентинович Радыно.

Я. В. Радыно родился 1 декабря 1946 г. в деревне Брилки Воложинского района в крестьянской семье. С детства он был приучен к нелегкому сельскому труду. Именно тогда и были заложены основы исключительного трудолюбия Якова Валентиновича. Математические способности проявились у него рано, талантливый школьник успешно участвовал в математических олимпиадах различного уровня. В выпускном году он стал победителем республиканской олимпиады, после чего принял решение поступать на математический факультет Белорусского государственного университета, с которым в дальнейшем и связал свою судьбу. По окончании университета Я. В. Радыно начал трудовую деятельность в БГУ в качестве стажера-исследователя, в 1972 г. защитил кандидатскую диссертацию. Большое влияние на формирование его как ученого оказала стажировка в Швейцарии в 1973–1974 гг.

В 1975 г. 28-летнему доценту Я. В. Радыно было доверено руководство вновь созданной кафедрой функционального анализа, бессменным заведую-

щим которой он был в течение 41 года. Я. В. Радыно стал одним из основателей белорусской школы функционального анализа, организатором ряда все-союзных и международных научных конференций, инициатором приглашения в БГУ для чтения лекций известных специалистов Советского Союза. За время существования кафедры функционального анализа в рамках этой школы защищено 14 докторских и более 70 кандидатских диссертаций, в том числе 18 из них – под руководством Я. В. Радыно.

Большая организаторская и педагогическая работа не прерывала интенсивной научной деятельности Я. В. Радыно. В 1987 г. он защитил докторскую диссертацию в Математическом институте имени В. А. Стеклова АН СССР. Введенное в этой работе понятие экспоненциального вектора впоследствии с успехом применялось многими математиками. Получил признание специалистов опубликованный в 1990-х гг. цикл совместных работ А. Б. Антоневица и Я. В. Радыно по вопросам умножения обобщенных функций. Затем в сферу научных интересов Якова Валентиновича вошло новое научное направление – неархимедов функциональный анализ. Благодаря интенсивной и плодотворной работе возглавляемая им группа исследователей за короткий срок стала одним из видных участников международного сообщества

математиков, занимающихся этим направлением, перспективным в прикладном и теоретическом аспектах.

Яков Валентинович пользовался большим авторитетом в научном мире. В 2004 г. был избран член-корреспондентом Национальной академии наук Беларуси. Он входил в состав редколлегий ряда белорусских и иностранных научных журналов, регулярно участвовал в работе оргкомитетов отечественных и зарубежных научных конференций. Его приглашали для чтения лекций и исследовательской работы университеты Австрии, Алжира, Болгарии, Израиля, Канады, Польши, Сербии, Словакии, Франции, Швейцарии, Швеции.

Я. В. Радыно вел большую педагогическую и методическую работу. Лекции Якова Валентиновича при неизменно строгом изложении содержали живые, часто неформальные и остроумные пояснения. Широкую известность получили написанные им совместно с сотрудниками кафедры первый в СССР задачник (1978) и учебник (1984) по функциональному анализу, изданные с грифами Министерства высшего и среднего специального образования СССР и неоднократно переиздававшиеся. В последние годы Яков Валентинович в соавторстве со своими учениками написал серию учебных пособий по алгебре и топологии, призванных познакомить студентов-аналитиков с отдельными тонкостями из смежных математических дисциплин. В этих книгах найдены неожиданные подходы к вопросам, излагавшимся традиционно. Новая трактовка при этом получалась более глубокой и в то же время более ясной как для начинающего студента, так и для опытного исследователя.

Научные и педагогические достижения Я. В. Радыно получили высокую оценку со стороны государства. В 1978 г. за цикл работ «Линейные дифференциальные уравнения в локально-выпуклых пространствах» ему была присуждена премия Ленинского комсомола БССР. Цикл работ «Операторные методы в дифференциальных уравнениях» (совместно с В. И. Корзюком и Н. И. Юрчуком) был удостоен Государственной премии Республики Беларусь в области науки за 1996 г. Яков Валентинович был награжден медалью «За працюўныя заслугі»,

почетными грамотами ЦК ВЛКСМ, ЦК ЛКСМБ, Министерства высшего и среднего специального образования СССР, Министерства высшего и среднего специального образования БССР, Министерства просвещения БССР, знаком «Отличник народного просвещения БССР», грамотами Белорусского государственного университета. Ему были присвоены звания заслуженного работника БГУ, почетного профессора Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина и Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Я. В. Радыно глубоко чтит историю и культуру своего народа, его язык. Он являлся соавтором и научным редактором «Русско-белорусского математического словаря» (1993), «Беларуска-польскага і польска-беларускага матэматычнага слоўніка» (2010) – первых в Республике Беларусь изданий такого рода, а также соавтором и научным консультантом первой в Беларуси «Матэматычнай энцыклапедыі». При его деятельном участии на механико-математическом факультете БГУ было организовано чтение лекций по математическим дисциплинам на белорусском языке.

Широкая эрудиция Я. В. Радыно в смежных областях знаний и умение взаимодействовать со специалистами других профилей позволяли ему находить интересные приложения математического аппарата. Яков Валентинович владел французским и польским языками, был очень начитан, и его суждения по вопросам, далеким от научных интересов, всегда были оригинальны и глубоки.

Яков Валентинович был выдающимся математиком, высококвалифицированным лектором, пользовался большим авторитетом у студентов и преподавателей. Его отличали трудолюбие и внимательное отношение к коллегам. Мы потеряли уважаемого коллегу и доброжелательного человека. Коллектив механико-математического факультета, кафедры функционального анализа, друзья, коллеги и ученики выражают искренние соболезнования родным и близким Я. В. Радыно. Светлая память о нем навсегда сохранится в сердцах тех, кто его знал и с ним работал.

*Коллектив кафедры функционального анализа
механико-математического факультета БГУ*

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPER DEPOSITED AT BSU

УДК 514.742(075.8)+514.743(075.8)+517.51(075.8)

Основы векторного и тензорного анализа [Электронный ресурс] : учеб.-метод. комплекс для студентов, обучающихся по спец.: 1-31 04 01-02 «Физика (производственная деятельность)» ; 1-31 04 01-03 «Физика (научно-педагогическая деятельность)» ; 1-31 04 01-04 «Физика (управленческая деятельность)» / сост.: Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимошенко ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2016. 139 с. : ил. Библиогр.: с. 6–7. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/157996>. Загл. с экрана. Деп. 23.09.2016, № 006823092016.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) подготовлен в соответствии с базовой учебной программой УД-208 от 18.12.2013 г. в целях учебно-методического обеспечения студентов первого курса физического факультета. Задачей настоящего ЭУМК является систематизация изучения студентами курса «Основы векторного и тензорного анализа», а также помощь в организации практических занятий начинающим преподавателям.

УДК 517.926.4(075.8)

Кононова О. А. Нахождение частного решения неоднородного линейного уравнения методом неопределенных коэффициентов [Электронный ресурс] : учеб.-метод. разработка / О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. К. Филиппова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2016. 13 с. Библиогр.: с. 13. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/161632>. Загл. с экрана. Деп. 24.11.2016, № 008124112016.

В учебно-методической разработке рассматриваются случаи нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, когда правая часть этого уравнения представляет собой произведение полинома и показательной функции. В этом случае частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов, что существенно облегчает нахождение частного в отличие от универсального метода вариации произвольных постоянных.

Адресуется студентам, обучающимся по физико-математическим специальностям.

УДК 004.439:004.55:004.738.5HTML(075.8)

Мигачева М. Е. Практикум по HTML и CSS. Базовые составляющие [Электронный ресурс] : учеб. пособие для практ. занятий по курсу «Web-дизайн и компьютерная графика», «Верстка web-страниц» / М. Е. Мигачева ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2016. 162 с. Библиогр.: с. 162. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/162156>. Загл. с экрана. Деп. 05.12.2016, № 008705122016.

В учебном пособии рассмотрены базовые задачи по основам верстки web-страниц, ориентированные на практические примеры.

Предназначено для слушателей факультетов бизнеса, повышения квалификации и переподготовки кадров, а также студентов очной и заочной форм обучения, изучающих основы front-end-разработки.

УДК 004(075.8)

Белецкая Л. В. **Компьютерные информационные технологии: файловые системы** [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по спец. 1-26 02 02 «Менеджмент (по направлениям)» / Л. В. Белецкая, Н. Н. Поснов ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2016. 39 с. : ил. Библиогр.: с. 39. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/163410>. Загл. с экрана. Деп. 20.12.2016, № 009720122016.

Представлены наиболее востребованные виды накопителей, их характеристики и основные правила эксплуатации, а также приведен краткий обзор файловых систем, поддерживаемых Windows, описаны основные типы файловых систем и принципы их работы.

Для студентов первой ступени получения высшего образования, обучающихся по специальности «Менеджмент», Государственного института управления и социальных технологий БГУ.

УДК 004.92(075.8)

Лукьянович И. Р. **Программная адаптация систем компьютерной графики** [Электронный ресурс] : учеб.-метод. комплекс для студентов, обучающихся по спец. 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)», направление спец. 1-31 03 07-03 «Прикладная информатика (веб-программирование и компьютерный дизайн)», специализация 1-31 03 07-03 01 «Веб-программирование и компьютерная графика» / И. Р. Лукьянович ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2016. 54 с. : ил. Библиогр.: с. 49–54. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/163821>. Загл. с экрана. Деп. 26.12.2016, № 009826122016.

Учебно-методический комплекс содержит учебный материал по инструментам адаптации и API-систем графического дизайна Adobe Photoshop, Illustrator, Flash. Включает также программу дисциплины, контрольные вопросы и задания.

Адресуется студентам факультета социокультурных коммуникаций БГУ. Может быть использован студентами других специальностей при изучении инструментов непрограммной и программной адаптации систем графического дизайна.

УДК 082(06)

Сборник работ 73-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, 16–25 мая 2016 г.) : в 3 ч. [Электронный ресурс] / отв. за выпуск С. Г. Берлинская ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2016. 1542 с. : ил., табл. Библиогр. в конце ст. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/166929>. Загл. с экрана. Деп. 01.02.2017, № 000901022017.

Сборник составлен по результатам докладов студентов и аспирантов на ежегодной научной конференции, проходившей в БГУ с 16 по 25 мая 2016 г. Представлены статьи по актуальным проблемам в области естественных и социально-гуманитарных наук, имеющие как прикладной, так и теоретический характер. Ряд статей приведены на иностранных языках. Подготовка и издание сборника осуществлялись в соответствии с Положением о ежегодной конференции студентов и аспирантов БГУ, утвержденным приказом ректора БГУ от 13.09.2011 г. № 366-ОД.

УДК 517.91(075.8)(076)+517.962.22(075.8)(076)

Егоров А. В. **Обыкновенные дифференциальные уравнения. Линейные разностные уравнения** [Электронный ресурс] : практикум для студентов, обучающихся по спец.: 1-26 02 02 «Менеджмент

(по направлениям)»; 1-26 02 03 «Маркетинг» / А. В. Егоров, Л. Г. Третьякова ; под общ. ред. М. Л. Зеленкевич ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск, 2016. 41 с. : табл. Библиогр.: с. 40–41. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/167750>. Загл. с экрана. Деп. 10.02.2017, № 001010022017.

Практикум содержит теоретический материал, задачи для проведения практических занятий, задания для рейтинговых контрольных работ и управляемой самостоятельной работы. Приведены примеры решения базовых задач. Большое внимание уделено подбору задач, связанных с изучением дисциплин финансово-экономического блока. Задания для рейтинговых контрольных работ рассчитаны на составление 34 вариантов.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Менеджмент» и «Маркетинг», преподавателей и лиц, занимающихся самообразованием.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

<i>Кот М. Г.</i> Асимптотика собственных значений операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ -образными коэффициентами	4
--	---

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

<i>Лысенко В. В., Тимохович В. Л.</i> Соприкасающаяся квадрака пространственной кривой	11
--	----

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Журак М. К., Харин Ю. С.</i> Статистическая проверка гипотез о значениях параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных	16
<i>Гайтюкевич Е. А., Труш Н. Н.</i> Некоторые свойства фрактального броуновского движения	23
<i>Цеховая Т. В.</i> Свойства внутренне стационарных случайных процессов.....	28

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

<i>Живица Е. Д., Кузьмин К. Г.</i> К нахождению радиуса устойчивости минимального остовного дерева....	34
--	----

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

<i>Томило В. А., Кочик Е. В., Тарасюк И. А., Кравчук А. С.</i> Вязкоупругий изгиб стержней переменных радиуса кривизны и жесткости.....	39
<i>Королевич В. В., Медведев Д. Г.</i> Решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода	47

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Куликович В. А.</i> Применение методики гистограмм направленных градиентов для классификации дактилоскопических изображений	53
--	----

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Эдмунд Иванович Зверович	61
Анатолий Борисович Антоневиц	63

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Яков Валентинович Радыно 	65
Аннотации депонированных в БГУ работ	67

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

<i>Kot M. G.</i> Asymptotics of the eigenvalues of approximating differential equations with δ -different coefficients.....	4
--	---

GEOMETRY AND TOPOLOGY

<i>Lysenko V. V., Timokhovich V. L.</i> Osculating quadric of the spatial curve.....	11
--	----

THEORY OF PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Zhurak M. K., Kharin Y. S.</i> Statistical hypotheses testing for parameters of binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data	16
<i>Haitsiukevich K. A., Trough M. M.</i> Some properties of fractional Brownian motion	23
<i>Tsekhavaya T. V.</i> Properties of the intrinsically stationary stochastic processes	28

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

<i>Zhyvitsa Ya. D., Kuzmin K. G.</i> On calculation of the stability radius for a minimum spanning tree	34
---	----

MECHANICS OF DEFORMABLE SOLIDS

<i>Tamila V. A., Kochyk Y. V., Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S.</i> Viscoelastic bending of beams of variable curvature radius and stiffness.....	39
<i>Karalevich U. V., Medvedev D. G.</i> Solution of the axisymmetric plane thermoelasticity problem for a polar-orthotropic disc of variable thickness in the rotating thermal field by Volterra integral equation of the second kind	47

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Kulinkovich V. A.</i> Using histogram of oriented gradients for fingerprint classification.....	53
--	----

OUR JUBILEE

Edmund Ivanovich Zverovich.....	61
Anatolii Borisovich Antonevich.....	63

TO THE MEMORY OF SCIENTIST

Yakov Valentinovich Radyno 	65
--	----

Indicative abstracts of the paper deposited at BSU	67
--	----

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 1. 2017**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, Минск.
Почтовый адрес: ул. Кальварийская, 9, каб. 636, 637,
220004, Минск.
Тел. 259-70-74, 259-70-75.
E-mail: vestnikbsu@mail.ru
vestnikbsu@bsu.by

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редактор *Е. В. Павлова*
Технический редактор *В. В. Кильдишева*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 22.03.2017.
Тираж 155 экз. Заказ 110.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского
государственного университета».
ЛП № 02330/117 от 14.04.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.

© БГУ, 2017

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 1. 2017**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: Nezavisimosti ave., 4, 220030, Minsk.
Correspondence address: Kal'variiskaya str., 9, office 636, 637,
220004, Minsk.
Tel. 259-70-74, 259-70-75.
E-mail: vestnikbsu@mail.ru
vestnikbsu@bsu.by

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editor *E. V. Pavlova*
Technical editor *V. V. Kil'disheva*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 22.03.2017.
Edition 155 copies. Order number 110.

Publishing Center of BSU.
License for publishing No. 02330/117, 14 April, 2014.
Krasnoarmeiskaya str., 6, 220030, Minsk.

© BSU, 2017