

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики и информатики

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
_____ Самаль С.А.
«25» июня 2024 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
_____ Босяков С.М.
«02» июля 2024 г.

Высшая математика

Электронный учебно-методический комплекс
для специальности:

6-05-0532-09 «Страноведение и переводческая деятельность»

Профилизация: «География и английский язык»

Регистрационный № 2.4.2-24/494

Авторы:

Мартон М.В., кандидат физико-математических наук, доцент;
Моисеева Н.А., старший преподаватель.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
29.08.2024 г., протокол № 1.

Минск 2024

УДК 51(075.8)
М 293

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
Протокол № 1 от 29.08.2024 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 11 от 02.07.2024 г.

А в т о р ы:

Мартон Марина Владимировна, доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ,

Моисеева Наталья Александровна, старший преподаватель кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ.

Рецензенты:

кафедра математики и методики преподавания математики, учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (зав. кафедрой Н.В. Гриб, физико-математических наук, доцент);

Барвенов С.А., доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.

Мартон, М. В. Высшая математика : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0532-09 «Страноведение и переводческая деятельность», профилизация: «География и английский язык» / М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2024. – 305 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 302–305.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Высшая математика» предназначен для студентов специальности 6-05-0532-09 Страноведение и переводческая деятельность. В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, планы лабораторных работ, примерные тестовые задания, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, контрольные работы, примерный тематический план, содержание учебного материала, вопросы для подготовки к зачету, темы для рефератов, список литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	5
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	8
1.1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВЫСШАЯ АЛГЕБРА	8
1.1.1. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений	8
1.1.2. Аналитическая геометрия на плоскости.....	33
1.1.3. Аналитическая геометрия в пространстве.....	77
1.2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	88
1.2.1. Функции одной переменной и пределы.....	88
1.2.2. Производные и дифференциалы.....	104
1.2.3. Неопределенный интеграл	130
1.2.4. Определенный интеграл	135
1.3. Основы теории вероятностей	146
1.3.1. Элементы теории множеств. Комбинаторика	146
1.3.2. Случайные события и вероятности	164
1.3.3. Случайные величины.....	175
2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ	192
2.1. Примерная тематика практических занятий.....	192
Занятие № 1. Матрицы. Операции над матрицами. Определители матриц. Свойства определителей. Обратная матрица.	192
Занятие № 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод крамера, метод гаусса.	199
Занятие № 3. Метод координат на плоскости. Прямая на плоскости. Линии второго порядка.	207
Занятие № 4. Функция одной переменной. Предел функции. Непрерывность функции.	217
Занятие № 5. Производная функции одной переменной. Исследование функций и построение их графиков.	223
Занятие № 6. Неопределенный интеграл.	235
Занятие № 7. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла.	246
Занятие № 8. Элементы теории множеств. Элементы комбинаторики.....	252
Занятие № 9. Случайные события и вероятности.....	256
2.2. Примерная тематика лабораторных занятий.....	266
Занятие № 1-2. Табличный процессор MS Excel: форматирование, автозаполнение, абсолютная и относительная адресация. Библиотека встроенных функций. Вычисление определителей матрицы. Решение систем линейных уравнений с помощью табличного процессора MS Excel.	266
Занятие № 3. Графические возможности MS Excel: Аналитическая геометрия на плоскости.	270

Занятие № 4-6. Графические возможности MS Excel – диаграммы, графики, поверхности. Графика в табличном процессоре.	270
Занятие № 7. Табличный процессор MS Excel: вычисление определенного интеграла.	281
Занятие № 8. Табличный процессор MS Excel: Комбинаторные задачи.	281
Занятие № 9. Табличный процессор MS Excel: Случайные величины.	284
3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ	296
3.1. Примерные темы для рефератов.....	296
3.2. Примерные вопросы к дифференцированному зачёту	296
3.3. Средства диагностики.....	298
3.4. Примерные промежуточные контрольные работы.....	299
4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ	301
4.1. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА.....	301
4.2. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	302
4.3. ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	304

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Высшая математика» предназначен для студентов 1 курса специальности 6-05-0532-09 Страноведение и переводческая деятельность.

Комплекс подготовлен в соответствии с требованиями Положения об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования, утвержденного Постановлением министерства образования Республики Беларусь от 26.07.2011 № 167.

Содержание разделов ЭУМК соответствует образовательным стандартам, структуре и тематике учебной программы по дисциплине «Высшая математика».

Главные цели ЭУМК: помощь студентам в организации самостоятельной работы, повышение качества подготовки и усиление практико-ориентированности учебного процесса по дисциплине «Высшая математика».

ЭУМК состоит из следующих разделов.

Теоретический. Включает аннотацию учебного пособия, написанного в соответствии с программой дисциплины. Материал данного пособия, наряду с конспектом лекций, может быть использован для самостоятельной подготовки студентов к лабораторным занятиям, практическим занятиям, контрольным работам и дифференцированному зачёту.

Практический. Содержит планы лабораторных и практических работ. Данные материалы используются для подготовки к практическим, лабораторным занятиям и их организации, для самостоятельной работы над курсом.

Раздел контроля знаний представлен вопросами к дифференцированному зачету, тренировочными тестами и промежуточными контрольными работами. Описаны формы диагностики и технология определения оценки по дисциплине с учетом текущей успеваемости.

Вспомогательный раздел включает рекомендуемую литературу и содержание учебной программы курса по отдельным темам, на основе которой построено изучение дисциплины и контроль знаний, вопросы к дифференцированному зачёту.

Характерной чертой нашего времени является широкое использование математических методов для решения практических задач и проведения научных исследований по различным специальностям как естественного, так и гуманитарного профиля. Математические методы уже давно (с 50-х годов XX века) и с успехом применяются в географии и геологии. Математические методы позволяют систематизировать и классифицировать результаты исследований и на их основе проводить районирование территории, определять сходство и различие между процессами взаимодействия в различных природных условиях, вероятностную зависимость между явлениями, выделять ведущие факторы, действующие на развитие процесса, создавать математические модели процессов или явлений для целей географического прогнозирования.

Другая доминирующая тенденция современной жизни – глубокое проникновение компьютеров и информационных технологий во все сферы профессиональной деятельности. С одной стороны, использование компьютеров в образовании влияет на формирование математической культуры студентов. С другой стороны, для повышения компьютерной грамотности и эффективного применения информационных технологий студентам необходимо содержательное знание математической терминологии с целью корректной постановки задачи, поручаемой компьютеру, способность контролировать правильность промежуточных результатов и анализировать возможность практического применения окончательного результата. Приобретению этих умений в значительной степени способствует решение на компьютерах задач математического содержания и построение математических моделей, реализуемых с помощью средств компьютеризации.

В данной дисциплине содержатся несколько важнейших разделов, которые охватывают все основные направления применения математических методов в географии и геологии. При составлении дисциплины одним из важнейших выступал принцип профессиональной направленности, который подразумевает тесную связь содержания учебной дисциплины с профессиональной сферой деятельности будущих специалистов. В этой связи при подборе учебного материала для занятий будет целесообразно использовать задачи, составленные на основе реальных географических исследований.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Высшая математика» относится к модулю «Математико-геоинформационный» государственного компонента.

Целью учебной дисциплины – изучение основных понятий и методов исследования современной математики, необходимых для применения их в экономико-географических исследованиях; формирование у студентов основ знаний по современным методам работы с информацией, представленной в различном виде.

Задачами учебной дисциплины являются:

- обучить студентов основным понятиям и методам математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры и применению их в географии и геологии;
- научить студентов использовать электронные таблицы для организации вычислений, графического представления данных географических исследований;
- научить студентов анализировать, структурировать, обрабатывать информацию с помощью компьютерных средств; выработать у них готовность решать профессиональные задачи на основе применения информационных технологий;
- подготовить студентов к самостоятельному освоению тех разделов математики и информатики и ее прикладных направлений, которые могут потребоваться дополнительно в практической и научно-исследовательской работе будущих специалистов.

Студенты должны знать:

- роль математики и информатики в современном мире, в географических и геологических исследованиях;
- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры и их применение в географии и геологии;
- основные понятия и методы теории вероятностей и их применение в географии и геологии;
- основы математического моделирования природных процессов;

Студенты должны уметь:

- выполнять основные матричные операции, использовать матричное исчисление в экономико-географических задачах, решать системы линейных алгебраических уравнений;
- применять метод координат для исследования линий первого и второго порядков на плоскости и поверхностей в пространстве;
- дифференцировать и интегрировать функции, использовать дифференциальное и интегральное исчисление для описания и анализа природных объектов;
- вычислять вероятности событий, приводить примеры случайных величин в географических исследованиях;
- делать выводы на основе анализа математических моделей;
- использовать электронные таблицы для организации вычислений, графического представления данных географических исследований;
- применять встроенные пакеты табличного процессора для решения задач математического и географического содержания и статистической обработки данных географических исследований;

Студенты должны владеть:

- математическими методами обработки экспериментальных данных.

Освоение учебной дисциплины «Высшая математика» должно обеспечить формирование следующих **базовых профессиональных компетенций:**

БПК-1: использовать методы математического анализа и моделирования, аналитической геометрии, линейной алгебры, математической статистики при проведении научных исследований;

БПК-2: применять различные способы и средства для получения, хранения, обработки, передачи и защиты информации, обрабатывать геопространственную информацию.

Дисциплина изучается в I семестре очной (дневной) формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Высшая математика» отведено: 112 часов, в том числе 70 аудиторных часов, из них: лекции – 26 часа, лабораторные занятия 18 часов, практические занятия – 18 часа, управляемая самостоятельная работа – 8 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единиц. Форма промежуточной аттестации – дифференцированный зачет в I семестре.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

1.1.1. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений

Матрицы и определители.

Матрицы находят широкое применение в задачах, изучающих зависимости между различными социально-экономическими и географическими показателями. Матричная форма записи используется для компактности записи большого числа элементов, она помогает структурировать географическую информацию. Весьма удобным и полезным математическим аппаратом является матричный метод в географических исследованиях.

Определение матрицы. Матрицей A называется система $m \times n$ элементов, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов.

Заметим, что элементами матрицы могут быть числа, алгебраические или символьные выражения.

Обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i – номер строки, j – номер столбца (числа i и j называют индексами элемента).

Матрицу, имеющую m строк и n столбцов, называют матрицей размера $m \times n$ (читается: эм на эн).

Употребляется и более короткое обозначение матрицы размера $m \times n$:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ или } A = [a_{ij}]_{mn}.$$

Например, запишем матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Это матрица размера 2×3 , а

элемент a_{22} равен (-4) .

Матрица A , состоящая лишь из одной строки, называется **строчной матрицей** или **матрицей-строкой**:

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n).$$

Матрица A имеющая лишь один столбец, называется **столбцовой матрицей** или **матрицей-столбцом**:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей** и обозначается буквой O , тогда по определению

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов $m=n$, т.е. матрица вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ — **побочную диагональ**.

Квадратная матрица первого порядка отождествляется со своим единственным элементом. Выпишем квадратные матрицы первого, второго и третьего порядков:

$$(a_{11}), \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется **симметрической**, если равны её элементы, симметричные относительно главной диагонали. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Упражнение. Приведите пример симметрической матрицы третьего порядка.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали равны нулю, т.е. матрица

$$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичная матрица обозначается буквой E . Так, единичные матрицы второго и третьего порядков имеют вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Треугольной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B называются **равными** $A = B$, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$).

Линейными операциями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание матриц определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых, то есть

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

Сумма двух матриц обозначается $C = A + B$.

Пример. Найдите $C = A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим по определению

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-2) & 6+4 \\ 2+3 & -4+7 \\ -3+8 & 9+(-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Разностью двух матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $D = (d_{ij})_{m \times n}$, элементы которой равны разности соответствующих элементов этих матриц, то есть

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \\ (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

Разность двух матриц имеет обозначение $D = A - B$.

Пример. Найдите $D=A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$.

Решение. По определению

$$D=A-B=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-(-2) & 6-4 \\ 2-3 & -4-7 \\ -3-8 & 9-(-11) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Разность двух матриц $A-B$ можно определить так: $A-B=A+(-B)$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{mn}$ на число α называется матрица $\alpha A=(\alpha \cdot a_{ij})_{mn}$, т. е. матрица, полученная из данной матрицы умножением всех ее элементов на число α .

Пример. Найдите матрицу $(-2A)$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\textbf{Решение.} -2A=-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \cdot 1 & -2 \cdot 6 \\ -2 \cdot 2 & -2 \cdot (-4) \\ -2 \cdot (-3) & -2 \cdot 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -4 & 8 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $(-1)A$ называют матрицей, **противоположной** матрице A , и обозначают $-A$.

Линейные операции над матрицами обладают следующими **свойствами**:

Пусть матрицы A, B и C – матрицы одинакового размера $m \times n$, O – нулевая матрица, $(-A)$ – матрица, противоположная матрице A , а α и β – любые действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства:

- $A+B=B+A$ (коммутативность сложения матриц);
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность сложения матриц);
- $A+O=A$;
- $A+(-A)=O$;
- $1 \cdot A=A$;
- $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

Таким образом, многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами.

Докажем, например, что $A+B=B+A$. Известно, что $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$, а $B+A=(b_{ij}+a_{ij})_{m \times n}$, ($i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$), а так как $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$, то $A+B=B+A$.

Пусть даны две матрицы A и B . Произведение матриц определено только для согласованных матриц. Матрица A называется **согласованной** с матрицей B , если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется такая матрица C размера $m \times k$, у которой элементы c_{ij} определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

т.е. элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B . Матрица C имеет m строк (как и матрица A) и k столбцов (как матрица B). Произведение матрицы A на матрицу B имеет обозначение AB .

Замечание. Из того, что A можно умножить на B , не следует, что B можно умножить на A .

Если для матриц A и B определены произведения AB и BA , то в общем случае $AB \neq BA$ (так как из согласованности A с B не следует согласованность B с A).

Так, умножение матрицы A размеров 3×3 на матрицу B размеров 3×2 дает

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} \end{pmatrix},$$

тогда как произведение BA не определено.

*В случае, если $AB=BA$, матрицы A и B называются **перестановочными**.*

Упражнение. Приведите пример перестановочных матриц.

Пример. Найдите, если это возможно, произведения AB и BA , где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение AB имеет смысл, поскольку число столбцов матрицы A равно трём и равно числу строк матрицы B . Размер матрицы A равен 2×3 , размер матрицы B равен 3×2 , тогда размер матрицы AB равен 2×2 и

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдём элементы искомой матрицы

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-2) + 8 \cdot 3 = -4 + 10 + 24 = 30,$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 4 \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) + 8 \cdot 4 = 20 + 15 + 32 = 67,$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = -1 - 6 - 3 = -10,$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = 5 - 9 - 4 = -8.$$

$$\text{Таким образом } A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Проверим, можно ли получить произведение BA . Поскольку число столбцов матрицы B равно двум и равно числу строк матрицы A , произведение BA имеет смысл. Вычислим его.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

Если имеют смысл соответствующие произведения матриц, то справедливы следующие **свойства умножения матриц**:

- $(AB)C = A(BC)$;
- $(A+B)C = AC + BC$;
- $C(A+B) = CA + CB$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B$;
- $AE = EA = A$;
- $AO = OA = O$.

Целой положительной степенью A^k ($k > 1$) квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A , т.е.

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

Матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица A .

Упражнение. Верно ли утверждение «Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей»?

Матрица, полученная из данной заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной** относительно данной. Матрица, транспонированная относительно матрицы A , обозначается через A^T . Пусть дана исходная матрица A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно определению, матрица, транспонированная относительно матрицы A имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если A – матрица размера $n \times m$, то матрица A^T имеет размеры $m \times n$.

Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется транспонированием матрицы. Для операции транспонирования матрицы справедливы следующие свойства:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Матрица называется симметрической, если $A^T = A$.

Рассмотрим квадратную матрицу n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратных матриц.

Определение определителя матрицы. Каждой такой матрице ставится в соответствие по определённом правилу действительное число, которое называется определителем (детерминантом) матрицы и обозначается $|A|$, $\det A$, Δ .

Если порядок матрицы равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11} , т.е. $A = (a_{11})$, тогда определителем первого порядка соответствующим такой матрице, назовём сам этот элемент a_{11} .

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Определителем квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

называют число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, т.е. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Здесь и всюду в дальнейшем будем говорить об элементах, строках и столбцах определителя $|A|$, имея в виду элементы, строки и столбцы соответствующей ему матрицы A .

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называют элементами определителя матрицы второго порядка. Правило составления определителя второго порядка по элементам соответствующей матрице A : определителем второго порядка называют число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Пример. Вычислить определители следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 7 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 50, \quad \det B = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 1 \cdot (-4) = 50 + 4 = 54.$$

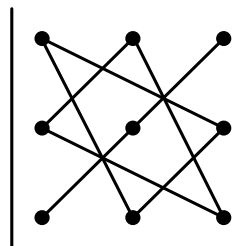
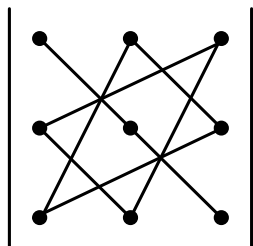
Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца с соответствующим знаком. Чтобы легче было запомнить, какие произведения берутся со знаком плюс, а какие со знаком минус, можно воспользоваться правилом треугольников, представленным схематически ниже.



Правило треугольников: три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; три отрицательных члена определителя представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны второй диагонали.

Определитель третьего порядка состоит из $6 = 3!$ ($3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, читается: три факториал) слагаемых, каждое из которых есть произведение трех элементов определителя. Элементы произведения каждого слагаемого берутся по одному из каждой строки и каждого столбца.

Пример. Вычислить определитель следующей матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot (-8) + 2 \cdot (-1) \cdot 3 + (-4) \cdot 2 \cdot 5 - (-4) \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-8) - 1 \cdot 5 \cdot (-1) = \\ &= -48 - 6 - 40 + 72 + 32 + 5 = -94 + 109 = 15. \end{aligned}$$

Определители матриц второго и третьего порядка будем называть определителями второго и третьего порядка.

Вычисление определителей более высоких порядков довольно трудоёмко. При практическом вычислении определителей используется свойство понижения порядка, позволяющее вычислить определитель n -го порядка через определитель $(n-1)$ -го порядка, в свою очередь определитель $(n-1)$ -го порядка вычисляется через определитель $(n-2)$ -го порядка и т.д.

Минором элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется определитель порядка $n-1$, соответствующий той матрице, которая получается из данной матрицы вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца (той строки и того столбца на пересечении которых стоит данный элемент). Минор элемента a_{ij} обозначим через M_{ij} .

Пример. Рассмотрим определитель $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Минором

элемента a_{12} является $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, а минором элемента a_{23} является M_{23}

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Таким образом, алгебраическое дополнение и минор одного и того же элемента либо совпадают, либо противоположны. Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$.

Пример. Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Для него найдём A_{12} и A_{22}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 5 - 0 \cdot 7) = -15,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 19.$$

Определителем n -го порядка, соответствующим матрице A называют число, равное

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Это сумма всех произведений элементов первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения.

Последняя формула выражает правило составления определителя n -го порядка по элементам матрицы и по алгебраическим дополнениям этих элементов, которые являются определителями порядка $n-1$, взятыми с надлежащими знаками.

Равенство для определителя третьего порядка можно записать так:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Возникает вопрос, а нельзя ли использовать для получения величины определителя элементы и соответствующие им миноры не первой, а любой строки матрицы, а также вопрос о разложении определителя по элементам любого столбца. Ответ на эти вопросы дают следующие основные теоремы, приводимые здесь без доказательства.

Теорема. *Определитель матрицы n -го порядка равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.*

Таким образом, справедливы следующие формулы:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (i = \overline{1, n});$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Особенно удобно разлагать определитель по элементам строки (столбца), если в ней много нулей.

При решении задач используются свойства определителей, которые облегчают их вычисление. Рассмотрим свойства определителей без доказательств, демонстрируя их на примере определителя второго порядка.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется:
 $\det A = \det A^T$.

$$\begin{vmatrix} A^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = |A|.$$

2. При перестановке двух соседних строк или столбцов определитель меняет лишь знак:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

4. Множитель, общий для всех элементов некоторой строки (столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0.$$

6. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

7. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число k :

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + ka_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - ka_{22}a_{21} = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Если каждый элемент строки (столбца) определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых, а у другого – из вторых слагаемых; элементы же, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим без доказательства следующую теорему.

Теорема. Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

На практике часто пользуются следующим способом вычисления определителей: *применяя свойства определителей добиваются, чтобы в какой-либо строке (столбце) определителя стало как можно больше нулей, а затем полученный определитель разлагают по этой строке (столбцу).*

Пример. Вычислить определитель матрицы четвёртого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 способ:

Разложим данный определитель, например, по элементам 3-ей строки:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{32} \cdot (-1)^5 \cdot M_{32} + \\ &+ a_{33} \cdot (-1)^6 \cdot M_{33} + a_{34} \cdot (-1)^7 M_{34} = 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Далее надо вычислить четыре определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot (-3) =$$

$$= 20 + 6 + 12 - 20 + 6 + 12 = 36;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot (-3) - 4 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot 1 = 10 + 6 - 20 + 6 = 2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -2 + 4 + 4 - 2 = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \cdot 1 = 3 + 10 + 3 - 5 = 11.$$

Получаем

$$\det A = 3 \cdot (-1)^4 \cdot 36 + 2 \cdot (-1)^5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)^6 \cdot 4 + 4 \cdot (-1)^7 \cdot 11 = 3 \cdot 36 - 4 - 4 - 44 = 56.$$

2 способ:

Данный определитель можно найти, используя свойства определителей. Вычтем из четвертой строки первую, а из третьей утроенную первую получаем

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Разложим данный определитель по элементам первого столбца, поскольку первый столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из последнего столбца удвоенный первый, а затем разложим полученный определитель по третьему столбцу

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -4 & -10 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -10 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (24 - 10) = 56.$$

Итак, значение определителя равно 56.

*Квадратная матрица называется **невыврожденной**, если её определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется **выврожденной**.*

Пусть A – квадратная матрица n -го порядка, а E – единичная квадратная матрица того же порядка.

Определение обратной матрицы. Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A , если она удовлетворяет условиям

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема. Если обратная матрица существует, то она единственна.

Доказательство. Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} – обратные матрицы к матрице A . Покажем, что $A_1^{-1} = A_2^{-1}$. Действительно,

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Доказательство.

Необходимость. Пусть для матрицы A существует обратная матрица. Тогда из соотношения $AA^{-1} = E$ следуют равенства $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$, т. е. $|A| \neq 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Достаточность. Возьмем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

такую, что $|A| \neq 0$. Покажем, что A имеет обратную матрицу.

Рассмотрим матрицу B вида

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

в i -том столбце которой расположены алгебраические дополнения элементов i -той строки матрицы A . Матрица B называется **присоединенной** к матрице A .

Перемножим матрицы A и B .

$$AB = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| E.$$

Следовательно, $A \cdot \left(\frac{1}{|A|} B \right) = E$.

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} B.$$

Теорема доказана.

Из последней формулы вытекает **алгоритм построения обратной матрицы**: необходимо составить присоединенную матрицу B , а затем каждый ее элемент разделить на число $|A|$.

Таким образом у всякой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1} , определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A , заметим, что алгебраические дополнения элементов i -й строки матрицы A расположены в i -м столбце матрицы B .

Заметим, что вырожденная матрица не имеет обратной.

Далее рассмотрим некоторые свойства обратной матрицы, которые часто используются при решении задач, будем их принимать без доказательства.

Свойства обратной матрицы

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$;
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример. Найдите обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала вычислим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot (-1) = 8 - 3 = 5.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, значит данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную матрицу. Далее находим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Убедимся в том, что матрица A^{-1} найдена верно. Для этого вычислим $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{4}{5} + (-3) \cdot \frac{1}{5} & 2 \cdot \frac{3}{5} + (-3) \cdot \frac{2}{5} \\ -1 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} & -1 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично убедитесь, что $A^{-1} \cdot A = E$.

Системы линейных алгебраических уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

где числа a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$) называют **коэффициентами системы**, а числа b_i ($i=1,2,\dots,m$) – **свободными членами**, j – номер соответствующего неизвестного. Каждый коэффициент системы имеет два индекса, первый из которых i указывает на номер уравнения, а второй j на номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Мы будем рассматривать только случаи, когда число m уравнений равно или меньше n числа неизвестных.

Если все свободные члены равны нулю, т. е. $b_i=0$, $i=1,2,\dots,m$, то система (1) называется **однородной**.

Однородная линейная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Если среди свободных членов имеются отличные от нуля, то линейная система называется **неоднородной**.

Решением линейной системы (1) называется упорядоченная совокупность n чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, которая при подстановке в каждое из уравнений системы вместо соответствующих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_1=c_1, x_2=c_2, \dots, x_n=c_n$) обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, а система, не имеющая ни одного решения, – **несовместной**.

Решить систему – значит определить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения.

Система, имеющая только одно решение, называется **определённой**, если система имеет больше одного решения, то она называется **неопределённой**. В случае неопределённой системы каждое её решение называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением**.

Две системы называются **эквивалентными** или **равносильными**, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т.е.

если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Линейную систему (1) можно записать в матричном виде. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

составленная из коэффициентов линейных уравнений системы (1) **называется основной матрицей системы** (или матрицей системы).

Матрица-столбец составленная из неизвестных:

$$X = \begin{bmatrix} x_1, \\ x_2, \\ \dots \\ x_n. \end{bmatrix}.$$

Матрица-столбец составленная из свободных членов:

$$B = \begin{bmatrix} b_1, \\ b_2, \\ \dots \\ b_m. \end{bmatrix}.$$

Заметим что матрица A имеет размер $m \times n$ согласована с матрицей X , имеющей размер $n \times 1$, а значит можно найти произведение AX .

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n. \end{bmatrix}.$$

Так как элементами этой столбцовой матрицы размера $m \times 1$ являются левые части уравнений системы (1), то по определению равенства матриц

$$AX = B. \quad (3)$$

Таким образом, система линейных уравнений (1) может быть записана в виде одного матричного уравнения (3). Эта запись системы называется **матричной**.

Если $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ – решение системы (1), то матрица $C = \begin{bmatrix} c_1, \\ c_2, \\ \dots \\ c_n. \end{bmatrix}$

называется решением этой системы.

Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4)$$

Матрица A данной системы – квадратная. **Определителем системы** (4) называется определитель матрицы A , составленной из коэффициентов этой системы, обозначим его через Δ ($\Delta = \det A$).

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то для матрицы данной системы A существует единственная обратная матрица A^{-1} , определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Систему (4) можно записать в матричном виде

$$AX = B.$$

Умножим обе части этого равенства слева на A^{-1} и получим

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

тогда

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Эта формула является матричной записью решения системы (4).

Пример. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Сначала найдём определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad .$$

Определитель не равен нулю, значит данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную. Найдём алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Итак} \quad A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдём искомую матрицу

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{3}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ то есть: } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Формулы Крамера

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ (4).

Обозначим через Δ_k определитель, полученный заменой в определителе Δ столбца из коэффициентов при неизвестной x_k столбцом свободных членов системы (4) тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

В 1750 году швейцарский математик Габриэль Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные системы линейных уравнений через определители, составленные из коэффициентов системы, которые отображены в следующей теореме.

Теорема (Крамера). Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое называется **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Доказательство. Запишем систему (4) в матричной форме: $AX = B$. Поскольку определитель Δ матрицы A отличен от нуля, она имеет обратную матрицу A^{-1} . Тогда

$$\begin{aligned} AX = B &\Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow \\ &\Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Полученная формула является матричной записью решения системы. Единственность решения следует из единственности обратной матрицы.

Матричное равенство имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{|A|} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 &= \frac{1}{|A|} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= \frac{1}{|A|} (A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \end{aligned}$$

так как $A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_n = \Delta_k$ для всякого $k = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Следствие. Если однородная система имеет ненулевое решение, то ее определитель $\Delta = 0$.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 11. \end{cases}$$

Решение. Составим определитель системы и найдём его

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-7) \cdot 3 = 5 + 21 = 26.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-7) \cdot 11 = 1 + 77 = 78,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - 1 \cdot 3 = 55 + 3 = 52.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{52}{26} = 2.$$

Система имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Формулы Крамера требуют довольно сложных вычислений (при больших n), связанных с вычислением определителей Δ и Δ_k . А также заметим, что методом Крамера нельзя решить систему, если матрица A данной системы вырожденная. Для практического решения систем линейных алгебраических уравнений используют метод Гаусса, основанный на последовательном исключении неизвестных и пригодный для решения произвольных линейных систем. Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода упоминалось еще в китайском трактате «Математика в девяти книгах», составленном между I в. до н. э. и II в. н. э.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \dots \dots \\ c_{nn}x_n = d_n, \end{array} \right. \quad (6)$$

где $c_{kk} \neq 0$ ($k=1,2,\dots,n$); c_{kk} – некоторые новые коэффициенты, d_k – свободные члены.

Система (6) имеет единственное решение. Находим из последнего уравнения $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Затем, подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение системы и находим x_{n-1} и т.д. значение x_1 из первого.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \dots \dots \\ c_{kk}x_k + \dots + c_{kn}x_n = d_r, \end{array} \right. \quad (7)$$

где $k < n$.

Система (7) имеет бесконечное множество решений. Придавая свободным переменным $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ произвольные значения, последовательно находим $x_k, x_{k-1}, \dots, x_1$ из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1k}x_k = d_1 - c_{1,k+1}x_{k+1} - \dots - c_{1n}x_n, \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2k}x_k = d_2 - c_{2,k+1}x_{k+1} - \dots - c_{2n}x_n, \\ \dots \dots \dots \\ c_{kk}x_k = d_k - c_{k,k+1}x_{k+1} - \dots - c_{kn}x_n. \end{array} \right.$$

В формулах, выражающих $x_1, x_2, \dots, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ могут принимать любые значения.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \dots \dots \\ 0 \cdot x_n = d_r, \end{array} \right. \quad (8)$$

где $k \leq n$.

Система (8) *несовместна*, т.е. не имеет решений, так последнее равенство не выполняется ни при каких значениях неизвестных.

Отметим, что метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему методом

Гаусса, преобразования совершаются не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Замечание. На практике удобнее работать не с системой (1), а с расширенной матрицей $\bar{A}$ данной системы, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (для этого нужно переставить местами уравнения системы, либо разделить обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 24, \\ 3x_1 + 12x_2 - 5x_3 = -14, \\ 13x_1 + 16x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & -8 & 9 & 24 \\ 3 & 12 & -5 & -14 \\ 13 & 16 & -1 & -4 \end{array} \right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (-7) , к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на (-3) , а к четвертому уравнению системы первое уравнение, умноженное на (-13) и получим матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -10 & -40 & -30 \end{array} \right).$$

Четвертую строку разделим на (-10) и поменяем со второй строкой:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \end{array} \right).$$

Прибавим к третьему уравнению системы второе уравнение, умноженное на (-6) , а четвертому уравнению системы второе уравнение, умноженное на 22, и получим матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \\ 0 & 0 & -38 & -38 \end{array} \right).$$

Третья и четвертая строки пропорциональны. Одну из них можно убрать из рассмотрения. Данная система совместна и имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 4x_3 = 3, \\ -38x_3 = -38; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - (2x_2 + 3x_3), \\ x_2 = -4x_3 + 3, \\ x_3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, единственное решение имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array} \right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (-6) , к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на 7 , а к четвертому уравнению системы первое уравнение, умноженное на 3 и получим матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array} \right).$$

Прибавим к третьему и четвертому уравнениям системы второе уравнение, умноженное на 1 , и получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2 через переменные x_3, x_4 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1, \\ 15x_2 = -15x_3 - 19x_4 + 15. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1, \\ x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4 + 1. \end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_2 в первое уравнение и найдем x_1 :

$$x_1 = -2 \cdot \left(-x_3 - \frac{19}{15}x_4 + 1 \right) - 2x_3 - 3x_4 + 1 = 2x_3 + \frac{38}{15}x_4 - 2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 = -\frac{7}{15}x_4 - 1.$$

Таким образом, общее решение имеет вид $\begin{pmatrix} -1 - \frac{7}{15}x_4 \\ 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, где x_3, x_4

могут принимать любые действительные значения.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (-1) , а к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на 2 и получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array} \right).$$

Прибавим к третьему уравнению системы второе уравнение, умноженное на (-2) . В итоге получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array} \right)$.

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -13. \end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как получили уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -13$, которое не имеет решений.

1.1.2. Аналитическая геометрия на плоскости

Аналитическая геометрия — это раздел математики, в котором с помощью алгебраических методов изучаются геометрические объекты. Основным методом аналитической геометрии является метод координат.

Аналитическая геометрия достаточно универсальна и используется, например, при описании строения земной коры, различных форм ореола

обитания живых организмов, законов развития микроэкономики. В частности, можно осуществлять аппроксимацию складок земной коры линиями первого и второго порядков, описывать принципы принятия управленческих решений. Векторы применяются для пространственного описания химико-биологических движений, ряда социально-экономических явлений.

Метод координат на плоскости

Декартовы прямоугольные координаты на плоскости

Для того чтобы можно было на плоскости описывать местоположение любого объекта используют различные системы координат. *Координатной числовой осью* называют прямую линию с выбранным положительным направлением, масштабным (единичным) отрезком и точкой начала отсчета (*начало координат*), обозначаемую как O .

Точки на оси принято обозначать большими латинскими буквами $A, B, \dots, X, \dots$, возможно с нижними индексами $A_1, A_2, \dots$. Координату точки указывают сразу после буквы в круглых скобках $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$. Имеет место следующий факт: *расстояние между двумя точками $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ числовой оси, вне зависимости от их расположения, равно $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$.*

Введем на плоскости *декартову прямоугольную систему координат*.

Для ее задания в данной плоскости проведем две взаимно перпендикулярные координатные оси: горизонтальную Ox (ось абсцисс) и вертикальную Oy (ось ординат). Точку O пересечения координатных осей назовем также *началом координат*. Кроме того, выберем единицу масштаба одинаковую для каждой из осей (иногда масштаб по осям может быть разный) для возможности измерения расстояний.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на соответствующие оси Ox и Oy (рис. 1).

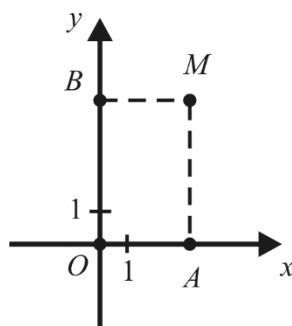


Рис. 1

Декартовыми прямоугольными координатами x и y точки M на плоскости называются соответственно координаты точки A (на оси Ox) и точки B (на оси Oy).

При выбранной системе координат точке M плоскости соответствует упорядоченная пара чисел $(x; y)$ – ее декартовы прямоугольные координаты, и

обратно, каждой упорядоченной паре чисел $(x; y)$ соответствует единственная точка M плоскости Oxy такая, что ее абсцисса равна x , а ордината равна y . Запись $M(x; y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y .

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Расстояние между двумя точками

Теорема. Для любых двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости расстояние d между ними выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Доказательство. Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры M_1B и M_2A на оси Oy и Ox соответственно и обозначим через K точку пересечения прямых M_1B и M_2A (рис. 2).

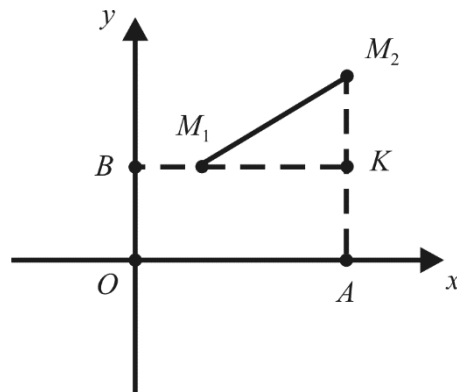


Рис. 2

Точки M_1 и K имеют одинаковую ординату y_1 и абсциссы x_1 и x_2 , соответственно. Они лежат на прямой параллельной оси Ox , следовательно, по формуле указанной выше, имеем $|M_1K| = |x_2 - x_1|$. Точки M_2 и K имеют одинаковую абсциссу x_2 и ординаты y_2 и y_1 соответственно. Они лежат на прямой параллельной оси Oy , значит, $|M_2K| = |y_2 - y_1|$. Треугольник M_1M_2K – прямоугольный, поскольку его стороны M_1K и M_2K лежат на прямых, параллельных осям координат. По теореме Пифагора находим

$$\begin{aligned} d = |M_1M_2| &= \sqrt{|M_1K|^2 + |M_2K|^2} = \\ &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости задан произвольный отрезок M_1M_2 (точки M_1 и M_2 различны) и M – любая точка этого отрезка, отличная от точки M_2 .

Число λ , определяемое равенством $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, называется *отношением*, в

котором точка M делит отрезок M_1M_2 . Очевидно, что $\lambda \geq 0$. Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по заданному λ и заданным координатам точек M_1 и M_2 найти координаты точки M . Решить эту задачу позволяет следующая теорема.

Теорема. Если точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , то координаты этой точки определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (9)$$

где (x_1, y_1) – координаты точки M_1 ; (x_2, y_2) – координаты точки M_2 .

Доказательство. Пусть прямая M_1M_2 не перпендикулярна оси Ox . Спроектируем точки M_1, M, M_2 на ось Ox , обозначив их проекции соответственно P_1, P, P_2 (рис. 3).

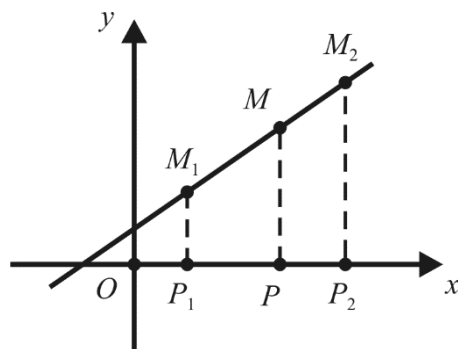


Рис. 3

На основании обобщенной теоремы Фалеса о пропорциональных отрезках из элементарной геометрии (параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки) имеем

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda,$$

где $|P_1P| = |x - x_1|$; $|PP_2| = |x_2 - x|$. Так как числа $(x - x_1)$ и $(x_2 - x)$ одного и того же знака (при $x_1 < x_2$ они положительны, а при $x_1 > x_2$ – отрицательны), то $\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$. Поэтому $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$, откуда $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ и $x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$.

Разделив последнее равенство на $1 + \lambda \neq 0$, получаем первую из формул (9).

Если прямая M_1M_2 перпендикулярна оси Ox , то $x_1 = x_2 = x$ и первая из формул (9) принимает вид $x = \frac{x(1 + \lambda)}{1 + \lambda}$, т. е. верна.

Вторая из формул (9) доказывается аналогично (точки M_1, M и M_2 необходимо предварительно спроектировать на ось Oy).

Следствие. Если $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ – две произвольные несовпадающие точки и точка $M(x, y)$ является серединой отрезка M_1M_2 , т.е. $|M_1M| = |MM_2|$, то $\lambda = 1$ и формулы (9) приобретают вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Пример. Даны точки $M_1(1, 1)$ и $M_2(7, 4)$. На отрезке M_1M_2 найти точку $M(x, y)$, которая в 2 раза ближе к M_1 , чем к M_2 .

Решение. Искомая точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|M_1M|}{2|M_1M|} = \frac{1}{2}$. Применяя формулы (9), получаем

$$x = \frac{1 + \frac{7}{1 + \frac{1}{2}}}{2} = \frac{4,5}{1,5} = 3, \quad y = \frac{1 + 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{1,5} = 2.$$

Таким образом, точка M имеет координаты $(3, 2)$.

Пример. Найти длину медианы BM в треугольнике ABC с вершинами $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(3, 1)$.

Решение. Для того чтобы найти длину медианы BM , нужно знать координаты x и y точки M – середины отрезка AC :

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Зная координаты точек $B(4, 3)$ и $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$, найдем $|BM|$:

$$|BM| = \sqrt{(2-4)^2 + \left(\frac{3}{2}-3\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = 2,5.$$

Ответ. 2,5.

Площадь треугольника

Теорема. Для любых точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|. \quad (10)$$

Доказательство. Как видно из рис. 4,

$$S_{ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}.$$

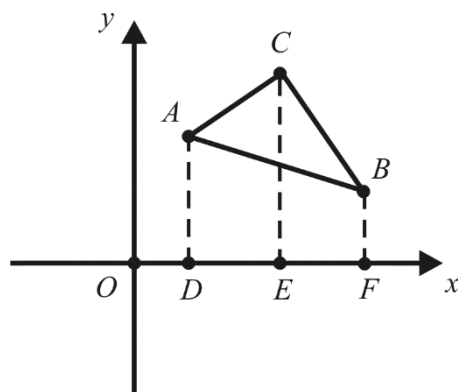


Рис. 4

Для определенности будем считать, что треугольник ABC лежит в первой координатной четверти и $x_1 < x_3 < x_2$, $y_2 < y_1 < y_3$ (т. е. расположение точек A , B , C именно такое, как на рисунке). По формуле для площади трапеции имеем

$$S_{ADEC} = |DE| \frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_1 + y_3)}{2};$$

$$S_{BCEF} = |EF| \frac{|EC| + |FB|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 + y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD} = |DF| \frac{|AD| + |FB|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}[(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)] = \\ &= \frac{1}{2}[x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 - \\ &\quad - x_3y_2 - x_3y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2] = \\ &= \frac{1}{2}[x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 + x_1y_2] = \\ &= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)y_3 - x_3(y_2 - y_1) - x_2y_1 + x_1y_2] = \\ &= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)y_3 - x_3(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)y_1 + x_1(y_2 - y_1)] = \\ &= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \end{aligned}$$

Заметим, что знак модуля в данном случае не нужен, т. е. полученное выражение для S положительно.

Рассмотрение других случаев расположения точек A , B , C на плоскости предоставляется читателю в качестве упражнения.

Пример. Вычислить длину высоты CH треугольника ABC с вершинами $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(5; -1)$.

Решение. Найдем сначала площадь треугольника ABC по формуле (10).

$$S = \frac{1}{2} |(3 - (-1))(-1 - 2) - (5 - (-1))(5 - 2)| = 15.$$

Затем вычислим длину стороны AB .

$$|AB| = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Известно, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} |AB| |CH|.$$

Отсюда, $|CH| = \frac{2S}{|AB|} = \frac{30}{5} = 6$.

Ответ. 6.

Полярные координаты

Помимо декартовых, существуют и некоторые другие системы координат на плоскости. Наиболее важной после декартовой является *полярная система координат*.

Зафиксируем на плоскости какую-либо точку O , которую назовем *полюсом*, и луч OA , который назовем *полярной осью*. Выберем единицу масштаба для измерения длин отрезков. Наконец, условимся, какие повороты вокруг точки O считать положительными. Обычно положительными считают повороты против часовой стрелки. Величины углов будем выражать в радианной мере.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим через ρ расстояние от точки M до полюса O и буквой φ – величину угла, на который нужно повернуть полярную ось OA , чтобы совместить ее с лучом OM (рис. 5). Величины ρ и φ называются *полярными координатами* точки M , ρ – *полярным радиусом*, φ – *полярным углом*. Каждой точке плоскости соответствует вполне определенное значение $\rho \geq 0$. Значение φ для точек, отличных от полюса, определено с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k – любое целое число. Для полюса $\rho = 0$, а значение φ не определено.

Для того чтобы каждая точка плоскости, отличная от полюса O , получила вполне определенные значения полярных координат, достаточно считать, что $0 \leq \varphi < 2\pi$. Эти значения φ назовем *главными*.

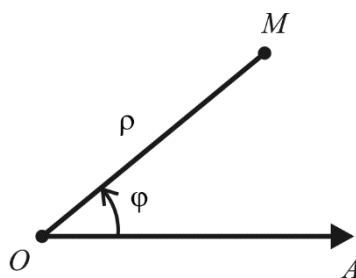


Рис. 5

Установим связь между полярными координатами точки и ее декартовыми прямоугольными координатами.

Пусть полюс совпадает с началом координат, а полярная ось – с положительной полуосью Ox . Будем считать положительным то направление полярного угла, в котором надо вращать положительную полуось Ox , чтобы кратчайшим путем совместить ее с положительной полуосью Oy .

Пусть M – произвольная точка плоскости, x и y – ее декартовы прямоугольные, а ρ и φ – полярные координаты (рис. 6).

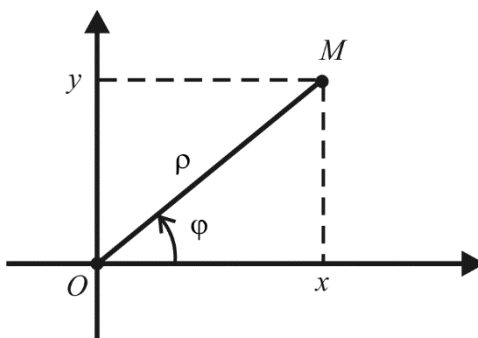


Рис. 6

Из соотношений, связывающих стороны и углы в прямоугольном треугольнике, следует, что

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (11)$$

Формулы (11) выражают декартовы прямоугольные координаты точки M через ее полярные координаты. Для выражения полярных координат точки M , отличной от начала координат, через ее декартовы прямоугольные координаты можно воспользоваться формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

которые следуют из формул (11).

Пример. Найти полярные координаты точки $M(2, 2)$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось – с положительным направлением оси абсцисс.

Решение. Находим $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и, следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Преобразование декартовой прямоугольной системы координат

При решении многих задач аналитической геометрии наряду с данной системой координат приходится вводить и другие системы. При этом, естественно, изменяются как координаты точек, так и уравнения кривых. Возникает задача: как, зная координаты точки в одной системе координат, найти координаты этой точки в другой системе координат. Решить эту задачу позволяют формулы преобразования координат.

Параллельный перенос

Рассмотрим простейший случай, когда оси новой системы координат $O'x'y'$ параллельны соответствующим осям старой системы координат Oxy и имеют одинаковые направления. Пусть начало новой системы координат, точка O' , имеет координаты (a, b) в старой системе координат.

Точка M плоскости в старой системе координат будет иметь координаты (x, y) , а в новой – (x', y') . Из рис. 7 непосредственно получаем: $x = x' + a$, $y = y' + b$, т. е. мы выразили старые координаты x, y точки M через ее новые координаты. Очевидно, что $x' = x - a$, $y' = y - b$.

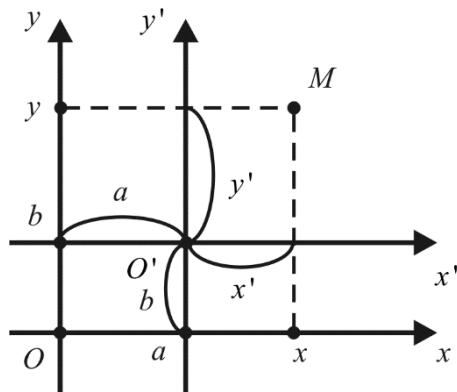


Рис. 7

Поворот осей координат

Пусть теперь новая система координат $Ox'y'$ получена путем поворота старой на угол α вокруг точки O , причем α положителен, если поворот осуществляется против часовой стрелки.

Обозначим через β угол, образованный радиус-вектором $r = OM$ точки M с осью Ox' . Тогда угол между OM и Ox равен $\alpha + \beta$ (рис. 8).

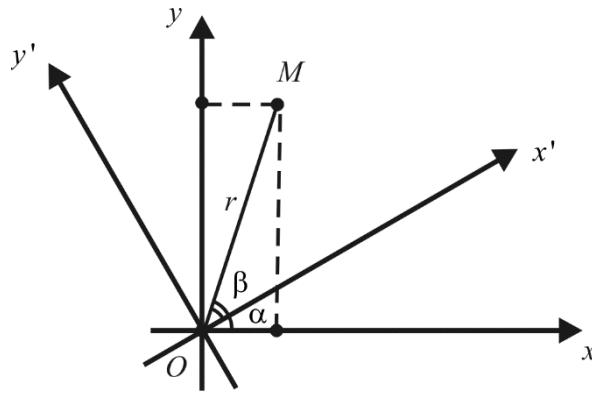


Рис. 8

Пусть точка M имеет координаты (x, y) в старой системе координат и (x', y') – в новой. Тогда

$$x = r \cos(\alpha + \beta) = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta;$$

$$y = r \sin(\alpha + \beta) = r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta.$$

Но $x' = r \cos \beta$, $y' = r \sin \beta$. Тогда

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Формулы (12) дают выражения старых координат через новые. Чтобы выразить новые координаты через старые нужно решить эту систему относительно x' и y' . Получаем

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

В общем случае, когда новая система координат получена из старой посредством параллельного переноса и последующего поворота осей координат против часовой стрелки вокруг начала координат, причем новое начало координат есть точка $O'(a, b)$ и ось $O'x'$ образует с осью Ox угол α , имеем

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b. \end{cases}$$

Аналогично получаем

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha, \\ y' = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha. \end{cases}$$

Уравнение линии на плоскости

Сущность метода координат на плоскости заключается в том, что всякой плоской линии сопоставляется ее уравнение, а затем свойства этой линии изучаются путем аналитического исследования соответствующего уравнения.

Рассмотрим соотношение вида

$$F(x, y) = 0, \quad (13)$$

связывающее переменные величины x и y .

Равенство (13) будем называть *уравнением с двумя переменными* x, y , если это равенство справедливо не для всех пар чисел x и y . Примеры уравнений: $2x + 3y = 0$, $x^2 + y^2 - 16 = 0$.

Если равенство (13) справедливо для всех пар чисел x и y , то оно называется *тождеством*. Примеры тождеств: $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$, $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$.

Важнейшим понятием аналитической геометрии является понятие *уравнения линии*. Пусть на плоскости заданы декартова прямоугольная система координат и некоторая линия L .

Уравнение (13) называется уравнением линии L , если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой линии.

Таким образом, для определения того, является ли уравнение (13) уравнением линии L , нужно:

1) показать, что координаты любой точки, лежащей на линии L , удовлетворяют этому уравнению;

2) доказать, что если координаты некоторой точки плоскости удовлетворяют этому уравнению, то точка лежит на линии L .

Из определения следует, что линия L представляет собой множество всех тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (23).

В полярной системе координат линия L может определяться уравнением вида $F(\rho, \varphi) = 0$, где (ρ, φ) – полярные координаты точки на плоскости.

Приведем некоторые примеры уравнений линий.

1) $x - y = 0$. Записав данное уравнение в виде $y = x$, заключаем, что оно определяет прямую линию – биссектрису I и III координатных углов (координаты любой точки этой прямой удовлетворяют данному уравнению; это следует из свойства биссектрисы – множества точек, равноудаленных от сторон угла).

2) $x^2 - y^2 = 0$. Представив уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 0$, откуда $y = x$ или $y = -x$, заключаем, что множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, – это две прямые, содержащие биссектрисы четырех координатных углов.

3) $x^2 + y^2 = 0$. Так как при любых x и y $x^2 \geq 0$ и $y^2 \geq 0$, то этому уравнению удовлетворяют координаты только одной точки $(0, 0)$.

4) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ – пустое множество точек, так как при любых x и y $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Таким образом, никакого геометрического образа на плоскости данное уравнение не определяет.

В этих примерах по заданному уравнению линии исследованы ее свойства и тем самым установлено, что представляет собой эта линия.

Рассмотрим теперь обратную задачу: для заданного какими-то свойствами множества точек, т. е. для заданной линии L , найти ее уравнение.

Пример. Составить уравнение окружности с радиусом R с центром в точке $C(a, b)$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данной окружности. Тогда $|MC| = R$, т. е. $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (14)$$

Обратно, если координаты некоторой точки $N(x, y)$ удовлетворяют этому уравнению, то $|NC| = R$ и N лежит на окружности. Таким образом, искомое уравнение имеет вид (14). При $a = b = 0$ получается уравнение окружности с радиусом R с центром в начале координат.

Пример. Составить уравнение линии, состоящей из точек, равноудаленных от двух данных точек $A(-1, 2)$ и $B(7, 5)$.

Решение. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит данной линии. Тогда по условию должно выполняться $|MA| = |MB|$, т. е.

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-5)^2}. \quad (15)$$

Обратно, если некоторая точка $N(x, y)$ удовлетворяет уравнению (15), то $|NA| = |NB|$ и N принадлежит линии. Возводя обе части уравнения (15) в квадрат, получаем

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y-5)^2,$$

откуда

$$2x + 1 - 4y + 4 = -14x + 49 - 10y + 25$$

или

$$16x + 6y - 69 = 0.$$

Это уравнение является уравнением прямой линии (из элементарной геометрии известно, что геометрическим местом точек, указанных в условии задачи, будет прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину).

Две основные задачи аналитической геометрии на плоскости состоят в следующем:

1) Дана линия, рассматриваемая как множество точек. Составить уравнение этой линии.

2) Дано уравнение некоторой линии. Изучить по этому уравнению ее геометрические свойства (форму и расположение).

Алгебраической линией (кривой) n -го порядка называется линия, определяемая алгебраическим уравнением n -й степени относительно текущих декартовых прямоугольных координат.

Линии первого порядка определяются уравнением 1-й степени $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$. Как будет показано ниже, все кривые первого порядка – прямые линии.

Линии второго порядка определяются уравнением 2-й степени:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Важнейшими представителями линий второго порядка являются окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Отметим, что не всякое уравнение второго порядка определяет на плоскости некоторую линию. Так, уравнению $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$ не отвечает никакая кривая на плоскости Oxy .

Уравнение кривой n -го порядка может быть записано в виде

$$\sum_{p,q=0}^n A_{pq} x^p y^q = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $A_{pq} \neq 0$.

Линия первого порядка на плоскости

Прямую линию на плоскости относительно системы декартовых прямоугольных координат можно задать различными способами. Рассмотрим разные исходные условия, которые позволяют однозначно определить прямую и ее уравнение.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть дана некоторая прямая на плоскости Oxy . *Углом наклона* данной прямой к оси Ox называется наименьший неотрицательный угол φ , на который нужно повернуть (против часовой стрелки) ось Ox , чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой. Тангенс угла наклона называется *угловым коэффициентом* прямой.

Пусть известны угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \varphi$ ($\varphi \neq \frac{\pi}{2}$) прямой и величина b отрезка OB , который она отсекает на оси Oy . Пусть, далее, $M(x, y)$ – произвольная точка прямой. Проведем прямые BC и MC , параллельные осям координат. В случае, когда $k \neq 0$, образуется прямоугольный треугольник BCM (рис. 9).

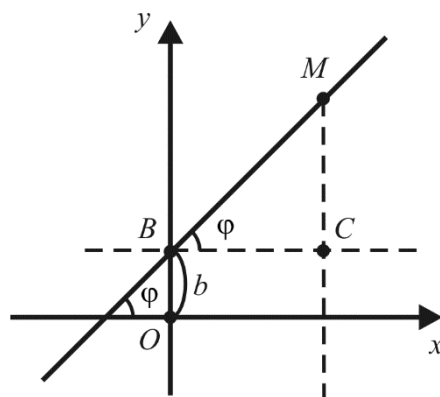


Рис. 9

Имеем $\operatorname{tg} \varphi = \frac{MC}{BC} = \frac{y-b}{x}$, откуда $y-b=kx$, т. е.

$$y=kx+b. \quad (16)$$

Таким образом, координаты любой точки M прямой удовлетворяют уравнению (16). Обратно, если координаты некоторой точки $N(x_1, y_1)$, $x_1 \neq 0$, удовлетворяют уравнению (16), то $\frac{y_1-b}{x_1} = k$ и N принадлежит данной прямой.

Уравнение (16) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Если $b=0$, то прямая проходит через начало координат. Если $k=0$, то прямая параллельна Ox и ее уравнение имеет вид $y=b$. В случае, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, прямая перпендикулярна оси Ox и ее уравнение имеет вид $x=a$, где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox . В частности, ось Ox определяется уравнением $y=0$, а ось Oy – уравнением $x=0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая образует угол φ с положительным направлением оси Ox и проходит через заданную точку $M(x_1, y_1)$. Выведем уравнение этой прямой, предполагая сначала, что прямая не перпендикулярна оси Ox .

Так как прямая проходит через точку $M(x_1, y_1)$, то координаты x_1, y_1 удовлетворяют уравнению (16): $y_1 = kx_1 + b$. Определяя b из этого равенства и подставляя в уравнение (16), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (17)$$

Уравнение (17) называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*.

Если прямая проходит через точку $M(x_1, y_1)$ перпендикулярно оси Ox , т. е. угловой коэффициент обращается в бесконечность, то ее уравнение, очевидно, будет иметь вид $x = x_1$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Известно, что через две различные точки можно провести прямую, и притом только одну. Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Так как прямая проходит через точку M_1 , то $y - y_1 = k(x - x_1)$, где k – угловой коэффициент, который требуется определить. Поскольку прямая проходит через точку M_2 , то $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Таким образом, искомое уравнение прямой имеет вид

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (18)$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y = y_1$. В этом случае прямая параллельна оси Ox . Если $x_1 = x_2$, то прямая параллельна оси Oy и ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Параметрические уравнения прямой

Обозначим в уравнении (18) равные отношения буквой t :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t.$$

Отсюда получим: $y - y_1 = (y_2 - y_1)t$, $x - x_1 = (x_2 - x_1)t$ или

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \quad (19)$$

При $t = 0$ получим координаты точки M_1 , при $t = 1$ – координаты точки M_2 , при $0 < t < 1$ – координаты любой внутренней точки отрезка M_1M_2 . Когда t меняется в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, точка $M(x, y)$ описывает всю прямую.

Уравнения (19) называются *параметрическими уравнениями прямой*.

Уравнение прямой в отрезках

Выведем уравнение прямой, положение которой на плоскости задано ненулевыми отрезками, отсекаемыми на осях координат. Пусть прямая отсекает на оси Ox отрезок $OA = a$, а на оси Oy – отрезок $OB = b$ (рис. 10). Ясно, что тем самым положение прямой вполне определено. Эта прямая проходит через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. Поэтому ее уравнение легко получается из (18).

Если положить $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$, то получим $\frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a}$, откуда $\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$, или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (20)$$

Уравнение (20) называется *уравнением прямой в отрезках*.

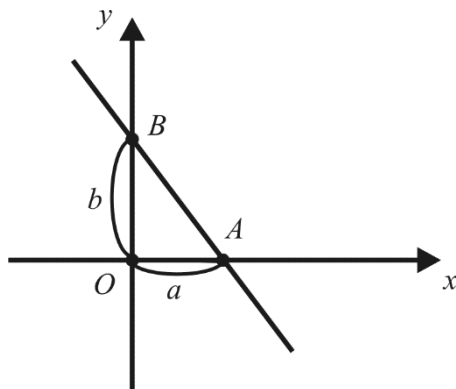


Рис. 10

Замечание. Уравнение прямой, проходящей через начало координат или параллельной одной из осей координат, не может быть записано как уравнение прямой в отрезках.

Общее уравнение прямой

Теорема. Каждое уравнение 1-й степени вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (21)$$

определяет некоторую прямую в декартовой прямоугольной системе координат Oxy . Обратно, каждая прямая на плоскости в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением 1-й степени вида (21).

Доказательство. Если $B \neq 0$, то уравнение (21) можно представить в виде $y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$ или $y = kx + b$, где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Но уравнение $y = kx + b$ задает прямую, имеющую угловой коэффициент k и проходящую через точку $B(0, b)$. Если $B = 0$, то в силу условия $A^2 + B^2 \neq 0$ коэффициент $A \neq 0$, поэтому уравнение (21) можно привести к виду $x = a$, где $a = -\frac{C}{A}$. В этом случае уравнение определяет прямую, параллельную оси Oy . Следовательно, уравнение (21) определяет некоторую прямую на плоскости.

Докажем обратное утверждение, а именно: каждая прямая на плоскости задается уравнением (21).

Действительно, если прямая не параллельна оси Oy , то она может быть задана уравнением вида $y = kx + b$ или $kx - y + b = 0$, т. е. уравнением 1-й степени вида (21), где $A = k$, $B = -1$ и $C = b$. Если прямая параллельна оси Oy , то она имеет уравнение вида $x = a$ или $x - a = 0$, т. е. уравнение вида (21), где $A = 1$, $B = 0$ и $C = -a$.

Доказанная теорема означает, что линии первого порядка – это прямые.

Уравнение (21) называется *общим уравнением прямой*. Оно содержит уравнение любой прямой при соответствующем выборе коэффициентов A , B и C .

Отметим некоторые частные случаи уравнения (21), а именно: выясним, к чему приводит равенство нулю некоторых его коэффициентов.

1) $C = 0$, т. е. уравнение (21) имеет вид $Ax + By = 0$. В данном случае прямая проходит через начало координат.

2) $B = 0$, $C \neq 0$, т. е. уравнение (21) имеет вид $Ax + C = 0$. Это, очевидно, уравнение прямой, параллельной оси Oy и не совпадающей с этой осью $\left(\text{так как } x = -\frac{C}{A} \right)$.

3) $B = 0$, $C = 0$, т. е. уравнение (21) имеет вид $x = 0$. В данном случае уравнение задает ось Oy .

4) $A = 0$, $C \neq 0$, т. е. уравнение (21) имеет вид $By + C = 0$. Это уравнение прямой, параллельной оси Ox и не совпадающей с этой осью $\left(\text{так как } y = -\frac{C}{B} \right)$.

5) $A = 0$, $C = 0$, т. е. уравнение (21) имеет вид $y = 0$. В данном случае уравнение задает ось Ox .

Пусть теперь $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Тогда уравнение (21) можно привести к виду $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$. Вводя обозначения $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, получаем уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Рассмотрим две прямые; предположим, что ни одна из них не параллельна оси Oy (рис. 11). В этом случае прямые можно задать уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$.

Под *углом γ между прямыми* будем понимать наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения данных прямых первую из них, чтобы она совпала со второй: $\gamma = \angle ACB$.

Выведем формулу, по которой можно найти угол γ , если даны k_1 и k_2 .

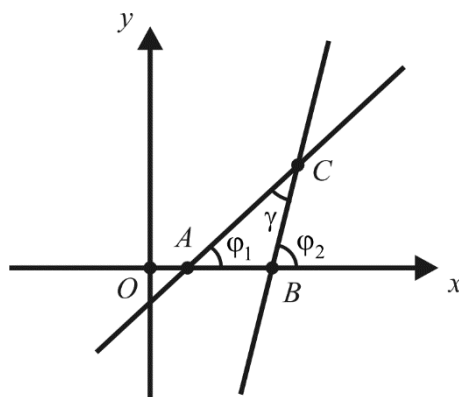


Рис. 11

Из элементарной геометрии известно, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных. Поэтому $\varphi_2 = \varphi_1 + \gamma$, или $\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}$$

и, окончательно,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (22)$$

Замечание. При другой нумерации прямых (замене k_1 на k_2 и k_2 на k_1) правая часть формулы (22) меняет знак; в этом случае формула определяет тангенс другого угла $\tilde{\gamma}$ между двумя прямыми, причем $\tilde{\gamma} = \pi - \gamma$.

Выведем теперь условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

1) *Прямые на плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны между собой (т. е. $k_1 = k_2$).*

Действительно, если прямые параллельны, то $\varphi_1 = \varphi_2$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$ и, значит, $k_1 = k_2$. Обратно, если выполнено равенство $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$ и, так как углы заключены в пределах от 0 до π , то $\varphi_1 = \varphi_2$, т. е. прямые параллельны.

2) *Прямые на плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку (т. е. $k_2 = -\frac{1}{k_1}$).*

Действительно, пусть прямые перпендикулярны, т. е. $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0, \text{ откуда } 1 + k_1 k_2 = 0, \text{ и, следовательно, } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Обратно, если $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, то $1 + k_1 k_2 = 0$, $\operatorname{ctg} \gamma = 0$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$, т. е. прямые перпендикулярны.

Пусть теперь уравнения прямых заданы в общем виде: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Отсюда, предполагая, что $B_1 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$, получаем $y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1}$ и $y = -\frac{A_2}{B_2} x - \frac{C_2}{B_2}$. Следовательно, $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Тогда тангенс угла между прямыми определяется формулой

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2}} = \frac{B_2 A_1 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Условие *параллельности* прямых выражается равенством

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

а условие их *перпендикулярности* – равенством $\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2}$, или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Пример. Найти угол между прямыми, определяемыми уравнениями $3x - 5y + 15 = 0$ и $8x - 2y - 1 = 0$.

Решение. Согласно условию задачи имеем $A_1 = 3$, $B_1 = -5$, $A_2 = 8$, $B_2 = -2$, откуда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{B_2 A_1 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \frac{-2 \cdot 3 - 8 \cdot (-5)}{3 \cdot 8 + (-5) \cdot (-2)} = \frac{-6 + 40}{24 + 10} = 1.$$

Следовательно, угол между прямыми $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Пример. Через точку $C(-6, 3)$ провести прямую, перпендикулярную прямой $2x + 3y - 12 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение заданной прямой в виде $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

Значит, угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -\frac{2}{3}$. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Следовательно, угловой коэффициент искомой прямой равен $k_2 = \frac{3}{2}$. Уравнение искомой

прямой находим по формуле $y - y_1 = k_2(x - x_1)$, где (x_1, y_1) – координаты точки С. Получаем: $y - 3 = \frac{3}{2}(x + 6)$, или $3x - 2y + 24 = 0$.

Пример. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M(5; 1)$ и образующих с прямой $2x + y - 4 = 0$ угол 45° .

Решение. Перепишем уравнение заданной прямой в виде $y = -2x + 4$. Значит, угловой коэффициент данной прямой -2 . Пусть угловой коэффициент одной из искомых прямых равен k . Так как угол между этими прямыми равен 45° , то

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{k + 2}{1 - 2k} \text{ или } \operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{-2 - k}{1 - 2k}$$

(в зависимости от того, какую из двух рассматриваемых прямых считать первой). Решая каждое из полученных уравнений, находим $k = -\frac{1}{3}$ и $k = 3$.

Итак, уравнение одной из искомых прямых запишется в виде $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 5)$, т.е. $x + 3y - 8 = 0$, а уравнение другой прямой в виде $y - 1 = 3(x - 5)$, т.е. $3x - y - 14 = 0$.

Расстояние от точки до прямой

Рассмотрим прямую Δ , заданную общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и некоторую точку $M_1(x_1, y_1)$.

Под *расстоянием от точки M_1 до прямой Δ* понимается длина d перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую Δ (рис. 12).

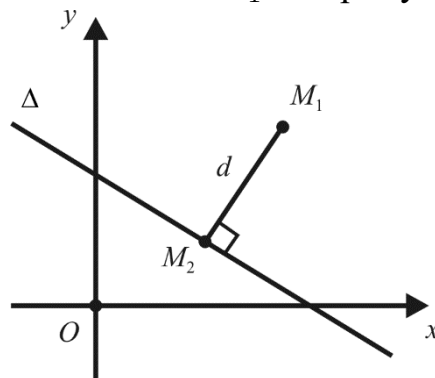


Рис. 12

Пусть $M_2(x_2, y_2)$ – основание перпендикуляра. Тогда $d = |M_1M_2|$.

Прямая Δ имеет угловой коэффициент $k_1 = -\frac{A}{B}$. Прямая M_1M_2 перпендикулярна прямой Δ и, следовательно, ее угловой коэффициент $k_2 = \frac{B}{A}$.

Уравнение прямой M_1M_2 можно записать в виде $y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$ или $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$. Так как эта прямая проходит через точку M_2 , то $B(x_2 - x_1) - A(y_2 - y_1) = 0$, откуда

$$\frac{x_2 - x_1}{A} = \frac{y_2 - y_1}{B} = t,$$

или

$$x_2 = x_1 + At, \quad y_2 = y_1 + Bt,$$

где t – коэффициент пропорциональности. По формуле, выражающей расстояние между двумя точками, имеем

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{A^2 t^2 + B^2 t^2} = |t| \sqrt{A^2 + B^2}.$$

С другой стороны, учитывая, что точка $M_2(x_2, y_2)$ лежит на прямой Δ , получаем

$$\begin{aligned} Ax_2 + By_2 + C &= A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C = \\ &= (Ax_1 + By_1 + C) + t(A^2 + B^2) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}.$$

Таким образом, формула для вычисления расстояния от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ имеет вид

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В частности, полагая $x_1 = y_1 = 0$, получаем расстояние от начала координат до прямой Δ : $d_0 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Замечание. Разделив обе части уравнения прямой на $\sqrt{A^2 + B^2}$, получим уравнение

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

свободный член которого равен с точностью до знака расстоянию от начала координат до прямой. Такое уравнение прямой будем называть *нормированным*.

Правило. Чтобы определить расстояние от точки до прямой, нужно в левую часть нормированного уравнения этой прямой подставить координаты данной точки и взять модуль полученного результата.

Пример. Найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC треугольника ABC , если известны координаты вершин треугольника $A(-3, 6)$, $B(6, 1)$, $C(3, 5)$.

Решение. Составим уравнение прямой BC :

$$\frac{y-1}{5-1} = \frac{x-6}{3-6}, \quad \frac{y-1}{4} = \frac{x-6}{-3}, \quad 4x + 3y - 27 = 0.$$

Нормируем его: $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$; $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{27}{5} = 0$.

Подставляем в нормированное уравнение прямой BC координаты точки A и берем модуль полученного результата:

$$d = \left| \frac{4}{5} \cdot (-3) + \frac{3}{5} \cdot 6 - \frac{27}{5} \right| = \left| -\frac{21}{5} \right| = 4,2.$$

Итак, длина перпендикуляра равна 4,2.

Рассмотрим задачу, которая решается с использованием таких математических понятий, как уравнение прямой и расстояние от точки до прямой.

Задача о движении эпицентра циклона по прямой. Эпицентр циклона, движущегося прямолинейно, во время первого измерения находился в 16 км к северу и 9 км к западу от метеостанции, а во время второго – в 12 км к северу и 6 км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизился к метеостанции, если дальше он продолжал движение в том же направлении.

Решение. Переформулируем задачу: найдите расстояние от начала координат (от метеостанции) до прямой, проходящей через точки $A(-9, 16)$ и $B(-6, 12)$.

Введем систему координат: центр O – метеостанция, ось Ox направлена с запада на восток, ось Oy направлена с юга на север (рис. 13).

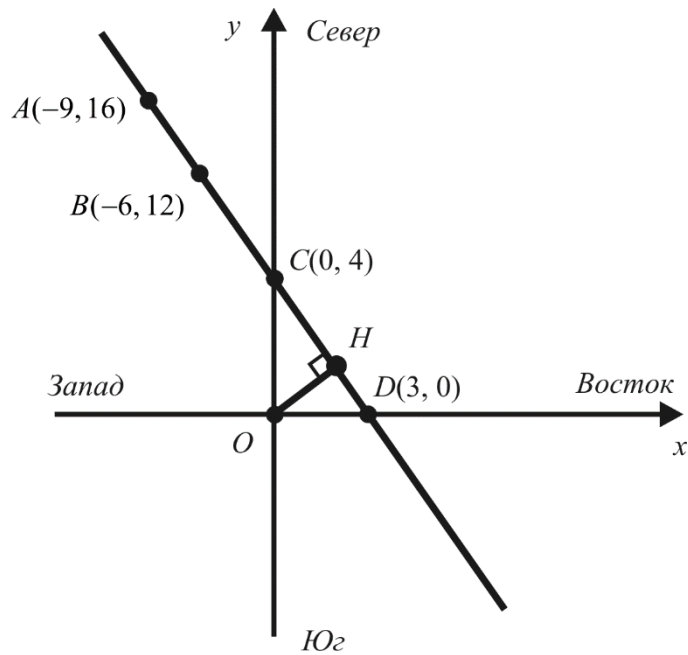


Рис. 13

Запишем уравнение прямой AB в виде $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Подставив в него координаты точек A и B , получим $\frac{y - 16}{12 - 16} = \frac{x + 9}{-6 + 9}$, откуда $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

Прямая AB пересекает оси координат в точках $C(0, 4)$ и $D(3, 0)$. Искомой является длина высоты OH прямоугольного треугольника OCD с катетами $OC = 4$ и $OD = 3$. Найдем ее, используя формулу для площади

$$S_{OCD} = \frac{1}{2}CD \cdot OH = \frac{1}{2}OC \cdot OD.$$

Получим

$$OH = \frac{OC \cdot OD}{\sqrt{OC^2 + OD^2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ км.}$$

Заметим, что величину отрезка OH можно найти и другим способом. Переписывая уравнение $y = -\frac{4}{3}x + 4$ в виде $-\frac{4}{3}x - y + 4 = 0$ и нормируя его, получаем $-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5} = 0$. Свободный член данного уравнения и есть искомая величина отрезка OH .

Эллипс

Наглядным примером эллипса в окружающем нас мире являются эллиптические траектории движения планет и комет в космическом пространстве.

Эллипсом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2 , расстояние между фокусами – через $2c$ (фокусное расстояние), сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов – через $2a$. По определению $2a > 2c$, или $a > c$.

Для вывода уравнения эллипса введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы эллипса лежали на оси Ox , а начало координат делило отрезок F_1F_2 пополам. Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 14).

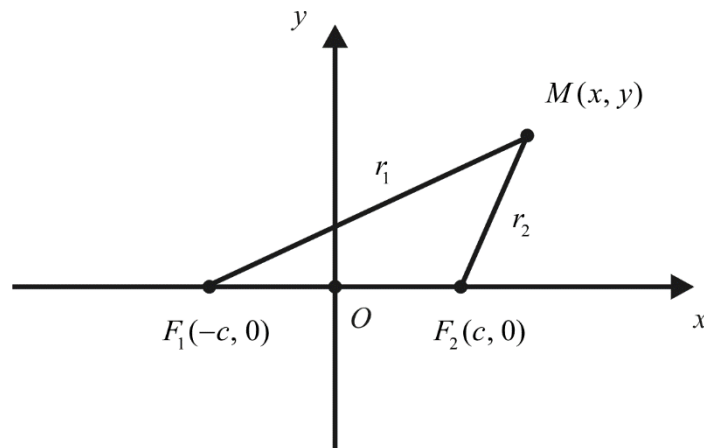


Рис. 14

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По определению эллипса

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

Подставляя сюда значения $|F_1M|$ и $|F_2M|$, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (23)$$

Уравнение (23) и есть искомое уравнение эллипса, так как ему удовлетворяют координаты любой точки эллипса, и только они. Упростим это уравнение. Перенесем один из корней в правую часть, возведем обе части полученного уравнения в квадрат и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2, \\ 2cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx, \end{aligned}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Возводя в квадрат последнее уравнение, получаем

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Введем в рассмотрение новую величину $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Последнее уравнение примет вид $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (24)$$

Поскольку уравнение (24) получено из уравнения (23), то координаты любой точки эллипса, удовлетворяющие уравнению (23), будут удовлетворять и уравнению (24). Однако при упрощении уравнения (23) обе его части были возведены в квадрат, вследствие чего уравнение (24) могло оказаться не равносильным уравнению (23). Покажем, что если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (24), то эта точка лежит на эллипсе.

Из уравнения (24) найдем: $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Подставим полученное выражение для y^2 в формулу для $|F_1M|$:

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

Так как в силу равенства (24) $|x| \leq a$ и, кроме того, $c < a$, то $|F_1M| = a + \frac{c}{a}x$.

Аналогично можно получить формулу $|F_2M| = a - \frac{c}{a}x$ (предоставляем это читателю в качестве упражнения). Складывая последние два равенства, получаем равенство $|F_1M| + |F_2M| = 2a$, т. е. точка M лежит на эллипсе.

Таким образом, любая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (24), принадлежит эллипсу, и наоборот. Уравнение (24) называется *каноническим уравнением эллипса*. Поскольку это уравнение 2-й степени, то эллипс – линия второго порядка.

Исследуем форму эллипса.

Из уравнения (24) следует, что $x^2 \leq a^2$, т. е. $|x| \leq a$ и $y^2 \leq b^2$, т. е. $|y| \leq b$. Это означает, что эллипс целиком расположен в прямоугольнике с центром в начале координат, основание которого равно $2a$, а высота равна $2b$.

Так как уравнение (24) содержит члены только с четными степенями x и y , то эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy , а также относительно начала координат. В силу симметрии эллипса достаточно исследовать его форму в I координатной четверти.

Для первой четверти из уравнения (24) получаем $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ (здесь $y \geq 0$). Следовательно:

- 1) если $x = 0$, то $y = b$, т. е. эллипс проходит через точку $B(0, b)$;
- 2) при возрастании x от нуля до a , y убывает от b до 0;
- 3) если $x = a$, то $y = 0$, т. е. эллипс проходит через точку $A(a, 0)$.

Частью эллипса, расположенной в I координатной четверти, является дуга BA . Произведя симметрию относительно координатных осей, получим весь эллипс (рис. 15).

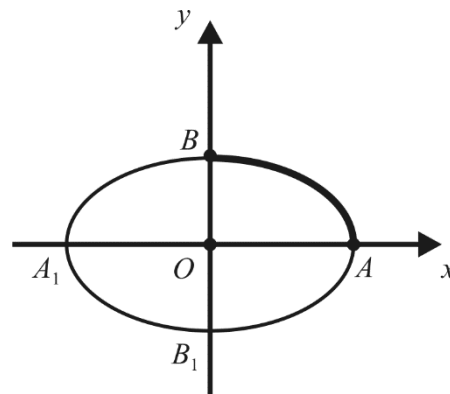


Рис. 15

Точки пересечения эллипса с координатными осями называются *вершинами эллипса* (точки A, B, A_1, B_1 на рис. 15). Оси симметрии эллипса (Ox и Oy) называются просто *осями*, точка пересечения осей – *центром эллипса*. Вершины ограничивают на осях отрезки, равные $2a$ и $2b$. В случае, когда фокусы расположены на оси Ox , $a > b$ (это следует из соотношения $b^2 = a^2 - c^2$). Отрезок $OA = a$ называется *большой полуосью*, отрезок $OB = b$ – *малой полуосью*.

Уравнение (24) можно рассматривать и в случае, когда $b > a$. Оно определяет эллипс с большой полуосью $OB = b$, фокусы которого лежат на оси Oy .

Если $a = b \neq 0$ то уравнение (24) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$. Это уравнение окружности с радиусом a с центром в начале координат. Таким образом, окружность – частный случай эллипса.

Эксцентриситетом эллипса называется число $\frac{c}{a}$, где c – половина расстояния между фокусами, a – большая полуось эллипса.

Эксцентриситет обычно обозначают буквой ε :

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как для эллипса $0 < c < a$, то $0 < \varepsilon < 1$. У окружности оба фокуса совпадают, поэтому для нее $c = 0$ и $\varepsilon = 0$.

Учитывая равенство $c^2 = a^2 - b^2$, получаем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Из последнего равенства видно, что эксцентриситет характеризует форму эллипса: если ε близко к нулю, то a и b почти равны, т. е. эллипс близок к окружности; если же ε близко к единице, то число b весьма мало по сравнению с числом a и эллипс сильно вытянут вдоль большой оси. При увеличении ε эллипс становится более вытянутым (рис. 16). Таким образом, *эксцентриситет эллипса характеризует меру вытянутости эллипса.*

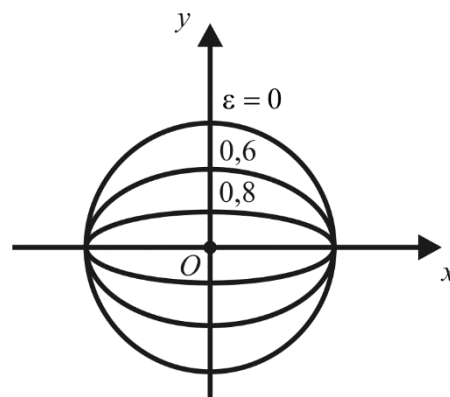


Рис. 16

Как известно, планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим траекториям. Сама Земля, как и остальные планеты, движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит весьма малы, а кометных – велики, т. е. близки к 1. Таким образом, планеты движутся почти по окружностям, а кометы то приближаются к Солнцу, то значительно удаляются от него.

Фокальными радиусами точки M эллипса называются отрезки прямых, соединяющих эту точку с фокусами F_1 и F_2 данного эллипса. Их длины r_1 и r_2

определяются формулами $r_1 = a + \varepsilon x$ и $r_2 = a - \varepsilon x$, которые следуют из соотношений $|F_1M| = a + \frac{c}{a}x$ и $|F_2M| = a - \frac{c}{a}x$.

Если центр эллипса с полуосями $a, b \neq 0$ находится в точке $O'(x_0; y_0)$, то его уравнение имеет вид: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. В случае $a > b$ фокусы такого эллипса лежат на прямой $y = y_0$, а в случае $a < b$ — на прямой $x = x_0$. При $a = b = R$ получаем уравнение окружности $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.

Эллипс обладает следующим *оптическим свойством*.

Предположим, что линия эллипса является зеркальной, от которой луч света отражается по закону «угол падения равен углу отражения», и в одном из фокусов находится источник света. Тогда луч света, выходящий из одного фокуса, отражаясь от линии эллипса, попадает в другой фокус (рис. 17).

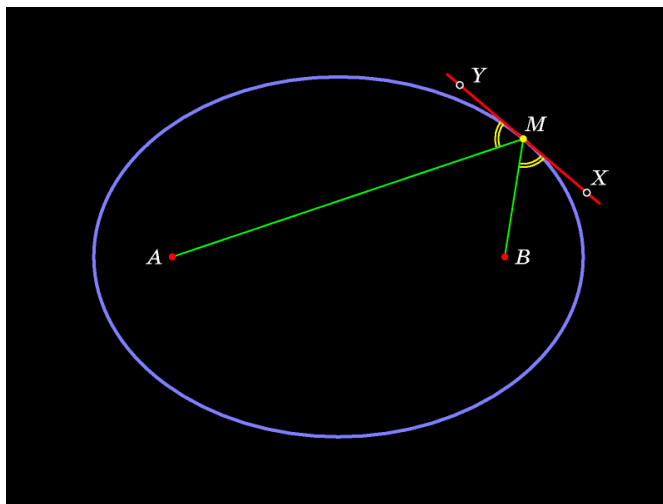


Рис. 17

Пример. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 225:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1, \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Используя (24), находим: $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$,
 $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Пример. Орбита земного шара — эллипс с полуосью $a = 150 \cdot 10^6$ км и эксцентриситетом $\varepsilon = 0,017$. Зная, что Солнце находится в фокусе этого эллипса, найти, насколько кратчайшее расстояние Земли от Солнца (январь) короче длиннейшего (июль).

Решение. Кратчайшее расстояние $l_{\min} = a - c$, а длиннейшее $l_{\max} = a + c$. Тогда $l_{\max} - l_{\min} = (a + c) - (a - c) = 2c = 2\epsilon a = 5,1 \cdot 10^6$ км.

Ответ: $5,1 \cdot 10^6$ км.

Пример. Два нефтеперерабатывающих завода A и B , расстояние между которыми 400 км, отпускают нефтепродукты по одинаковой цене. Транспортные расходы на 1 км из A в три раза больше, чем из B . Определить границу района, в котором более выгодно поставлять нефтепродукты из A .

Решение. Выберем декартову прямоугольную систему координат, поместив начало координат в середине отрезка AB и направив оси координат по лучу AB и перпендикуляр к нему (рис. 18).

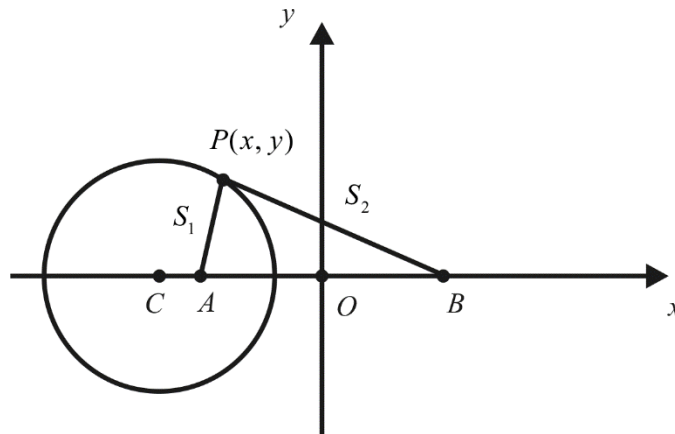


Рис. 18

Определим геометрическое место точек, в которых транспортные расходы на приобретение нефтепродуктов заводов A и B будут одинаковыми. Пусть потребитель находится в точке $P(x, y)$. Обозначим расстояния $|AP| = S_1$ км, $|BP| = S_2$ км.

Предположим, что транспортные расходы на 1 км из B составляют p денежных единиц. Тогда транспортные расходы на 1 км из A составят $3p$ денежных единиц. Общие транспортные расходы из A равны $3S_1p$ денежных единиц, из B — S_2p денежных единиц. Так как расходы потребителя должны быть одинаковы, то $3S_1p = S_2p$, или $3S_1 = S_2$.

Поскольку начало координат находится в середине отрезка AB , а расстояние между A и B составляет 400 км, то $A(-200, 0)$, $B(200, 0)$. По формуле расстояния между двумя точками находим

$$S_1 = \sqrt{(x + 200)^2 + y^2}, \quad S_2 = \sqrt{(x - 200)^2 + y^2}.$$

Тогда условие $3S_1 = S_2$ переписывается в виде

$$3\sqrt{(x + 200)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 200)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned}
9((x+200)^2 + y^2) &= (x-200)^2 + y^2, \\
9(x^2 + 400x + 40000 + y^2) &= x^2 - 400x + 40000 + y^2, \\
8x^2 + 4000x + 8y^2 + 320000 &= 0, \\
x^2 + 500x + y^2 + 40000 &= 0.
\end{aligned}$$

Далее, выделяя полные квадраты в левой части, получим:

$$(x+250)^2 + y^2 - 62500 + 40000 = 0,$$

или

$$(x+250)^2 + y^2 = 150^2.$$

Последнее уравнение является уравнением окружности с центром в точке $C(-250, 0)$ и радиуса $R=150$. Для потребителей, находящихся на этой окружности, $3S_1 = S_2$ и, следовательно, расходы на приобретение нефтепродуктов заводов A и B одинаковы. Для потребителей, находящихся внутри ограниченного этой окружностью круга, $3S_1 < S_2$ и, следовательно, более выгодно поставлять нефтепродукты из A .

Гипербола

Гиперболой называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть постоянная величина, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим фокусы гиперболы через F_1 и F_2 , расстояние между фокусами – через $2c$ (фокусное расстояние), а модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов – через $2a$. По определению $2a < 2c$, или $a < c$.

Для вывода уравнения гиперболы введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы гиперболы лежали на оси Ox , а начало координат делило отрезок F_1F_2 пополам. Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 19).

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы. Тогда

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По определению гиперболы

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a,$$

или

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a.$$

Подставляя сюда значения $|F_1M|$ и $|F_2M|$, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (25)$$

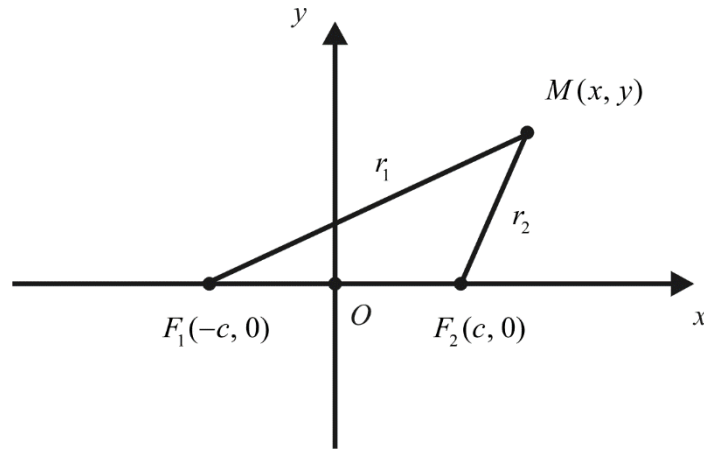


Рис. 19

Уравнение (25) является уравнением гиперболы, так как ему удовлетворяют координаты любой точки гиперболы, и только они. Упростим его аналогично тому, как было упрощено уравнение для эллипса:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a, \\
 (x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\
 x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\
 2cx &= -2cx + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\
 4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\
 cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\
 (cx - a^2)^2 &= a^2[(x-c)^2 + y^2], \\
 c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, \\
 (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2).
 \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение новую величину $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Последнее уравнение примет вид $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (26)$$

Мы показали, что из равенства (25) следует равенство (26), т. е. любая точка гиперболы удовлетворяет уравнению (26). Покажем обратное. Пусть точка $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению (26). Тогда

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right).$$

Подставим полученное выражение для y^2 в формулу для $|F_1M|$:

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right|.$$

Аналогично можно получить формулу $|F_2M| = \left|\frac{c}{a}x - a\right|$ (предоставляем это читателю в качестве упражнения). Так как в силу равенства (26) $|x| \geq a$ и, кроме

того, $c > a$, то для $x \geq a$ имеем $|F_1M| = \frac{c}{a}x + a$, $|F_2M| = \frac{c}{a}x - a$. Следовательно,

$$|F_1M| - |F_2M| = 2a.$$

Для $x \leq -a$ имеем $|F_1M| = -\frac{c}{a}x - a$, $|F_2M| = -\frac{c}{a}x + a$. Следовательно,

$$|F_1M| - |F_2M| = -2a.$$

Итак, любая точка, удовлетворяющая уравнению (26), удовлетворяет также уравнению $|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$ и, значит, принадлежит гиперболе. Уравнение (26) называют *каноническим уравнением гиперболы*. Гипербола – линия второго порядка.

Исследуем форму гиперболы по ее каноническому уравнению.

Поскольку $|x| \geq a$, то в полосе между прямыми $x = -a$ и $x = a$ нет ни одной точки гиперболы. Так как в уравнение (26) x и y входят только в четной степени, то гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy , а также относительно начала координат. Поэтому достаточно изучить форму гиперболы в I координатной четверти; в остальных четвертях она строится по симметрии.

Из уравнения (26) для первой четверти получаем

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

Следовательно:

- 1) если $x = a$, то $y = 0$, т. е. точка $A(a, 0)$ принадлежит гиперболе;
- 2) при возрастании x возрастает и y , т. е. график функции, начиная от точки $A(a, 0)$, уходит неограниченно вправо и вверх.

Покажем, что точка дуги гиперболы, лежащей в I координатной четверти, неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$ при ее неограниченном удалении от начала координат.

Проведем из произвольной точки $M(x, y)$ графика гиперболы прямую, параллельную оси Oy и пересекающую прямую $y = \frac{b}{a}x$ в точке N . Кроме того, опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую $y = \frac{b}{a}x$ (рис. 20). Тогда

$$|MN| = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

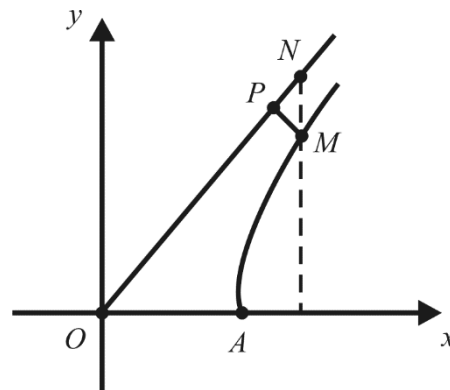


Рис. 20

Из полученного равенства для $|MN|$ видно, что длина отрезка MN стремится к нулю, когда x неограниченно возрастает. Так как $|MP| < |MN|$, то $|MP|$ также стремится к нулю.

Таким образом, если точка M уходит в бесконечность по той части гиперболы, которая расположена в I координатной четверти, то расстояние от этой точки до прямой $y = \frac{b}{a}x$ стремится к нулю. В соответствии с этим говорят,

что *гипербола асимптотически приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$* , а саму прямую называют *асимптотой гиперболы*. Очевидно, у гиперболы две асимптоты:

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

Изобразим гиперболу на чертеже (рис. 21). Сначала строим так называемый основной прямоугольник гиперболы, центр которого совпадает с началом координат, а стороны равны $2a$ и $2b$ и параллельны осям Ox и Oy . Прямые, на которых расположены диагонали этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы. Построив асимптоты, строим саму гиперболу; она состоит из двух частей, называемых *ветвями* (левой и правой).

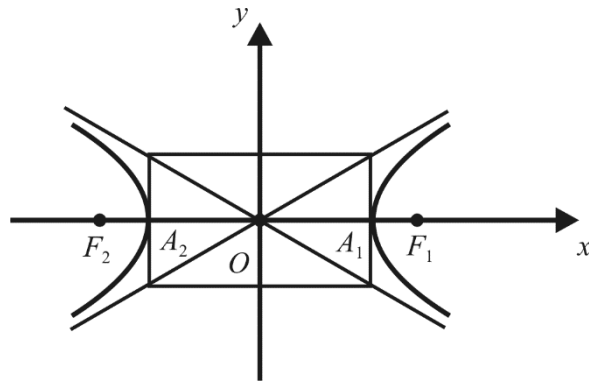


Рис. 21

Центр симметрии гиперболы называется *центром* гиперболы. Оси симметрии называются *осями* гиперболы, причем ось, пересекающая гиперболу в двух точках, называется *действительной*, а вторая – *мнимой*. Точки A_1 и A_2 пересечения гиперболы с действительной осью называются *вершинами* гиперболы. Величины a и b называются *полуосями* гиперболы. Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней*.

Замечание. Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

определяет гиперболу с действительной осью Oy . Она называется *сопряженной* к гиперболе, определяемой уравнением (26). Обе эти гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение ее фокусного расстояния к расстоянию между ее вершинами.

Если действительной осью является ось Ox , то по определению

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Поскольку для гиперболы $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму основного прямоугольника и, следовательно, форму самой гиперболы: чем меньше ε , тем больше вытягивается основной прямоугольник, а вслед за ним и сама гипербола вдоль действительной оси. Гиперболы с различными значениями ε изображены на рис. 22.

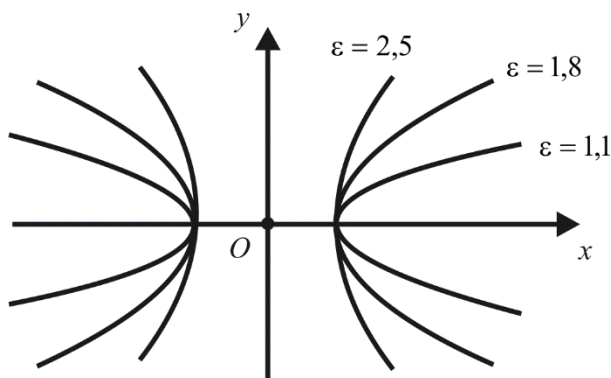


Рис. 22

Фокальными радиусами точки M гиперболы называются отрезки, соединяющие эту точку с фокусами данной гиперболы. Их длины r_1 и r_2 определяются следующими формулами:
для правой ветви

$$r_1 = \epsilon x + a, \quad r_2 = \epsilon x - a;$$

для левой ветви

$$r_1 = -(\epsilon x + a), \quad r_2 = -(\epsilon x - a).$$

Гипербола обладает следующим *оптическим свойством*.

Предположим, что линии гиперболы являются зеркальными и в фокусе находится источник света. Тогда луч света, выходя из этого фокуса, отражается второй ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе (рис. 23).

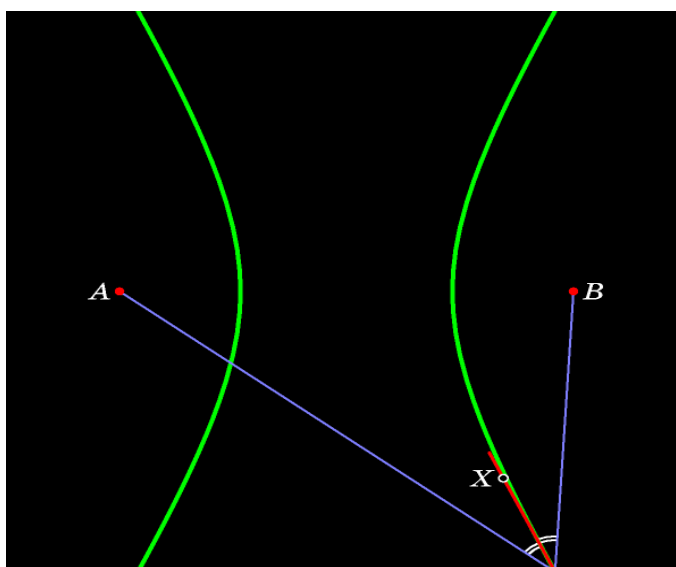


Рис. 23

Пример. Написать уравнение окружности, проходящей через левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$ и имеющей центр в точке $A(-1, -2)$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 63:

$$\frac{7x^2}{63} - \frac{9y^2}{63} = 1, \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

Используя (26), находим: $a = 3$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{9+7} = 4$, $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$. Таким образом, необходимо найти уравнение окружности, проходящей через точку F_1 и имеющей центр в точке A . Найдем радиус этой окружности: $|AF_1| = \sqrt{(-4+1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13}$. Следовательно, уравнение искомой окружности имеет вид $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$.

Пример. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 1$ и прямой $2x + y - 8 = 0$.

Решение. Переписывая уравнение гиперболы в виде (26), получаем

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1,$$

откуда находим $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$. Значит, асимптоты данной гиперболы имеют вид

$y = \frac{2}{3}x$ и $y = -\frac{2}{3}x$. Очевидно, что они пересекаются в точке $O(0,0)$. Найдем

точки пересечения асимптот гиперболы с прямой $2x + y - 8 = 0$. Для этого решим две системы уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x, \\ y = 8 - 2x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x, \\ y = 8 - 2x. \end{cases}$$

Решением первой системы является точка $A(3,2)$, а второй – точка $B(6,-4)$. Вычислим площадь треугольника OAB по формуле (10):

$$S = \frac{1}{2} |(3-0)(-4-0) - (6-0)(2-0)| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12.$$

В естествознании многие исследуемые зависимости, являются *гиперболическими*, получившими свое название от вида кривой линии, которая соответствует уравнению связи.

Вот как выглядит называемое многими учеными «*удивительное открытие*» (1960 г., авторы Х. фон Ферстер, П. Мора и Л. Эмиот (von Foerster, Mora, and Amiot), заключающееся в том что в течение длительного промежутка времени (около 6 тыс. лет) до 60-х годов XX в. рост населения Земли следовал гиперболическому закону и описывался при помощи следующего простого уравнения:

$$Y(t) = \frac{C}{t_0 - t},$$

где $Y(t)$ – численность населения мира в момент времени t , C и t_0 – константы.

Директрисы эллипса и гиперболы

Директрисами эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются две прямые

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{\varepsilon},$$

где a – большая полуось; ε – эксцентриситет эллипса. Поскольку для эллипса $\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Это означает, что директрисы эллипса параллельны его малой оси и не имеют с ним общих точек (рис. 24, а).

Директрисами гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются две прямые

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = \frac{a}{\varepsilon},$$

где a – действительная полуось гиперболы; ε – эксцентриситет гиперболы. Поскольку для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Это означает, что директрисы гиперболы параллельны ее мнимой оси и не имеют с ней общих точек (рис. 24, б).

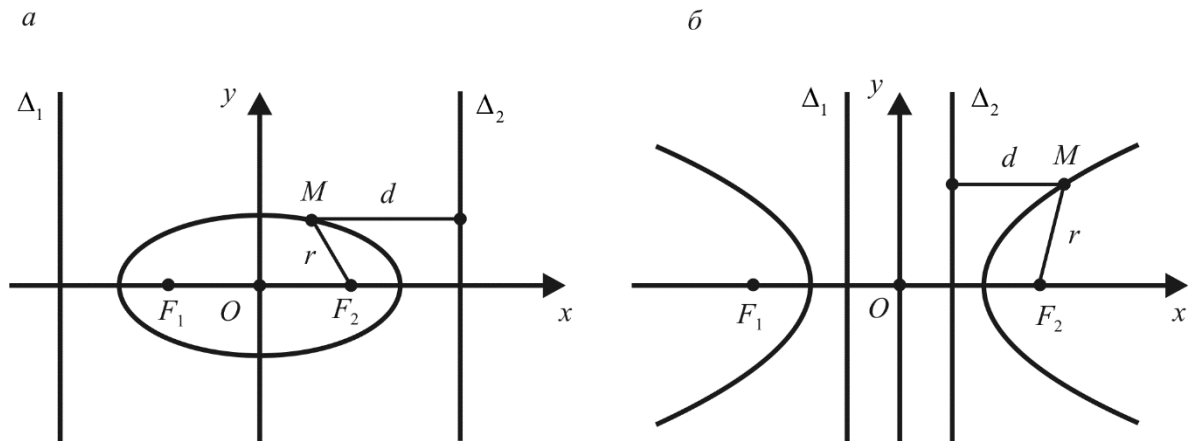


Рис. 24

Основное свойство директрис эллипса и гиперболы выражается следующей теоремой.

Теорема. *Отношение расстояния r от любой точки эллипса (гиперболы) до фокуса к расстоянию d от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса (гиперболы), т. е.*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \quad (27)$$

Фокус и директриса считаются соответствующими, если они расположены по одну сторону от центра.

Доказательство. Рассмотрим, например, правый фокус и правую директрису гиперболы (рис. 24, б). Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка правой ветви гиперболы. Так как вся правая ветвь гиперболы лежит в положительной полуплоскости относительно прямой $x = \frac{a}{\varepsilon}$, то $d = x - \frac{a}{\varepsilon}$. Используя выражение для фокального радиуса $r = \varepsilon x - a$, получаем

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

т. е. равенство (27) верно. Если точка $M(x, y)$ лежит на левой ветви гиперболы, которая находится в отрицательной полуплоскости относительно прямой $x = \frac{a}{\varepsilon}$, то $d = -x + \frac{a}{\varepsilon}$. В этом случае $r = a - \varepsilon x$, откуда снова

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon.$$

Проверка соотношения (27) для левого фокуса и левой директрисы гиперболы, а также для эллипса (рис. 24, а) предоставляется читателю в качестве упражнения.

Установленное свойство эллипса и гиперболы можно положить в основу общего определения этих линий: множество точек, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы является величиной постоянной, равной ε , есть эллипс, если $\varepsilon < 1$, и гипербола, если $\varepsilon > 1$.

Естественно, возникает вопрос, что представляет собой множество точек, определенное аналогичным образом при условии $\varepsilon = 1$. Оказывается, это новая линия второго порядка, которая называется *параболой*.

Парабола

Параболой называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой* и не проходящей через фокус.

Обозначим фокус параболы через F , а директрису параболы – через Δ (Δ – это прямая не проходящая через точку F).

Поскольку парабола, как эллипс и гипербола, определяется последней теоремой при $\varepsilon = 1$, то для нее справедливо равенство

$$r = d,$$

где r и d – расстояния от произвольной точки параболы соответственно до фокуса и директрисы.

Составим уравнение параболы. Для этого систему декартовых прямоугольных координат выберем следующим образом. Проведем ось Ox через фокус F перпендикулярно директрисе Δ в направлении от директрисы к фокусу; начало координат возьмем в середине отрезка между фокусом F и точкой B пересечения оси Ox с директрисой Δ (рис. 25).

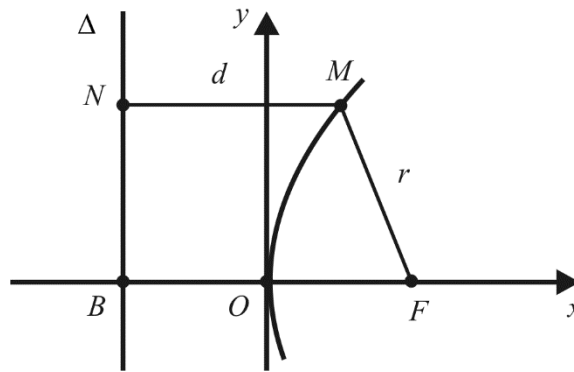


Рис. 25

Пусть p – расстояние от фокуса до директрисы. Тогда $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и уравнение директрисы будет иметь вид $x = -\frac{p}{2}$.

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ параболы. Проведем через эту точку прямую, параллельную оси Ox , и обозначим через N точку пересечения этой прямой с директрисой. Имеем

$$r = |MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = |MN| = x + \frac{p}{2}.$$

Отметим, что формула $d = x + \frac{p}{2}$ верна только для $x \geq 0$. Если же $x < 0$, то для точки с абсциссой x , очевидно, $r > d$, и, следовательно, такая точка не лежит на параболе. Поскольку $r = d$, то

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (28)$$

Уравнение (28) и есть уравнение параболы. Чтобы упростить это уравнение, возведем обе его части в квадрат:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Отсюда

$$y^2 = 2px. \quad (29)$$

Так как $x \geq 0$, то уравнения (28) и (29) равносильны. Уравнение (29) называется *каноническим уравнением параболы*.

Исследуем теперь форму параболы по ее уравнению (29). Так как x принимает только неотрицательные значения, то вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости Oxy , что уже отмечалось ранее. Так как уравнение (29) содержит координату y только в четной степени, то парабола симметрична относительно оси Ox , и для выяснения ее формы достаточно рассмотреть только I координатную четверть. В этой четверти $y = \sqrt{2px}$.

Очевидно, парабола проходит через начало координат. При неограниченном возрастании x неограниченно растет и y . Парабола, выходя из начала координат, уходит неограниченно вправо и вверх. В четвертой четверти парабола строится по симметрии с первой четвертью. Парабола (29) изображена на рис. 26.

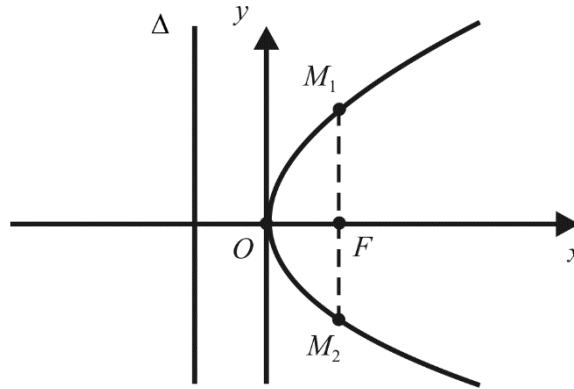


Рис. 26

Ось симметрии параболы называется *осью* параболы. Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной* параболы. Величина p называется *фокальным параметром* или просто *параметром параболы*.

Проведем через фокус прямую, перпендикулярную Ox . Ее уравнение $x = \frac{p}{2}$. Данная прямая пересекается с параболой (29) в точках $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$ и $M_2\left(\frac{p}{2}, -p\right)$. Следовательно, $p = |FM_1|$, т. е. параметр p параболы (29) равен длине перпендикуляра к оси параболы, восстановленного из фокуса до точки пересечения с параболой.

Параметр характеризует размеры параболы. Параболы, соответствующие различным значениям параметра p , изображены на рис. 27.

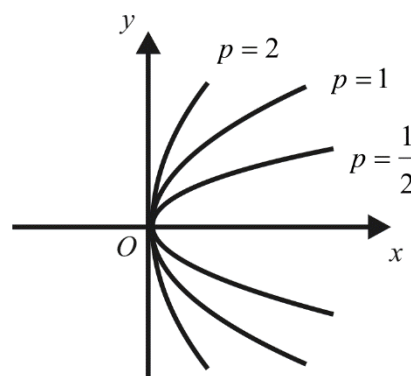


Рис. 27

Наряду с уравнением (29) рассматривают и другие уравнения: $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$. Они также задают параболы, которые изображены на рис. 28, а, б, в соответственно.

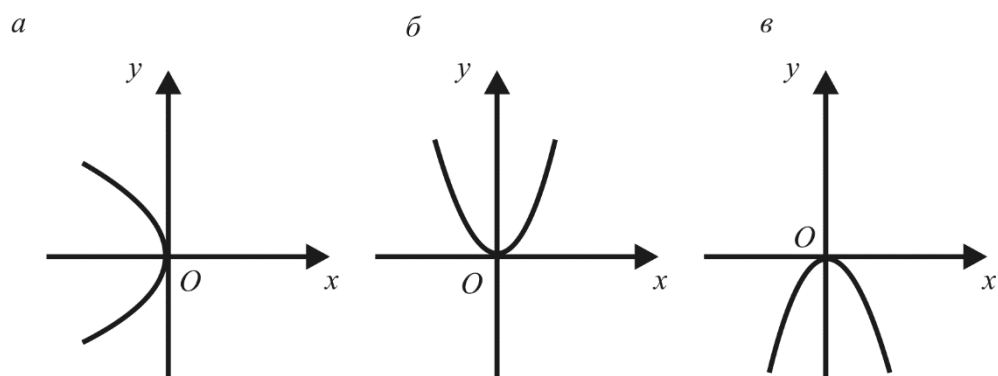


Рис. 28

Парабола обладает следующим *оптическим свойством*.

Предположим, что линия параболы является зеркальной и в фокусе находится источник света. Лучи света, выходящие из фокуса, отражаясь от линии параболы, направлены параллельно оси параболы (рис. 29).

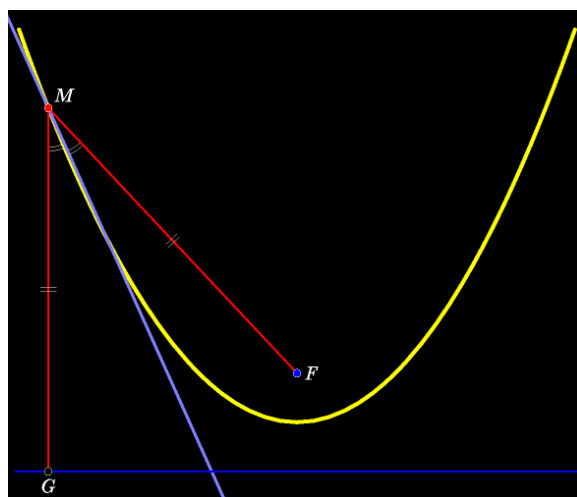


Рис. 29

Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы заложены в основу устройства оптических приборов, используемых в физических, химических, биологических и других экспериментах.

Парабола в природе и технике

Траектории некоторых космических тел (комет, астероидов и др.), проходящих вблизи звезды или другого массивного объекта на достаточно большой скорости, имеют форму параболы (или гиперболы). Эти тела вследствие своей большой скорости и малой массы не захватываются гравитационным полем звезды и продолжают свободный полет. Данное явление используется для гравитационных маневров космических кораблей.

При отсутствии сопротивления воздуха траектория полета тела в приближении однородного гравитационного поля представляет собой параболу.

При вращении сосуда с жидкостью вокруг вертикальной оси поверхность жидкости в сосуде и вертикальная плоскость пересекаются по параболе.

Свойство параболы фокусировать пучок лучей, параллельных ее оси, используется в конструкциях прожекторов, фонарей, фар, а также телескопов-рефлекторов (оптических, инфракрасных, радио), в конструкции узконаправленных (спутниковых и др.) антенн, необходимых для передачи данных на большие расстояния, солнечных электростанций и в других областях.

Форма параболы иногда используется в архитектуре для строительства крыш и куполов.

Пример. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 12x$. Определить расстояние от точки $M(3, 6)$ до фокуса.

Решение. Сравнивая вид уравнения $y^2 = 12x$ с (2.21), находим $p = 6$, $\frac{p}{2} = 3$. Следовательно, уравнение директрисы $x = -3$, фокус – $F(3, 0)$.

Поскольку точка $M(3, 6)$ лежит на параболе, то $r = x + \frac{p}{2} = 3 + 3 = 6$.

Пример. Составить уравнение параболы, зная, что она симметрична относительно оси Oy , проходит через точку $N(6, 3)$ и начало координат.

Решение. Искомое уравнение параболы имеет вид $x^2 = 2py$ (см. рис. 2.28, б). Подставляя сюда координаты точки N , получаем $36 = 6p$, откуда $p = 6$ и $x^2 = 12y$.

Из истории изучения эллипса, гиперболы, параболы

Эллипс, гипербола и парабола являются коническими сечениями (рис. 30).

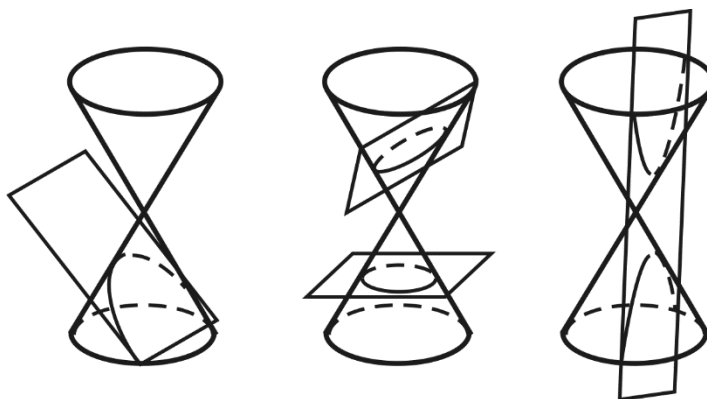


Рис. 30

Одним из первых, кто начал изучать конические сечения, был ученик знаменитого Платона, древнегреческий математик Менехм (IV в. до н. э.). Решая задачу об удвоении куба, Менехм задумался: «А что случится, если разрезать конус плоскостью, перпендикулярной его образующей?» Изменяя угол при вершине прямого кругового конуса, Менехм получил три вида кривых: эллипс – если угол при вершине конуса острый; параболу – если угол прямой; одну ветвь гиперболы – если угол тупой. Название этим кривым предложил один из крупнейших геометров древности Аполлоний Пергский, посвятивший им трактат из восьми книг «*Конические сечения*» («*О кониках*»). Семь книг сохранились, три из них – в арабском переводе. Первые четыре книги содержат начало теории и основные свойства конических сечений. Это трактат об эллипсе, параболе и гиперболе, определяемых как сечения кругового конуса. Аполлоний показал, что кривые можно получить, проводя различные сечения одного и того же кругового конуса, причем любого. При надлежащем наклоне секущей плоскости удастся получить все типы конических сечений. Если считать, что конус не заканчивается в вершине, а проектируется на нее, тогда у некоторых сечений образуется две ветви.

Общее уравнение линии второго порядка

Рассмотрим уравнение второй степени относительно x и y :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (30)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Линии на плоскости, которые могут задаваться уравнением вида (2.22), называются *линиями второго порядка*. К числу таких линий относятся эллипс, гипербола и парабола. Например, (30) задает эллипс, если

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad D = E = 0, \quad F = -1.$$

Пример. Выяснить, какую линию определяет уравнение

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$$

в прямоугольной системе координат Oxy .

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделяя полные квадраты:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 - 4y + 4) - 36 + 4 = 0,$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36,$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1. \quad (31)$$

Совершим параллельный перенос системы координат:

$$X = x - 1, \quad Y = y - 2.$$

Относительно новых осей уравнение (31) примет вид

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Следовательно, исходное уравнение определяет эллипс.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение кривой $y = 2x^2 + 8x + 12$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$y = 2(x^2 + 4x + 6) = 2(x^2 + 4x + 4 + 2) = 2(x + 2)^2 + 4,$$

$$y - 4 = 2(x + 2)^2.$$

Полагая $X = x + 2$, $Y = y - 4$, получаем $Y = 2X^2$, или $X^2 = \frac{1}{2}Y$. Начало новой системы координат находится в точке $O_1(-2, 4)$.

Мы получили уравнение параболы, симметричной относительно оси O_1Y с вершиной в точке O_1 , $p = \frac{1}{4}$.

Выделим все типы линий второго порядка.

Наряду с системой координат Oxy , которую будем называть старой, введем еще одну (новую) декартову прямоугольную систему координат $O'x'y'$. Вспомним формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x и y в левую часть уравнения (30), получим уравнение вида

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha, \\ B' &= (C - A) \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\ C' &= A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Уравнение (32) задает в системе $O'x'y'$ ту же фигуру, что и уравнение (30) в системе Oxy .

Постараемся теперь за счет подходящего выбора новой системы координат упростить уравнение (30). Пусть в этом уравнении $B \neq 0$. Покажем, что преобразование координат можно подобрать таким образом, чтобы в уравнении (32) было $B' = 0$. Это условие записывается в виде

$$\frac{1}{2}(C - A) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha = 0$$

или

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}. \quad (33)$$

Итак, достаточно повернуть координатные оси на угол α , удовлетворяющий условию (33), и в уравнении (32) будет отсутствовать произведение координат.

Далее нам предстоит исследовать уравнение

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0.$$

Выделяем полный квадрат в данном уравнении и совершаем параллельный перенос осей координат.

Все типы линий второго порядка перечислены в следующей теореме.

Теорема. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат задано общее уравнение линии второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Тогда существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{эллипс};$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 - \text{пустое множество (мнимый эллипс)};$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 - \text{точка } (0, 0);$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{гипербола};$$

$$5) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 - \text{пара пересекающихся прямых};$$

$$6) x^2 = 2py - \text{парабола};$$

$$7) x^2 - a^2 = 0 - \text{пара параллельных прямых};$$

$$8) x^2 + a^2 = 0 - \text{пустое множество (пара мнимых параллельных прямых)};$$

$$9) x^2 = 0 - \text{пара совпадающих прямых (ось ординат)}.$$

Таким образом, любая линия второго порядка является эллипсом, гиперболой, параболой, парой пересекающихся прямых, парой параллельных прямых, прямой, точкой или пустым множеством.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0.$$

Решение. Повернем координатные оси на угол, определяемый формулой $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B} = \frac{1-1}{1} = 0$, т. е. на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Формулы преобразования координат примут вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение и приводя подобные члены, получаем

$$3x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{2}y' = 0,$$

$$3x'^2 + (y' - \sqrt{2})^2 = 2.$$

Совершая параллельный сдвиг координатных осей по формулам

$$X = x', \quad Y = y' - \sqrt{2},$$

приходим к уравнению эллипса

$$\frac{X^2}{2/3} + \frac{Y^2}{2} = 1$$

с полуосями $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $b = \sqrt{2}$.

1.1.3. Аналитическая геометрия в пространстве

Прямоугольные декартовы координаты в пространстве

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбраны направление и единица измерения отрезков,

то говорят, что задана *прямоугольная декартова система координат* в пространстве (рис. 31). Прямые с выбранными на них направлениями называются *осями координат*, а их общая точка – *началом координат* (она обозначается буквой O). Оси координат обозначаются через Ox , Oy , Oz и имеют названия ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат соответственно. Вся система координат обозначается через $Oxyz$. (рис. 32)

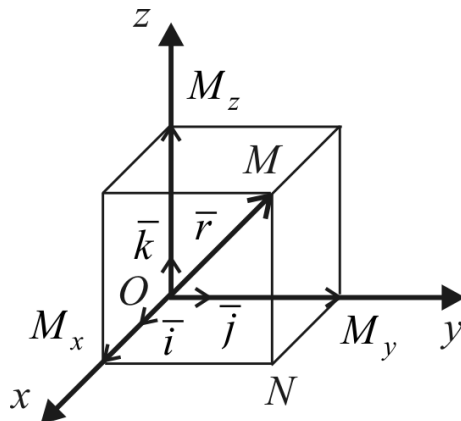


Рис. 31

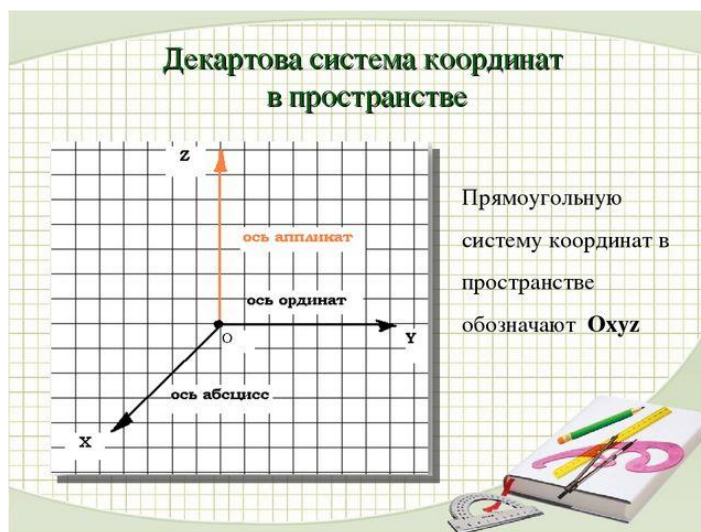


Рис. 32

Пусть M – произвольная точка пространства. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные координатным осям Ox , Oy и Oz . Точки пересечения плоскостей с осями обозначим через M_x , M_y и M_z соответственно. *Прямоугольными декартовыми координатами точки M в пространстве* называются числа x , y , z , выражающие величины векторов $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$ соответственно; при этом x называется абсциссой, y – ординатой, а z – аппликатой точки M . Запись $M(x, y, z)$ означает, что точка M имеет координаты x , y , z (рис. 33).

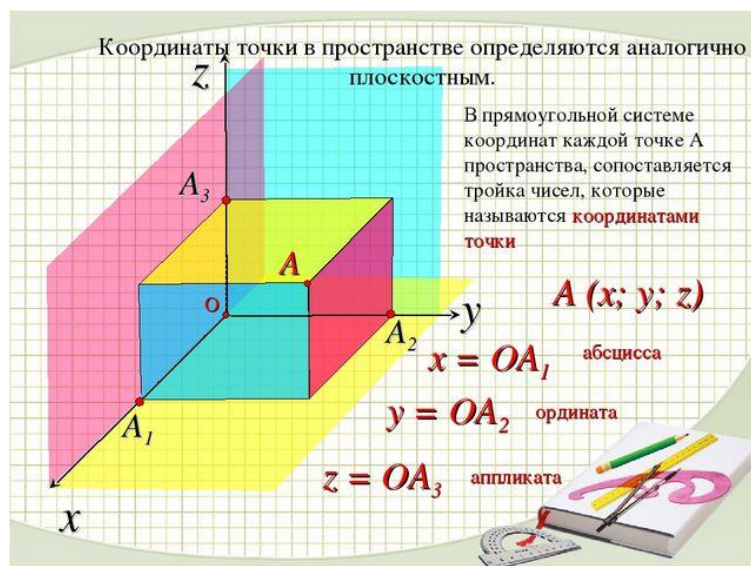


Рис. 33

При выбранной системе координат каждой точке M пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел (x, y, z) – ее прямоугольные координаты и, обратно каждой упорядоченной тройке чисел (x, y, z) соответствует, и притом одна, точка M в пространстве. Таким образом, прямоугольная система координат в пространстве устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек пространства и множеством упорядоченных троек чисел.

Радиусом-вектором точки M называется вектор $\vec{r} = \overline{OM}$, начало которого совпадает с началом координат O , а конец находится в точке M .

Декартовыми прямоугольными координатами x, y, z вектора $\vec{r}$ называются его проекции на соответствующие оси координат

$$x = \text{пр}_{Ox} \vec{r}, \quad y = \text{пр}_{Oy} \vec{r}, \quad z = \text{пр}_{Oz} \vec{r}.$$

Запись $\vec{r}(x, y, z)$ означает, что $\vec{r}$ имеет координаты x, y, z . Координаты радиуса-вектора $\vec{r}$ точки M равны координатам самой точки M .

Введем в рассмотрение единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатных осей (их называют *ортами*). Тройка $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется *базисом*.

По определению суммы нескольких векторов находим (см. рис. 31): $\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{M_xN} + \overline{NM}$. Поскольку $\overline{M_xN} = \overline{OM_y}$, $\overline{NM} = \overline{OM_z}$, то $\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z}$. Но $\overline{OM_x} = x\vec{i}$, $\overline{OM_y} = y\vec{j}$, $\overline{OM_z} = z\vec{k}$, откуда получаем формулу, выражающую вектор $\vec{r}$ по базисным векторам:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

По теореме о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда имеем

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка – это поверхности, которые в декартовой прямоугольной системе координат определяются алгебраическими уравнениями второй степени.

1. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (34)$$

где a, b, c – произвольные положительные числа.

Уравнение (34) называется *каноническим уравнением эллипсоида*.

Установим геометрический вид эллипсоида. Для этого рассмотрим сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy . Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z = h$, где h – любое число, а линия, которая получается в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \quad (35)$$

Исследуем систему (35) при различных значениях h .

1) Если $|h| > c$ ($c > 0$), то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$ и система (35) определяет мнимый эллипс, т. е. точек пересечения плоскости $z = h$ с данным эллипсоидом не существует.

2) Если $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ и линия, определяемая системой (35), вырождается в точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$ (плоскости $z = \pm c$ касаются эллипсоида).

3) Если $|h| < c$, то систему (35) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где $a_1 = a\sqrt{1 - h^2/c^2}$, $b_1 = b\sqrt{1 - h^2/c^2}$, откуда следует, что плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями a_1 и b_1 . При уменьшении $|h|$ значения a_1 и b_1 увеличиваются и достигают своих наибольших значений при $h = 0$, т. е. в сечении эллипсоида координатной плоскостью Oxy получается самый большой эллипс с полуосями $a_1 = a$ и $b_1 = b$.

Аналогичная картина получается и при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz . Получаемые при этом сечения позволяют изобразить эллипсоид как ограниченную овальную поверхность (рис. 34). Величины a , b , c называются *полуосями эллипсоида*. В случае $a = b = c$ эллипсоид является сферой радиуса a .

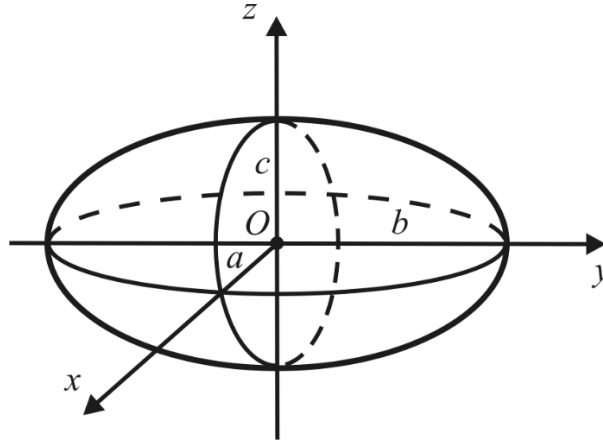


Рис. 34

2. Однополостный гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (36)$$

где a , b , c – произвольные положительные числа.

Уравнение (36) называется *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*.

Установим вид поверхности (36). Для этого рассмотрим сечения ее координатными плоскостями Oxz ($y = 0$) и Oyz ($x = 0$). Получаем соответственно системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

из которых следует, что сечениями являются гиперболы.

Теперь рассмотрим сечения данной поверхности плоскостями $z = h$, параллельными координатной плоскости Oxy . Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (37)$$

где $a_1 = a\sqrt{1+h^2/c^2}$, $b_1 = b\sqrt{1+h^2/c^2}$. Первое из уравнений системы (37) задает эллипс с полуосями a_1 и b_1 . Следовательно, плоскость $z = h$ пересекает однополостный гиперболоид по эллипсу с полуосями a_1 и b_1 , достигающими своих наименьших значений при $h = 0$, т. е. в сечении данного гиперболоида координатной плоскостью Oxy получается самый маленький эллипс с полуосями $a_1 = a$ и $b_1 = b$. При возрастании $|h|$ величины a_1 и b_1 неограниченно увеличиваются. Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить однополостный гиперболоид в виде бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся по мере удаления (по обе стороны) от плоскости Oxy (рис. 35). Величины a , b , c называются *полуосями однополостного гиперболоида*.

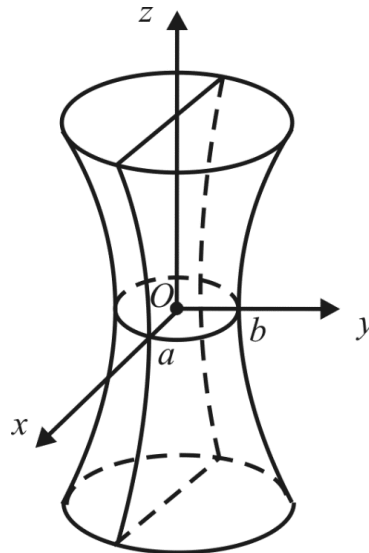


Рис. 35

Приведем еще примеры некоторых поверхностей второго порядка.

Двуполостный гиперболоид определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (a , b , c – произвольные положительные числа) и изображен на рис. 36. В сечениях двуполостного гиперболоида плоскостями Oxz и Oyz получаются гиперболы, а его сечения плоскостями $z = h$ дают эллипс при $|h| > c$, две точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$ при $|h| = c$ или мнимый эллипс при $|h| < c$.

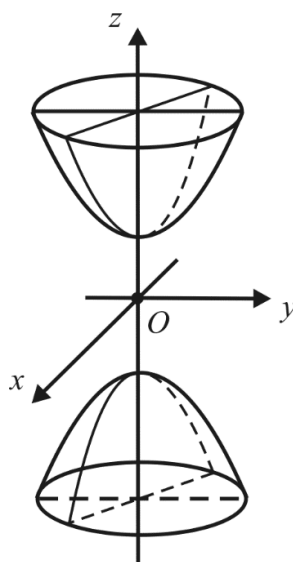


Рис. 36

Эллиптический параболоид определяется уравнением $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ ($p > 0, q > 0$). Он изображен на рис. 37.

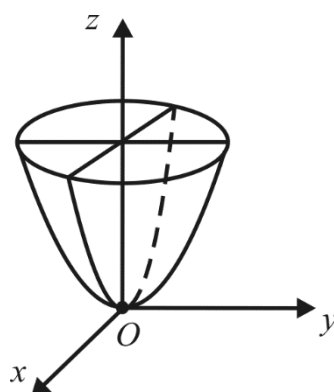


Рис. 37

Поверхностью вращения второго порядка называется поверхность, образованная вращением линии второго порядка вокруг ее оси.

Эллипсоидом вращения называется поверхность, полученная вращением эллипса вокруг одной из его осей. Уравнение эллипсоида вращения, полученного вращением эллипса, заданного в плоскости Oyz (рис. 38) уравнением $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, вокруг оси Oz имеет вид $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Это частный случай эллипсоида, заданного уравнением (34), при $a = b$.

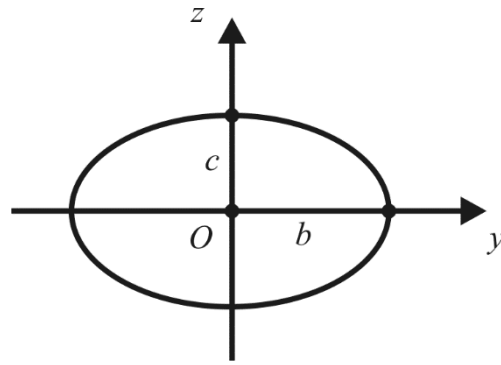


Рис. 38

Однополостный гиперболоид вращения – это поверхность, полученная вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси. Уравнение однополостного гиперболоида вращения, полученного вращением гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащей в плоскости Oyz , вокруг оси Oz , имеет вид $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Это частный случай однополостного гиперболоида вращения, заданного уравнением (36), при $a = b$.

Земной эллипсоид

Известно, что Земля шарообразна и не обладает формой идеального шара. Фигура ее неправильна и, как всякое вращающееся тело, она немного сплюснута у полюсов. Земля также имеет обширные, хотя и довольно пологие, выпуклости и вогнутости. Сложную фигуру нашей планеты называют **геоидом**. Наилучшее геометрическое приближение к реальной фигуре Земли дает эллипсоид вращения (рис. 39).

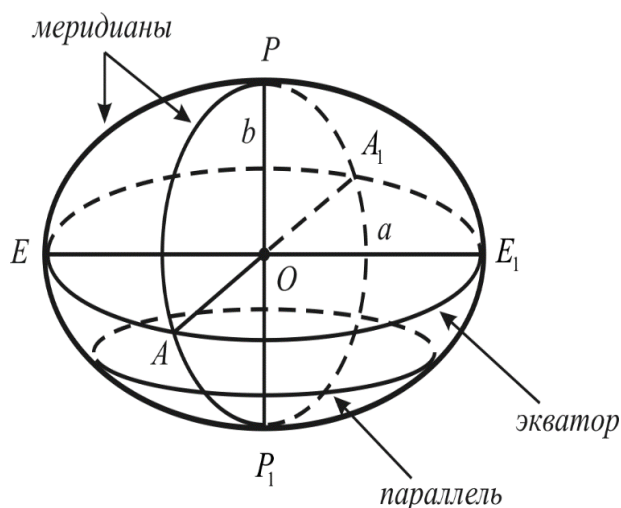


Рис. 39

Каждая точка эллипса при вращении дает окружность, которая называется *параллелью*; наибольшая из них называется *экватором*. Таким образом,

параллели и экватор – линии сечения эллипсоида плоскостями, перпендикулярными к оси вращения. Плоскость экватора проходит через центр земного сфероида. Всякое сечение эллипсоида плоскостью, проходящей через ось вращения PP_1 , называется *меридианом*. Один из меридианов принимается за *начальный*, или *нулевой*; тогда положение остальных меридианов относительно начального можно определить двугранным углом между плоскостью начального меридиана и плоскостью меридиана данной точки.

Земной эллипсоид имеет три основных параметра, любые два из которых однозначно определяют его фигуру: *большая полуось (экваториальный радиус)* a ; *малая полуось (полярный радиус)* b ; *геометрическое (полярное) сжатие*

$\alpha = \frac{a-b}{a}$. Существуют также и другие параметры эллипсоида: первый

эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; второй эксцентриситет $\varepsilon' = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$.

Параметры земного эллипсоида неоднократно определялись учеными различных стран. В 1946 г. для геодезических и картографических работ в СССР приняты следующие размеры земного эллипсоида: $a = 6\,378\,245$ м, $b = 6\,356\,863$ м, $\alpha = 1:298,3$. Эти параметры получены в 1940 г. выдающимся советским геодезистом Ф. Н. Красовским. В настоящее время параметры современной точности имеет эллипсоид системы GRS-80. На его основе созданы современные координатные системы Австралии, Европы, стран Северной и центральной Америки. Эллипсоид WGS-84 получил мировое признание и распространение благодаря американской глобальной системе спутникового позиционирования GPS. В России для решения задач, связанных с использованием космических аппаратов, применяется эллипсоид ПЗ-90.

Современные общеземные эллипсоиды и их параметры

Название	Большая полуось a , м	Точность m_a , м	Полярное сжатие α	Примечание
GRS 80	6 378 137	± 2	1:298,257 222 101	(англ. <i>Geodetic Reference System</i> 1980 г.) разработан Международной Ассоциацией Геодезии и Геофизики (англ. <i>International Union of Geodesy and Geophysics</i>) и рекомендован для геодезических работ
WGS 84	6 378 137	± 2	1:298,257 223 563	(англ. <i>World Geodetic System</i> 1984 г.) применяется в системе спутниковой навигации <i>GPS</i>
ПЗ-90	6 378 136	± 1	1:298,257 839 303	(Параметры Земли 1990 г.) используется на территории России для геодезического

				обеспечения орбитальных полетов. Этот эллипсоид применяется в системе спутниковой навигации ГЛОНАСС
MCB3 (IERS) 96	6 378 136,49	—	1:298,25645	(англ. <i>International Earth Rotation Service</i> 1996 г.) рекомендован Международной службой вращения Земли для обработки РСДБ- наблюдений

Положение любой точки Q на эллипсоиде определяется геодезическими широтой и долготой (рис. 40). **Геодезическая широта B** – это угол, образованный нормалью к поверхности земного эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора. Геодезическая широта отсчитывается по меридиану в обе стороны от экватора и может принимать значения от 0 до 90° . Широты точек, расположенных к северу от экватора, называются северными, а к югу – южными. **Геодезическая долгота L** – это двугранный угол между плоскостями меридиана данной точки и начального меридиана. Геодезические долготы точек отсчитываются от начального меридиана к востоку и западу (от 0 до 180° в каждую сторону) и называются соответственно восточными и западными.

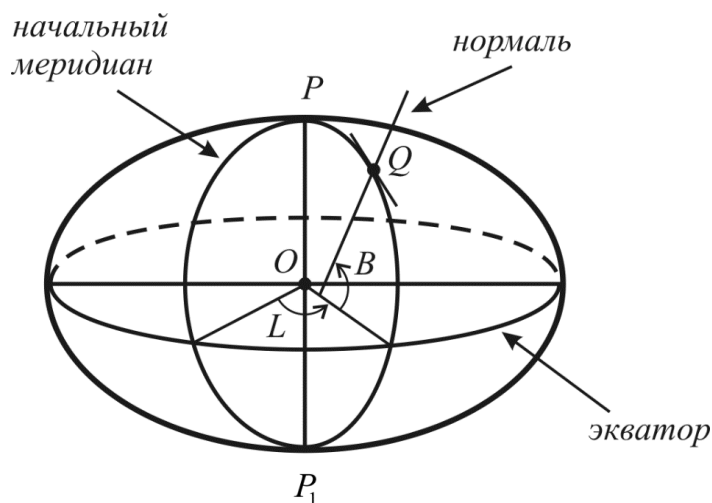


Рис. 40

Установим систему пространственных прямоугольных координат следующим образом: начало координат совпадает с центром эллипсоида O , ось Oz совпадает с осью его вращения PP_1 , ось Ox лежит на пересечении плоскостей экватора и начального меридиана, ось Oy дополняет систему координат до правой. Тогда уравнение поверхности эллипсоида вращения в системе пространственных прямоугольных координат будет иметь вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (38)$$

Если в (38) положить $x=0$ или $y=0$, получим уравнения меридианных эллипсов: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Если в (38) положить $z=0$, получим уравнение геодезического экватора, который представляет собой окружность радиуса a : $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$. Если поверхность эллипсоида пересечь плоскостями $z = \text{const}$, получим окружности, которые называются геодезическими параллелями.

В качестве первого приближения Землю принимают за шар. Если изготовить глобус Земли с экваториальным диаметром 1 м, то его полярный диаметр будет короче всего на 3,4 мм. Размеры неровностей на поверхности Земли значительно меньше диаметра шаровой поверхности. Так, в случае модели с экваториальным диаметром 1 м, наибольшая царапина на ней, Марианский желоб, будет не глубже 0,9 мм, а высочайшая вершина на Земле – Эверест – образует выступ высотой менее 0,7 мм.

В случае шаровой модели используются сферические широты и долготы (рис. 41). **Сферическая широта φ** – это угол, образованный нормалью к поверхности шара в данной точке Q и плоскостью экватора. Но у сферы нормаль совпадает с ее радиусом, поэтому широта равна центральному углу между радиусом R шара, направленным на заданную точку, и плоскостью экватора. **Сферическая долгота λ** определяется двугранным углом между плоскостями меридиана данной точки и начального меридиана.

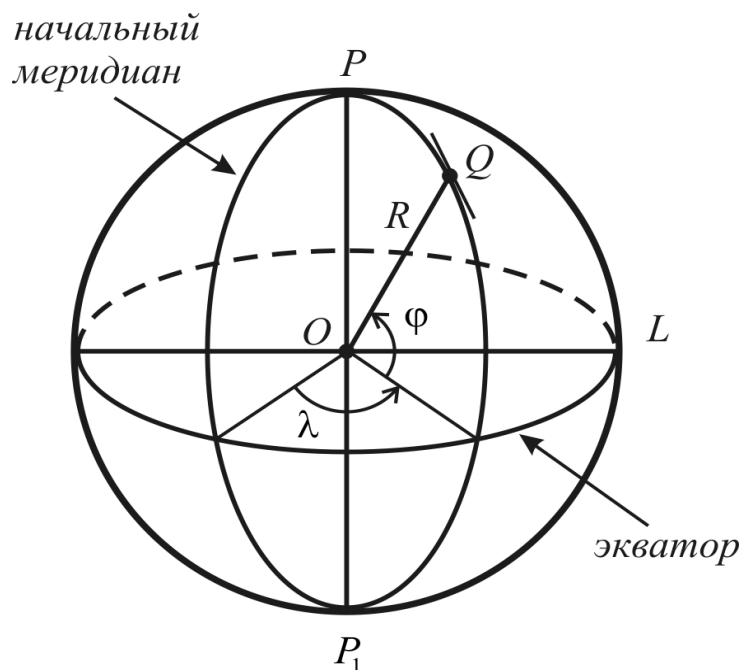


Рис. 41

На сфере параллель является окружностью. Ее радиус r зависит от широты и равен $r = R \cos \varphi$. Длина дуги параллели между двумя точками с географическими долготами λ_1 и λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$) равна $s = r(\lambda_2 - \lambda_1)$ (разность

долгот выражена в радианах). Подробнее о земном эллипсоиде, картографических проекциях можно узнать, например, в [12].

1.2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1.2.1. Функции одной переменной и пределы

Понятие функции возникло тогда, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Однако строгое математическое определение понятия функции появилось лишь в конце 17 века в трудах Готфрида Вильгельма Лейбница и Исаака Ньютона.

К понятию функции приводит изучение разнообразных явлений в окружающем мире: каждому моменту времени в данной местности соответствует определенная температура воздуха; атмосферное давление изменяется в зависимости от высоты местности; продуктивность водоема зависит от продолжительности солнечного освещения; морские приливы и отливы периодически повторяются в зависимости от фазы Луны и т. д. Во всех этих случаях значению одной величины (время, высота над уровнем моря, продолжительность солнечного освещения, положение Луны) ставится в соответствие определенное значение другой величины по определенному закону.

Дадим определение понятия функции, являющегося центральным понятием математического анализа.

Пусть X и Y – непустые множества. Пусть x – произвольный элемент множества X , y – произвольный элемент множества Y , т.е. $x \in X$, $y \in Y$.

Соответствие f , которое каждому элементу x множества X сопоставляет только один элемент y множества Y , называется функцией. Записывается так: $y = f(x)$ или $f: X \rightarrow Y$.

При этом элементы y , или $f(x)$, из множества Y называются **значениями функции**, а элементы x из X – **значениями аргумента**.

Пример. Пусть X – множество студентов-географов, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ – множество оценок по десятибалльной системе. Тогда можно задать функцию $y = f(x)$, которая каждому студенту $x \in X$ будет ставить в соответствие некоторую оценку $y \in Y$.

Пример. Пусть B – множество граждан республики Беларусь, S – множество всевозможных фамилий. Тогда правило, которое каждому гражданину ставит в соответствие его фамилию, есть функция с множеством определения B и множеством значений S .

Множество X называется **областью определения** функции f и обозначается через $D(f)$. Множество всех $y \in Y$, являющихся значениями функции f в точках $x \in X$, называется **множеством значений** функции f и обозначается через $E(f)$.

Функция, у которой область определения и область значений – числовые множества, называется **числовой функцией**.

Способы задания функций. Примеры функций.

Чтобы задать функцию, необходимо указать правило, позволяющее, зная значения x , находить соответствующие значения y . Наиболее часто встречаются следующие три способа задания функции: аналитический; табличный; графический.

• **Аналитический способ** заключается в том, что функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений, например

$$y = -0,9 + 9,638x^{-1,394},$$

где y – годовой темп прироста ставки заработной платы (в процентах), x – общий уровень безработицы (в процентах). Это формула Филлипса.

Аналитический способ удобен для решения задач прогнозирования. Положительными сторонами аналитического способа задания функции являются краткость записи, возможность определения значения функции для любого значения аргумента и, что самое главное, возможность изучения функциональной зависимости с помощью математического анализа. Недостатком этого способа является то, что он применим для описания лишь сравнительно простых форм и процессов.

• **Табличный способ**, если дана таблица, содержащая значения переменной x и соответствующие значения переменной y . В виде таблиц записываются результаты экспериментального исследования каких-либо социологических процессов и явлений.

Пример. Рост числа научных изданий y , начиная с 1750 г. с интервалом в 50 лет, в зависимости от года x , выглядит (округленно) следующим образом.

x	1750 г.	1800 г.	1850 г.	1900 г.	1950 г.
y	10	100	1000	10000	100000

К недостатку табличного способа можно отнести невозможность поместить в таблице все значения аргумента. Табличная запись, особенно если она велика, не обладает наглядностью и не позволяет обозреть общий вид графика функции.

• **Графический способ** заключается в том, что строится график функции. Непосредственно из этого графика находят значения функции y , соответствующие значениям аргумента x . Не всякая линия является графиком некоторой функции. Например, множество точек окружности не может быть графиком функции, поскольку одному значению абсциссы x соответствуют два значения ординаты y_1 и y_2 .

Постоянная функция $y = C$ ($C \in \mathbf{R}$), степенная $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$), показательная $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), логарифмическая $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ называются *основными элементарными функциями*.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий и образования сложных функций из основных элементарных функций, составляют класс *элементарных функций*. Например, $y = \lg^3 \operatorname{arctg} 2x + \sin^2 \sqrt{1-x^2}$. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ не является элементарной.

Функция $f(x)$ называется **четной**, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси OY .

Функция $f(x)$ называется **нечетной**, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начало координат $(0;0)$.

Пусть заданы функция $u = g(x)$ с областью определения X , областью значений U и функция $y = f(u)$ с областью определения, содержащей множество U и областью значений Y . Тогда функция, обозначаемая через $y = f(g(x))$, которая каждому значению x из множества X ставит в соответствие единственное значение y из множества Y такое, что $y = f(u)$ и $u = g(x)$, называется *сложной функцией*.

Например, если $y = u^3$, $u = \sin x$, то $y = (\sin x)^3 = \sin^3 x$ – сложная функция, определенная на всей числовой прямой.

Понятие предела функции. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал (a, b) , содержащий точку x_0 . В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε -окрестностью точки x_0 (обозначается $U_\varepsilon(x_0)$).

Если $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что одно и то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε -окрестность точки x_0 (рис. 42)

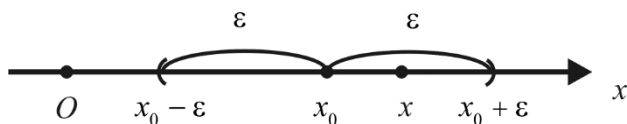


Рис. 42

Проколотой окрестностью точки x_0 называется ее окрестность, из которой исключена сама точка x_0 .

Проколотой ε -окрестностью точки x_0 (обозначается $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$) называется ε -окрестность точки x_0 , из которой исключена сама точка x_0 , т. е. объединение интервалов $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, то $0 < |x - x_0| < \varepsilon$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 . Сформулируем определение предела функции в точке.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε), что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Выясним *геометрический смысл определения предела функции в точке*. Число A является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любой ε -окрестности точки A на оси ординат найдется такая проколотая δ -окрестность точки x_0 на оси абсцисс, что для всех x из этой окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε -окрестности точки A . Иными словами, все точки $(x, f(x))$, где $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, лежат внутри полосы $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ шириной 2ε (рис. 43)

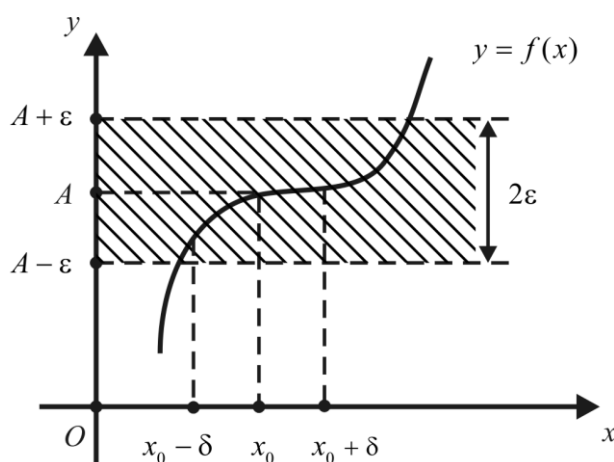


Рис. 43

Замечание: Из определения предела функции в точке x_0 , а именно из условия, что в этой точке функция может быть не определена, непосредственно следует утверждение: *если функции f и g таковы, что $f(x) = g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a и пределы этих функций в точке x_0 существуют, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.*

Пример. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - 5| = |(3x + 2) - 5| = |3x - 3| < \varepsilon$, т. е. $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Положив $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, видим, что

для всех значений x , удовлетворяющих условию $0 < |x - 1| < \delta \left(= \frac{\varepsilon}{3} \right)$, выполняется неравенство $|(3x + 2) - 5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$.

Иногда приходится рассматривать предел функции $y = f(x)$ при условии, что точка x , приближаясь к точке x_0 , остается либо правее, либо левее ее. При этом способ приближения x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. В связи с этим вводят понятия односторонних пределов.

Число A называется **пределом слева (справа)** функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ (для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначения: для предела функции слева

$$A = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x);$$

для предела функции справа

$$A = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Пример. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Раскрывая модуль по определению, получаем:

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = -1, \quad f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Этот результат можно увидеть наглядно, построив график функции (рис. 44).

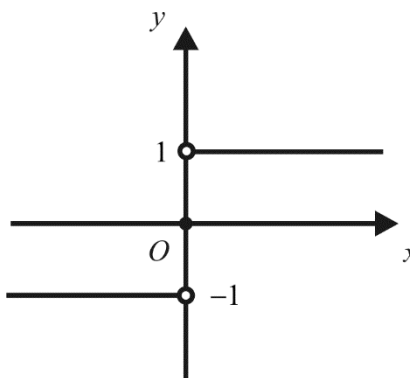


Рис. 44

Следующая теорема устанавливает связь между односторонними пределами и пределом функции в точке.

Теорема. Функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке у нее существуют равные пределы слева и справа, причем общее значение этих пределов является пределом функции в точке x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A.$$

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$$

при $x \rightarrow 1$ имеет предел, равный 2, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2.$$

Далее рассмотрим определение предела функции на бесконечности.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ и говорят, что функция $y = f(x)$ стремится к A при x , стремящемся к ∞ .

Пример, при достаточно больших по модулю x значение функции $y = \frac{1}{x}$ становится сколь угодно малым (меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε), поэтому $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Кратко определение предела функции на бесконечности можно записать в виде:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x: |x| > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл этого определения таков: если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что при $x \in (-\infty, M)$ или $x \in (M, +\infty)$ соответствующие значения функции $y = f(x)$ попадают в ε -окрестность точки A , т. е. точки $(x, f(x))$ графика функции лежат в полосе шириной 2ε , ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 45).

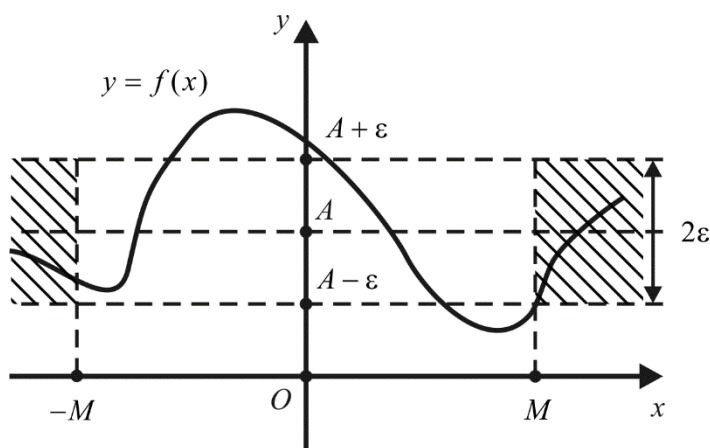


Рис. 45

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x: x > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $x < -M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x: x < -M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пример. Доказать по определению, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Решение. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$. Решая это неравенство, получаем $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, если $M = \frac{1}{\varepsilon}$, то при всех x , удовлетворяющих неравенству

$|x| > M$, справедливо неравенство $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$.

Свойства функций, имеющих предел в точке. Бесконечно малые функции. Бесконечно большие функции

Общие свойства функций, имеющих предел в точке:

1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 , то он единственный.
2. Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Предел и неравенства

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > B$ ($A < B$), то существует проколота окрестность точки x_0 , в которой выполняются неравенства: $f(x) > B$ ($f(x) < B$).

2. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ и в некоторой проколоте окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x) \geq g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$). Тогда $A \geq B$ ($A \leq B$).

3. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ и в некоторой проколоте окрестности точки x_0 справедливы неравенства $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$.

Предел и арифметические операции

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Тогда существуют пределы функций

$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и}$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = A \cdot B, \text{ в частности } \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) = cA;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

В последнем случае функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только при тех значениях x , для которых функция $g(x) \neq 0$.

Рассмотренные выше свойства будем принимать без доказательства.

Замечание: Свойства 1–3 справедливы также и в случае, когда x_0 является одним из символов $+\infty, -\infty, \infty$. Под окрестностью $U(x_0)$ в этих случаях понимается множество, у которого существует подмножество $U(x_0, \varepsilon) \subset U(x_0)$, где $\varepsilon > 0$ и

$$U(+\infty, \varepsilon) = \left\{ x: x \in \mathbf{R}, x > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{+\infty\};$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \left\{ x: x \in \mathbf{R}, x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{-\infty\};$$

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{ x: x \in \mathbf{R}, |x| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{\infty\}.$$

Данные множества называются ε -окрестностями элементов $+\infty, -\infty$ и ∞ соответственно.

Пример. Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 2x + \lim_{x \rightarrow -1} 7 =$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow -1} x + 7 = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 7 = 3 + 2 + 7 = 12.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1}$$

Решение. Пределы числителя и знаменателя существуют. Убедимся, что предел знаменателя отличен от 0: $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Тогда применимо свойство о пределе частного:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x}{2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{10}{5} = 2.$$

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$.

Примерами бесконечно малых функций являются функции $y = x^2$ при $x \rightarrow 0$, $y = x - 2$ при $x \rightarrow 2$, $y = \sin x$ при $x \rightarrow \pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$, $y = \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow \infty$.

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на множестве X , если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Теорема: Сумма конечного числа бесконечно малых функций, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями.

Следствие: Так как всякая бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$ функция ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , то произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Произведение бесконечно малой функции на число также является бесконечно малой функцией.

Между функциями, имеющими предел в точке, и бесконечно малыми функциями существует определенная связь, которую устанавливает следующая теорема, рассмотрим ее без доказательства.

Теорема. Для того чтобы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow x_0$, или что она имеет бесконечный предел в точке x_0 .

Например, функция $y = \frac{1}{x-1}$ является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow 1$ (рис. 46)

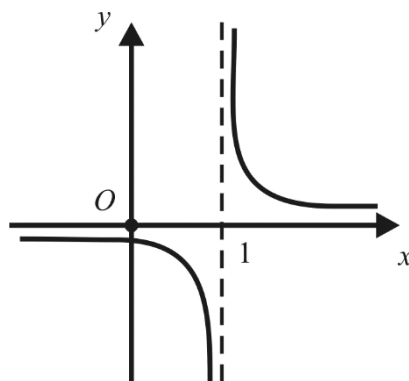


Рис. 46.

Если же выполняется неравенство $f(x) > M$ ($f(x) < -M$), то пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$).

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \rightarrow +\infty, -\infty, \infty$.

Так, функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $L = L(M) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > L$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Например, $y = x^3$ является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow \infty$.

Теорема. Если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ ($\alpha \neq 0$), то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, и

наоборот, если функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Пример. Доказать по определению, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$.

Решение. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$, т. е. $\left|\frac{1}{x}\right| > M$. Решая это неравенство, получаем $|x| < \frac{1}{M}$.

Таким образом, если $\delta = \frac{1}{M}$, то для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > M$. Это означает, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$.

Пример. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{3x-12}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 4} (3x-12) = 0$, то $(3x-12)$ есть бесконечно малая величина, а обратная ей величина есть бесконечно большая. Т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{3x-12} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3x-12} = 5 \cdot \infty = \infty.$$

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4x+3}$.

Решение. Так как $(4x+3)$ при $x \rightarrow \infty$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина $\frac{1}{4x+3}$ есть бесконечно малая, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4x+3} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x+3} = 0.$$

Замечательные пределы

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (39)$$

называемый *первым замечательным пределом*.

Формула (39) обобщается на случай, когда вместо независимой переменной x имеется бесконечно малая функция $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (40)$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Используем формулу (40).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим важную для теории и практики функцию $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Можно доказать, что при $x \rightarrow \infty$, она имеет предел. Этот предел, следуя Л. Эйлеру, обозначают через e , т. е.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (41)$$

Предел (41) называется **вторым замечательным пределом**.

Замечание. Число e является иррациональным: $e = 2,71828\dots$

Если в равенстве (41) положить $\frac{1}{x} = t$ ($t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$), оно запишется в виде

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Формула (41) обобщается на случай, когда вместо независимой переменной x имеется бесконечно большая функция $u(x)$ при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e. \quad (42)$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$, где $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$. Используем формулу (42).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k} \cdot k} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}} \right)^k = e^k.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{x+3}{x-2}$ на x , сведем данный предел к частному пределов из предыдущего примера:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} \right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{3}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1-\frac{2}{x} \right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если существует предел функции в точке x_0 , равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее равенство означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Подчеркнем, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции).

Замечание: Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, то равенство из определения непрерывной в точке функции можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0),$$

т. е. для непрерывной функции символы предела и функции перестановочны.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как

она определена в этой точке, имеет в ней предел и $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 2$, так как она определена в этой точке и $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 = 4 = f(2)$ (рис. 47, а).

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2, \\ x + 2, & x > 2 \end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$, но не имеет предела в этой точке (рис. 47, б), поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 2 \neq 4 = \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x).$$

Следовательно, она не является непрерывной в точке $x_0 = 2$.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2, \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$,

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, но не является непрерывной в этой точке, поскольку $f(2) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (рис. 47, в).

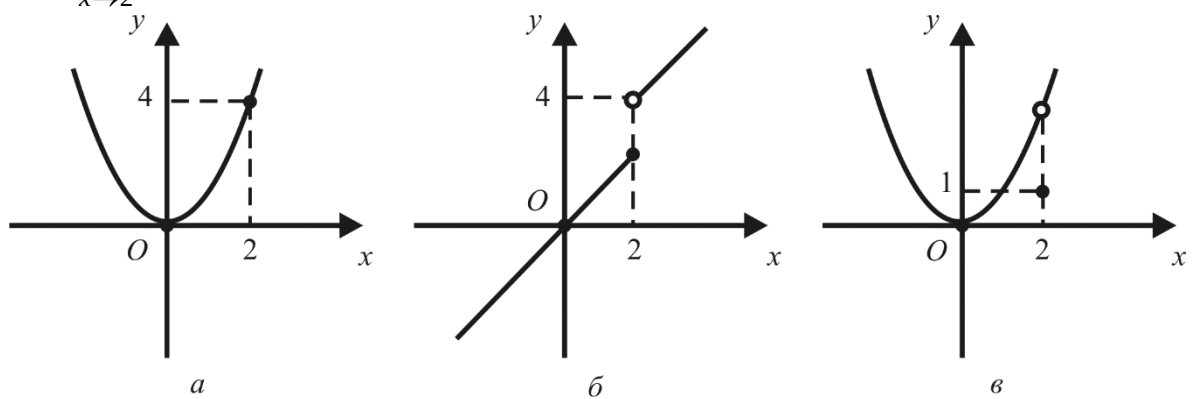


Рис. 47.

Таким образом, для непрерывности функции $y = f(x)$ существенно выполнение трех условий:

- 1) функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 ;
- 2) функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$;
- 3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Свойства функций, непрерывных в точке

Следует отметить, что свойства функций, непрерывных в точке, вытекают из определения непрерывности и соответствующих свойств предела функции в точке. Сформулируем свойства без доказательства.

1. Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2. Непрерывная функция, отличная от нуля в точке x_0 , сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки, т. е. если $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то существует $U(x_0)$ такая, что $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) для любого $x \in U(x_0)$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0 .

Непрерывность основных элементарных функций

1. Постоянная функция $f(x) = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$, поскольку $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} C = C = f(x_0)$.

2. Функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$, поскольку $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = f(x_0)$.

3. Многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ где } n \geq 0, n \in \mathbf{Z}, a_i \in \mathbf{R},$$

есть функция, непрерывная в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

Это следует из непрерывности функций $f(x) = C$, $f(x) = x$ и свойства 3 непрерывных в точке функций.

4. Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, непрерывна во всех таких точках $x \in \mathbf{R}$, в которых ее знаменатель не равен нулю.

5. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны во всех точках $x \in \mathbf{R}$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна в точках, где $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

7. Функция $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна в точках, где $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

8. Функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$.

9. Функция $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) непрерывна при всех $x > 0, x \in \mathbf{R}$.

Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной слева (справа) в точке x_0* , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad ((\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0))).$$

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 1+x, & x < 0 \end{cases}$$

непрерывна справа в точке $x=0$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = 0$, и не является непрерывной слева в точке $x=0$, поскольку $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$.

Очевидно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева и справа в этой точке, т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 .

Точка x_0 называется **точкой разрыва функции** $y = f(x)$, либо если функция не определена в самой точке x_0 , либо если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Иными словами, точка x_0 является точкой разрыва функции, если x_0 является значением аргумента, при котором происходит «разрыв графика функции».

Все точки разрыва функции подразделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке пределы функции слева и справа (т. е. односторонние пределы) существуют и конечны. Величина $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ называется скачком функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

Если пределы функции $y = f(x)$ слева и справа существуют, конечны, и при этом $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ (т. е. скачок функции в точке x_0 равен нулю), то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**. Чтобы устранить разрыв функции в точке x_0 , достаточно изменить значение функции только в одной этой точке. В этом случае говорят, что функция может быть доопределена по непрерывности в точке x_0 .

Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример. Функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$ имеет в точке $x=0$ разрыв первого рода, так как $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1$. Скачок функции в точке $x=0$ равен $|1 - (-1)| = 2$.

Пример. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если положить $f(0) = 1$ (вместо $f(0) = 2$), разрыв устранился и функция станет непрерывной.

Пример. Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, поскольку $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на интервале** (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

1.2.2. Производные и дифференциалы

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной

Одним из основных понятий дифференциального исчисления является **производная**, которая используется при исследовании процессов, в том числе социологических и экономических, описываемых функциями.

Рассматривая различные по характеру задачи, мы приходим к пределу одного вида, который очень часто используется в различных областях науки. Дадим общее определение производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X ($x \in X$). Выберем некоторую точку $x_0 \in X$ и найдём значение функции в этой точке: $f(x_0) = y_0$. Дадим x_0 **приращение аргумента** Δx , $\Delta x \neq 0$ такое, чтобы $(x_0 + \Delta x) \in X$, и вычислим **приращение функции** $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которое зависит от приращения аргумента Δx (рис. 48).

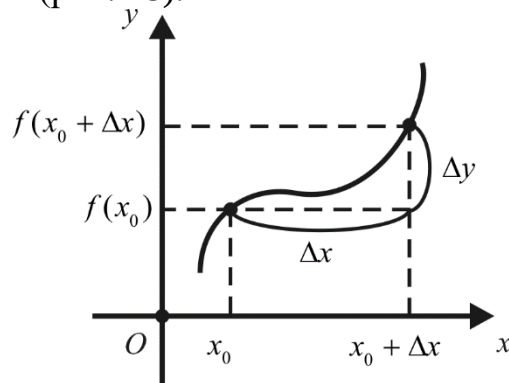


Рис. 48

Далее рассмотрим некоторые задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о мгновенной скорости прямолинейного движения

Предположим, что точка M движется по некоторой прямой, которую примем за ось Ox . Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса x движущейся точки есть функция времени t , т. е. $x = f(t)$. Это уравнение называется *уравнением движения*, оно выражает закон движения точки.

Найдем скорость движения точки в любой момент времени t .

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка занимает положение M , причем $OM = x$. Наряду с моментом времени t рассмотрим более поздний момент времени $t + \Delta t$. За промежуток времени Δt между этими моментами точка проходит путь $\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$

Средняя скорость за промежуток времени Δt равна

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Будем уменьшать длину промежутка времени Δt . Предел средней скорости $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ называется *мгновенной скоростью* в момент времени t :

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, если точка движется прямолинейно, то ее скорость в момент времени t равна пределу отношения приращения координаты точки к приращению времени, когда последнее стремится к нулю.

Задача о касательной

Дадим сначала определение касательной к кривой на плоскости.

Пусть L – некоторая непрерывная кривая, M_0 – точка этой кривой. Проведем через точку M_0 секущую M_0N (рис. 49). Когда точка N , двигаясь вдоль кривой, как угодно близко приближается к точке M_0 , эта секущая, поворачиваясь около точки M_0 , стремится к некоторому предельному положению M_0T . *Касательной к кривой L в точке M_0* называется предельное положение M_0T секущей M_0N , когда точка N стремится к точке M_0 вдоль данной кривой.

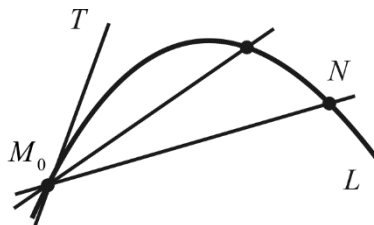


Рис. 49.

Если секущая M_0N при $N \rightarrow M_0$ не имеет предельного положения, то говорят, что касательной к данной кривой в точке M_0 не существует.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая непрерывная функция. Найдем уравнение касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Придадим абсциссе x_0 приращение Δx и от точки M_0 графика перейдем к точке N с абсциссой $x_0 + \Delta x$ и ординатой $y_0 + \Delta y$. Пусть M_0N – секущая, φ – угол наклона секущей к положительному направлению оси Ox (рис. 50).

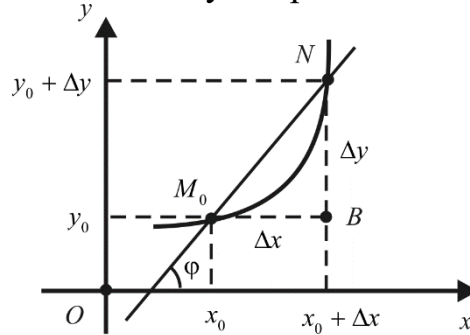


Рис. 50.

Из треугольника M_0NB находим $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть точка N стремится к точке M_0 вдоль графика функции $y = f(x)$. Тогда $\Delta x \rightarrow 0$ и секущая M_0N стремится к своему предельному положению – касательной M_0T (мы предполагаем, что касательная существует). Пусть α – угол, который образует касательная M_0T с осью Ox . Тогда при $\Delta x \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow \alpha$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{N \rightarrow M_0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Значит, если в точке $M_0(x_0, y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ можно провести касательную, то ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Зная угловой коэффициент касательной, легко написать ее уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В рассмотренных выше задачах по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной, и затем вычислялся предел их отношения. Оказывается, что многие задачи приводят к необходимости вычисления такого же предела, поэтому имеет смысл специально заняться его изучением.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 . Придадим точке x_0 ненулевое приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$. Тогда функция получит соответствующее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует.

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 – это *число*, которое обозначается через $f'(x_0)$ (читается: эф штрих от x_0) или $y'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если производная существует во всех точках x из окрестности $U(x_0)$, то она является *функцией аргумента x* .

Производная имеет несколько обозначений: y' , $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$.

Замечание: Если для некоторого значения x_0 выполняется одно из условий $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что в точке x_0 существует *бесконечная производная*, равная соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Из рассмотренных выше задач следует **физический и геометрический смысл производной**.

Физический смысл производной: мгновенная скорость в момент времени t_0 равна производной от закона движения, т. е. $V(t_0) = f'(t_0)$.

Если рассматривать произвольную функцию $y = f(x)$, то ее производная характеризует скорость изменения переменной y по сравнению с переменной x . Чем больше модуль производной, тем резче изменяется функция y при изменении аргумента x и, следовательно, тем круче поднимается или опускается график этой функции.

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ равен значению производной данной функции в точке x_0 .

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной графика функции $y = f(x)$ в точке касания $M(x_0, f(x_0))$, называется *нормалью*. Так как угловые коэффициенты k_1 и k_2 перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$, то отсюда, предполагая, что $f'(x_0) \neq 0$, получаем уравнение нормали:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Пример. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x) = x^2 + x$ в точке $x_0 = 2$. Составить уравнение касательной к графику данной функции в точке $x_0 = 2$.

Решение. По определению производной получаем

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 + (2 + \Delta x) - (2^2 + 2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 5 \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 5) = 5.$$

Пользуясь уравнением касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, имеем

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 5(x - 2) + 2^2 + 2 = 5x - 4.$$

Таким образом, уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + x$ в точке $x_0 = 2$ имеет вид $y = 5x - 4$.

Используя понятия односторонних пределов функции, введем понятия правой и левой производных функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

Правой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (производной справа) называется предел

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Левой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (производной слева) называется предел

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Это односторонние производные.

Замечание. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 , имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ существуют и равны между собой, причем $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Пример. Функция $y = |x|$ имеет в точке $x_0 = 0$ правую производную

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x + 0| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

и левую производную

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x + 0| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

но не имеет производной $f'(x_0)$, поскольку $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» будем понимать наличие конечной производной, если не оговорено противное.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется **дифференцируемой в этой точке**. Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в ней.

Доказательство: Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 . Тогда существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \text{ или } \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Таким образом, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x_0) \cdot \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\alpha \cdot \Delta x) = 0$, а это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Замечание. При доказательстве теоремы мы установили, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то ее приращение в этой точке выражается формулой

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$.

Замечание. Обратное утверждение предыдущей теоремы не всегда верно: непрерывная в данной точке функция может не иметь в ней производной.

Например, функция $y = |x - 1|$ непрерывна в точке $x_0 = 1$, но не является в ней дифференцируемой.

Основные правила дифференцирования

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x , то сумма, разность, произведение и частное этих функций (при $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие равенства:

- 1) $(u + v)' = u' + v'$;
- 2) $(u - v)' = u' - v'$;
- 3) $(uv)' = u'v + uv'$;
- 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Рассмотрим примеры нахождения производных элементарных функций.

1. $f(x) = C$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0, \text{ т. е. } C' = 0.$$

Таким образом постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(Cu)' = Cu'.$$

2. $f(x) = x^\alpha$, α — действительное число.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \text{т. е.}$$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Отметим частные случаи этой формулы:

$$(x)' = 1, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

3. $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a, \quad \text{т. е.}$$

$(a^x)' = a^x \ln a$. В частности, $(e^x)' = e^x$.

4. $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}, \quad \text{т. е.}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad \text{В частности, } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5. Тригонометрические функции:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x,$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. Отсюда

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найти производные функций:

1) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$;

2) $y = x \sin x$;

$$3) y = \frac{x+1}{x^2+2}.$$

Решение. Используя основные правила дифференцирования и формулы для производных элементарных функций, имеем:

$$1) (x^7 - 4x^5 + 2x - 1)' = 7x^6 - 4 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 1 - 0 = 7x^6 - 20x^4 + 2;$$

$$2) (x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x;$$

$$3) \left(\frac{x+1}{x^2+2} \right)' = \frac{(x+1)'(x^2+2) - (x+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+2) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} =$$

$$5) = \frac{x^2+2-2x^2-2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2)^2}.$$

Пример. Найти угол φ между положительным направлением оси абсцисс и касательной к параболе $y = x^2 - 5x - 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение. Так как $y' = 2x - 5$, то $y'(3) = 1$. Поэтому для искомого угла φ имеем $\operatorname{tg} \varphi = 1$, откуда находим $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Производная сложной функции.

Пусть функция $u = g(x)$ задана в некоторой окрестности $U = U(x_0)$ точки x_0 , а функция $y = f(u)$ – в некоторой окрестности $V = V(u_0)$ точки $u_0 = g(x_0)$, причем V содержит множество $g(U)$. Тогда определена **сложная функция** $y = f(g(x))$ с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Теорема. Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 , причем

$$y'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Таким образом, для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пример. Найти производную функции $y = \sin(5x + 2)$.

Решение. Данная функция является сложной. Ее можно представить так: $y = \sin u$, где $u = 5x + 2$. Поскольку $y'_u = \cos u = \cos(5x + 2)$, $u'_x = 5$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos(5x + 2) \cdot 5 = 5 \cos(5x + 2).$$

Пример. Найти производную функции $y = \sin^3(5x + 2)$.

Решение. Представим данную функцию в виде $y = u^3$, где $u = \sin v$, $v = 5x + 2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 5 = 15 \sin^2(5x + 2) \cos(5x + 2).$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда ее приращение, как было сказано ранее в пункте 3.3.1, в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$.

При достаточно малых значениях Δx и $f'(x_0) \neq 0$ основной вклад в эту сумму вносит первое слагаемое $f'(x_0) \cdot \Delta x$, так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$, т. е. величина $\alpha \cdot \Delta x$ сколь угодно мала по сравнению с Δx при $\Delta x \rightarrow 0$. Первое слагаемое пропорционально Δx и, следовательно, линейно зависит от Δx .

Говорят, что слагаемое $f'(x_0) \cdot \Delta x$ является главной линейной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0 и называют его **дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0** .

Обозначают дифференциал через dy или $df(x_0)$. Таким образом,

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Для функции $y = x$ получаем $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$dy = f'(x_0) dx,$$

откуда $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, или, более кратко, $y' = \frac{dy}{dx}$ (читается: игрек штрих равно дэ игрек по дэ икс). Это означает, что *производная функции равна отношению дифференциала данной функции к дифференциалу ее аргумента*.

Замечание: Дифференциал функции можно определить и так. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 представимо в виде $\Delta y = A \Delta x + \alpha \Delta x$, где A — постоянная, то $dy = A \Delta x$, а сама функция называется дифференцируемой в точке x_0 .

Дифференциал функции в точке имеет простой **геометрический смысл**. Проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x_0 + \Delta x$ (рис. 51).

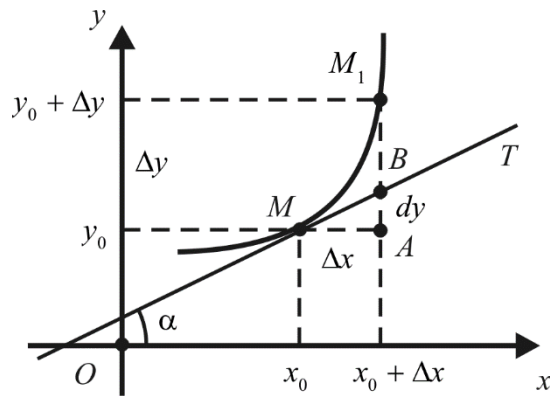


Рис. 51.

На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MA_1B имеем: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}$, т. е. $|AB| = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$. Но согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Поэтому имеет место равенство $|AB| = f'(x_0) \cdot \Delta x$, т. е. $|AB| = dy$.

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x_0 получает приращение Δx .

Процесс нахождения дифференциала функции, как и производной, называется **дифференцированием** и осуществляется по тем же правилам, что и для производных:

- 1) $d(u + v) = du + dv$;
- 2) $d(u - v) = du - dv$;
- 3) $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$;
- 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Пример. Найти дифференциал функции $y = (\cos x + x \sin x)$.

Решение.

$$dy = d(\cos x) + d(x \sin x) = -\sin x \cdot dx + \sin x \cdot dx + x \cdot d(\sin x) = x \cos x dx.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) .

Точка $x_0 \in (a, b)$ называется *точкой минимума (максимума) функции $y = f(x)$* , если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что для любого $x \in U(x_0)$ выполнено условие $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$). Если для любого $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$, выполнено условие $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой строгого минимума (строгого максимума) функции $y = f(x)$* . Точки минимума и максимума называются *точками экстремума*, а значения функции в них – *экстремумами функции*.

Отметим, что точки минимума и максимума функции имеют *локальный характер*, в силу чего значения функции в точках минимума могут оказаться больше ее значений в точках максимума. Так, на рис. 52 точки x_1 и x_3 являются точками максимума функции, а точки x_2 и x_4 – точками минимума функции. Значение функции в точке максимума x_1 меньше ее значения в точке минимума x_4 .

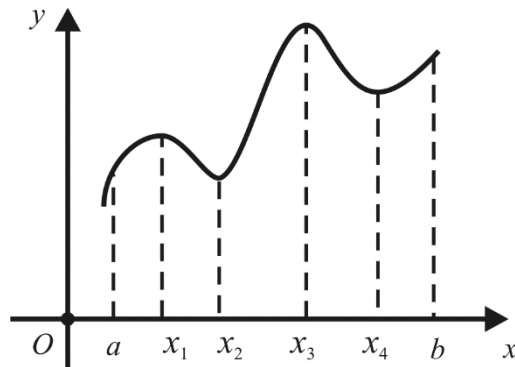


Рис. 52

Необходимое условие экстремума функции выражается следующей теоремой.

Теорема (Ферма). Пусть x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует производная $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет следующий *геометрический смысл*: если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику данной функции в точке $(x_0, f(x_0))$, параллельна оси Ox (рис. 53). В самом деле, в этом случае угловой коэффициент касательной равен нулю: $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = 0$.

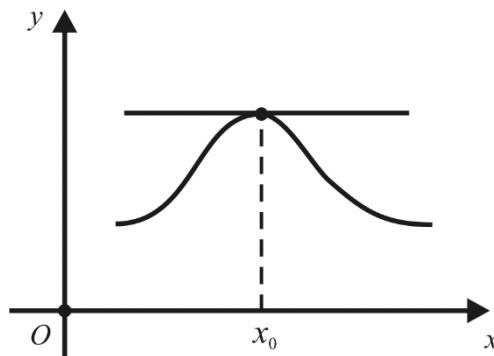


Рис. 53

Замечание. Условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым, но не достаточным условием экстремума функции $y = f(x)$ в точке x_0 . Например, функция $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет производную, равную нулю, но $x_0 = 0$ не является точкой экстремума данной функции (рис. 54, а).

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ производной не имеет, но $x_0 = 0$ является точкой минимума данной функции (рис. 54, б).

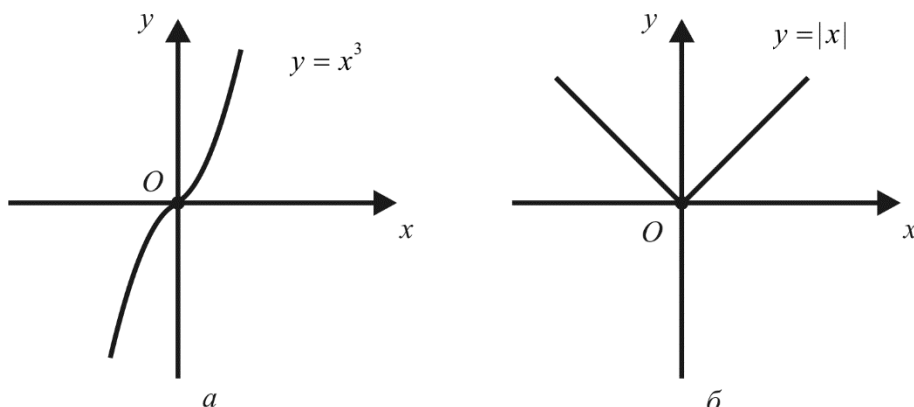


Рис. 54

Точки, в которых производная функции не существует или равна нулю, называют **критическими точками** или точками, подозрительными на экстремум. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют **стационарными точками**.

Теорема (Ролля). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения, т. е. $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля допускает простую геометрическую интерпретацию: при выполнении условий теоремы на графике функции $y = f(x)$ найдется точка с абсциссой $c \in (a, b)$, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (рис. 55).

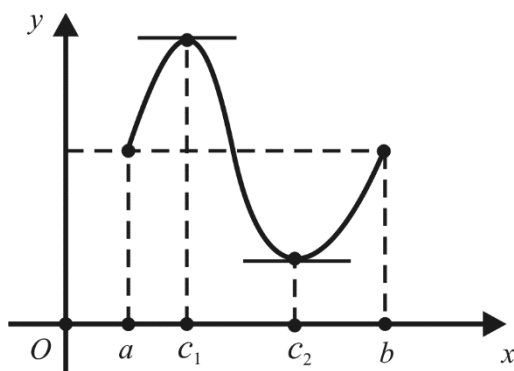


Рис. 55

Замечание. Все условия теоремы Ролля существенны. Если отказаться от одного из условий теоремы, то может случиться, что точки $c \in (a, b)$ с требуемым свойством не найдется. Так, на рис. 56, а функция разрывна в точке $x = b$; на рис. 56, б не существует производной функции в точке $x = x_0$; на рис. 56, в $f(a) \neq f(b)$.

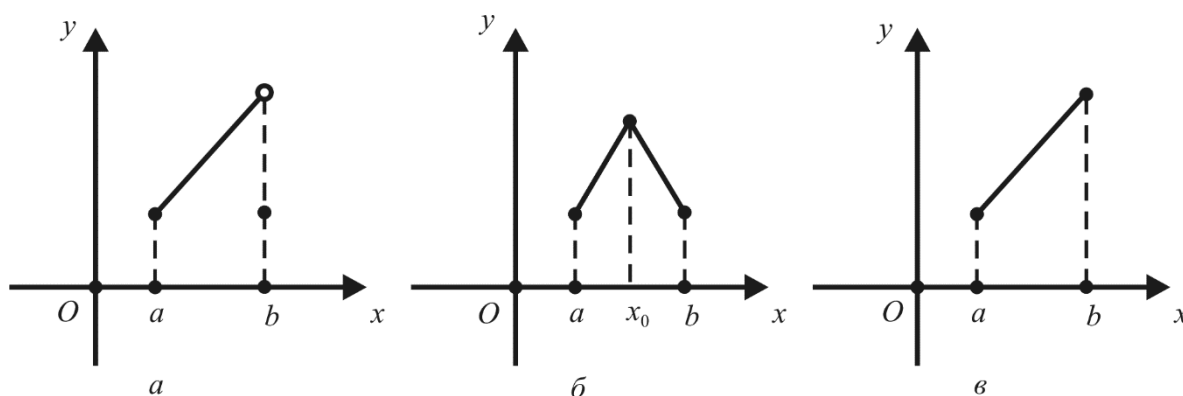


Рис. 56

Теорема. (Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \quad (43)$$

Формулу (43) называют *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений*: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a, b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, а величина $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой $x = c$. Следовательно, *геометрически* теорема Лагранжа означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c, f(c))$, в которой касательная к графику параллельна секущей AB (рис. 57).

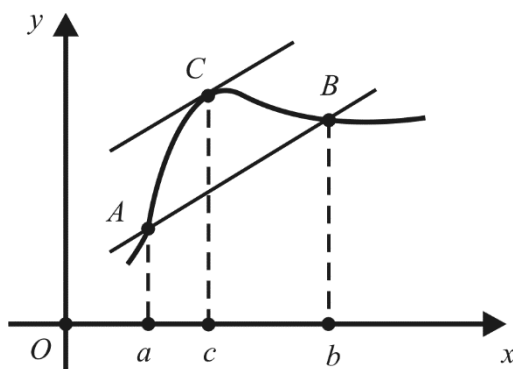


Рис. 57

Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Доказательство. Пусть $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a, b)$. Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 из (a, b) такие, что $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Поскольку $f'(c)=0$, то $f(x_2)-f(x_1)=0$, т. е. $f(x_1)=f(x_2)$. Так как x_1 и x_2 – произвольные точки из (a, b) , то $f(x)=\text{const}$.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Доказательство. Пусть $f'(x)=g'(x)$ для любого $x \in (a, b)$. Тогда $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)=0$. В силу следствия 1 $f-g=\text{const}$, т. е. $f(x)=g(x)+C$.

Правило Лопиталя – Бернулли

Во многих случаях отыскание пределов функции в точке или на бесконечности приводит к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , раскрытие которых часто можно осуществить, используя правило Лопиталя – Бернулли.

Отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Раскрыть эту неопределенность – значит вычислить $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует. Следующая теорема устанавливает правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема. (правило Лопиталя – Бернулли раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой

окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0$ для любого

$x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Если существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$,

причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Теорема остается верной и в том случае, когда $x \rightarrow \infty$, $\pm\infty$. Действительно, положив $x = \frac{1}{t}$, получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные соотношения получим при $x \rightarrow +\infty$ (соответственно $t \rightarrow +0$) и $x \rightarrow -\infty$ (соответственно $t \rightarrow -0$).

Теорема. (правило Лопиталя – Бернулли раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой

окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a ($a \in \mathbf{R}$ либо является одной из бесконечностей $\infty, +\infty, -\infty$), $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ и $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Если

существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Правило Лопиталя – Бернулли раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ при выполнении соответствующих условий можно применять несколько раз.

Пример. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Решение.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1} = \frac{1}{0+1} = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Кроме неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ правило Лопиталя – Бернулли дает возможность раскрывать неопределенности и других видов, таких как $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Действительно, неопределенность вида $0 \cdot \infty$ сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ следующим образом: $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ или $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$. Для

неопределенности вида $\infty - \infty$ можно выполнить преобразование

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Неопределенности вида 0^0 , ∞^0 и 1^∞ можно свести к

неопределенности $0 \cdot \infty$, предварительно прологарифмировав соответствующее выражение или воспользовавшись равенством $f^g = e^{g \ln f}$ ($f > 0$).

Пример. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right); \quad 3) \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

Решение.

$$1) \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +0} x^x = [0^0] = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^0 = 1.$$

Исследование функции с помощью производных

Возрастание и убывание функции. Достаточные условия экстремума функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на интервале (a, b) , если для любых значений x_1 и x_2 , принадлежащих данному интервалу, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Исследование на монотонность легко провести с помощью производной.

Теорема. (достаточное условие возрастания (убывания) функции). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a, b) .

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ и $x_1, x_2 \in (a, b)$, причем $x_1 < x_2$. Применяя к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, получим

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$. По условию $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция $y = f(x)$ возрастает на интервале (a, b) .

Аналогичным образом проводится доказательство в случае, когда $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Теорема имеет простой *геометрический смысл*. Если на некотором интервале касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью Ox острый угол α ($\operatorname{tg} \alpha > 0$), то функция возрастает на этом интервале (рис. 58, а). Если касательная к графику образует с осью Ox тупой угол α ($\operatorname{tg} \alpha < 0$), то функция убывает (рис. 58, б).

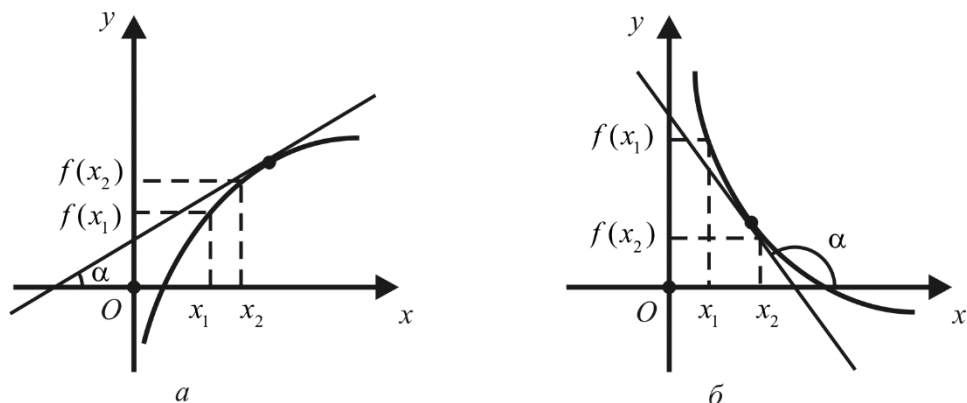


Рис. 58

Пример. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Значит, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 1)$. Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ и убывает на интервале $(-1, 1)$.

Замечание. Теорема остается справедливой, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a, b)$, за исключением конечного числа точек интервала (a, b) , в которых $f'(x) = 0$. Так, например, для функции $f(x) = x + \sin x$ на интервале

$(-100, 100)$ имеем $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в конечном числе точек этого интервала; поэтому функция $f(x) = x + \sin x$ возрастает на интервале $(-100, 100)$.

Согласно теореме Ферма из дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0 экстремума следует, что $f'(x_0) = 0$. Однако равенство $f'(x_0) = 0$ не является, вообще говоря, достаточным условием экстремума в точке x_0 .

Теорема (первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой ε -окрестности точки x_0 . Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ равна нулю и при переходе через эту точку меняет знак, то x_0 является точкой экстремума, причем x_0 — точка максимума, если знак производной меняется с плюса на минус (т. е. $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$), и x_0 — точка минимума, если знак производной меняется с минуса на плюс (т. е. $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$).

Доказательство. Пусть в точке x_0 производная функции $y = f(x)$ равна нулю и выполняются условия: $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$. Тогда функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и убывает на интервале $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Следовательно, значение $f(x)$ в точке x_0 является наибольшим на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, а это и означает, что x_0 — точка максимума функции.

Аналогично, если $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, то функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Следовательно, значение $f(x)$ в точке x_0 является наименьшим на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, т. е. x_0 — точка минимума функции. Теорема доказана.

Замечание. Теорема остается верной и в случае, если x_0 — точка непрерывности функции и производная в ней не существует, но меняет знак при переходе через данную точку.

Теорема (второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 . Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная существует и отлична от нуля, то x_0 — точка максимума при $f''(x_0) < 0$; x_0 — точка минимума при $f''(x_0) > 0$.

Замечание. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то о наличии экстремума в точке x_0 ничего сказать нельзя. Так, функция $y = x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$, а функция $y = x^4$ имеет минимум в точке $x_0 = 0$.

Исследование случая, когда $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0$, проводится с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть в точке x_0 первые $n-1$ производных равны нулю, а n -я производная отлична от нуля и непрерывна в этой точке. Тогда:

- 1) если n – нечетное число, то экстремума в точке x_0 нет;
- 2) если n – четное число, то в точке x_0 есть максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$, минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Пример. Найти экстремумы функции

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 - 30x + 7.$$

Решение. Найдем критические точки функции, т. е. точки, подозрительные на экстремум. Поскольку $f'(x) = 6x^2 - 24x - 30 = 6(x-5)(x+1)$, то критическими точками являются $x_1 = 5$ и $x_2 = -1$. Исследуем знак второй производной $f''(x) = 12x - 24$ в этих точках:

$$f''(5) = 12 \cdot 5 - 24 = 36 > 0, \quad f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 24 = -36 < 0.$$

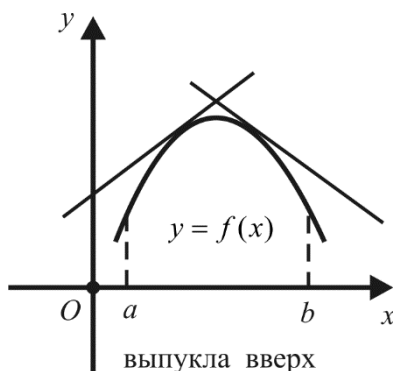
Следовательно, $x_1 = 5$ – точка минимума, $x_2 = -1$ – точка максимума, причем

$$\min f(x) = f(5) = -193, \quad \max f(x) = f(-1) = 23.$$

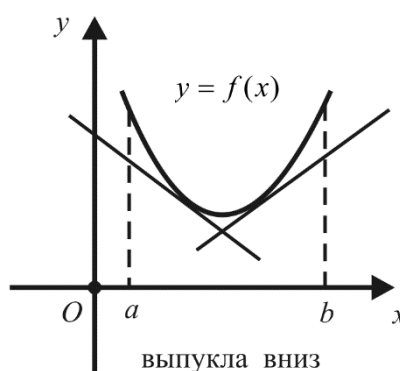
Выпуклость функции. Точки перегиба

Дифференцируемая функция $y = f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b) , если все точки графика функции лежат не выше (не ниже) любой ее касательной (рис. 59, а, б), т. е. для любых $x, x_0 \in (a, b)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$



а



б

Рис. 59

Теорема (достаточное условие выпуклости). Если для любого $x \in (a, b)$ $f''(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ выпукла вверх на интервале (a, b) . Если же для

любого $x \in (a, b)$ $f''(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) .

Точку $M(x_0, f(x_0))$ называют **точкой перегиба** графика функции $y = f(x)$, если в этой точке функция непрерывна и при переходе через нее меняет направление выпуклости (рис. 60).

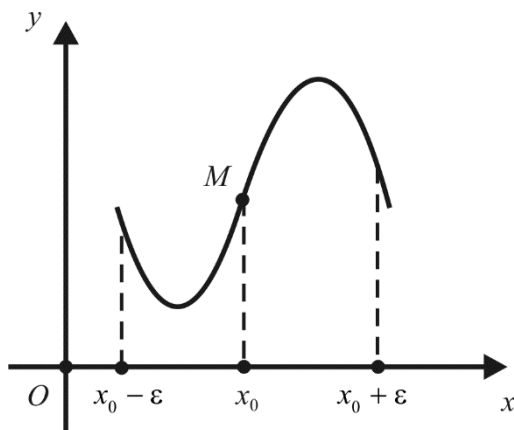


Рис. 60

Теорема (необходимое условие точки перегиба). Если в точке $M(x_0, f(x_0))$ перегиба графика функции $y = f(x)$ существует непрерывная вторая производная, то она равна нулю: $f''(x_0) = 0$.

Замечание. Условие $f''(x_0) = 0$ играет такую же роль в отношении точек перегиба, какую играло условие $f'(x_0) = 0$ при нахождении экстремумов. Оно необходимо, но не является достаточным. Например, функция $f(x) = x^4$ не имеет перегиба в точке $(0, 0)$, хотя $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$.

Из теоремы следует, что точками возможного перегиба графика функции $y = f(x)$ могут быть точки, в которых вторая производная f'' равна нулю или не существует.

Возможные случаи, когда в точке перегиба вторая производная не существует, показаны на рис. 61, а и б. На рис. 61, а касательная к графику функции вертикальна, т. е. первая производная в точке x_0 бесконечна, а следовательно, вторая производная не существует. На рис. 61, б первая производная в точке x_0 не существует, поэтому не существует в этой точке и вторая производная.

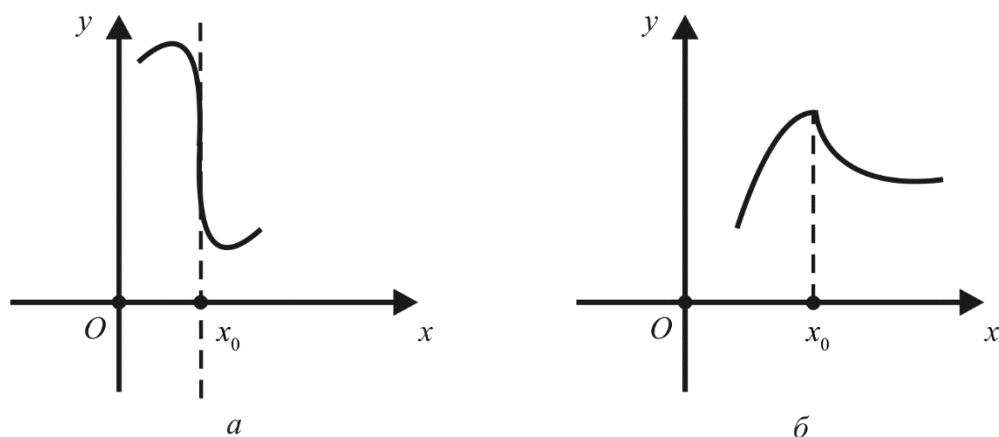


Рис. 61

Теорема (достаточное условие точки перегиба). Если вторая производная f'' при переходе через точку x_0 , в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Пример. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.

Решение. Находим $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. Поскольку вторая производная обращается в нуль при $x = 1$ и меняет знак при переходе через это значение, то $x = 1$ – абсцисса точки перегиба. Ордината этой точки $y = f(1) = -3$, т. е. $M(1, -3)$ – точка перегиба графика функции.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 1$ и $f''(x) > 0$ при $x > 1$, то функция является выпуклой вверх на интервале $(-\infty, 1)$ и выпуклой вниз на интервале $(1, +\infty)$.

Пример. Найти точки перегиба графика функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Решение. Находим $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. В точке $x = 0$ функция имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $O(0, 0)$ совпадает с осью Oy (рис. 62). Вторая производная в точке $x = 0$ не существует. Однако график функции имеет перегиб в точке $O(0, 0)$, так как вторая производная $f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ имеет слева и справа от точки $x = 0$ разные знаки.

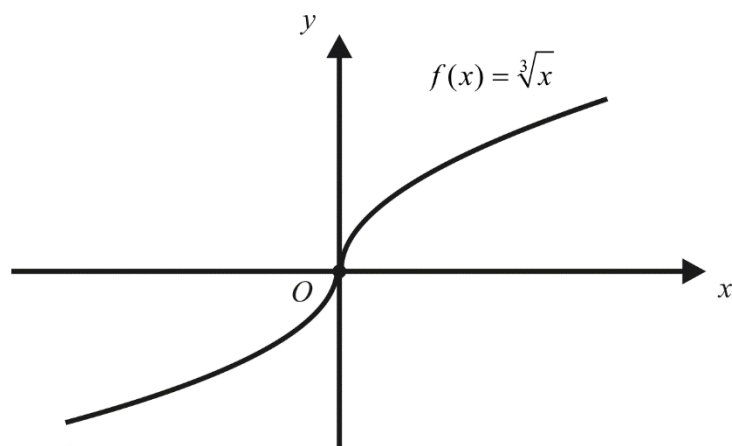


Рис. 62

Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции

Асимптота – это прямая, к которой неограниченно приближается график функции. Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты. Асимптоты могут быть вертикальными и наклонными.

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов этой функции в точке a является бесконечным, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Для отыскания вертикальных асимптот необходимо найти те значения x , вблизи которых функция $y = f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва функции второго рода.

Например, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{1}{x-2}$ (рис. 63), так как

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

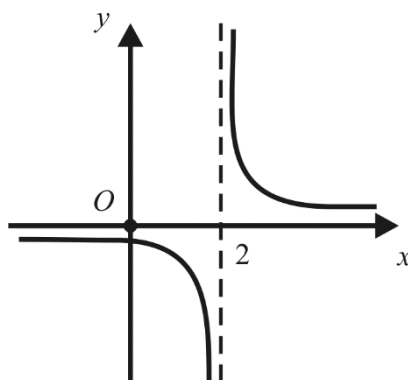


Рис. 63

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$).

Например, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика функции $y = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$ как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$, поскольку $\alpha(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$ (рис. 64).

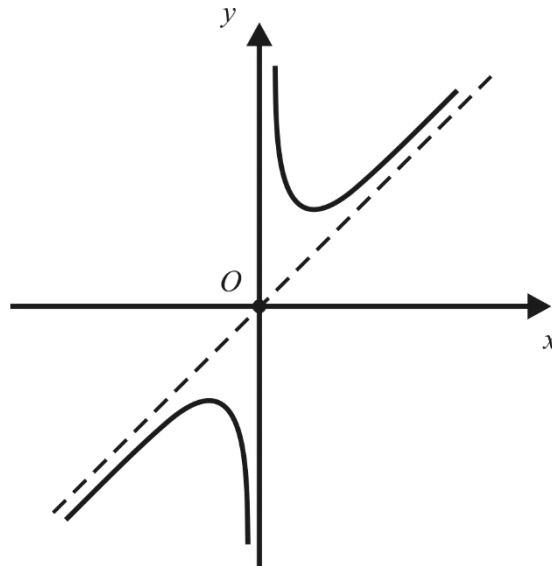


Рис. 64

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является **горизонтальная асимптота**, которая имеет вид $y = b$.

Теорема. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ являлась наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), необходимо и достаточно существование конечных пределов

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx) = b. \quad (44)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть выполнены условия (44) при $x \rightarrow +\infty$. Из условия $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$ следует условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, т. е. $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, или $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$. Следовательно,

по определению прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Аналогичным образом проводится доказательство в случае $x \rightarrow -\infty$.

Замечание. Наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (44) следует отдельно рассматривать случай, когда $x \rightarrow +\infty$, и случай, когда $x \rightarrow -\infty$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$.

Решение. Функция определена на множестве $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. На этом множестве она представляет собой частное двух непрерывных функций, где делитель не обращается в нуль. Следовательно, рассматриваемая функция непрерывна в каждой точке ее области определения. Поэтому единственной конечной точкой a , в которой хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ может обратиться в бесконечность, является точка $a = -2$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{2x^2 - 9}{x + 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{2x^2 - 9}{x + 2} = -\infty.$$

Здесь при $x \in (-2 - \delta, -2)$ $2x^2 - 9 < 0$ и $x + 2 < 0$, а при $x \in (-2, -2 + \delta)$ $2x^2 - 9 < 0$ и $x + 2 > 0$ ($\delta > 0$). Следовательно, прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Для нахождения наклонных асимптот воспользуемся формулами (4.6). Так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{9}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 2 = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 9}{x + 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9 - 2x^2 - 4x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 9}{x + 2} = -4 = b,$$

то прямая $y = 2x - 4$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \rightarrow +\infty$. Аналогично находим наклонную асимптоту графика функции при $x \rightarrow -\infty$, которая также есть прямая $y = 2x - 4$.

Общая схема исследования графика функции

Рассмотрим примерную схему, по которой целесообразно исследовать поведение функции и строить ее график.

1. Найти область определения функции, точки ее разрыва.
2. Исследовать изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения и точкам разрыва.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

4. Найти асимптоты графика функции.

5. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат.

6. Найти точки экстремума, экстремумы функции, промежутки возрастания и убывания функции.

7. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ и построить ее график.

1. Областью определения рассматриваемой функции является множество $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Функция непрерывна на $D(f)$, $x = 2$ – точка разрыва.

2. При стремлении аргумента к концам промежутков области определения и точке разрыва получаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \left[\frac{9}{-0} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \left[\frac{9}{+0} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty$$

Следовательно, точка $x = 2$ является точкой разрыва второго рода для данной функции.

3. Так как область определения рассматриваемой функции несимметрична относительно начала координат, то функция имеет общий вид, т. е. не является ни четной, ни нечетной.

4. Из п. 2 следует, что прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции. Определим наклонные асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Для этого по формулам (44) находим:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{(x+1)^2}{x(x-2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{4x+1}{x-2} = 4,$$

откуда получаем одну наклонную асимптоту $y = x + 4$.

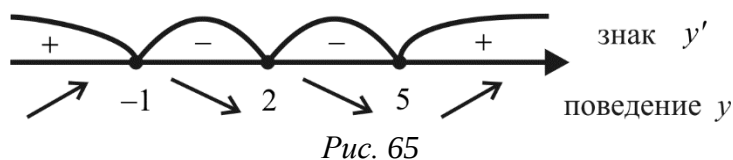
5. Поскольку при $x=0$ $y=-\frac{1}{2}$, а $y=0$ при $x=-1$, то имеем две точки пересечения с осями: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ и $(-1, 0)$.

6. Найдем первую производную функции:

$$y' = \frac{\left((x+1)^2\right)' \cdot (x-2) - (x+1)^2 \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Критическими точками (точками, в которых производная функции не существует или равна нулю) являются точки $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$. Отметим их на координатной оси и исследуем знак первой производной на полученных интервалах (рис. 65).



Таким образом, на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(5, +\infty)$ функция возрастает, а на интервалах $(-1, 2)$ и $(2, 5)$ убывает. Точка $x_1 = -1$ является точкой максимума функции, а точка $x_3 = 5$ – точкой минимума функции. Точка $x_2 = 2$ не является точкой экстремума, поскольку сама функция в ней не определена.

Находим экстремумы функции:

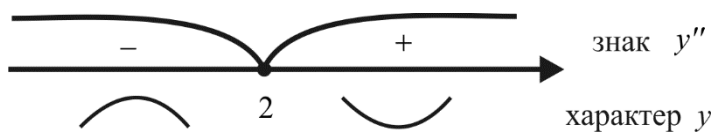
$$y_{\max} = \frac{(-1+1)^2}{-1-2} = 0, \quad y_{\min} = \frac{(5+1)^2}{5-2} = 12.$$

7. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 4x - 5)' \cdot (x-2)^2 - (x^2 - 4x - 5) \cdot ((x-2)^2)'}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{2(x-2)^3 - 2(x^2 - 4x - 5)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3}.$$

При переходе через точку $x=2$ она меняет знак (рис. 66).



Следовательно, функция выпукла вверх на интервале $(-\infty, 2)$ и выпукла вниз на интервале $(2, +\infty)$. Точек перегиба график рассматриваемой функции не имеет, поскольку вторая производная в нуль нигде не обращается и не определена в той же точке $x = 2$, в которой не определена сама функция.

График функции $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ изображен на рис. 67.

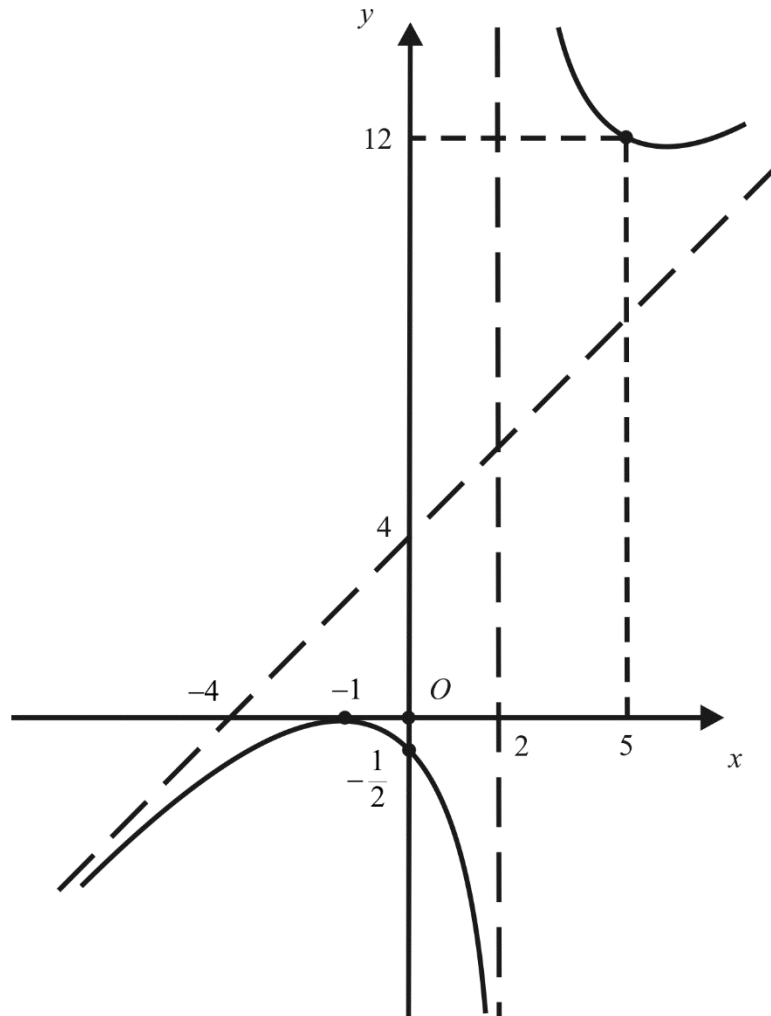


Рис. 67

1.2.3. Неопределенный интеграл

Во многих вопросах науки приходится восстанавливать функцию по известной ее производной, т. е. зная функцию $F'(x) = f(x)$, нужно найти функцию $F(x)$. Для решения таких задач служит операция *интегрирования*, обратная операции дифференцирования, а раздел математического анализа, изучающий способы нахождения функции по ее производной, называют *интегральным исчислением*.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$ на некотором интервале (a, b) , если для любого $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Пусть $f(x) = 3x^2$, тогда $F(x) = x^3$, т.к. $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$.

Иногда не указывают конкретно, на каком интервале рассматривается вопрос о первообразной данной функции $f(x)$. В таких случаях предполагается, что речь идет о максимальном промежутке, на котором функция $f(x)$ определена и непрерывна.

Теорема. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на интервале (a, b) . Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – константа, также является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b) . **Обратно**, каждая функция, являющаяся первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b) , может быть представлена в виде

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале (a, b) ; C – константа.

Из теоремы следует, что множество функций вида $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, C – произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных функции $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначают символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, получаемых из одной из них (любой) путем параллельных ее переносов вдоль оси ординат (рис. 68).

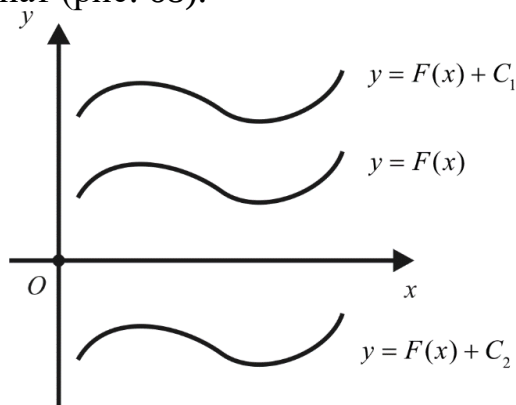


Рис. 68.

Возникает вопрос: для любой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то на этом промежутке у функции $f(x)$ существует первообразная.

Некоторые свойства неопределённого интеграла:

1. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$, производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

То есть правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Равенство $\int (3x^2 + 4)dx = x^3 + 4x + C$ верно, так как $(x^3 + 4x + C)' = 3x^2 + 4$.

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$$

Примеры.

$$1. \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C ;$$

$$2. \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C .$$

Основные методы интегрирования

1. **Непосредственным интегрированием** называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Пример. Найдите интеграл $\int (2x^4 + 3\sin x - 5e^x) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int (2x^4 + 3\sin x - 5e^x) dx &= \int 2x^4 dx + \int 3\sin x dx - \int 5e^x dx = \\ &= 2 \cdot \int x^4 dx + 3 \cdot \int \sin x dx - 5 \cdot \int e^x dx = 2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + 3 \cdot (-\cos x) + C_2 - 5 \cdot e^x + C_3 = \\ &= \frac{2}{5} x^5 - 3\cos x - 5e^x + C, \quad C = C_1 + C_2 + C_3. \end{aligned}$$

2. Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется **методом замены переменной** или **методом подстановки**. Он основан на следующей теореме.

Теорема: Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а $x = \varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ также имеет первообразную, причем

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C.$$

Отметим, что в случае «удачной» замены переменной $x = \varphi(t)$ заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или сводящимся к табличному. Умение правильно подобрать замену переменной приобретает только практикой.

Пример. Вычислите интеграл $\int (2x + 1)^{10} dx$.

Решение.

$$\int (2x+1)^{10} dx = \left| \begin{array}{l} 2x+1=t \\ d(2x+1)=dt \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t^{10} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + C.$$

3. Метод интегрирования по частям основан на интегрировании соотношения:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

Эта формула дает возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться существенно более простым.

Перечислим группы интегралов, берущихся по частям:

а. К первой группе интегралов относятся интегралы, в которых подынтегральная функция в качестве множителя содержит одну из следующих функций:

$$\ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x.$$

и т.п. при условии, что оставшаяся часть подынтегральной функции представляет собой производную известной функции. В этом случае, полагают $u(x)$ равной одной из перечисленных функций.

Пример. Вычислите интеграл $\int \ln x dx$.

Решение.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

б. К этой группе относятся интегралы вида:

$$\int P_n(x) \cos ax dx, \int P_n(x) \sin ax dx, \int P_n(x) e^{ax} dx,$$

где a – постоянное число; $P_n(x)$ – многочлен степени n . Здесь считают $u(x) = P_n(x)$, а за dv берём остальные сомножители.

Пример. Вычислите интеграл $\int (2x+3) \sin x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int (2x+3) \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = 2x+3, & du = 2dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -(2x+3) \cos x - \int (-\cos x) 2dx = -(2x+3) \cos x + 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

с. К третьей группе относятся интегралы вида:

$$\int e^{ax} \cos bxdx, \int e^{ax} \sin bxdx, \int \sin(\ln x)dx, \int \cos(\ln x)dx.$$

Применив формулу интегрирования по частям к любому из этих интегралов дважды, получим для нахождения интеграла уравнение 1-ого порядка.

1.2.4. Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла приводят задачи на нахождение предела интегральной суммы. Рассмотрим некоторые из них.

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a, b]$ оси Ox задана непрерывная функция $y = f(x)$, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ называют *криволинейной трапецией*.

Пусть $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$. Найдем площадь S криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ и восстановим в точках деления этого отрезка перпендикуляры до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ (рис. 69). Тем самым мы разложим рассматриваемую криволинейную трапецию на n частей.

На каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k и заменим k -ю криволинейную трапецию разбиения прямоугольником с основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотой $f(\xi_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Таким образом, мы заменим исходную криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из n прямоугольников. Площадь k -го прямоугольника равна произведению основания на высоту, т. е. $f(\xi_k) \Delta x_k$.

Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь всей ступенчатой фигуры:

$$S_n = f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Эта величина может быть принята за приближенное значение площади рассматриваемой криволинейной трапеции: $S \approx S_n$.

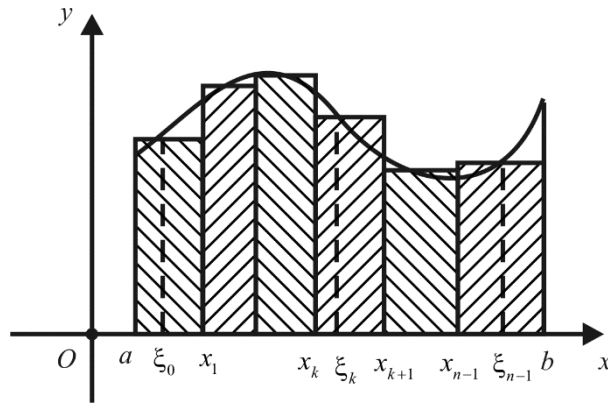


Рис. 69.

Приближение к искомой площади S криволинейной трапеции будет тем точнее, чем более мелкое разбиение отрезка $[a, b]$ на части мы будем брать. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n , когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_k \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Задача о вычислении длины пути по заданной скорости

Пусть точка M движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, где $f(t)$ – заданная функция времени t . Вычислим длину пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T . Промежуток $[t_0, T]$ разобьем на n промежутков

$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, T]$ длиной $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

В течение малого промежутка времени Δt_k скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной $f(t'_k)$, где t'_k – некоторое значение из промежутка $[t_k, t_{k+1}]$. Длина пути, пройденного за этот промежуток времени, приближенно равна $f(t'_k) \Delta t_k$. Складывая все длины $f(t'_k) \Delta t_k$, получаем приближенное значение длины пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T :

$$S_n = f(t'_0) \Delta t_0 + f(t'_1) \Delta t_1 + \dots + f(t'_{n-1}) \Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(t'_k) \Delta t_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max \Delta t_k \rightarrow 0$, находим точное значение длины пути

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t'_k) \Delta t_k.$$

Сравнивая результаты этих двух задач, нетрудно заметить общий метод их решения: разбиение отрезка, на котором задана функция, на части; составление суммы S_n , которая принимается в качестве приближенного значения искомой величины; предельный переход. Этот метод применяется и для решения многих

других задач (например, вычисления объемов, вычисления работы переменной силы). Поэтому пределы такого рода стали предметом особого исследования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина частичного отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

которая называется *интегральной суммой Римана* (немецкий математик, 1826–1866) функции $y = f(x)$, соответствующей разбиению отрезка $[a, b]$ с фиксированными точками ξ_k .

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Данная величина называется *диаметром разбиения*.

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\lambda \rightarrow 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k , то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

а сама функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, определенный интеграл есть число, к которому стремится интегральная сумма, когда $\lambda \rightarrow 0$.

Символ $\int_a^b f(x)dx$ читается так: определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс. Число a называется *нижним пределом интегрирования*, число b – *верхним пределом интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*.

Обозначение определенного интеграла похоже на обозначение неопределенного. И это не случайно. Оказывается, что вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла.

Отличия: определенный интеграл от $f(x)$ на $[a, b]$ есть число, а неопределенный интеграл – множество первообразных $F(x) + C$.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, можно сказать, что

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции. В этом и состоит **геометрический смысл определенного интеграла**.

Если тело движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, то путь s , пройденный телом за время движения от $t = t_0$ до $t = T$, можно определить по формуле

$$s = \int_{t_0}^T f(t) dt.$$

В этом состоит **физический смысл определенного интеграла**.

Свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^b dx = b - a.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то она интегрируема на двух других отрезках, причем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

При $a < c < b$ данное равенство имеет простой *геометрический смысл*: площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a, c]$ и $[c, b]$.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ ($a < b$) и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ ($a < b$) и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ ($a < b$), то функция $|f(x)|$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ ($a < b$) и для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

10. **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b-a),$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Величину μ называют *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то теорема о среднем принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a), \quad \text{где } c \in [a, b].$$

Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a, b]$. Если $x \in [a, b]$, то данная функция интегрируема также на отрезке $[a, x]$, т. е.

существует $\int_a^x f(t) dt$. Предположим, что x меняется на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке определена функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

которая задается *определенным интегралом с переменным верхним пределом интегрирования*.

$$\text{Очевидно, что } \Phi(a) = 0, \quad \Phi(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $\Phi(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $\Phi(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in [a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$.

Таким образом установлено, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную (а следовательно, и бесконечное множество первообразных), одной из которых является интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$. А так как всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от $\Phi(x)$ только на постоянную, то тем самым установлена связь между неопределенным и определенным интегралами:

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C.$$

Теорема. (Формула Ньютона – Лейбница). Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

Формула $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, называется **формулой Ньютона –**

Лейбница; ее можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b,$$

где $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – **двойная подстановка от a до b** .

Вычисление определенных интегралов непосредственно по определению очень громоздко и затруднительно даже для простых функций. Гораздо более удобно вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница.

Пример. Найдите $\int_2^3 x^2 dx$.

Решение.

$$\int_2^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{27-8}{3} = \frac{19}{3}.$$

Для случаев нахождения определённых интегралов с помощью теоремы Ньютона-Лейбница могут быть использованы все перечисленные выше приемы для нахождения неопределённых интегралов. Следует учесть, что при вычислении определённого интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется; не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Пример. Найдите $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx = \left. \begin{array}{l} t = 2x, \\ dt = (2x)' dx = 2dx \Rightarrow \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt \\ \alpha = 2 \cdot 0 = 0; \\ \beta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi. \end{array} \right| = \int_0^{\pi} (\sin t) \frac{1}{2} dt = \left(-\frac{1}{2} \cos t \right) \Big|_0^{\pi} = \left(\frac{1}{2} \cos t \right) \Big|_{\pi}^0 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 0 - \frac{1}{2} \cos \pi = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = 1.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-1}^2 \frac{2x dx}{(2x^2 + 1)^2}$.

$$\text{Решение.} \int_{-1}^2 \frac{2x dx}{(2x^2 + 1)^2} = \left. \begin{array}{l} 2x^2 + 1 = t \\ d(2x^2 + 1) = dt \\ 4x dx = dt \\ 2x dx = \frac{1}{2} dt \\ \alpha = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 3 \\ \beta = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_3^9 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int_3^9 t^{-2} dt = -\frac{1}{2} t^{-1} \Big|_3^9 = \frac{1}{2t} \Big|_3^9 =$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{1}{9}.$$

Теорема. (формула интегрирования по частям для определенного интеграла) Если функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Пример. Вычислите интеграл $\int_1^e x \ln x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = x dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 \right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+e^2}{4}. \end{aligned}$$

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь криволинейной фигуры $ABCD$, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f_2(x)$, снизу – графиком непрерывной функции $y = f_1(x)$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 70), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Геометрически данное равенство очевидно: площадь указанной криволинейной фигуры представляет собой разность площадей двух криволинейных трапеций, ограниченных снизу осью Ox .

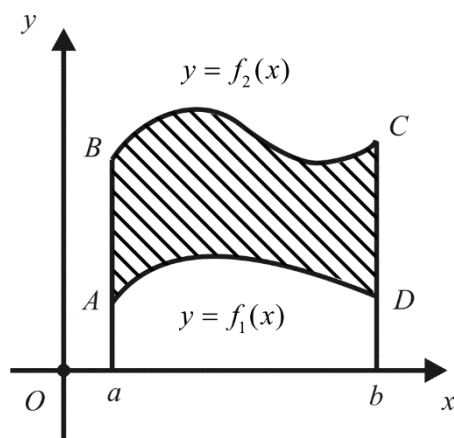


Рис. 70

Аналогичным образом, площадь криволинейной фигуры, ограниченной слева графиком непрерывной функции $x = \varphi_1(y)$, справа – графиком непрерывной функции $x = \varphi_2(y)$, снизу и сверху – прямыми $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy.$$

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то прямыми, параллельными оси Oy (или оси Ox), ее следует разбить на части так, чтобы можно было применить известные формулы для вычисления площадей.

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2$.

Решение. Изобразив графики обеих функций на плоскости (рис. 71), убеждаемся, что речь идет о криволинейной фигуре, ограниченной сверху графиком функции $y = x$, снизу – графиком функции $y = x^2$. Точки пересечения графиков $(0, 0)$ и $(1, 1)$ легко находятся из уравнения $x = x^2$. Таким образом, $f_2(x) = x$, $f_1(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$ и

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

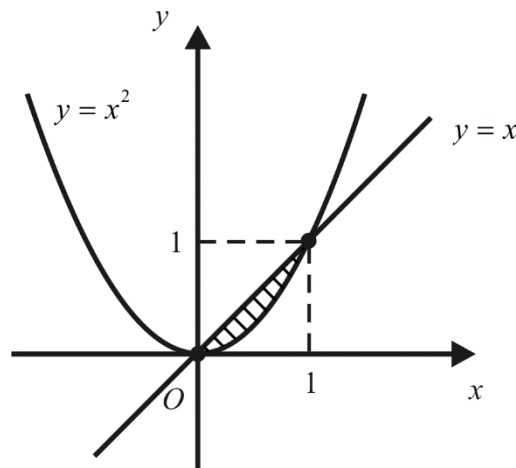


Рис. 71

Длина дуги плоской кривой

Ограничимся случаем кривой, которая является графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Будем считать, что функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и впишем в рассматриваемую кривую ломаную с вершинами в точках $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ (рис. 72). Обозначим через L_n длину полученной ломаной.

Если существует конечный и не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части предел $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$, то кривая K , образованная графиком функции $y = f(x)$, называется *спрямляемой*, а сам этот предел – *длиной дуги кривой*.

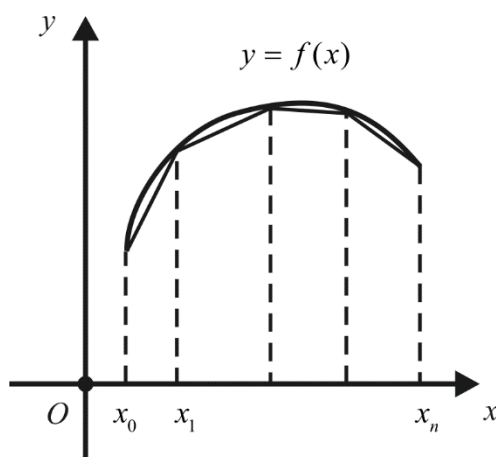


Рис. 72

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда кривая K , образованная графиком этой функции, является спрямляемой, а длина ее дуги L находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Пример. Найти длину окружности радиуса R .

Решение. Найдем вначале длину l четверти окружности, задаваемой уравнением $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $0 \leq x \leq R$. Поскольку

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

то

$$l = \int_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \cdot \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Тогда длина всей окружности $L = 4l = 4R \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi R$.

Вычисление объемов геометрических тел

Объем тела можно вычислить с помощью определенного интеграла, если известна площадь любого поперечного сечения этого тела.

Формула для вычисления объема тела по заданным поперечным сечениям:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (45)$$

Пусть тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. В этом случае каждое поперечное сечение представляет собой круг радиуса $f(x)$, откуда $S(x) = \pi f^2(x)$ и формула (45) принимает вид

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Пример 5.16. Найти объем шара радиуса R .

Решение. Шар радиуса R можно рассматривать как тело, образованное вращением верхней полуокружности $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox . Тогда

$$V = \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной справа графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$, то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Пример. Вычислить объем вулкана, профиль которого ограничен гиперболой $H \cdot x = 100$, прямыми $H = 1$, $H = 100$ и осью OH (здесь x – расстояние, H – высота).

Решение. Объем вулкана равен объему тела, полученного вращением вокруг оси OH криволинейной трапеции $CcdD$, где CD – дуга кривой $x = \frac{100}{H}$ (рис. 73):

$$V = \pi \int_1^{100} \left(\frac{100}{H} \right)^2 dH = 10\,000\pi \int_1^{100} H^{-2} dH = -10\,000\pi \cdot \frac{1}{H} \Big|_1^{100} =$$

$$= -10\,000\pi \left(\frac{1}{100} - 1 \right) = 9\,900\pi.$$

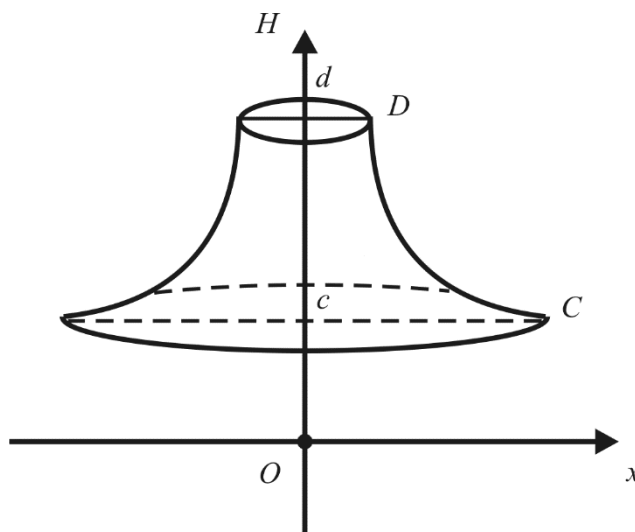


Рис. 73

1.3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.3.1. Элементы теории множеств. Комбинаторика

В математике под **множеством** понимается совокупность некоторых объектов, объединяемых по общим характеристическим свойствам и мыслимых в качестве единого.

Для **обозначения множеств** используются прописные буквы латинского алфавита $A, B, C, \dots, X, Y, Z$, или какого-либо другого по соглашению.

Элементами множества называются объекты, составляющие множество. Например, если множество представляет собой совокупность студентов-географов конкретной группы, то его элементами будут фамилии студентов. Для **обозначения элементов** используются строчные буквы того же алфавита, например, $a, b, c, \dots, x, y, z$.

Тот факт, что « x является элементом множества M » записывается в виде $x \in M$. Это высказывание можно также прочесть следующим образом: « x принадлежит множеству M » или « x содержится в множестве M ». Символ $\in$ называется **символом принадлежности**. Он происходит от первой буквы греческого слова εστι – быть. Если « x не является элементом множества M », то пишут $x \notin M$ и читают, как « x не принадлежит множеству M », « x не содержится в множестве M ».

Множество считается **заданным**, если о каждом объекте можно сказать принадлежит он этому множеству или нет. Например, совокупность студентов-географов на потоке является множеством, так как про каждого студента можно сказать числится он на данном потоке или нет.

Упражнение. Определить, какие из следующих совокупностей задают множества, а какие нет:

1. Совокупность лиц, работающих в БГУ, имеющих высшее образование,
2. Совокупность произведений искусства,
3. Совокупность красивых девушек в аудитории,
4. Совокупность студентов-геологов в университете,
5. Совокупность зрителей в кинотеатрах города Минска.

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих во множество.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным множеством**. *Конечное множество можно задать, перечисляя его элементы*. Элементы, принадлежащие конечному множеству, записывают между двумя фигурными скобками и разделяют их запятыми.

Например, множество букв алфавита белорусского языка – $\{а, б, в, \dots я\}$; множество студентов данной учебной группы определяется их списком в зачетной ведомости – $\{Баранкина О.В., Иванов А.П., \dots, Петрова И.Н.\}$; множество всех стран на земном шаре – их списком в последнем издании географического атласа;

Но этот способ задания множеств, т.е. способ перечисления элементов множества, применим лишь к конечным множествам, да и то не ко всем. Например, множество рыб в океане конечно, однако задать их списком, перечислить их трудно.

Замечание. В дальнейшем, для удобства, будем давать словесное описание множества в кавычках, например, множество A – «множество студентов-геологов».

Если число элементов бесконечное, то множество называется **бесконечным**. Примерами бесконечных множеств являются множество натуральных чисел, множество сценариев развития исторических событий в будущем, множество точек на отрезке. К бесконечным множествам способ перечисления элементов множества вовсе не применим. Множество всех целых чисел таким способом задать нельзя!

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется **пустым множеством** и обозначается символом $\emptyset$. *Пустое множество единственно и оно является конечным*. Например, множество динозавров в зоопарке города Минска является пустым, так как не содержит ни одного элемента, множество электронных баз данных в 19 веке, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$ также являются пустыми.

Замечание. Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно.

В общем случае множество задается с помощью указания характеристических свойств его элементов, при этом используются фигурные скобки, а внутри них приводятся характеристические свойства, описывающие элементы множества (появляется строгое математическое описание). Так запись

$$\{x: x \text{ обладает свойством } P\}$$

задает множество, содержащее только те объекты, которые имеют свойство P . Двоеточие в этой записи можно читать как «*такой, что*».

Таким образом, множества задают либо перечислением его элементов, либо описанием характеристического свойства множества, которое четко определяет совокупность его элементов.

Пример. Множество $A = \{2, 4, 6, \dots\} = \{x: x - \text{четное натуральное число}\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ или множество $B = \{x: x - \text{натуральное число, такое, что } x < 6\}$.

Диаграммы Эйлера-Венна

Определение подмножества. Множество A называется подмножеством множества B , обозначается $A \subset B$ (или $B \supset A$), если каждый элемент множества A является элементом множества B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

В этой символической записи использованы логические обозначения: символ $\forall$ – **квантор всеобщности** («для всех», «для любого»), знак $\Rightarrow$ — **импликация** (т. е. $X \Rightarrow Y$ означает: «если X , то Y », «в случае X выполняется Y »), наконец, логическая связка $\Leftrightarrow$ – **эквивалентность** («если и только если», ритуальное выражение «*тогда и только тогда, когда*»), называемая иногда «двойной импликацией».

Например, множество A – «множество студентов-геологов БГУ» является подмножеством множества B – «множество студентов ФГиГ БГУ», т. е. $A \subset B$, и если рассмотреть множество C – «множество студентов БГУ», тогда $A \subset B \subset C$.

Замечание. В число «подмножеств» непустого множества A удобно включить само A и пустое множество $\emptyset$, т. е.

$$A \subset A \text{ и } \emptyset \subset A.$$

Таким образом, всякое множество есть подмножество самого себя. Второе включение можно мотивировать исходя из следующего рассуждения. Если бы пустое множество $\emptyset$ не было подмножеством множества A , то оно содержало бы элемент принадлежащий $\emptyset$, но не принадлежащий A , а поскольку пустое множество не содержит элементов, то это невозможно.

Эти два подмножества, т. е. $\emptyset$ и A , называются **несобственными подмножествами** множества A . Остальные подмножества, если таковые есть, называются **собственными подмножествами** множества A . Например, множество гласных букв является собственным подмножеством множества букв русского алфавита.

Пример. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств.

а) Подмножествами двухэлементного множества $\{1, 2\}$ являются четыре множества: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$;

б) Подмножествами трехэлементного множества $\{0, 1, 3\}$ являются восемь множеств: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 3\}$.

У конечного множества, состоящего из n элементов, будет ровно 2^n подмножеств, включая пустое и его самого.

Обычно все множества, с которыми имеют дело в математическом рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного

множества. Поэтому будем предполагать, что множества, рассматриваемые в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, называемого **универсальным множеством**. Будем обозначать его через U .

Существует очень удобный прием наглядного изображения взаимоотношений между множествами, позволяющий иллюстрировать операции над ними, – это, так называемые, **диаграммы Эйлера–Венна**. Это графический способ изображения множеств в виде кругов, которым активно пользовались Леонард Эйлер, а затем и Джон Венн. Существует очень удобный приём наглядного изображения множеств и операций над ними. Множества в этих диаграммах чаще всего изображаются кругами, точнее их внутренностью и получаемыми из них фигурами, а прямоугольник изображает **универсальное множество U** . В диаграммах Эйлера–Венна не имеет значения относительный размер кругов, важно только их взаимное расположение.

На рис. 74 два множества A и B изображены кругами, причем видно, что множество A включено в множество B , т. е. $A \subset B$, и A – собственное подмножество множества B , которое не совпадает с ним.

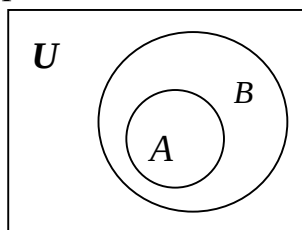


Рис. 74

Определение равенства множеств. Множества A и B **равны**, обозначается $A = B$, если все элементы множества A принадлежат также множеству B , а все элементы множества B принадлежат также множеству A :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Согласно этому определению, $A = B$, если каждое из двух множеств есть подмножество другого множества, поэтому можно говорить, что множества A и B «состоят из одних и тех же элементов».

Пусть множество $X = \{2, 3\}$, а множество $Y = \{y: y^2 - 5y + 6 = 0\}$, тогда $X = Y$.

Определение неравенства множеств. Множества A и B **не равны**, обозначается $A \neq B$, если в одном из этих множеств есть хотя бы один элемент, которого нет в другом множестве.

Пример. Если $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 2, 4\}$, то множества A и B не равны, то есть $A \neq B$.

Замечание. Для неравных множеств не выполняется хотя бы одно из этих включений $A \subset B$, $B \subset A$.

Пример. Если $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 2, 4\}$, то $A \neq B$, так как множество B не является подмножеством множества A , то есть $B \not\subset A$.

Операции над множествами и их основные свойства

Над множествами можно производить различные операции, результатом которых будут являться новые множества. Задать операцию над множествами – это означает указать способ как по двум заданным множествам A и B строить третье.

Определение пересечения множеств. Пересечением двух множеств A и B , обозначается $A \cap B$, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B :

$$A \cap B \stackrel{def}{=} \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Символ «равенства с *def*», т.е. запись $\stackrel{def}{=}$ в этой формуле означает «равенство по определению», т. е. то, что стоит слева от этого символа, определяется через то, что стоит справа, а *def* — это сокращение от латинского слова *definito* — определение. Пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B отражает степень близости этих множеств.

Примеры:

1. Пусть A – «множество студентов 1-го курса ФГиГ», а B – «множество девушек-географов ФГиГ», то $A \cap B$ – «множество девушек-географов 1-го курса ФГиГ»;

2. Пусть A – «множество нечетных чисел», а B – «множество двузначных чисел», то $A \cap B$ – «множество нечетных двузначных чисел»;

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто, пишем $A \cap B = \emptyset$, и в таком случае говорят, что множества A и B **не пересекаются**. На рис. 75 а), б) приведены диаграммы Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях когда, соответственно $A \cap B \neq \emptyset$ и $A \subset B$. Множеству $A \cap B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

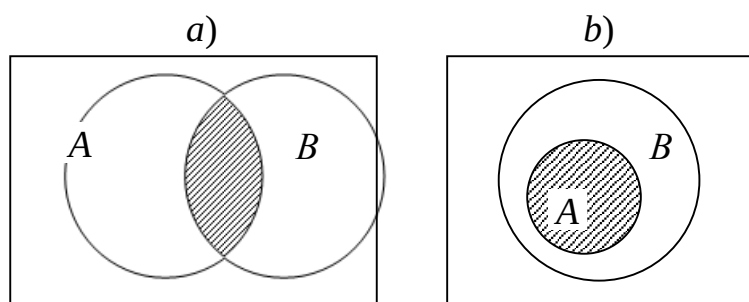


Рис. 75

Обратим внимание на то, что в описании пересечения множеств использована связка «и» вместе с символами принадлежности элемента « $\in$ ».

Операция *пересечения множеств* обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции *умножения* чисел. Однако некоторые свойства пересечения множеств отличаются от соответствующих свойств умножения.

Если A подмножество множества B , т. е. $A \subset B$, то $A \cap B = A$ (см. рис. 60 b)), поскольку общими для множеств A и B будут все элементы множества A , и только они.

Замечание. Отметим, свойства пересечения, справедливые для любых множеств A , B и C :

$$A \cap B \subset A \text{ и } A \cap B \subset B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cap C \subset B \cap C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \text{ и } A \cap U = A.$$

$$\text{Также верно равенство } A \cap A = A.$$

Замечание. Для любых двух множеств A и B выполняются **свойства коммутативности** операции пересечения:

$$A \cap B = B \cap A.$$

Коммутативный закон показывает, что можно как угодно менять порядок множеств в указанных операциях.

Замечание. Для любых трех множеств A , B и C выполняются **свойства ассоциативности** для операции пересечения:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Определение объединения множеств. Объединением двух множеств A и B , обозначается $A \cup B$, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B .

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Примеры:

1. Пусть A – «множество всех нечетных натуральных чисел», а B – «множество всех четных натуральных чисел», то $A \cup B$ – «множество всех натуральных чисел»;

2. Пусть A – «множество всех девушек, которые учатся на ФГиГ», а B – «множество всех юношей, которые учатся на ФГиГ», то $A \cup B$ – «множество всех студентов ФГиГ»;

3. Пусть $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 9\}$, $C = \{4, 6\}$, тогда $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $A \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Операция объединения множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции сложения чисел. Однако некоторые свойства объединения множеств отличаются от соответствующих свойств сложения чисел.

Если A подмножество множества B , т. е. $A \subset B$, то $A \cup B = B$, так как элементы из множества A принадлежат множеству B и второй раз включать их в объединение не надо.

На рис. 76 приведены диаграмма Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях, когда $A \cap B \neq \emptyset$, когда $A \subset B$ и $A \cap B = \emptyset$. Множеству $A \cup B$ на рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

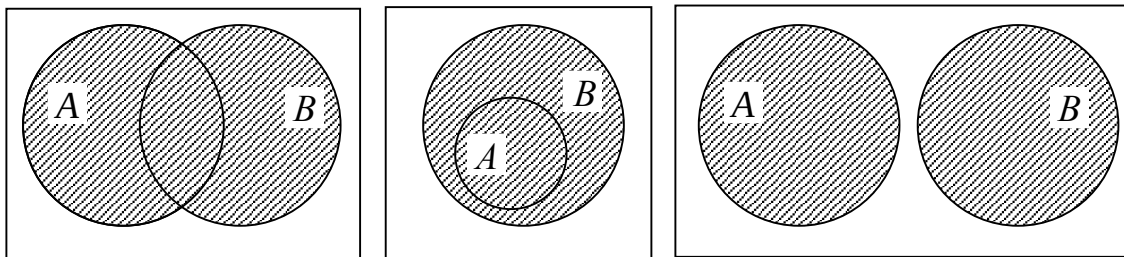


Рис. 76

Замечание. Отметим свойства объединения, справедливые для любых множеств A , B и C :

$$A \subset A \cup B \text{ и } B \subset A \cup B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cup C \subset B \cup C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \cup \emptyset = A \text{ и } A \cup U = U.$$

Также верно равенство $A \cup A = A$.

Соотношение $A \cup B = \emptyset$ равносильно двум соотношениям $A = \emptyset$ и $B = \emptyset$.

Замечание. Для любых двух множеств A и B выполняются **свойства коммутативности** операции объединения:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Замечание. Для любых трех множеств A , B и C выполняются **свойства ассоциативности** для операции объединения:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Замечание. При чередовании операций объединения и пересечения для любых трех множеств A , B , и C выполняются **свойства дистрибутивности** одной операции относительно другой:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Определение разности множеств. Разностью двух множеств A и B , обозначается $A \setminus B$ (или $A - B$), называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству A , но не принадлежащих множеству B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

В определении разности множеств не предполагается, что множество B является подмножеством множества A .

Примеры:

1. Пусть A и B – «множества студентов специальности геология, изучающих английский и немецкий языки, соответственно», то $A \setminus B$ – «множество студентов специальности геология, которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык»;

2. Пусть $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 9\}$, $C = \{4, 6\}$, тогда $A \setminus B = \{5, 7\}$, $A \setminus C = \emptyset$;
Пусть $A = \{x: |x| \leq 5\}$ и множество $B = \{x: x < 2\}$, то тогда разность $A \setminus B = \{x: 2 \leq x \leq 5\}$;

Замечание. Отметим свойство разности, справедливое для любых множеств A, B и C : $A \setminus B \subset A$. Кроме того, из включения $A \subset B$ следуют включения: $(A \setminus C) \subset (B \setminus C)$ и $(C \setminus B) \subset (C \setminus A)$. В частности, для любого множества A имеют место равенства: $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$ и $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

Определение дополнения множеств. Если U — универсальное множество, содержащее множество A , то разность $U \setminus A$ называется **дополнением** множества A и обозначается $\bar{A}$:

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in U \text{ и } x \notin A\} = U \setminus A.$$

Заметим, что дополнение $\bar{A}$ множества A — это множество элементов фиксированного универсального множества U , не входящих в множество A .

Например, если U — множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$, то дополнением множества всех рациональных чисел будет множество всех иррациональных чисел.

Замечание. Отметим следующие свойства дополнения, справедливые для любого множества A и содержащего его универсального множества U :

$$A \cup \bar{A} = U \text{ и } A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

$$\bar{\bar{A}} = A \text{ — закон двойного дополнения, } \overline{\emptyset} = U, \bar{U} = \emptyset.$$

Замечание. Выделим также свойство дополнения для включения множеств, т. е. если $A \subset B$, то $\bar{B} \subset \bar{A}$ или $U \setminus B \subset U \setminus A$.

Замечание. Разность множеств A и B можно выразить через пересечение множеств A и $\bar{B}$, а именно, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, т. е. разность множеств $A \setminus B$ есть пересечение множества A и дополнения множества B .

Элементы комбинаторики

Задачи, при решении которых приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций, относятся к разделу математики, который называется **комбинаторикой**. Этот раздел математики находит широкое применение в философии. Классической теории вероятностей предшествуют разделы комбинаторики.

Комбинаторный подсчет числа случаев, благоприятствующих тому или иному событию, служит хорошей психологической подготовкой к введению понятия вероятности. Лучший способ освоения комбинаторики — решение задач. О простых и типовых, но в тоже время важных, задачах пойдет речь ниже. Начнем с **основных принципов комбинаторики — принципа сложения и принципа умножения**, которые рассмотрим сначала на примерах.

Пример. Пусть в книжном магазине имеются 8 различных видов книг по «Географии» и 5 различных книг по «Высшей математике». Сколькими способами можно выбрать в подарок книгу по «Географии» или книгу по

«Высшей математике»? Сколькими способами можно выбрать две книги, по «Высшей математике» и «Географии»?

Ответ на первый вопрос очевиден. Книгу по «Географии» можно выбрать 8 способами, по «Высшей математике» – 5 способами. Следовательно, книгу по «Географии» или по «Высшей математике» можно выбрать $8+5=13$ способами. Для ответа на второй вопрос заметим, что если мы выбираем две книги по «Высшей математике» и «Географии», то к каждой из 8 различных книг по «Географии» можно подобрать книгу по «Высшей математике» 5 способами, а именно, к первой книге по «Географии» подбираем 5 различных книг по «Высшей математике», ко второй книге по «Географии» — опять 5 различных книг по «Высшей математике» и т.д. Таким образом, набор, состоящий из книги по «Высшей математике» и «Географии» можно выбрать $5+5+5+5+5+5+5+5=8\cdot 5=40$ способами.

На этом простейшем примере мы продемонстрировали применение принципов сложения и умножения. Отметим, что понятия теории множеств, как *подмножество, объединение множеств, пересечение множеств*, рассмотренные в первой главе, оказываются весьма полезными при решении комбинаторных задач. Сформулируем теперь основные принципы комбинаторики в общем виде.

Комбинаторный принцип сложения. Если множество A содержит n разных элементов, а множество B – m разных элементов и $A \cap B = \emptyset$, то множество $A \cup B$ содержит $n+m$ элементов.

Замечание. Если некоторый объект « A » можно выбрать n способами, а другой объект « B », отличный от « A », – m способами, то, согласно комбинаторному принципу сложения, объект « A или B » можно выбрать $n+m$ способами.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий комбинаторный принцип умножения.

Пример. Из города Минска в Москву ведет n путей, а из города Москвы в город Орел ведет m путей. Скольким числом различных путей можно совершить путешествие из Минска в Орел через город Москву?

Выбрать один из n возможных путей из Минска в Москву, дальше можно продолжить путешествие m способами, поэтому общее число различных путей из города Минска в город Орел равно $n \cdot m$.

Комбинаторный принцип умножения. Если множество A содержит n различных элементов, т.е. $A = \{a_i : i=1,2,\dots,n\}$, а множество B – m разных элементов, т.е. $B = \{b_j : j=1,2,\dots,m\}$, то тогда множество C , составленное из всех возможных пар, т.е. $C = \{(a_i, b_j) : i=1,2, \dots, n; j=1,2, \dots, m\}$, содержит $n \cdot m$ элементов.

Замечание. Если некоторый объект « A » можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект « B » можно, независимо от выбора « A », выбрать m способами, то, согласно комбинаторному принципу умножения, объект « A и B » можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пример. Рассмотрим сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова ПРОЦЕНТ.

Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или Е), а согласную — пятью способами (П, Р, Ц, Н или Т). Следовательно, согласно *комбинаторному принципу умножения* и в силу сделанного замечания, гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 5 = 10$ способами.

Основные комбинаторные формулы для подсчета числа упорядоченных и неупорядоченных наборов

Решение комбинаторных задач часто приводит к понятиям *перестановки*, *размещения* и *сочетания*. Поэтому на начальном этапе знакомства с основами комбинаторики необходимо научиться определять вид соединения элементов конечного множества, а также подсчитать количество таких соединений.

Для построения соответствующих математических моделей комбинаторных задач будем использовать математический аппарат теории множеств. Если множество состоит из элементов a , b и c , то нам безразличен порядок, в котором указаны элементы, например:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\}.$$

Но есть задачи, в которых важен порядок следования элементов. При этом указывается, какой элемент считается первым, какой – вторым, какой – третьим и т.д.

Множество вместе с заданным в нем порядком расположения его элементов называют упорядоченным множеством.

Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества записывают, располагая по порядку их элементы в круглых скобках:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, b, a).$$

Например, из двух букв А и Б можно построить упорядоченное множество двумя различными способами:

$$(A, B), (B, A).$$

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами. Разумеется, когда мы говорим о *последовательности*, то имеем в виду упорядоченное множество элементов, так что перестановки элементов не допускаются. Например, АБ и БА – это разные последовательности. К каждой последовательности вида АБ и БА можно подставить букву В тремя различными способами: поставить его спереди, между буквами или сзади. Тогда из АБ получим: ВАБ, АВБ, АБВ, а из БА получим: ВБА, БВА и БАВ. Все получившиеся последовательности разные и их можно записать в виде следующих упорядоченных множеств:

$$(A, B, V), (A, V, B), (B, A, V), (B, V, A), (V, A, B), (V, B, A).$$

Определение перестановки. Установленный в конечном множестве порядок называют перестановкой его элементов.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Замечание. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, т.е. могут быть получены из того же самого множества, называются перестановками этого множества.

Для сокращения записи произведения всех натуральных чисел от 1 до n в математики используется n -факториал, обозначают $n!$ (читают «эн-факториал»), т.е.

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-1) \cdot n.$$

Число всевозможных перестановок в множестве из n элементов обозначают P_n (P – первая буква французского слова *permutation* – перестановка). Читается: «Число перестановок из эн элементов» или «Пэ из эн».

Утверждение. Число перестановок P_n можно вычислить по формуле:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пусть $n = 2$, тогда число перестановок из двух элементов равно 2 – на первое место поставили любой из двух, а на второе – оставшийся элемент. $P_2 = 2$. Если $n = 3$, тогда число перестановок из трех элементов вычисляется следующим образом: на первое место ставим любой один из трех элементов, вариантов в этом случае 3, на второе – любой один из двух оставшихся, вариантов 2 и на третье место – последний элемент, вариант один. Таким образом, в силу комбинаторного принципа умножения число всех таких перестановок равно $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Пример. Сколько существует вариантов проведения собрания учебной группы, если количество выступающих на собрании – 4?

Решение. Так как на собрании должны выступать всего четыре оратора, то число способов расположения их в списке выступающих и, соответственно, число способов проведения собрания равно числу перестановок из 4 элементов – P_4 , т.е. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

При помощи формулы для P_n получаем:

$$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, \\ 7! = 5040, 8! = 740320, 9! = 362880, 10! = 3628800.$$

Принято считать, что $0! = 1$.

Замечание. Если рассматривать перестановки n предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно $P_{n-1} = (n-1)!$

Перестановки букв некоторого слова называют **анаграммами**. Например, среди анаграмм слова КРОТ, которых всего $P_4 = 4! = 24$, только одна, не считая самого слова КРОТ, имеет смысл в русском языке: КОРТ. Анаграмм слова ПРОЕКТ будет $P_6 = 6! = 720$.

При решении задач иногда необходимо из n имеющихся различных объектов отобрать произвольные m штук ($m \leq n$) и расположить их в некотором

порядке. Сколько существует упорядоченных расположений при заданных числах n и m ?

Например, пусть даны четыре буквы А, Б, В, Г. Требуется выделить из них две буквы и эти две буквы расположить в определенном порядке. Таких способов 12. Действительно, первую букву можно выбрать четырьмя способами, а вторую придется выбирать из оставшихся трех, следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения, всего получается $4 \cdot 3 = 12$ способов. Запишем их в виде упорядоченных множеств:

(А, Б), (А, В), (А, Г), (Б, А), (Б, В), (Б, Г),
(В, А), (В, Б), (В, Г), (Г, А), (Г, Б), (Г, В).

В общем случае имеем n различных элементов, выберем из них m элементов. При этом выборки могут отличаться или составом элементов, или их порядком. Посчитаем число таких упорядоченных выборок. На первое место можно поставить любой из n элементов, на второе место – любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и т.д., на m -ое место – любой из оставшихся $(n - (m-1))$ элементов. Следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения всего получается $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(m-1))$ упорядоченных выборок из n элементов по m элементам.

Определение размещения. Конечные упорядоченные подмножества заданного множества называются **размещениями**.

Число всевозможных размещений из n элементов по m обозначают A_n^m (A – первая буква французского слова *arrangement* – размещение). Читается: «число размещений из эн элементов по эм» или « A из эн по эм».

Утверждение. Число размещений A_n^m , где $m \leq n$, можно вычислить по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Из формулы числа размещений следует:

$$A_n^1 = n, \quad A_n^2 = n \cdot (n-1), \quad A_n^3 = n \cdot (n-1) \cdot (n-2), \\ A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6, \quad A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, \quad A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Принято считать, что $A_n^0 = 1$. Это верно, поскольку существует только одно пустое множество $\emptyset$ и можно считать, что оно может быть упорядочено одним–единственным образом. Кроме того, это логично: есть единственный способ не выбирать ни одного объекта из n имеющихся – «ничего не делать».

Замечание. Перестановки – это частный случай размещения при $m=n$, т.е. $A_n^n = P_n = n!$ Кроме того, для $m = n-1$ в формуле для числа размещений имеем $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$

Последнее равенство справедливо, так как если из n различных объектов выбраны $n-1$ и расположены в некотором порядке, то на оставшееся место может претендовать только один оставшийся элемент, который можно и не выбирать, т.е. $A_n^{n-1} = A_n^n$.

Пример. Сколько существует в n -буквенном алфавите m -буквенных слов, состоящих из различных букв?

Решение. По формуле для количества размещений искомое число равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить двухбуквенных слов $A_{33}^2 = \frac{33!}{(33-2)!} = 33 \cdot 32 = 1056$, не содержащих повторений букв.

Пример. Студенту-геологу необходимо срочно до отчисления пересдать 3 зачета на протяжении 4 дней. Посчитать, сколько вариантов теоретически существует для дней сдачи этих зачетов.

Решение. Искомое число способов равно числу 3-элементных упорядоченных подмножеств, т.е. дни сдачи зачетов, 4-элементного множества. По формуле числа размещений это число равно $A_4^3 = 24$.

В некоторых задачах по комбинаторике не имеет значения порядок расположения объектов в той или иной совокупности. Важно лишь то, какие именно элементы ее составляют. Вот интересующий нас сейчас вопрос: *сколькими способами можно выбрать из n различных предметов m штук ($m \leq n$)?*

Например, пусть из четырех корзин обозначенных буквами А, Б, В и Г нужно выбрать две. Сколькими способами это можно сделать? Свяжем этот пример с примером, рассмотренным выше, а именно выбранные корзины будем отмечать тем, что положим в них шары. Однако можно заметить, что каждый выбор пары корзин встречается в списке 12 соответствующих размещений дважды, например, АБ и БА. Сейчас для нас не существенно, какой шар, первым или вторым оказался в корзине, или, другими словами, в каком порядке осуществлялся выбор корзин. Поскольку в нашем случае, т.е. перемен мест, двух выбранных корзин, т.е. перестановок, всего две, то две корзины из четырех можно выбрать $12:2=6$ способами.

Определение сочетания. Конечные неупорядоченные подмножества заданного множества называют **сочетаниями**.

Отметим, что перестановки и размещения – это упорядоченные множества, а сочетание – это неупорядоченные множества. **Сочетания** – это такая выборка элементов, при которой их порядок совершенно не важен.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m (C – первая буква французского слова *combinaison* – сочетание). Читается: «число сочетаний из эн элементов по эм» или « C из эн по эм».

Утверждение. Число сочетаний C_n^m , где $m \leq n$, можно вычислить по формуле:

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Формула числа сочетаний интересна уже тем, что дробь, стоящая в ее правой части, равна целому числу, т.е. все числа, стоящие в знаменателе,

сократятся с числами, стоящими в числителе. В частности, из формулы числа сочетаний следует, что

$$C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3, \quad C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4, \quad C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = 5.$$

Если в этой формуле для C_n^m положить $m=0$, то получим, что $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$, поэтому принято считать, что $C_n^0 = 1$. Это равенство имеет содержательный смысл, состоящий в том, что есть только один способ не выбирать ни один элемент (или выбрать 0 элементов) из n -элементного множества. В частности, отметим, что $C_n^0 = 1$.

Замечание. Обратим внимание на своеобразную симметричность формулы для числа сочетаний: если заменить m на $n-m$, то получится то же самое выражение, только факториалы в знаменателе поменяются местами:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

Например, пусть в группе из n студентов-геологов надо выбрать m студентов для участия в студенческой факультетской конференции. Выбор m участников конференции равносителен выбору $n-m$ студентов группы, не участвующих в конференции. Поэтому число способов, которым можно выбрать m человек из n , равно числу способов, которым можно выбрать $n-m$ человек из n . Это означает, что $C_n^m = C_n^{n-m}$ или непосредственно $\frac{n!}{m!(n-m)!} =$

$$\frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!}.$$

В частности, $C_5^0 = C_5^5 = 1$, $C_4^1 = C_4^3 = 4$.

Пример. Посчитаем, сколькими способами можно выбрать трех человек на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Решение. Поскольку должности одинаковые, то порядок в каждой выборке из трех человек не имеет значения. По формуле для числа сочетаний искомое количество способов выбора на три одинаковые должности из десяти кандидатов $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot (7)!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

Большинство задач этого раздела содержит слова «сколько». Одна из причин, по которой мы затрудняемся ответить на вопросы, начинающиеся с этого слова, состоит в отсутствии универсальной схемы, с помощью которой на них можно было бы ответить. В этом разделе были рассмотрены некоторые общие формулы для подсчета вариантов, использованные при решении отдельных задач.

При решении комбинаторных задач следует ответить на следующие вопросы:

1. Из какого конкретного множества осуществляется выбор, т.е. надо найти n – число элементов этого множества.
2. Что требуется сделать: расставить все в ряд (перестановки), или выбрать часть упорядоченного подмножества?
3. Важен ли при выборе порядок? Если порядок важен, то применяем формулу для размещений, если порядок не важен – формулу для сочетаний.

Комбинаторика: Выбор с повторениями

Одна из важных особенностей комбинаторики заключается в том, что в ней большую роль играет точная формулировка задачи. Большинство ошибок связано с некорректными постановками задач из-за неопределенности формулировок. Когда речь идет о подсчете числа студентов в группе никакой неопределенности не возникает. Менее определенная ситуация возникает, когда посчитать нужно число вариантов или способов. Рассмотрим следующие задачи:

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово АНКЕТА?

Решение. Слово АНКЕТА состоит из шести букв, которые можно переставить $P_6=6!$ способами. Однако заметим, что в данном слове буква А встречается два раза, и, меняя местами две буквы А, мы не получим новых слов. Так как две буквы А можно переставить $P_2=2!$ способами, то все $6!$ перестановок букв, входящих в слово АНКЕТА, разбиваются на группы по $2!$ одинаковых перестановок в каждой группе. Количество таких групп равно $\frac{6!}{2!}$,

значит, искомое число «слов» слова АНКЕТА равно: $\frac{P_6}{P_2} = \frac{6!}{2!} = \frac{(2!) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$.

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово КАРАОКЕ.

Решение. Напомним, что комбинаторика позволяет считать *словом* любую комбинацию букв. Математики любят сводить новые задачи к уже решенным задачам. Для того чтобы воспользоваться способом подсчета числа перестановок, применим новый для нас **прием растожествления**. Он показывает, как можно переходить от одного понятия «различия» к другому. При точном понимании терминов, т.е. при соблюдении *Главного правила комбинаторики*, можно открыть дополнительные возможности решения комбинаторных задач. Слово «растождествление» вряд ли есть в словарях, но оно достаточно точно передает суть дела. Суть его в том, чтобы рассматривать одинаковые буквы слова как различные, например, с помощью их индексации.

После индексации букв слова КАРАОКЕ, в котором 2 буквы К, 2 буквы А и 1 буква О, 1 буква Е, 1 буква Р, получим $7=2+2+1+1+1$ различных букв $K_1, A_1, P_1, A_2, O_1, K_2, E_1$. Из них можно составить $P_7 = 7!$ различных 7-буквенных слов,

т.е. перестановок из 7 различных букв. Они образуют вспомогательный перечень.

Не трогая остальных букв и меняя местами лишь две буквы К всеми возможными способами, а их будет по числу перестановок из двух букв K_1, K_2 , всего $2!$, получим вроде бы новые перестановки, но без индексации букв они будут неразличимы. Поэтому общее число перестановок уменьшится в $2!$ раз. Аналогичные рассуждения верны и для двух букв А, и лишь буквы О, Е и Р по одной. В итоге количество анаграмм слова КАРАОКЕ, без учета повторов слов пересчитанных с помощью комбинаторного принципа умножения, окажется равным числу $7!/(2! \cdot 2!) = 1260$. Чтобы не нарушать единообразия поделим указанное выражение на $1!=1$, соответствующее числу перестановок одной буквы О, Е и Р в указанных анаграммах, поскольку полученное число анаграмм принято записывать в виде

$$7!/(2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!) = 1260.$$

Для того чтобы частный случай подсчета анаграмм не стал, как сказал бы Козьма Прутков «пустою забавою», рассмотрим эту задачу в более общей постановке.

Определение перестановок с повторениями. Перестановка элементов конечного набора, состоящего из n элементов таких, что элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент a_2 повторяется n_2 раз, ..., элемент a_k повторяется n_k раз, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, называется **перестановкой с повторениями**.

Число всевозможных перестановок с повторениями, а именно, выборов n объектов $n_1, n_2, \dots, n_k$ повторяющимися элементами, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, обозначают $\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. С помощью горизонтальной черты над буквой Р отличают случай с повторениями от обычных перестановок. Читается: «Число перестановок с повторениями из эн-один, эн-два и т.д. до эн-ка» или «Пэ с чертой из эн-один, эн-два и т.д. до эн-ка».

Утверждение. Число перестановок с повторениями $\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, можно вычислить по формуле:

$$\bar{P}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

С помощью формулы числа перестановок с повторениями число анаграмм слова КАРАОКЕ, подсчитанное выше, можно записать в виде

$$\bar{P}_{2,2,1,1,1} = 7!/(2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!) = 1260.$$

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово МАТЕМАТИКА?

Решение. В слове МАТЕМАТИКА есть повторяющиеся буквы: две буквы М, три буквы А, две буквы Т, по одной букве Е, И, К. Следовательно, по формуле для числа перестановок с повторениями получим:

$$\bar{P}_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4} = 151200.$$

Таким образом, из букв, входящих в слово МАТЕМАТИКА, можно составить 151200 «слов».

Далее дадим обобщение понятия размещения, а именно рассмотрим задачи, решения которых приводят к понятию *размещения с повторениями*.

Пример. Сколько двухбуквенных «слов» можно составить из 33 букв алфавита русского языка?

Решение. Двухбуквенное «слово» может быть составлено либо из двух различных букв, либо из двух одинаковых букв. На первое место мы можем поставить любую из 33 букв алфавита русского языка. Независимо от этого, на второе место опять можно поставить любую из 33 букв. Значит, по комбинаторному принципу умножения количество двухбуквенных слов будет равно $33 \cdot 33 = 33^2$.

Определение размещений с повторениями. Упорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n , причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется *размещением с повторениями*.

Число всевозможных размещений с повторениями, а именно, выборов m объектов из повторяющихся n элементов, обозначают $\overline{A_n^m}$. С помощью горизонтальной черты над буквой A отличают случай с повторениями от обычных размещений. Читается: «Число размещений с повторениями из n по m » или « A с чертой из n по m ». Первое название излишне длинное и «торжественное», но в ясности ему не откажешь.

Утверждение. Число размещений с повторениями $\overline{A_n^m}$ можно вычислить по формуле:

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Пример. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2, 3?

Решение. По условию задачи даны три цифры, из которых составляются пятизначные натуральные числа, значит, $n=3$. Заметим также, что цифры в записи числа будут повторяться. Пятизначное число представляет собой упорядоченный набор из пяти элементов-цифр, поэтому $m=5$. Тогда по формуле для числа размещений с повторениями количество пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2, 3 равно $\overline{A_3^5} = 3^5 = 243$.

Замечание. Обратим внимание на то, что в формуле числа размещений с повторениями $\overline{A_n^k} = n^k$ допустим случай, когда $k > n$.

Например, число размещений с повторениями четырехбуквенных слов, составленных из алфавита, содержащего всего две буквы A и M , равно $\overline{A_2^4} = 2^4 = 16$. Среди этих размещений с повторениями есть, например, слова: АААА, АААМ, АММА, МАМА, МААМ, МААА, ММММ.

Пример. Шестизначный велосипедный номер считается «счастливым» если в нем нет ни одной цифры 8, поскольку «восьмерка» — один из дефектов велосипедного колеса. Посчитаем, каких номеров больше «счастливых» или «несчастливых».

Решение. На первый взгляд кажется, что поскольку 8 — это лишь одна цифра из десяти возможных, то счастливых номеров должно быть в несколько раз больше. Счастливый номер — это шестибуквенное слово в «алфавите», содержащем девять цифр, т.е. все цифры, кроме восьмерки: 0,1,2,3,4,5,6,7,9. Число таких слов, по формуле числа размещений с повторениями, равно $\overline{A_9^6} = 9^6 = 531441$. Если отбросить слово «000000», непригодное в качестве велосипедного номера, то счастливых номеров будет 531440. Всего шестизначных номеров, за вычетом непригодного, равно $\overline{A_{10}^6} - 1 = 1000000 - 1 = 999999$. Поэтому несчастливых номеров $999999 - 531440 = 468559$, т.е. ненамного меньше, чем счастливых.

Любопытно то, что если бы номера были бы семизначными, то тогда счастливых номеров было бы меньше, чем несчастливых.

Напомним, что *перестановки* — частный случай *размещений* и *формула для числа перестановок* — частный случай *формулы для числа размещений*. А как обстоит дело для перестановок и размещений с повторениями? Являются ли *перестановки с повторениями* частным случаем *размещений с повторениями*?

Замечание. Формула для числа перестановок с повторениями не является частным случаем формулы для числа размещений с повторениями.

Определение сочетаний с повторениями. Неупорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n , причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется *сочетанием с повторениями*.

Число всевозможных сочетаний с повторениями, а именно выборов m объектов из повторяющихся n элементов обозначают $\overline{C_n^m}$. Читается: «число сочетаний из эн по эм» или «С с чертой из эн по эм». Для нахождения числа $\overline{C_n^m}$ сочетаний с повторениями из n элементов по m приходится проявить определенную избирательность.

Утверждение. Число сочетаний с повторениями $\overline{C_n^m}$ можно вычислить по формуле:

$$\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

Рассмотрим модельную задачу о голосовании.

Пример. При принятии решения члены комитета из 7 человек голосуют: «за», «против», «воздержался». Посчитаем, сколько может быть возможных исходов голосования по данному решению.

Если нас интересует, кто и как голосовал, т.е. поименное открытое голосование, то тогда речь идет о *размещениях с повторениями*, что даст $\overline{A_3^7} = 3^7 = 2187$ возможных исходов голосования.

Если нас не интересует, кто и как голосовал, а только общий результат голосования, или, например, голосование тайное, то тогда речь идет о *сочетаниях с повторениями*. В этом случае подсчитывается число всевозможных сочетаний $m=7$ голосований членов комитета из повторяющихся

$n=3$ видов голосования: «за», «против», «воздержался», что даст $\overline{C}_n^m = \overline{C}_3^7 = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = 9!/(7!2!) = (9 \cdot 8)/2 = 36$ возможных исходов голосования.

Замечание. Сочетания с повторениями и размещения с повторениями объединяет то, что нет никаких ограничений на число повторений элементов, кроме общего их числа в наборе, поэтому в формуле числа сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$ допустим случай, когда $m > n$.

Отличаются сочетания (с повторениями или без) от размещений (с повторениями или без) тем, что первые – неупорядоченные наборы, а вторые – упорядоченные.

1.3.2. Случайные события и вероятности

Основой всех точных исследований является наблюдение за поведением и признаками изучаемых объектов, которое может осуществляться с помощью соответствующего опыта или эксперимента.

Под **опытом** будем подразумевать однократное или многократное повторение некоторого действия. Осуществление такого опыта или эксперимента называется **испытанием**. Различные результаты опыта назовем **исходами**.

Игровые модели очень удобны для первоначального рассмотрения элементов теории вероятностей.

Пусть опыт состоит в многократном бросании игральной кости. Каждое отдельное бросание представляет собой испытание, а его результат (выпавшее число очков) – исход этого испытания. В этом случае исходами являются числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании монеты могут быть два исхода: **О** – выпадение «орла» (герба) и **Р** – выпадение «решки» (цифры).

Определение события. Множество всех исходов испытания называется **множеством (пространством) элементарных событий**, а **событием** – подмножеством множества элементарных событий.

Определение случайного события. Событие, наступление или ненаступление которого в некотором испытании зависит от ряда случайных факторов, называется **случайным событием**.

Пример. Испытание - студент сдает экзамен. Случайное событие - он получил оценку 10. Испытание - бросание монеты. Случайное событие - выпадение герба или цифры.

Множество (пространство) элементарных событий обозначается буквой Ω .

Рассмотрим испытание, которое может закончиться одним из n различных исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, тогда

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

Таким образом, любое подмножество пространства элементарных событий Ω будем называть случайным событием.

Замечание. В теории множеств аналогом пространства элементарных событий Ω является универсальное множество U , а аналогом событий – множества, которые являются подмножествами U .

Пример. Записать множество (пространство) элементарных событий испытания, состоящего в бросании двух монет.

Решение. Множество элементарных событий данного испытания образуют исходы: (00) – на первой монете выпал «орел» и на второй тоже; (0Р) – на первой монете выпал «орел», а на второй «решка», (Р0) – на первой монете «решка», а на второй «орел», (РР) – на первой и на второй монетах «решки». Таким образом $\Omega = \{(00); (0Р); (Р0); (РР)\}$.

В дальнейшем случайные события будем называть просто событиями. События обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C и т.д. или когда их много $A_1, A_2, \dots, A_n$.

В жизни мы постоянно встречаемся со случайными событиями. При многократном наблюдении случайных явлений в них самих можно заметить определенные закономерности.

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Это математическая наука, которая применяется к реальным явлениям, обладающим двумя свойствами – случайностью и массовостью.

Событие, которое всегда произойдет в данном опыте, называется **достоверным**. Достоверное событие совпадает со всем пространством элементарных событий, поэтому обозначается символом Ω .

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие A – «из ящика извлекли красный шар» будет достоверным, так как в ящике были только красные шары.

Событие, называется **невозможным**, если в данном опыте оно заведомо не может произойти ни при одном испытании и обозначается $\emptyset$.

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие B – «из ящика извлекли синий шар» будет невозможным, так как в ящике нет шаров синего цвета.

События, которые не могут произойти одновременно в рассматриваемом опыте, называются **несовместными**.

Пример. При выборе 9 человек из 45 для социологического опроса события A – «выбрали 9 женщин» и B – «выбрали 9 мужчин» являются несовместными событиями.

Замечание. В терминах теории множеств события A и B являются несовместными в данном опыте, если $A \cap B = \emptyset$.

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие, противоположное событию A , обозначают $\bar{A}$.

Замечание. В терминах теории множеств для события A и противоположного ему событию $\bar{A}$, верно равенство $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Пример. Пусть испытанием является бросок баскетболиста в корзину, событие A – «баскетболист попал». Тогда $\bar{A}$ – «баскетболист не попал».

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Операции над событиями

Суммой двух событий A и B называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A , B и обозначается $A+B$ или $A \cup B$.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и обозначается $A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

Пример. Пусть событие A – «светит солнце», а событие B – «дует ветер», тогда событие $A+B$ состоит из следующих явлений погоды: или светит солнце, но нет ветра; или дует ветер, но не светит солнце; или и светит солнце и дует ветер.

Произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в одновременном наступлении двух событий A и B , и обозначается AB или $A \cap B$.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события и обозначается $A_1 A_2 \dots A_n$.

Пример. Пусть событие A – «в аудиторию вошел студент», событие B – «в аудиторию вошел человек в очках». Тогда событие AB – «в аудиторию вошел студент в очках».

Разностью событий A и B называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A , но не происходит событие B и обозначается $A \setminus B$.

Пример. Пусть подбрасывается игральный кубик. Событие A – «выпадет чётное число очков», то есть $A = \{2, 4, 6\}$, событие B – «выпадет число очков, меньшее трёх», то есть $B = \{1, 2\}$, тогда событие $A \setminus B$ – «выпадет чётное число очков, не меньшее трёх», то есть $A \setminus B = \{4, 6\}$.

Как показывают приведённые примеры, операции над событиями подобны операциям над множествами.

Элементарные события, входящие в подмножество A множества Ω , называют событиями, **благоприятствующими наступлению события A** .

Пример. Пусть подбрасывается игральный кубик. Событие A – «выпадет нечётное число очков». Этому событию благоприятствуют элементарные события из подмножества $\{1, 3, 5\}$ множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Говорят, что события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и их сумма является достоверным событием:

- 1) $A_i A_j = \emptyset \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$;
- 2) $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$.

Заметим, что события A и $\bar{A}$ образуют полную группу событий.

Пример. Примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти, шести очков при одном бросании игральной кости.

Классическое определение вероятности

Каждому случайному событию A ставится в соответствие характеризующее возможность его появления в данном опыте число $P(A)$ (от первой буквы французского слова *probabilite* – вероятность), которое и называется ***вероятностью события A*** .

Вероятность – числовая характеристика степени возможности наступления какого-либо определенного случайного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз испытаниях.

Для определения классической вероятности нам потребуется понятие равновозможных исходов элементарных событий. Понятие ***равновозможных*** событий в математике не определяется, оно считается интуитивно ясным. Элементарные события, шансы появления которых одинаковы в данном испытании, будем называть ***равновозможными***.

Обычно понятие классической вероятности иллюстрируется на азартных играх потому, что здесь равновозможность прямо задана внешней или геометрической симметрией объекта – монеты, игральной кости, колоды карт и т.д.

Если монета ровная, неизогнутая, то можно ожидать, что при ее многократном бросании орел и решка будут выпадать одинаково часто, т. е. примерно в половине случаев будет выпадать орел, а в половине случаев – решка. Поэтому в условиях этого опыта, принято считать, что для такой монеты вероятность выпадения орла или решки равна $\frac{1}{2}$.

При многократном бросании идеально правильной игральной кости на долю каждого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 будет приходиться примерно шестая часть общего числа испытаний, т. е. бросаний кости. Поэтому считают, что вероятность выпадения каждой грани, соответствующей числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, равна $\frac{1}{6}$. Какова в таком случае вероятность события A – «выпадение нечетного числа очков»? Поскольку имеется шесть одинаково возможных исходов, причем три из них (выпадение чисел 1, 3, 5) «благоприятствуют» событию A , то вероятность $P(A)$ можно считать равной $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пусть пространство Ω состоит из конечного числа n равновозможных элементарных событий: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

Под вероятностью $P(A)$ события A понимается отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события A , к общему числу всех равновозможных исходов.

Если n – общее число всех равновозможных исходов испытания, а m – число исходов благоприятствующих наступлению события A , то по определению

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Это определение вероятности называется *классическим*.

Из определения вероятности события следуют её простейшие свойства.

1) Вероятность достоверного события Ω равна 1, так как все элементарные события являются благоприятствующими Ω , т. е. $m = n$:

$$P(\Omega) = 1.$$

2) Вероятность невозможного события $\emptyset$ равна 0, так как для невозможного события нет ни одного элементарного события, ему благоприятствующего, т. е. $m = 0$:

$$P(\emptyset) = 0.$$

3) Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

так как $0 \leq m \leq n$.

При использовании формулы классической вероятности в решении конкретных задач числовые значения m и n , входящих в эту формулу, не всегда очевидны. Их нахождение требует применения основных правил и формул комбинаторики.

В теории вероятностей классическим является эксперимент с урной, из которой надо не глядя извлекать одинаковые шары разных окрасок. Вероятность при этом вводится просто: если в урне находится 30 шаров, 10 из которых – белые, то вероятность извлечь белый шар равна $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Пример. В урне находятся 10 одинаковых по размеру шаров, из которых 4 красных и 6 синих. Наудачу извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется синим?

Решение. Обозначим через A событие «извлеченный шар синий». Имеем 10 равновозможных исходов из которых 6 благоприятствуют событию A .

Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0,6$.

Пример. Найдите вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков.

Решение. Для данного примера имеем: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$. Поэтому $m = 3$, $n = 6$ и $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример. Подбрасываются две симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались «решки»?

Решение. Обозначим через A – «на верхних сторонах обеих монет оказались “решки”». В этом испытании 4 равновозможных элементарных

исхода: (О;О); (О;Р); (Р;О); (Р;Р). Событию A благоприятствует один элементарный исход (Р;Р). Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Основные теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей двух событий. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример. Подбрасывается игральный кубик. Найдите вероятность того, что на верхней грани выпадет четное или кратное трем число.

Решение. Введем обозначения событий: A – «выпало четное число»; B – «выпало число, кратное трем». Тогда AB – событие, состоящее в том, что выпало четное число, кратное трем.

$P(A) = \frac{3}{6}$ (всего исходов в этом испытании 6, исходов благоприятствующих событию A три: выпало либо 2, либо 4, либо 6 очков).

$P(B) = \frac{2}{6}$ (исходов благоприятствующих событию B два: может выпасть либо 3, либо 6 очков).

$P(AB) = \frac{1}{6}$ (имеем один благоприятствующий событию AB исход: так как четное число, кратное трем, то это 6).

По теореме сложения вероятностей двух событий $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ имеем:

$$P(A+B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Если события A и B являются *несовместными*, то $AB = \emptyset$, и тогда $P(AB) = 0$, и имеет место следующая теорема.

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Пример. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии $P(A) = 0,4$, а того, что он произведен в Турции $P(B) = 0,3$. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран: или в Италии, или в Турции?

Решение. События A – «товар произведен в Италии» и B – «товар произведен в Турции» несовместны, т.к. появление одного исключает другое. По теореме сложения двух несовместных событий имеем:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0,4+0,3=0,7.$$

Пример. При бросании двух игральных костей событие A – «выпало 5 очков» и событие B – «выпало 10 очков» несовместны. Событие $A+B$ – «выпало число очков, кратное 5» можно вычислить, по теореме сложения двух несовместных событий.

Решение. Всего исходов в этом испытании по комбинаторному правилу умножения равно $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятных исходов для события A четыре – это выпадение в двух бросаниях очков (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), а для события B три благоприятных исхода – это (4, 6), (6, 4), (5, 5). Поэтому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{36}+\frac{3}{36}=\frac{7}{36}.$$

Теорема сложения вероятностей n несовместных событий. Вероятность суммы n попарно несовместных событий (т.е. никакие два из них не могут произойти одновременно) $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n).$$

Следствие. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице.

Действительно, по теореме сложения вероятностей n несовместных событий имеем:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(\Omega) = 1.$$

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Действительно, события A и $\bar{A}$ образуют полную группу событий, откуда в силу предыдущего следствия и вытекает равенство $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Замечание. Вероятность противоположного события равна разности между единицей и вероятностью события A :

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

Пример. Вероятность бесперебойной работы компьютера равна 0,9. Какова вероятность того, что при работе компьютер даст сбой?

Решение. Событие A – «компьютер работает бесперебойно», тогда противоположное ему событие $\bar{A}$ – «при работе компьютер даст сбой». По формуле $P(\bar{A})=1-P(A)$, где $P(A)=0,9$. Тогда $P(\bar{A})=1-0,9=0,1$.

Теоремы умножения вероятностей

В ряде случаев приходится рассматривать вероятность некоторого события A , которая зависит от того, произошло или не произошло другое случайное событие B .

Прежде чем давать точное определение условной вероятности, рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть в корзине находится 8 белых и 4 черных шара, вынимается наудачу один за другим 2 шара. B – «первый вынутый шар белый», A – «второй вынутый шар белый».

Решение. Очевидно, что $P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Вероятность события A в этом испытании зависит от того, произошло событие B или противоположное событие $\bar{B}$. Если событие B произошло, то среди оставшихся 11 шаров только 7 белых и поэтому вероятность события A будет равна $P(A) = \frac{7}{11}$. Если событие B не произошло, а произошло противоположное событие $\bar{B}$, т. е. первый шар оказался черным, то среди оставшихся 11 шаров будет 8 белых и поэтому вероятность события A , в этом случае, равна $P(A) = \frac{8}{11}$.

Таким образом, вероятность события A зависит от того, произошло или не произошло событие B , это условная вероятность.

Определение условной вероятности. Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. $P(B) > 0$. Вероятность события A при условии, что произошло событие B , называется **условной вероятностью события A** и обозначается $P(A|B)$.

Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A , при условии, что произошло событие B , называют число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично, если $P(A) > 0$, то условной вероятностью события B , при условии, что произошло событие A , называют число

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Теорема умножения вероятностей. Пусть $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, тогда вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B|A); \\ P(AB) &= P(B)P(A|B). \end{aligned}$$

Пример. В читальном зале имеется 6 учебников по географии, из которых 3 учебника в переплёте. Библиотекарь берёт наудачу последовательно 2 учебника. Найдите вероятность того, что оба взятых библиотекарем учебника окажутся в переплёте.

Решение. Введём обозначение событий: A – «первый учебник в переплёте», B – «второй учебник в переплёте», так как события зависимые, то

по теореме умножения вероятностей вероятность того, что оба учебника в переплёте

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Теорема умножения вероятностей n событий. Пусть $P(A_1A_2\dots A_{n-1}) > 0$, тогда справедлива формула:

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}),$$

то есть вероятность произведения n событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие события имели место.

Если $P(B|A)=P(B)$, то событие B называется **независимым от события A** , то есть вероятность события B не зависит от того, произошло или нет событие A .

Независимость является свойством взаимным, то есть если справедливо $P(B|A)=P(B)$, то справедливо и $P(A|B)=P(A)$, поэтому можно говорить просто о **независимых событиях A и B** .

Замечание: Если события A и B независимы, то независимы также будут события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Пример. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. После первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

Решение. В данном случае события A – «первый шар белый» и B – «второй шар белый» независимы, а тогда искомая вероятность равна:

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0,16.$$

Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий и $A \subseteq \Omega$. Вероятности событий H_i известны, причем $P(H_i) > 0$ для всех $i=1,2,\dots,n$; известны также условные вероятности $P(A|H_i)$. Требуется найти вероятность события A .

Формула полной вероятности. Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий и $P(H_i) > 0$ для всех $i=1,2,\dots,n$. Тогда вероятность произвольного события A может быть найдена по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Доказательство. Представим событие A в виде

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n.$$

Поскольку события $H_1, H_2, \dots, H_n$ попарно несовместны, то события $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$ также попарно несовместны. Пользуясь равенством

$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ и теоремой умножения вероятностей, получим:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n) = \\ &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

События $H_1, H_2, \dots, H_n$ иногда называют *гипотезами*. Заметим, что должно выполняться условие $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$.

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что этот грибник вышел из леса через час?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «грибник вышел из леса через час», а через $H_i, i=1,2,3,4,5$ – событие, состоящее в том, что «грибник пошел по i -ой дороге». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)=0,4$; $P(A|H_2)=0,8$; $P(A|H_3)=0,3$; $P(A|H_4)=0,2$; $P(A|H_5)=0,1$.

$$\text{Далее, } P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = \frac{1}{5}.$$

По формуле полной вероятности имеем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4) + P(H_5)P(A|H_5) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot 0,4 + \frac{1}{5} \cdot 0,8 + \frac{1}{5} \cdot 0,3 + \frac{1}{5} \cdot 0,2 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 = 0,36. \end{aligned}$$

Пример. Пусть в коробке есть 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры берут из коробки любые 2 мяча и после игры возвращают их в коробку. Какова вероятность наудачу вынуть из коробки два новых мяча?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «извлечены два новых мяча для второй игры». Ситуация перед второй игрой описывается следующими взаимоисключающими возможностями:

H_1 – «в коробке один новый мяч», если первую игру играли двумя новыми мячами;

H_2 – «в коробке два новых мяча», если играли одним новым и одним старым мячами;

H_3 – «в коробке три новых мяча», если в первый раз играли двумя старыми мячами.

События H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий, так как они несовместны и в сумме составляют все возможные исходы. Находим вероятности этих событий:

$$P(H_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, \quad P(H_2) = \frac{3 \cdot 3}{C_6^2} = \frac{3}{5}, \quad P(H_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}.$$

Вычисляем условные вероятности:

$$P(A|H_1) = 0, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \quad P(A|H_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}.$$

Формулы Байеса. Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу и их вероятности $P(H_i)$, $i=1, 2, \dots, n$, известны до проведения опыта (так называемые *априорные вероятности*). Производится опыт, в результате которого происходит событие A . Каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того как событие A уже наступило?

Искомые вероятности $P(H_i|A)$ носят название *апостериорных* и находятся путем использования теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности.

Имеем

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i|A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

(здесь предполагается, что $P(A) > 0$ и $P(H_i) > 0$ для всех $i=1, 2, \dots, n$), откуда

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $P(A)$ из формулы полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

получим

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k)}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Эти формулы называют **формулами Байеса**. Они отвечают на вопрос каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того как событие A уже наступило?

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Грибник вышел из леса через час. Какова вероятность того, что грибник вышел по первой дороге?

Решение. Искомую вероятность найдём по формуле Байеса

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A | H_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} P(H_1|A) &= \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4) + P(H_5)P(A|H_5)} = \\ &= \frac{\frac{1}{5} \cdot 0,4}{0,36} \approx 0,222. \end{aligned}$$

Пример. Социолог проводил исследование психологического климата в разных отделах фирмы. При этом было установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследования показали, что 68 % женщин позитивно реагируют на эти ситуации, в то время как 37 % мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность, что ее заполнял мужчина?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию», а через H_1 , – событие, состоящее в том, что «анкету заполнял мужчина», через H_2 , – событие, состоящее в том, что «анкету заполняла женщина». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)=0,37$; $P(A|H_2)=1-0,68=0,32$.

$$\text{Далее, } P(H_1) = \frac{5}{15+5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \quad P(H_2) = \frac{15}{15+5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

По формуле полной вероятности вероятность того, что случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,37 \cdot \frac{1}{4} + 0,32 \cdot \frac{3}{4} = 0,093 + 0,24 = 0,333.$$

Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Вероятность того, что ее заполнял мужчина, найдём по формуле Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = 0,278.$$

1.3.3. Случайные величины

Рассматривая простейшие примеры, например, при бросании игральной кости мы случайным образом получаем одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 или при каких либо измерениях получаются случайные ошибки и т. п. В таких случаях мы имеем дело со случайными величинами. На примере с бросанием игральной

кости мы видим, что каждому исходу опыта ставится в соответствие единственное число $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – значение случайной величины. Поэтому естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов данного опыта. Следует заметить, что значения случайной величины могут быть достаточно общей природы.

Определение случайной величины. Пусть Ω – пространство элементарных событий. Числовую функцию от элементарного события $\omega \in \Omega$ назовем **случайной величиной**.

Таким образом, если каждому элементарному событию ω можно поставить в соответствие некоторое число, то говорят, что задана случайная величина.

Случайные величины будем обозначать прописными латинскими буквами X, Y, Z и т. д., а их возможные значения – соответствующими строчными латинскими буквами x, y, z и т. д. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены x_1, x_2, x_3 .

Определение дискретной случайной величины. Случайная величина, принимающая значения, которые можно записать в виде конечного набора или счетной последовательности чисел, называется **дискретной**, т. е. дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения, число которых конечно или счетное.

Примеры дискретных случайных величин:

- оценка, которую студент может получить на экзамене;
- число несчастных случаев на улицах города Минска;
- число вызовов, поступивших на телефонную станцию за сутки;
- число родившихся мальчиков среди десяти новорожденных $(0, 1, \dots, 10)$.

Определение непрерывной случайной величины. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется **непрерывной случайной величиной**.

Примеры непрерывных случайных величин:

- рост человека от 150 до 200 см;
- температура воздуха в случайно выбранный день;
- скорость самолета в момент выхода на заданную высоту.
- время ожидания транспорта.

Каждому значению x_n дискретной случайной величины отвечает определенная вероятность p_n , каждому промежутку (a, b) из области значений непрерывной случайной величины также отвечает определенная вероятность P того, что значение x , принятое случайной величиной, попадет в этот промежуток.

Определение закона распределения случайной величины. Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется **законом распределения случайной величины**.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	...
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n	...

В верхней строке записывают возможные значения x_i случайной величины X , а в нижней – их вероятности $p_i = P(X=x_i)$. Так как события $A_i = \{X=x_i\}$, $i=1,2,\dots$, образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. В случае конечного числа значений случайной величины, равного n , справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Следует отметить, что закон распределения случайной величины полностью задает дискретную случайную величину. Однако, случайную величину изучают по ее числовым характеристикам, основными из которых являются *математическое ожидание*, *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*. Далее рассмотрим эти числовые характеристики.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение математического ожидания. *Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности.*

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно, то по определению

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Пример. Подбрасывается игральная кость. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X , равной числу выпавших очков.

Решение. Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Следовательно, по определению математического ожидания имеем:

$$M(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Замечание. Отметим, что постоянную величину C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение $X = C$ с вероятностью $P = 1$. Поэтому $M(C) = C \cdot 1 = C$, т. е. *математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине*.

Далее рассмотрим без доказательства важнейшие свойства математического ожидания для дискретных случайных величин.

Свойства математического ожидания дискретных случайных величин:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.

$$M(CX) = C M(X).$$

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Определение независимых случайных величин. Две случайные величины X и Y называют **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Несколько случайных величин независимы, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

Критерием независимости двух случайных величин X и Y служит выполнение равенства

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

для любых $x, y \in R$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Замечание. Свойства 2 и 3 имеют место для любого конечного числа случайных величин.

Пример. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 2X + 3Y + 7$, если $M(X) = 4$, $M(Y) = 1$.

Решение. Используя свойства математического ожидания, имеем:

$$\begin{aligned} M(Z) &= M(2X + 3Y + 7) = M(2X) + M(3Y) + M(7) = \\ &= 2M(X) + 3M(Y) + 7 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 7 = 18. \end{aligned}$$

Пример. Независимые случайные величины заданы законами распределения:

X	1	2
P	0,6	0,4

Y	4	6
P	0,2	0,8

Найдите математическое ожидание случайной величины XY .

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных случайных величин:

$$M(X) = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4 = 1,4, \quad M(Y) = 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,8 = 5,6.$$

В силу независимости случайных величин X и Y искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X)M(Y) = 1,4 \cdot 5,6 = 7,84.$$

Замечание. Математическое ожидание случайной величины называют также ее **средним значением**.

Определение дисперсии. **Дисперсией** $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Дисперсия случайной величины постоянна, т. е. является числовой характеристикой этой величины.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно, то закон распределения случайной величины $(X - M(X))^2$ имеет вид:

$(X - M(X))^2$	$(x_1 - M(X))^2$	$(x_2 - M(X))^2$	...	$(x_n - M(X))^2$
P	p_1	p_2	...	p_n

Исходя из определения математического ожидания, получаем

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Дисперсия дискретной случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия – величина неотрицательная, т. е. $D(X) \geq 0$.
2. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Покажем это:

$$\begin{aligned} D(X) &= M((X - M(X))^2) = M(X^2 - 2XM(X) + (M(X))^2) = \\ &= M(X^2) - 2M(X)M(X) + (M(X))^2 = \\ &= M(X^2) - 2(M(X))^2 + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2. \end{aligned}$$

3. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Покажем это:

$$D(C) = M((C - M(C))^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Покажем это:

Из определения дисперсии и свойств математического ожидания следует, что

$$\begin{aligned} D(CX) &= M((CX - M(CX))^2) = M((CX - CM(X))^2) = \\ &= M(C^2(X - M(X))^2) = C^2 M((X - M(X))^2) = C^2 D(X). \end{aligned}$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Покажем это:

Применяя свойство дисперсии 2 и свойства математического ожидания,

имеем:

$$\begin{aligned}
 D(X+Y) &= M((X+Y)^2) - (M(X+Y))^2 = \\
 &= M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = \\
 &= M(X^2) + 2M(XY) + M(Y^2) - ((M(X))^2 + 2M(X)M(Y) + (M(Y))^2) = \\
 &= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M(X))^2 - 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 = \\
 &= M(X^2) - (M(X))^2 + M(Y^2) - (M(Y))^2 = D(X) + D(Y).
 \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что свойство 5 распространяется на случай любого конечного числа случайных величин.

6. Если C – постоянная, то

$$D(X+C) = D(X).$$

Покажем это:

$$\begin{aligned}
 D(X+C) &= M(((X+C) - M(X+C))^2) = \\
 &= M((X+C - (M(X)+C))^2) = M((X - M(X))^2) = D(X).
 \end{aligned}$$

Определение среднего квадратического отклонения. Квадратный корень из дисперсии случайной величины X называется ее **средним квадратическим отклонением** и обозначается $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия – в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений той же размерности, что и сама случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

Пример. Дисперсия случайной величины X равна 2. Найдите дисперсию случайной величины $Y = 5X + 3$.

Решение. Согласно свойствам дисперсии имеем

$$D(Y) = D(5X + 3) = D(5X) = 5^2 \cdot D(X) = 25 \cdot 2 = 50.$$

Пример. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной законом распределения

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Находим:

$$M(X) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,2 = 0,9.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения случайной величины X , т. е. величины $(X - M(X))^2$:

$(X - M(X))^2$	$(0 - 0,9)^2$	$(1 - 0,9)^2$	$(2 - 0,9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

По формуле для дисперсии дискретной случайной величины,

принимавшей конечное число значений, находим

$$D(X) = (0 - 0,9)^2 \cdot 0,3 + (1 - 0,9)^2 \cdot 0,5 + (2 - 0,9)^2 \cdot 0,2 = \\ = 0,81 \cdot 0,3 + 0,01 \cdot 0,5 + 1,21 \cdot 0,2 = 0,49.$$

Отсюда

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,49} = 0,7.$$

Отметим, что дисперсию случайной величины X можно было найти и по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Запишем закон распределения случайной величины X^2 :

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Находим:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 = 1,3,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1,3 - 0,9^2 = 1,3 - 0,81 = 0,49.$$

Функция распределения вероятностей случайной величины

Заметим, как говорилось ранее, дискретная случайная величина может быть задана законом распределения, представляющим собой перечень всех возможных значений этой случайной величины и их вероятностей. Однако такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных случайных величин. Введение понятия функции распределения вероятностей случайной величины устраняет этот недостаток.

Введем следующие обозначения. Пусть x – действительное число, т.е. $x \in \mathbf{R}$. Обозначим через $F(x)$ – вероятность события A , состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее x , т. е. $A = \{X < x\}$. Очевидно, что мы получили функцию $F(x)$ от переменной x .

Определение функции распределения. *Функцией распределения вероятностей случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что X примет значение, меньшее x : $F(x) = P(X < x)$.*

Функция распределения содержит в себе всю информацию, заложенную в случайной величине. Поэтому считается, что случайная величина (дискретная либо непрерывная) задана, если задана ее функция распределения.

Свойства функции распределения любой случайной величины:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.

Это свойство следует из того факта, что функция $F(x)$ есть вероятность.

2. Функция распределения $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Покажем это:

Действительно, пусть $x_1 < x_2$. Событие «случайная величина X примет значение, меньшее x_2 » можно представить в виде суммы двух несовместных событий: « X примет значение, меньшее x_1 » и « X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1 < X < x_2$ ». Обозначим вероятности последних

двух событий через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \leq X < x_2)$ соответственно. По теореме о вероятности суммы двух несовместных событий имеем:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2),$$

откуда

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Поскольку вероятность любого события – число неотрицательное, то $P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$ и, следовательно, $F(x_1) \leq F(x_2)$.

3. Вероятность попадания значений случайной величины X в полуинтервал $[a, b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах этого интервала:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b) , то $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq a, \\ 1, & \text{при } x \geq b. \end{cases}$

Покажем это:

Действительно, если $x \leq a$, то событие $A = \{X < x\}$ является невозможным (случайная величина X таких значений не принимает) и, следовательно, его вероятность равна нулю. Если $x \geq b$, то событие $A = \{X < x\}$ является достоверным и, следовательно, его вероятность равна единице.

5.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$$

6. Функция распределения $F(x)$ – непрерывна слева для любого $x_0 \in \mathbf{R}$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Последние два свойства 5 и 6 рассмотрены без доказательства.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина X принимает значения из полуинтервала $[0, 1)$.

Решение. Так как на полуинтервале $[0, 1)$ функция распределения задается формулой $F(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, то

$$P(0 \leq X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Определение функции распределения. Функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k),$$

где суммируются вероятности тех значений случайной величины X , которые меньше x . График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

X	0	1	2
P	0,1	0,4	0,5

Найдите функцию распределения случайной величины X и построить график функции распределения.

Решение. Если $x \leq 0$, то событие $A = \{X < x\}$ является невозможным (случайная величина не принимает значений, строго меньших нуля) и, следовательно, $F(x) = 0$.

Если $0 < x \leq 1$, то $F(x) = P(X) = 0,1$. Действительно, в данной ситуации случайная величина X может принять только одно значение, находящееся левее 1, – значение 0 с вероятностью 0,1.

Если $1 < x \leq 2$, то $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = 0,1 + 0,4 = 0,5$. Действительно, $F(x)$ равно вероятности события $A = \{X < x\}$, которое может быть осуществлено, когда случайная величина X примет значение 0 или значение 1. Поскольку два этих события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $A = \{X < x\}$ равна сумме вероятностей событий $A_1 = \{X=0\}$ и $A_2 = \{X=1\}$.

Если $x > 2$, то $F(x) = 1$, так как событие $A = \{X < x\}$ является достоверным.

Таким образом, получаем функцию распределения вида:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,5 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 77 ниже.

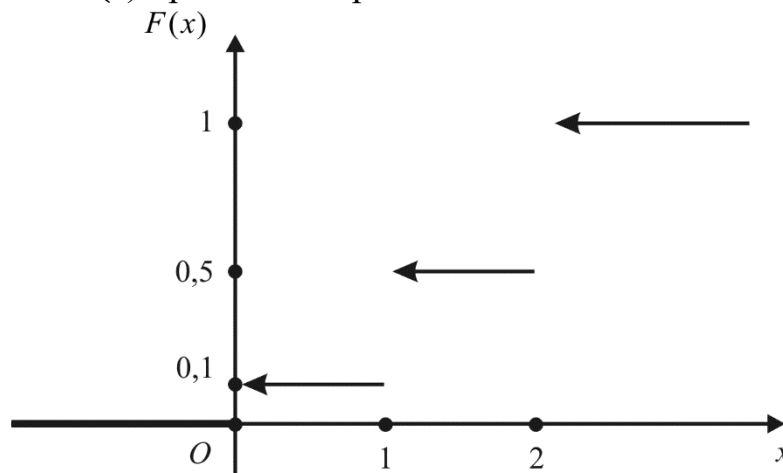


Рис. 77

Как видно из рисунка, функция $F(x)$ является разрывной, причем точками разрыва являются значения x_k , принимаемые случайной величиной X . Величины скачков функции равны вероятностям $p_k = P(X = x_k)$.

Непрерывные случайные величины

Используя понятие функции распределения вероятностей, можно дать более точное определение непрерывной случайной величины.

Определение непрерывной случайной величины. Случайная величина X называется **непрерывной**, если существует функция $p(x)$ такая, что при любом $x \in \mathbf{R}$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt.$$

Функция $p(x)$ входящая в последнее равенство, называется **плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X** . График функции $p(x)$ называется **кривой распределения**.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a, b)$.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a, b)$ равна определенному интегралу от ее плотности распределения, взятому в пределах от a до b :

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b p(x) dx.$$

Замечание. Доказанная формула геометрически означает тот факт, что вероятность попадания значений непрерывной случайной величины X в полуинтервал $[a, b)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и отрезками прямых $x=a$, $x=b$.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $p(x) \geq 0$ (следует из того, что функция $F(x)$ – неубывающая функция).
2. В точках дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения: $F'(x) = p(x)$
3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ от плотности распределения $p(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

Это следует из того, что $F(+\infty)=1$. Это свойство имеет следующую геометрическую интерпретацию: *площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения и осью Ox , равна единице.*

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$\int_a^b p(x) dx = 1.$$

так как $p(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения $F(x)$ и вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0, \frac{\pi}{4})$.

Решение. Если $x \leq 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

Если $0 < x \leq \pi$, то

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^0 p(t) dt + \int_0^x p(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{2} \sin t dt = \\ &= 0 - \frac{1}{2} \cos t \Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x. \end{aligned}$$

Если $x > \pi$, то

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^0 p(t) dt + \int_0^{\pi} p(t) dt + \int_{\pi}^x p(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin t dt + \int_{\pi}^x 0 dt = 0 - \frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi} + 0 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x, & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение математического ожидания. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , возможные значения

которой принадлежат отрезку $[a, b]$, а плотностью распределения вероятностей является функция $p(x)$ называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xp(x)dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси Ox , то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

при условии, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)dx.$$

Определение дисперсии. Дисперсией непрерывной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$, а плотностью распределения вероятностей является функция $p(x)$, то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 p(x)dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси Ox , то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 p(x)dx$$

при условии, что интеграл сходится.

Для вычисления дисперсии можно получить более удобные формулы:

$$D(X) = \int_a^b x^2 p(x)dx - (M(X))^2,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (M(X))^2.$$

Замечание. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины X среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ определяется, как и для дискретной величины, формулой

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Решение. Имеем

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$D(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{9}x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2\right) \Big|_0^2 = 2 - \frac{32}{9} + \frac{16}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Биномиальное распределение

Случайная величина X , которая принимает значение m с вероятностью $C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m = 0, 1, 2, \dots, n$; $0 \leq p \leq 1$, $q = 1 - p$, называется распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p .

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает либо событие A с вероятностью p , либо противоположное ему событие $\bar{A}$ с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть X – случайная величина, равная числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может не наступить вообще, наступить один раз, два раза, ..., n раз. Следовательно, возможными значениями случайной величины X будут числа $0, 1, 2, \dots, n$ (дискретная случайная величина с конечным числом значений). По формуле Бернулли можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0) = C_n^0 p^0 q^n = q^n, \dots, P_n(1) = C_n^1 p^1 q^{n-1},$$

$$P_n(2) = C_n^2 p^2 q^{n-2}, \dots, P_n(n) = C_n^n p^n q^0 = p^n.$$

Биномиальный закон распределения может быть представлен в следующем виде.

X	0	1	2		M		n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		$C_n^m p^m q^{n-m}$		p^n

Замечание. Для случайной величины X , имеющей биномиальное распределение, имеем

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Пример. Производится 3 независимых социологических испытания. При каждом испытании событие A появляется с одной и той же вероятностью $p=0,6$. Запишите в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа появлений события A при этих испытаниях.

Решение. Это биномиальное распределение, для которого закон распределения имеет вид

X	0	1	2	3
P	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Тогда

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Контроль: $0,064+0,288+0,432+0,216=1$.

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X называется **равномерно распределенной** с параметрами a и b , если плотность распределения этой случайной величины постоянна на отрезке $[a;b]$ и равна нулю вне этого отрезка.

Функция плотности распределения определяется равенством

$$p(x) = \begin{cases} c, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b. \end{cases}$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_a^b cdx = c \cdot (b-a) = 1$, то $c = \frac{1}{b-a}$.

Следовательно, $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b. \end{cases}$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ принадлежащий отрезку $[a;b]$, пропорциональна длине этого интервала:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Непосредственно из определений находится функция распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b, \\ 1 & \text{при } x \geq b. \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. Цена товара X может быть в равной степени любой в пределах от 15 до 25 тыс. ден. ед. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Случайная величина X распределена равномерно, следовательно,

$$M(X) = \frac{15+25}{2} = 20, \quad D(X) = \frac{(25-15)^2}{12} = \frac{100}{12} = 8,33, \quad \sigma(X) = \sqrt{8,33} = 2,89.$$

Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина X называется **распределённой по нормальному закону**, если плотность её распределения определяется по формуле

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ – параметры распределения, $\sigma > 0$ (положительное действительное число), a – любое действительное число. Записывается это так: $N(a, \sigma)$.

Рассмотрим вероятностный смысл параметров случайной величины X . Параметр a совпадает с математическим ожиданием случайной величины X : $a = M(X)$, а параметр σ является средним квадратическим отклонением случайной величины X : $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$ называется **нормированным** или **стандартным**.

График плотности распределения вероятностей нормального распределения называют **нормальной кривой** или кривой Гаусса. Он симметричен относительно прямой $x=a$, имеет асимптоту – ось Ox и схематически изображен на рис. 78.

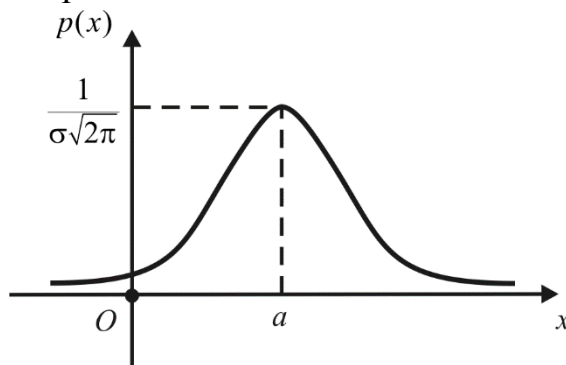


Рис. 78

На рис. 79 показаны нормальные кривые при различных σ . На рис. 80 показаны нормальные кривые для различных a .

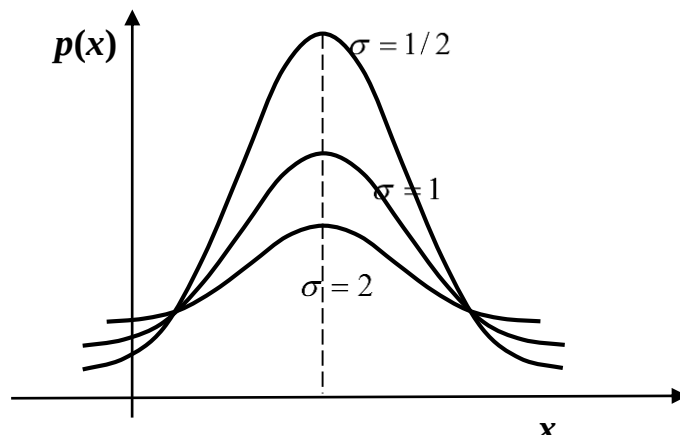


Рис. 79

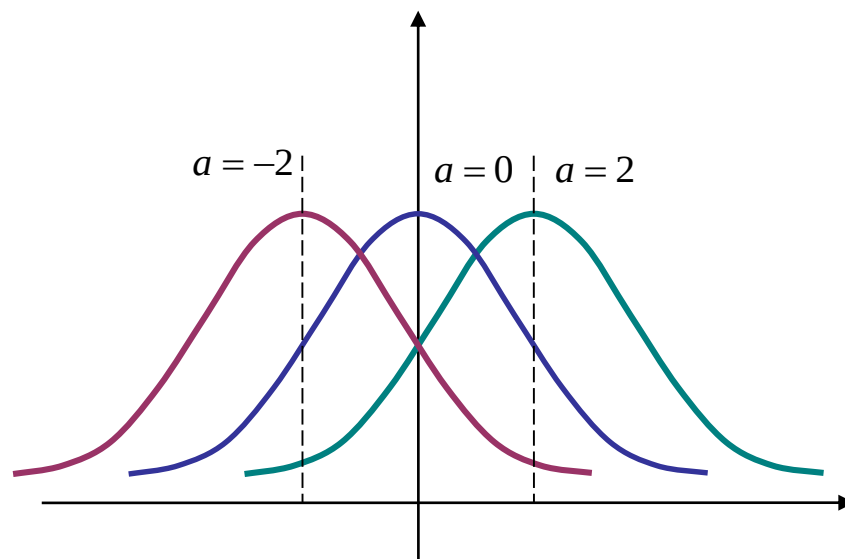


Рис. 80

Вероятность попадания непрерывной случайная величина X , распределенной по нормальному закону с параметрами распределения a и σ , на промежуток $(\alpha; \beta)$ определяется по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, определяемая формулой

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Свойства функции $\Phi(x)$ рассмотрены в [4], а её значения приведены в приложении 3, см. [4].

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа ε находится по формуле

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Что же общего у всех нормальных кривых? Чтобы ответить на этот вопрос, положим в последнем равенстве $\varepsilon=3\sigma$, тогда получим: $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(3) = 0,9973 \approx 1$.

Пример. Спортсмен каждое утро взвешивается на напольных весах. Случайные ошибки измерения X веса подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 мг. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, меньше по абсолютной величине 15 мг, если известно, что математическое ожидание случайных ошибок X равно нулю.

Решение. По формуле $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$ находим

$$P(|X - 0| < 15) = 2\Phi(\frac{15}{10}) = 2\Phi(1,5).$$

По таблице функции Φ находим $\Phi(1,5) = 0,4332$. Тогда искомая вероятность равна

$$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Занятие № 1. Матрицы. Операции над матрицами. Определители матриц. Свойства определителей. Обратная матрица.

Примеры решения задач

1. Даны матрицы A и B . Найти сумму матриц $A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 & 6+4 & 1+9 \\ 4-1 & -3+1 & 2-2 \\ 0+4 & 1+2 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ. } A + B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матрицы A на число α .

$$\alpha = 3; \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\alpha \cdot A = 3 \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 & 3(-1) \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \\ 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ. } \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \\ 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $A + B$, $A - B$, AB , BA .

Решение. Находим по определению:

$$\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix} 2+3 & 1+0 \\ 0+5 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad A-B = \begin{pmatrix} 2-3 & 1-0 \\ 0-5 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}; \\
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}; \\
BA &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} & b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} \\ b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} & b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 6 \\ 5 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Данный пример показывает, что даже в том случае, когда оба произведения AB и BA определены, вообще говоря, $AB \neq BA$.

4. Найдите матрицу $C=3A-4B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\begin{aligned}
C=3A-4B &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 0 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 17 & -1 \\ 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5. Найдите матрицу $C=4A+2A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$4A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix}, \quad 2A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad C=4A+2A^T = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 30 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите AB , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

7. Найдите матрицу X из уравнения $2A+2X=3B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$2X = 3B - 2A =$$

$$= 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -13 & 18 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & -6,5 & 9 \end{pmatrix}.$$

8. Проверить выполняется ли равенство $AB=BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,
 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+15 & 0-6 \\ 4-5 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 10-8 & 15+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AB \neq BA$.

9. Найдите A^3 , если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение.

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

Решение. Применим правило треугольников вычисления определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - ((-1) \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2) =$$

$$= 20 + 12 - 2 - (-15 + 16 + 2) = 27.$$

11. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Для вычисления определителя данной матрицы воспользуемся свойством: определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю – и получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

В данной матрице вторая и третья строки пропорциональны, воспользуемся свойством определителя – определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Вычислить определитель матрицы третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим данный определитель тремя разными способами.

1) разложением по первой строке:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (10 - 0) - 3 \cdot (30 - 0) + 7 \cdot (24 - 10) = 10 - 90 + 98 = 18. \end{aligned}$$

2) разложением по второй строке:

$$\begin{aligned} |A| &= 6 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -6 \cdot (15 - 28) + 2 \cdot (5 - 35) - 0 \cdot (4 - 15) = 78 - 60 + 0 = 18. \end{aligned}$$

Отметим, что последнее третье слагаемое в сумме можно было и не вычислять, так как оно равно нулю.

3) От второй строки отнимем первую, умноженную на 6, а из третьей строки отнимем первую, умноженную на 5. Тем самым, мы получим два нуля в первом столбце и , затем разложим по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -16 & -42 \\ 0 & -11 & -30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -42 \\ -11 & -30 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -16 & -7 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = 6(80 - 77) = 18.$$

Ответ. $|A| = 18$.

14. Вычислите определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Вычитая из четвертой строки первую, из третьей – удвоенную первую и прибавляя первую строку ко второй, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам третьего столбца, поскольку третий столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки последнего определителя удвоенную вторую и затем разложим полученный определитель по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 3 = -9.$$

Значение определителя равно -9 .

15. Найдите матрицу, обратную к матрице A : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Находим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, \text{ следовательно, существует } A^{-1}.$$

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}.$$

2. Проверяем правильность вычислений, используя равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяем равенство $A^{-1}A = E$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны 2 матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Найти их сумму $A+B$ и матрицу $3A$.
2. Для приведённых ниже матриц, найдите а) $A - 2B$; б) AB ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Вычислить $C = A^2 + 2B$,
 $D = 3A^T - B^2$, $K = 2A^T B^T$.

4. Найдите произведения матриц A и B , где:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; г) $A = (1 \ -2 \ 3)$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = (1 \ -2 \ 3)$.

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

5. Найдите матрицу X из уравнения $5A - 3X = 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$,
 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Решите уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$; с) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5+x \end{vmatrix} = 0$; д) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

7. Вычислите определители следующих матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; д) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$b) B = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}; \quad e) D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} 58 & 63 & 59 \\ 69 & 73 & 71 \\ 77 & 81 & 79 \end{vmatrix}; \quad f) \begin{vmatrix} 119 & 125 & 122 \\ 428 & 431 & 429 \\ 579 & 582 & 580 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, разложив его по элементам: а) четвертой строки; б) второго столбца.

9. Докажите, что $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 44$.

10. Покажите, что данные матрицы невырожденные, и найдите матрицы, обратные к данным.

$$a. A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad c. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix};$$

$$b. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad d. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Занятие № 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера, метод Гаусса.

Примеры решения задач

1. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{Запишем систему в матричном виде } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Сначала найдём определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad .$$

Определитель не равен нулю, значит, данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную. Найдём алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Итак

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдём искомую матрицу

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{3}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ то есть: } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$

Решение.

Найдём определитель матрицы системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

Далее находим следующие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 27, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 54.$$

Воспользуемся формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2.$$

3. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (-2) , к третьей – первую строку, умноженную на (-1) , а к четвёртой – первую строку, умноженную на (-3) , и получим

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array} \right).$$

Поменяем местами вторую и третью строки:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array} \right).$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на (-3) , а к четвёртой – вторую строку, умноженную на (-4) :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -20 \end{array} \right).$$

Последнюю строку разделим на 4:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right).$$

Поменяем местами третью и четвертую строки системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \end{array} \right).$$

Умножим третью строку системы на (-5) и прибавим к четвёртой строке:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array} \right).$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 2, \\ x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_4 = 12. \end{cases}$$

Найдём поочерёдно неизвестные:

$$\begin{cases} x_4 = 4, \\ 3x_3 = 2x_4 - 5, \\ x_2 = x_4 - 2, \\ x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 + 4. \end{cases}$$

Итак, решение системы:

$$\begin{cases} x_4 = 4, \\ x_3 = 3, \\ x_2 = 2, \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

4. Решить следующую систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее: первую строку умножаем на (-2) и складываем со второй строкой, далее первую умножаем на (-3) и складываем с третьей, получаем эквивалентную матрицу, в которой работаем со второй и третьей строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right) \sqcup \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -8 \end{array} \right) \sqcup \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ -5x_2 + 8x_3 = -13, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 5. \end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, не имеет решений.

5. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Представим систему в матричном виде $AX=B$, где матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ матрица } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ матрица } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A , $\det A = 5 \neq 0$ (проверить самостоятельно), таким образом, матрица A невырожденная и существует обратная матрица A^{-1} вида (проверить самостоятельно):

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

По формуле $X=A^{-1}B$ найдем матрицу

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

6. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 12 \\ 3 & -1 & 2 & -10 & 8 \end{array} \right).$$

Прибавим к второй строке системы первую строку, умноженную на (-2) , к третьей – первую строку, умноженную на 1, а к четвертой – первую строку, умноженную на (-2) , и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 6 \end{array} \right).$$

Сложим третью и четвертую строки системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 19 \end{array} \right).$$

Поменяем вторую и четвертую строки местами, и вторую строку разделим на (-1) :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \end{array} \right).$$

Прибавим к третьей и четвертой строкам системы вторую строку, умноженную на (-2) и 5 соответственно, и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51 \\ 0 & 0 & -6 & 38 & -102 \end{array} \right).$$

Прибавим к четвертой строке системы третью строку, умноженную на 2, и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2, x_3 через переменную x_4 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + 5x_4 = -19, \\ 3x_3 - 19x_4 = 51. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -(x_2 + 4x_3 - 7x_4) + 1, \\ x_2 = -(x_3 + 5x_4) - 19, \\ x_3 = \frac{19}{3}x_4 + 17. \end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_3 во второе уравнение и найдем x_2 :

$$x_2 = -19 - (x_3 + 5x_4) = -19 - \left(17 + \frac{19}{3}x_4 + 5x_4\right) = -36 - \frac{34}{3}x_4.$$

Из первого уравнения находим x_1 :

$$x_1 = 1 - (x_2 + 4x_3 - 7x_4) = 1 - \left(-36 - \frac{34}{3}x_4 + 4 \cdot \left(17 + \frac{19}{3}x_4\right) - 7x_4\right) = -31 - 7x_4.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} -31 - 7x_4 \\ -36 - \frac{34}{3}x_4 \\ 17 + \frac{19}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_4 может принимать любые действительные значения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + y - z = 0; \end{cases} \end{array}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8; \end{cases} \quad \text{ж) } \begin{cases} -x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x + y - 3z = 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 9x + 2y = 3, \\ 7x - 2y = 13; \end{cases} \quad \text{з) } \begin{cases} 4x - y + 2z = 7, \\ x + y + 2z = 3, \\ -x + 3y - 3z = 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 5x + 9y = 2, \\ 6x + 7y = 10; \end{cases} \quad \text{и) } \begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x - y + z = 4, \\ 3x + 2y - 3z = 5; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x + 2y - z = 4, \\ 2x + y + z = 5, \\ x - z = 0; \end{cases} \quad \text{к) } \begin{cases} 3x - 2y - z = -1, \\ x + 2y + 4z = 11, \\ 2x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$$

2. Решите системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7, \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ 4x - 3y + 3z = 3, \\ x + 3y = 0, \\ 5x + 3z = 3. \end{cases}$$

3. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$$

4. Предприятие выпускает три вида изделий, используя при этом сырье трех типов. Нормы расхода сырья по видам изделий указаны в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие по видам		
	1-й вид	2-й вид	3-й вид
I	4	5	6
II	1	2	3
III	0	1	4

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида, если известно, что запас сырья I типа составляет 5500 единиц, II типа – 2050 единиц, III – 1400 единиц. Указанные запасы сырья должны быть использованы полностью.

5. Иванов, Петров и Сидоров купили продукты трех видов соответственно 2, 5 и 4 кг; 6, 2 и 3 кг; 1, 4 и 7 кг. Иванов уплатил 27 ден. ед., Петров – 23,5 ден. ед. и Сидоров – 34 ден. ед. Найдите цены этих продуктов.

6. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

$$a) \begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$$

Занятие № 3. Метод координат на плоскости. Прямая на плоскости. Линии второго порядка.

Примеры решения задач

1. Найти длину медианы CK в треугольнике ABC , где $A(2; -4)$, $B(-6; 8)$, $C(4; 6)$.

Решение. Для того чтобы найти длину медианы CK , нужно знать координаты x и y точки K – середины отрезка AB :

$$x = \frac{2 - 6}{2} = -2, \quad y = \frac{-4 + 8}{2} = 2.$$

Мы нашли их по формулам $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Зная координаты точек $C(4; 6)$ и $K(-2; 2)$, найдем $|CK|$:

$$|CK| = \sqrt{(4 + 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}.$$

Ответ. $|CK| = \sqrt{52}$.

2. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(2; -1)$, $B(8; 7)$, $C(-10; 5)$. Найти: 1) длину стороны AB ; 2) длину медианы AD ; 3) площадь треугольника ABC ; 4) длину высоты, проведенной из вершины C .

Решение.

1) Зная координаты точек $A(2; -1)$ и $B(8; 7)$, найдем $|AB|$:

$$|AB| = \sqrt{(8 - 2)^2 + (7 + 1)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

2) найдем координаты точки D – середины отрезка BC :

$$x = \frac{8 - 10}{2} = -1, \quad y = \frac{7 + 5}{2} = 6.$$

Зная координаты точек $A(2; -1)$ и $D(-1; 6)$, найдем $|AD|$:

$$|AD| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (6 + 1)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}.$$

3) Найдем площадь треугольника ABC .

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |36 + 96| = 66.$$

4) Известно, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} |AB| |CH|.$$

$$\text{Отсюда, } |CH| = \frac{2S}{|AB|} = \frac{132}{10} = 13,2.$$

3. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-1;6)$, $B(7;4)$, $C(6; -1)$.

Решение. Найдем координаты точки M – середины отрезка AB :

$$x = \frac{-1+7}{2} = 3, \quad y = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Из курса школьной геометрии известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке O и эта точка делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Рассмотрим медиану CM . Известны координаты точек $C(6; -1)$ и $M(3; 5)$, а также то, что точка O делит отрезок CM в отношении 2:1, считая от вершины C . Воспользуемся формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ деления отрезка в данном отношении. В нашем случае $\lambda = 2$. Имеем:
 $x = \frac{6 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = 4, \quad y = \frac{-1 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = 3$. Итак, координаты точки $O(4; 3)$.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 2)$ параллельно прямой $3x + 2y - 8 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение заданной прямой в виде $y = -\frac{3}{2}x + 4$.

Значит, угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -\frac{3}{2}$. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны $k_2 = k_1$. Следовательно, угловой коэффициент искомой прямой равен $k_2 = -\frac{3}{2}$. Уравнение искомой прямой находим по формуле $y - y_1 = k_2(x - x_1)$, где $(x_1; y_1)$ – координаты точки A . Получаем:
 $y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)$, или $3x + 2y - 1 = 0$.

Ответ. Уравнение прямой: $3x + 2y - 1 = 0$.

5. Найти уравнение высоты AK в треугольнике ABC , где $A(2; -1)$, $B(-1; -2)$, $C(3; 1)$.

Решение. Найдем сначала уравнение стороны BC . Используя формулу

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

получаем: $\frac{y+2}{1+2} = \frac{x+1}{3+1}$, откуда $3x - 4y - 5 = 0$ – искомое уравнение. Перепишав

это уравнение в виде $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, находим угловой коэффициент прямой BC

$k_1 = \frac{3}{4}$. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны

соотношением $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Следовательно, угловой коэффициент искомой

прямой AK равен $k_2 = -\frac{4}{3}$. Уравнение прямой AK находим по формуле

$y - y_1 = k_2(x - x_1)$, где $(x_1; y_1)$ – координаты точки A . Получаем:

$$y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 2), \text{ или } 4x + 3y - 5 = 0.$$

6. Даны координаты вершин треугольника ABC $A(2; -1)$, $B(8; 7)$, $C(-10; 5)$. Найти: 1) уравнение стороны AB ; 2) уравнение высоты, проведенной из вершины C ; 3) уравнение медианы AD .

Решение.

1) Зная координаты точек $A(2; -1)$ и $B(8; 7)$, найдем уравнение AB :
 $\frac{y+1}{7+1} = \frac{x-2}{8-2}$, откуда $4x - 3y - 11 = 0$ – искомое уравнение. Перепишав это

уравнение в виде $y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$, находим угловой коэффициент прямой AB :

$$k_1 = \frac{4}{3}.$$

2) Основание высоты, выходящей из вершины C обозначим буквой H . Поскольку высота CH перпендикулярна AB , то угловой коэффициент прямой CH будет равен $-\frac{3}{4}$. Тогда уравнение этой прямой $y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 10)$, или $3x + 4y + 10 = 0$.

3) Найдем середину отрезка BC .

$$x = \frac{8-10}{2} = -1, \quad y = \frac{7+5}{2} = 6.$$

Таким образом, необходимо написать уравнение прямой проходящей через точки $A(2; -1)$ и $D(-1; 6)$. Используя формулу

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

получаем: $\frac{y+1}{6+1} = \frac{x-2}{-1-2}$, откуда $7x + 3y - 11 = 0$ – искомое уравнение.

7. Вычислить высоту трапеции, основания которой лежат на прямых $3x + 4y - 10 = 0$, $6x + 8y - 45 = 0$.

Решение. Высота трапеции равна расстоянию между указанными прямыми, которое, в свою очередь равно расстоянию от произвольной точки одной из них до другой. Выберем какую-нибудь точку первой прямой.

Положив, например, $x = 0$, из уравнения $3x + 4y - 10 = 0$ найдем $y = \frac{5}{2}$;

получим точку $M\left(0; \frac{5}{2}\right)$. Далее, по формуле $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ вычисляем

расстояние от точки $M\left(0; \frac{5}{2}\right)$ до прямой $6x + 8y - 45 = 0$. Получаем:

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{5}{2} - 45|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|20 - 45|}{10} = 2,5.$$

8. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

- 1) большая полуось равна 8, малая полуось равна 6;
- 2) расстояние между фокусами равно 10, большая полуось равна 13;
- 3) большая полуось равна 10, эксцентриситет равен 0,8;
- 4) расстояние между фокусами равно 12, эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$.

Решение.

1) $a = 8$, $b = 6$, поэтому имеем $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$.

2) $2c = 10$, откуда $c = 5$. Поскольку $a = 13$, то $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

Получаем следующее уравнение $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.

3) $a = 10$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{c}{10} = 0,8$, откуда $c = 8$. Тогда $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Уравнение эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

4) $2c=12$, откуда $c=6$. Поскольку $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = \frac{6}{a}$ то $a=10$, $b=8$.

Уравнение эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

9. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 12:

$$\frac{3x^2}{12} + \frac{4y^2}{12} = 1, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Используя (24), а также равенство $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, находим: $a=2$, $b=\sqrt{3}$,
 $c = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$, $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} = 0,5$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через правый фокус и нижнюю вершину эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

Решение. Используя (24), находим: $a=10$, $b=8$, $c = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$,
 $F_1(-6; 0)$, $F_2(6; 0)$. Нижняя вершина B эллипса имеет координаты $(0; -8)$, а правый фокус F_2 координаты $(6; 0)$. Составим уравнение искомой прямой F_2B :

$$\frac{y-0}{-8-0} = \frac{x-6}{0-6}, \quad \frac{y}{-8} = \frac{x-6}{-6}, \text{ или } 4x - 3y - 24 = 0.$$

Ответ: Уравнение прямой: $4x - 3y - 24 = 0$.

11. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

- 1) действительная полуось равна 7, мнимая полуось равна 5;
- 2) расстояние между фокусами равно 20, действительная полуось равна 6;
- 3) действительная полуось равна 8, эксцентриситет равен $\frac{5}{4}$;
- 4) расстояние между фокусами равно 26, эксцентриситет равен 2,6.

Решение.

1) $a=7$, $b=5$, поэтому имеем $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$.

2) $2c = 20$, откуда $c = 10$. Поскольку $a = 6$, то $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Получаем следующее уравнение $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

3) $a = 8$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = \frac{c}{8}$, откуда $c = 10$. Тогда $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

4) $2c = 26$, откуда $c = 13$. Поскольку $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{a} = 2,6$ то $a = \frac{13}{2,6} = 5$, $b = 12$.

Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.

12. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 20:

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = 1, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Используя (26), находим: $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$, $F_1(-3, 0)$,

$F_2(3, 0)$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} = 1,5$. Уравнения асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$.

13. Найти фокус и записать уравнение директрисы каждой параболы, заданной уравнением:

1) $y^2 = 10x$; 2) $x^2 = -4y$.

Решение.

1) Уравнение имеет вид $y^2 = 2px$, откуда $2p = 10$, $p = 5$, $\frac{p}{2} = 2,5$.

Следовательно, фокус параболы $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = F(2,5; 0)$, а уравнение директрисы

$$x = -\frac{p}{2} = -2,5.$$

2) Уравнение имеет вид $x^2 = -2py$, откуда $2p = 4$, $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Следовательно, фокус параболы $F\left(0; -\frac{p}{2}\right) = F(0; -1)$, а уравнение директрисы

$$y = \frac{p}{2} = 1.$$

14. Записать каноническое уравнение параболы, если известно, что:

1) фокус находится в точке $F(3; 0)$;

2) директриса имеет уравнение $x - 2 = 0$;

Решение.

1) Имеем $\frac{p}{2} = 3$, $p = 6$, $2p = 12$. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, откуда $y^2 = 12x$.

1) Имеем $\frac{p}{2} = 2$, $p = 4$, $2p = 8$. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = -2px$, откуда $y^2 = -8x$.

15. Выяснить, какую линию определяет уравнение

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0$$

в прямоугольной системе координат Oxy .

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделяя полные квадраты:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 9(y^2 - 4y + 4) + 36 - 68 = 0,$$

$$4(x - 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 36,$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1. \quad (2.25)$$

Получаем, что исходное уравнение определяет гиперболу с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в точке $O'(1; 2)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что треугольник с вершинами $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(11; -1)$ – прямоугольный.

2. Даны три вершины $A(-3; -2)$, $B(-1; 3)$, $C(5; 4)$ параллелограмма $ABCD$. Найти четвертую вершину D и центр симметрии параллелограмма O .

3. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-4; 3)$, $B(5; 6)$, $C(8; -3)$.

4. Отрезок, определяемый точками $M_1(-8; -9)$ и $M_2(-3; -4)$, разделен на пять равных частей. Найти координаты точек деления.

5. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(-3; 1)$, $B(-3; 4)$, $C(1; 7)$.

6. Вычислить длину высоты BH в треугольнике ABC , где $A(-9; -5)$, $B(4; 1)$, $C(3; 4)$.

7. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(4; -3)$, $B(6;5)$, $C(-10; 7)$. Найти: 1) длину стороны AB ; 2) длину высоты, проведенной из вершины C ; 3) длину медианы AD ; 4) площадь треугольника ABC .

8. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

9. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 45 = 0$. Написать: уравнение с угловым коэффициентом.

10. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $2x + 2y - 5 = 0$?

11. Найти уравнение медианы CK в треугольнике ABC , где $A(2;-4)$, $B(-6;8)$, $C(4;6)$.

12. Найти площадь треугольника ABC , заключенного между осями координат и прямой $3x - 5y - 45 = 0$.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3)$, параллельно прямой $2x - 5y + 7 = 0$.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;5)$, перпендикулярно к прямой $4x + 7y - 3 = 0$.

15. Найти уравнение и длину высоты AK в треугольнике ABC , где $A(2;-1)$, $B(-1;-2)$, $C(3;1)$.

16. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-5;7)$, $B(4;-5)$, $C(9;5)$. Найти: 1) уравнение стороны AB ; 2) уравнение высоты, проведенной из вершины C ; 3) расстояние от вершины C до прямой AB ; 4) уравнение медианы AD .

17. Даны уравнения высот треугольника ABC : $x + y - 2 = 0$, $9x - 3y - 4 = 0$ и координаты вершины $A(2;2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

18. Даны координаты вершин треугольника ABC . Найти: 1) длину стороны AB ; 2) уравнение стороны AB ; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C ; 4) расстояние от вершины B до стороны AC ; 5) уравнение медианы AD ; 6) площадь треугольника ABC .

a) $A(8; -1)$, $B(-8;11)$, $C(-1; -13)$. b) $A(5; -3)$, $B(1;0)$, $C(17; 2)$.

19. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если:

- 1) большая полуось равна $3\sqrt{2}$, малая полуось равна $2\sqrt{3}$;
- 2) расстояние между фокусами равно 24, малая полуось равна 5;
- 3) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен 0,8;
- 4) расстояние между фокусами равно 6, сумма полуосей равна 9.

20. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого эллипса, заданного соответствующим уравнением:

1) $6x^2 + 10y^2 = 60$; 2) $10x^2 + y^2 = 10$; 3) $4x^2 + 9y^2 = 1$.

21. Написать уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $4x^2 + 13y^2 = 52$.

22. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет фигуры, заданной уравнением $7x^2 + 9y^2 = 63$. Построить эту фигуру.

23. Написать уравнение прямой, проходящей через правый фокус и нижнюю вершину эллипса $9x^2 + 34y^2 = 306$.

24. Написать уравнение окружности, проходящей через правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$ и имеющей центр в точке $A(2; -7)$.

25. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3; \sqrt{15})$, $N(-3\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

26. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние Земли от Солнца равно приблизительно 147 500 000 км, а наибольшее 152 500 000. Найти большую полуось и эксцентриситет орбиты Земли.

27. Расстояние между двумя пунктами A и B равно 6 км. Записать уравнение геометрического места точек местности, для каждой из которых сумма расстояний до пунктов A и B постоянна и составляет 10 км.

28. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если:

1) действительная полуось равна $2\sqrt{5}$, мнимая полуось равна $3\sqrt{2}$;

2) расстояние между фокусами равно 10, мнимая полуось равна 4;

3) мнимая полуось равна 8, эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$;

4) расстояние между фокусами равно 26, сумма полуосей равна 17.

29. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между фокусами равно 20, уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$;

2) гипербола является равносторонней и проходит через точку $M(3; \sqrt{5})$;

3) действительная полуось равна $2\sqrt{2}$, гипербола проходит через точку $M(4; 2)$;

4) расстояние между фокусами равно 16, расстояние между директрисами равно 14.

30. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты каждой гиперболы, заданной соответствующим уравнением:

1) $4x^2 - 5y^2 = 20$; 2) $7x^2 - 9y^2 = 63$; 3) $x^2 - 8y^2 + 8 = 0$.

31. Написать уравнение окружности, проходящей через левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$ и имеющей центр в точке $A(-1; -2)$.

32. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 1$ и прямой $2x + y - 8 = 0$.

33. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты фигуры, заданной уравнением $9x^2 - 16y^2 = 144$. Построить эту фигуру.

34. Написать уравнение прямой, проходящей через правый фокус гиперболы $9x^2 - 34y^2 = 306$ и точку $A(-1; -2)$.

35. Развитие некоторого процесса описывается верхней ветвью гиперболы, фокусы которой расположены на оси Oy , а центр находится в точке с координатами $x_0 = 2300$ м, $y_0 = 1150$ м. Составить уравнение данной гиперболы, если ее действительная полуось равна 20 м, а мнимая 10 м.

36. Найти фокус и записать уравнение директрисы каждой параболы, заданной уравнением:

1) $y^2 = 14x$; 2) $y^2 = -8x$; 3) $x^2 = -6y$; 4) $x^2 = 2y$.

Построить данные параболы, их фокусы и директрисы относительно декартовой прямоугольной системы координат.

37. Записать каноническое уравнение параболы, если известно, что:

1) фокус находится в точке $F(2; 0)$;

2) фокус находится в точке $F(0; 4)$;

3) директриса имеет уравнение $x - 6 = 0$;

4) директриса имеет уравнение $y - 3 = 0$.

38. Написать уравнение окружности, проходящей через точку $B(2; -5)$, и имеющей центр в точке A , где A — вершина параболы $x^2 = -2(y+1)$.

39. Построить фигуру на плоскости, заданную уравнением $x^2 = -6y$.

40. Записать уравнение линии, если известно, что она аппроксимируется параболой с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $M(400; -200)$.

41. Записать канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A , B — точки, лежащие на кривой, F — фокус, a — большая (действительная) полуось, b — малая (мнимая) полуось, ε — эксцентриситет, y

$= \pm kx$ — уравнения асимптот гиперболы, D — директриса кривой, $2c$ — фокусное расстояние).

1. а) $b = 4, F(9;0)$; б) $a = 5, \varepsilon = 7/5$; в) $D: x = 6$.

2. а) $a = 4, F(3;0)$; б) $b = 2\sqrt{10}, F(-11;0)$; в) $F(3;0)$.

3. а) $b = \sqrt{15}, \varepsilon = \sqrt{10}/25$; б) $2a = 16, k = 3/4$; в) ось симметрии Ox и $A(4;-8)$.

42. Привести уравнения к каноническому виду. Построить эти фигуры на плоскости.

1) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$;

2) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$;

3) $y^2 + 4x - 2y + 13 = 0$;

4) $4y^2 + 9x^2 - 18x + 8y - 23 = 0$;

5) $4x^2 - 25y^2 - 8x - 100y - 196 = 0$.

Занятие № 4. Функция одной переменной. Предел функции. Непрерывность функции.

Примеры решения задач

1. Доказать по определению, что $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.

Решение.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - 2| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - 7| = |(3x + 1) - 7| = |3x - 6| < \varepsilon, \text{ т. е. } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положив $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, видим, что

для всех значений x , удовлетворяющих условию $0 < |x - 2| < \delta \left(\delta = \frac{\varepsilon}{3} \right)$,

выполняется неравенство $|(3x + 1) - 7| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.

2. Доказать по определению, что $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Решение.

При $x \neq 1$ $f(x) = x + 1$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Неравенство $|(x + 1) - 2| < \varepsilon$ выполняется, если $0 < |x - 1| < \varepsilon$, т. е. $\delta = \varepsilon$, и

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

3. Вычислить пределы функций:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$.

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (9x^2 - 6x + 8) = \lim_{x \rightarrow 1} 9x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 6x + \lim_{x \rightarrow 1} 8 =$$

$$= 9 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 1} x + 8 = 9 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 9 - 6 + 8 = 11.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1}.$$

Решение.

Пределы числителя и знаменателя существуют. Убедимся, что предел знаменателя отличен от 0: $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Тогда применимо свойство о пределе частного:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x}{2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{3}.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, заданную отношением двух многочленов, необходимо разложить многочлены на множители, сократить на множитель, равный нулю при предельном значении x , а затем перейти к пределу.

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1} + 2) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, в которой числитель (или знаменатель) содержит иррациональность, следует избавиться от иррациональности, домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное к числителю (или знаменателю).

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 6x - 3}{9x^3 + 8x^2 - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{9 + \frac{8}{x} - \frac{2}{x^3}} = \frac{0}{9} = 0.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x , а затем перейти к пределу.

7. При нахождении пределов могут встретиться неопределенности вида $[\infty - \infty]$ и $[0 \cdot \infty]$. Эти случаи путем преобразования функции приводятся к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\begin{aligned} 7.1. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0. \end{aligned}$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = 1.$$

8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x + 8}$.

Решение.

Если $x \rightarrow \infty$, то числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности и мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Выносим за скобки старшую степень переменной x и сокращаем на общий множитель:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x + 8} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{2x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2} + \frac{8}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{2 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 - 0 + 0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 3x - 2}$.

Решение.

Предел числителя и знаменателя равен нулю, имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 3x - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-2)}{-(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)}{(1-x)} = \frac{2-3}{1-2} = 1.$$

10. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 1}{2x + 1}.$

Решение.

Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то воспользуемся теоремой о пределах частного:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 1}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 5} (3x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 5} (2x + 1)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 1}{2 \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 1} = \frac{3 \cdot 5^2 - 1}{2 \cdot 5 + 1} = \frac{74}{11}.$$

11. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4}.$

Решение.

Предел числителя и знаменателя равен нулю, имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0} \right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x+2} = \frac{2+5}{2+2} = \frac{7}{4}.$$

12. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 4x}.$

Решение.

Вычислим этот предел с помощью первого замечательного предела:

(Известно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 4x} &= 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 4x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot x}{4 \cdot \sin 4x} = \frac{5}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \\ &= \frac{5}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{3x}.$

Решение.

Вычислим этот предел с помощью второго замечательного предела:

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \approx 2,71 \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^3 = e^3.$$

14. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^x$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{x+2}{x-3}$ на x , сведем данный предел к частному пределов из предыдущего примера:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^3 = e^3.$$

15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение.

Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

16. Доказать, что функция $\frac{7}{2x+5}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$.

Решение. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{2x+5}$. Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+5) = \infty$, то $(2x+5)$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина есть бесконечно малая. Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{2x+5} = 7 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+5} = 7 \cdot 0 = 0$, следовательно, функция $\frac{7}{2x+5}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$.

17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Сделаем замену $x=2t$, и воспользуемся вторым замечательным пределом, тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right)^2 = e^2.$$

18. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Решение.

Для данной функции точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если положить $f(0)=1$ (вместо $f(0)=2$), разрыв устранился и функция станет непрерывной. В остальных точках функция является непрерывной, как отношение двух непрерывных функций (x и $\sin x$).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти пределы:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 6x - 5x^2}{x^3 + x^2 + 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{5x^3 + 2x^2 - 1}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3 + 3x + 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{5x^3 + 2x^2 - 1}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3 + 3x + 1}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{3x^2 - 5} + \frac{x^2}{3x^2 + 1} \right); \quad 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2. Найти пределы:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 27}{x^2 - 2x - 3}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - x^2 + x}{2x}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 4x - 12}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 5x + 4}. \end{aligned}$$

3. Найти пределы:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 5x - 6}{\sqrt{x-2} - 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2 + 2x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 + x - 2}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{64 - x^2}{\sqrt{x+8} - 4}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - 5x}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} - 3}{\sqrt{5-x} - 2}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+8x} - 3}{\sqrt{4x} - 2}. \end{aligned}$$

4. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{x^2 - 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5 - \sqrt{x+25}}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+4} - 2}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^3 - 8}.$$

5. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+n}{x+m}\right)^x; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-4}\right)^x;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^x; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+3x}{3x}\right)^{x-2}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}.$$

6. Докажите, что функция $y = f(x)$ непрерывна слева в точке x_0 , и постройте график функции $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{при } x \leq 0, \\ 2x-x^2 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

7. Найти точки разрыва функции и указать их вид:

$$1) y = \frac{\sin(5+x)}{5+x}; \quad 2) y = \operatorname{tg} x; \quad 3) y = \frac{1+x^3}{1+x}; \quad 4) y = \frac{|x-3|}{x-3}; \quad 5) y = 3^{\frac{1}{x}};$$

$$6) y = \begin{cases} x^2, & x \leq 3 \\ 2x+1, & x > 3 \end{cases}; \quad 7) y = \frac{1}{|x-2|}; \quad 8) y = \begin{cases} x^2-1, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases};$$

Занятие № 5. Производная функции одной переменной. Исследование функций и построение их графиков.

Примеры решения задач

1. Найдите по определению производную функции $f(x) = x^2$ в точке x .

Решение. Воспользуемся формулой $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Имеем:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

2. Найдите производные следующих функций

$$1) y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3; \quad 2) y = (2x+3)\sin x; \quad 3) y = \frac{x^3}{\cos x};$$

$$4) y = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}; 5) y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Решение. 1) $y' = (2x^3 - 4x^2 + 5x - 3)' = (2x^3)' - (4x^2)' + (5x)' - (3)' =$
 $= 2(x^3)' - 4(x^2)' + 5(x)' = 6x^2 - 8x + 5;$

2) $y' = ((2x+3)\sin x)' = (2x+3)' \sin x + (2x+3)(\sin x)' = 2\sin x + (2x+3)\cos x;$

3) $y' = \left(\frac{x^3}{\cos x} \right)' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{3x^2 \cos x - x^3 (-\sin x)}{(\cos x)^2} =$
 $= \frac{x^2(3\cos x + x\sin x)}{\cos^2 x};$

4) Преобразуем исходную функцию к следующему виду:

$$y = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{7}{6}},$$

$$y' = \left(2x^{\frac{7}{6}} \right)' = 2 \cdot \frac{7}{6} x^{\frac{7}{6}-1} = \frac{7}{3} x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{3} \sqrt[6]{x};$$

5) Преобразуем исходную функцию к следующему виду $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = 4 \cdot x^{-\frac{2}{3}},$

тогда

$$y' = \left(4 \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right)' = 4 \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}} \right)' = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{8}{3} x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}} = -\frac{8}{3x \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

3. Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2 + x$ в точке $x=2$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Найдем ординату в точке $x_0=2$: $f(x_0) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$.

Далее найдём производную $y' = f'(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1$, и её значение в точке $f'(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Таким образом, $y = 5(x - 2) + 6$. Уравнение касательной: $y = 5x - 4$.

4. Найти производную функции $y = (2x+1)^5$.

Решение. Записываем: $y' = ((2x+1)^5)'$. Многочлен $2x+1$ – это внутренняя функция, а степенная функция – это внешняя функция.

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $((x)^n)' = nx^{n-1}$. Получаем:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)'$$

Теперь осталось найти производную от внутренней функции:

$$\begin{aligned} y' &= ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)' = \\ &= 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2+0) = 10(2x+1)^4. \end{aligned}$$

5. Найти производную функции $y = -\frac{1}{\cos x}$.

Здесь можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, но удобнее найти производную через правило

дифференцирования сложной функции: $y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)'$.

Сначала выполним несложные преобразования: $y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -(\cos^{-1} x)'$.

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция. Используем правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot (\cos^{-2} x) \cdot (\cos x)'$$

Находим производную внутренней функции, косинус записываем обратно в знаменателе:

$$y' = -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot (\cos^{-2} x) \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

6. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 3}$

Решение.

1) Поскольку знаменатель положителен, то функция непрерывна на всей числовой прямой, и вертикальные асимптоты отсутствуют.

2) Проверим наличие наклонных асимптот:

$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(2x^2+3)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2x^2+3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Первый предел конечен, поэтому вычисляем дальше. В ходе вычисления второго предела для устранения неопределённости «бесконечность минус бесконечность» приводим выражение к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+3} - \frac{1}{2} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x \cdot (2x^2+3)}{2(2x^2+3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - 3x}{2(2x^2+3)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x}{2x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{-3x}{x^2}}{\frac{2x^2+3}{x^2}} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{-3}{x}}{2+\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2+0} = 0.
 \end{aligned}$$

Второй предел тоже конечен, следовательно, у графика рассматриваемой функции существует наклонная асимптота: $y = kx + b$; $y = \frac{1}{2} \cdot x + 0$; $y = \frac{x}{2}$.

Таким образом, при $x \rightarrow \pm\infty$ график функции $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+3}$ бесконечно близко приближается к прямой $y = \frac{x}{2}$ (см. рис.81):

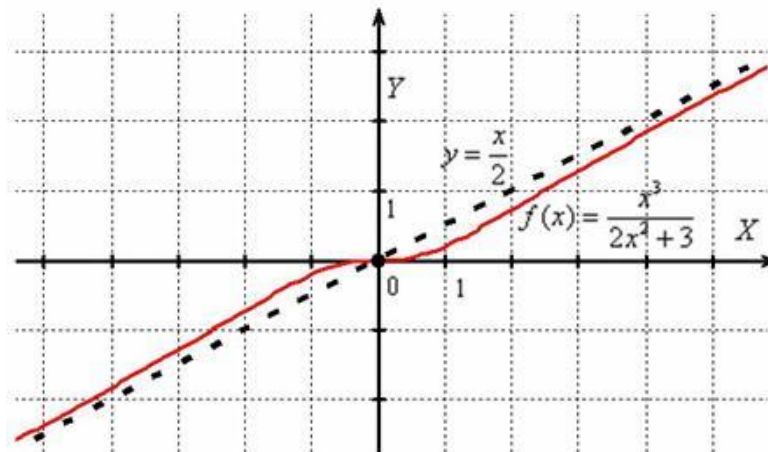


Рис.81

График функции пересекает свою наклонную асимптоту в начале координат, и такие точки пересечения вполне допустимы – важно, чтобы «всё было нормально» на бесконечности (собственно, речь об асимптотах и заходит именно там).

7. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

1) Вертикальные асимптоты. Исследуем точку $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(1-0)^2}{1-(1-0)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(1+0)^2}{1-(1+0)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой для графика $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

при $x \rightarrow 1$.

2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -1.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} - (-1) \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x(1-x)}{1-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1. \end{aligned}$$

Прямая $y = kx + b$; $y = (-1) \cdot x - 1$; $y = -x - 1$ является наклонной асимптотой для графика $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Ответ: $x=1$; $y = -x - 1$.

8. Найти интервалы возрастания/убывания и экстремумы функции

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$$

Решение.

1) На первом шаге нужно найти область определения функции, а также точки разрыва (если они существуют). В данном случае функция непрерывна на всей числовой прямой.

2) Находим производную и решаем уравнение $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5 - 0 = -x^2 + 6x - 5.$$

Получилось обычное квадратное уравнение:

$f'(x) = -x^2 + 6x - 5 = 0$; $D = 16 > 0$, $x = 1$, $x = 5$ – его корни. Итак, $x = 1$, $x = 5$ – критические точки.

3) На числовой прямой нужно отложить точки разрыва функции, критические точки и определить знаки производной на интервалах, которые входят в область определения функции.

В рассматриваемом примере функция непрерывна на $\mathbf{R}$, поэтому рассматриваем только найденные критические точки.

Перед нами парабола $f'(x) = -x^2 + 6x - 5 = -(x-1)(x-5)$, ветви которой направлены вниз. Отложим на числовой прямой найденные критические точки:

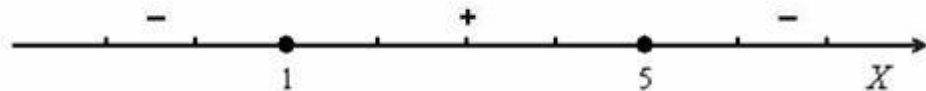


I) Берём какую-нибудь точку интервала $(-\infty; 1)$ и находим значение производной в данной точке. Удобнее всего выбрать $x = 0$: $f'(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 5 < 0$, значит, производная отрицательна на всём интервале $(-\infty; 1)$.

II) Выбираем точку $x = 2$, принадлежащую интервалу $(1; 5)$, и проводим аналогичное действие: $f'(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 5 = 3 > 0$, следовательно, $f'(x) > 0$ на всём интервале $(1; 5)$.

III) Вычислим значение производной в наиболее удобной точке $x = 6$ последнего интервала: $f'(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -5 < 0$, поэтому $f'(x) < 0$, в любой точке интервала $(5; +\infty)$.

В результате получены следующие знаки производной:



Итак, на интервалах $(-\infty; 1)$, $(5; +\infty)$ производная отрицательна, значит, сама функция $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ на данных интервалах убывает, и её график идёт «сверху вниз». На среднем интервале $f'(x) > 0$, значит, функция возрастает на $(1; 5)$, и её график идёт «снизу вверх».

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с «-» на «+», следовательно, в этой точке функция достигает минимума:

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1 = -\frac{1}{3} + 3 - 5 - 1 = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

При переходе же через точку $x = 5$ производная меняет знак с «+» на «-», и функция достигает максимума в данной точке:

$$f(5) = -\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 - 1 = -\frac{125}{3} + 75 - 25 - 1 = \frac{-125 + 49 \cdot 3}{3} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Ответ: функции возрастает на интервале $(1; 5)$ и убывает на интервалах $(-\infty; 1)$, $(5; +\infty)$. В точке $x = 1$ функция достигает минимума: $f(1) = -3\frac{1}{3}$, а в точке $x = 5$ – максимума: $f(5) = 7\frac{1}{3}$ (см. рис. 82).

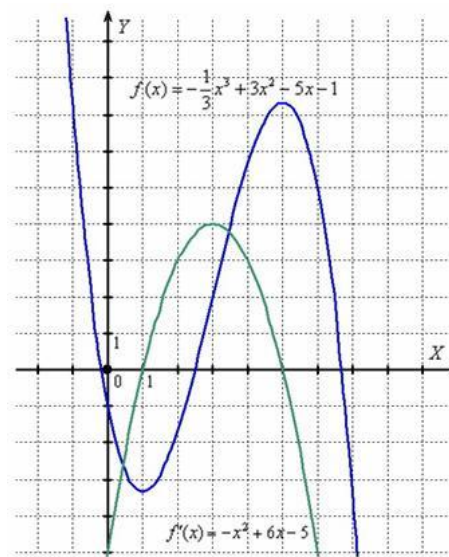


Рис. 82

На первом этапе мы нашли производную $f'(x) = -x^2 + 6x - 5$ и критические точки $x = 1$, $x = 5$ (в которых парабола пересекает ось абсцисс). Затем методом интервалов было установлено, где $f'(x) < 0$ (парабола ниже оси) и $f'(x) > 0$ (парабола выше оси). Таким образом, с помощью производной мы узнали интервалы возрастания/убывания и экстремумы «синей» функции.

9. Исследовать функцию с помощью первой производной $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Решение.

- 1) Функция терпит бесконечные разрывы в точках $x = -1$, $x = 1$.
- 2) Определяем критические точки. Найдём первую производную и приравняем её к нулю:

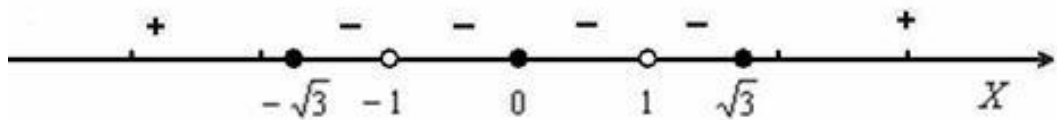
$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right)' = \frac{(x^3)'(x^2-1) - (x^3)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$\frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0.$$

Решим уравнение $f'(x) = 0$. Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю: $x^2(x^2-3) = 0$.

Таким образом, получаем три критические точки: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$

1) Откладываем на числовой прямой все обнаруженные точки и методом интервалов определяем знаки производной:



Итак, знаки производной показывают нам, что сама функция $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ и убывает на $(-\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \sqrt{3})$.

В точке $x = -\sqrt{3}$ функция достигает максимума:

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6$$

В точке $x = \sqrt{3}$ функция достигает минимума:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$$

При переходе через точку $x = 0$ производная не меняет знак, поэтому у функции там нет экстремума – она как убывала, так и осталась убывающей.

Точки $x = -1$, $x = 1$ не считаются критическими – в них функция не определена. Соответственно, здесь экстремумов не может быть в принципе (даже если производная меняет знак).

Ответ: функция возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ и убывает на $(-\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \sqrt{3})$. В точке $x = -\sqrt{3}$ достигается максимум функции:

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}, \text{ а в точке } x = \sqrt{3} \text{ – минимум: } f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

У графика функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ есть две вертикальные асимптоты $x = -1$, $x = 1$ и наклонная асимптота $y = x$.

График данной функции изображен на рис. 83.

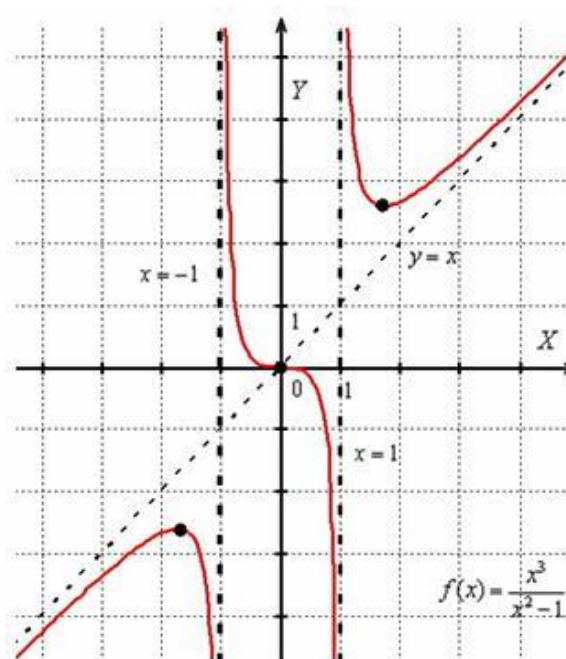


Рис. 83

В критической точке $x = 0$ экстремума нет, но существует перегиб графика (что, как правило, и бывает в подобных случаях).

10. Найти интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба графика

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{4} + 2$$

Решение:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

2) Найдём вторую производную. Можно предварительно выполнить возведение в куб, но удобнее использовать правило дифференцирования сложной функции:

$$f'(x) = \left(\frac{(x-1)^3}{4} + 2 \right)' = \frac{1}{4} ((x-1)^3)' + 2' = \frac{1}{4} 3(x-1)^2 (x-1)' + 0 = \frac{3}{4} (x-1)^2$$

Заметим, что $f'(x) = \frac{3}{4} (x-1)^2 \geq 0$, а значит, функция является неубывающей.

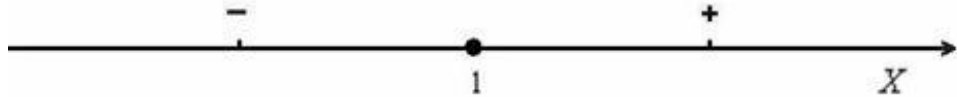
$$f''(x) = \left(\frac{3}{4} (x-1)^2 \right)' = \frac{3}{4} \cdot 2(x-1)^1 (x-1)' = \frac{3}{2} (x-1).$$

Найдём критические точки второй производной: $f''(x) = 0$; $\frac{3}{2} (x-1) = 0$; $x = 1$ – критическая точка.

3) Проверим выполнение достаточного условия перегиба. Определим знаки второй производной на полученных интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$.

Используем метод интервалов. $f''(0) = \frac{3}{2}(0-1) = -\frac{3}{2} < 0$, следовательно, $f''(0) < 0$ в любой точке интервала $(-\infty; 1)$. Из интервала $(1; +\infty)$ возьмём значение $x = 2$ и проведём аналогичное действие: $f''(2) = \frac{3}{2}(2-1) = \frac{3}{2} > 0$, а значит, $f''(2) > 0$ и на всём интервале $(1; +\infty)$.

В результате получены следующие знаки второй производной:



Таким образом, график самой функции $f(x) = \frac{(x-1)^3}{4} + 2$ является выпуклым вверх на интервале $(-\infty; 1)$ и выпуклым вниз на $(1; +\infty)$.

При переходе через $x = 1$ вторая производная меняет знак, поэтому в данной точке существует перегиб графика, причем $f(1) = \frac{(1-1)^3}{4} + 2 = 2$.

Ответ: график функции является выпуклым вверх на интервале $(-\infty; 1)$ и выпуклым вниз на $(1; +\infty)$, в точке $(1; 2)$ существует перегиб графика.

11. Найти интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба графика $f(x) = x^2 e^x$.

Решение.

1) Функция определена и непрерывна на $\mathbf{R}$.

2) Найдём критические точки второй производной:

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (2x + x^2).$$

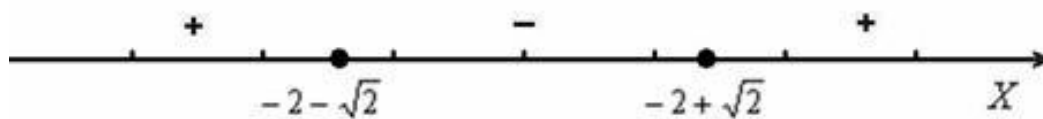
$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^x (2x + x^2))' = (e^x)' (2x + x^2) + e^x (2x + x^2)' = \\ &= e^x (2x + x^2) + e^x (2 + 2x) = e^x (2x + x^2 + 2 + 2x) = e^x (4x + x^2 + 2). \end{aligned}$$

Так как $e^x > 0$, то корни могут появиться только из решения квадратного уравнения: $x^2 + 4x + 2 = 0$, $D = 16 - 8 = 8$.

Дискриминант положителен, поэтому имеем две критические точки:

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}; \\ x &= \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2} \approx -3,41; \\ x &= \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2} \approx -0,59 \end{aligned}$$

3) Определим знаки второй производной. Можно использовать стандартный метод интервалов, но здесь $e^x > 0$, и учитывая, что $y = x^2 + 4x + 2$ – парабола, ветви которой направлены вверх, получаем:



Таким образом, график функции $f(x) = x^2 e^x$ является выпуклым вверх на интервале $(-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2})$ и выпуклым вниз на $(-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

В обеих критических точках существуют перегибы графика (так как 2-я производная при переходе через них меняет знак).

Найдём ординаты данных точек: $f(-2 - \sqrt{2}) = (-2 - \sqrt{2})^2 e^{-2 - \sqrt{2}} \approx 0,38$,
 $f(-2 + \sqrt{2}) = (-2 + \sqrt{2})^2 e^{-2 + \sqrt{2}} \approx 0,19$.

Ответ: график функции является выпуклым вверх на интервале $(-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2})$ и выпуклым вниз на $(-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}; +\infty)$. В точках $x = -2 - \sqrt{2}; x = -2 + \sqrt{2}$ существуют перегибы графика.

График изображен на рис. 84.

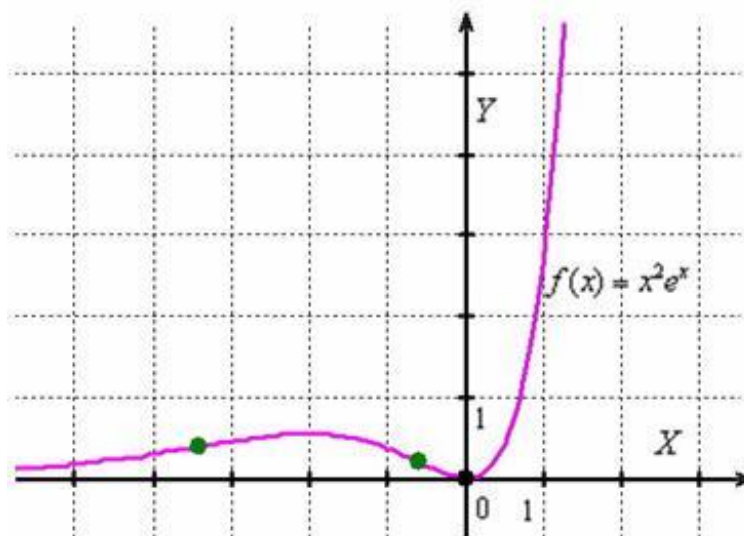


Рис. 84

При переходе через левую зелёную точку график начинает плавно выгибаться вверх – и до второй точки у нас интервал выпуклости вверх. Затем снова следует плавный прогиб вниз и на крайнем правом интервале имеет место выпуклость вниз графика.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите по определению производные функции в точках $x_0=1$, $x_0=2$:
 - a. $y = 3x^2 + x - 2$;
 - b. $y = x^2 - 2x + 10$;

с. $y = -5x^2 + 6x + 1$.

2. Найдите производные следующих функций:

1) $y = 4x^3 - 5x^2 - \frac{6}{x} + 10$;

2) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$;

3) $y = \frac{1}{x^3} - \sqrt{x} - x^2$;

4) $y = \sin x \cdot \ln x + x^3 - \sqrt{x} + 4$;

5) $y = (4x^3 - 5x^2 - 6) \cdot \cos x$;

6) $y = x \sin x$;

7) $y = (x^2 + 1) \cdot \cos x$;

8) $y = (x^3 + 2) \cdot \sqrt{x}$;

9) $y = \frac{2x-1}{x+2}$;

10) $y = \frac{\ln x}{x}$;

11) $y = \frac{x+1}{x^2+2}$;

12) $y = \frac{e^x}{\cos x}$.

3. Найти производные y' функций

1) $y = \frac{x + 2x^2 - 1}{\sqrt{x}}$;

2) $y = 5 \operatorname{tg}^2 3x^2$;

3) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$;

4) $y = \cos^2 5x - \sin^2 3x$;

5) $y = \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}$;

6) $y = x \sin 3x^2$;

7) $y = \arcsin \sqrt{x}$;

8) $y = x^2 \cos \sqrt{x}$;

9) $y = \sqrt{x^3 \cos x}$;

10) $y = \operatorname{tg}(1 - x^3)$;

11) $y = \lg(x + e^x)$;

12) $y = \ln(\operatorname{tg} x)$.

4. Напишите уравнения касательных к графикам функции в точке $x_0=2$:

а. $y = x^2 + 6x + 1$;

б. $y = -3x^2 - x + 2$;

с. $y = 2x^2 - 4x + 3$.

5. Исследовать функции и построить их графики.

1) $y = x^3 + 3x^2 - 1$;

2) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$;

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| 3) $y = x^3 - 3x + 5;$ | 4) $y = x - \sqrt{x};$ |
| 5) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1;$ | 6) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x};$ |
| 7) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2;$ | 8) $y = \frac{(x+1)^2}{2+x};$ |
| 9) $y = x^3 - 12x + 1;$ | 10) $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3};$ |
| 11) $y = x^3 - 3x^2 + 1;$ | 12) $y = \frac{x^3}{2 - 2x^2};$ |
| 13) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3;$ | 14) $y = \frac{3x - x^2 - 4}{3 - x};$ |
| 15) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2;$ | 16) $y = \frac{x^3}{1 - x^2};$ |
| 17) $y = 3x^2 - x^3 + 2;$ | 18) $y = \frac{x^2}{x+1}.$ |

Занятие № 6. Неопределенный интеграл.

Примеры решения задач

1. Найти неопределенный интеграл $\int x^3 dx$.

Используем формулу таблицы интегралов $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$). В нашем случае $\alpha = 3$. Степень «икса» α увеличиваем на единицу и делим на эту новую степень. Получаем:

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

Сделаем проверку $(\frac{x^4}{4} + C)' = \frac{1}{4}(x^4)' + C' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3$. Проверка показала, что интеграл вычислен верно.

2. Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.
 $\int (x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3}) dx$

Решение.

$$\begin{aligned}
\int (x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3}) dx &= \int x dx + \int \sqrt{x} dx - \int 3x^5 dx + \int \frac{2}{x^3} dx = \\
&= \int x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - 3 \int x^5 dx + 2 \int x^{-3} dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 3 \frac{x^{5+1}}{5+1} + 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3 \frac{x^6}{6} + 2 \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^6}{2} - x^{-2} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + C
\end{aligned}$$

(1) Применяем правило $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$. Не забываем записать значок дифференциала dx под каждым интегралом.

(2) Согласно правилу $\int k f dx = k \cdot \int f dx$, выносим все константы за знаки интегралов.

Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$. Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести в числитель.

(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулу $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$).

Константу C достаточно добавить один раз в конце выражения (а не ставить их после каждого интеграла).

(4) Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида $x^{\frac{a}{b}}$ снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем – переносим обратно в знаменатель.

Проверка. Для того чтобы выполнить проверку нужно продифференцировать полученный ответ:

$$\begin{aligned}
(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + C)' &= \frac{1}{2} (x^2)' + \frac{2}{3} (x^{\frac{3}{2}})' - \frac{1}{2} (x^6)' - (x^{-2})' + C' = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 6x^5 - (-2)x^{-3} + 0 = x + x^{\frac{1}{2}} - 3x^5 + 2x^{-3} = x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3}
\end{aligned}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

$$\begin{aligned}
3. \int \left(3 \cos x + 5 - 2x^3 + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2 + 1} \right) dx &= \\
&= 3 \int \cos x dx + 5 \int dx - 2 \int x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx - 7 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx =
\end{aligned}$$

$$= 3\sin x + 5x - \frac{1}{2}x^4 + \ln|x| - 7\operatorname{arctg} x + C.$$

Здесь мы пользовались свойствами интеграла о том, что интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, а также тем, что константу можно выносить за знак интеграла. При этом интеграл, содержащий 5 слагаемых разбивается на 5 мелких интегралов от каждого слагаемого.

4. Найти неопределенный интеграл $\int x^2(3+4x)^2 dx$. Выполнить проверку.

Решение. Анализируя интеграл, мы видим, что у нас произведение двух функций, да еще и возведение в степень целого выражения. К сожалению, нет хороших и удобных формул для интегрирования произведения и частного

$$\int (f \cdot g) dx \neq \int f dx \cdot \int g dx, \quad \int \left(\frac{f}{g}\right) dx \neq \frac{\int f dx}{\int g dx}.$$

А поэтому, когда дано произведение или частное, всегда имеет смысл посмотреть, а нельзя ли преобразовать подынтегральную функцию в сумму?

Рассматриваемый пример – тот случай, когда можно.

$$\begin{aligned} \int x^2(3+4x)^2 dx &= \int x^2(9+24x+16x^2) dx = \int (9x^2+24x^3+16x^4) dx = \\ &= 9 \int x^2 dx + 24 \int x^3 dx + 16 \int x^4 dx = 9 \frac{x^3}{3} + 24 \frac{x^4}{4} + 16 \frac{x^5}{5} + C = 3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C. \end{aligned}$$

(1) Используем формулу квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, избавляясь от степени.

(2) Вносим x^2 в скобку, избавляясь от произведения.

(3) Используем свойства линейности интеграла (оба правила сразу).

(4) Преобразуем интегралы по табличной формуле $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

(5) Упрощаем ответ.

Проверка:

$$\begin{aligned} (3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C)' &= (3x^3)' + (6x^4)' + (\frac{16}{5}x^5)' + C' = \\ 3 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 4x^3 + \frac{16}{5} \cdot 5x^4 + 0 &= 9x^2 + 24x^3 + 16x^4 = x^2(9 + 24x + 16x^2) = x^2(3 + 4x)^2 \end{aligned}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

5. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx$. Выполнить

проверку.

Решение. В данном примере подынтегральная функция представляет собой дробь. Можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \\
&\int \left(2x^{3-\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int \left(2x^{\frac{5}{2}} - x^2 + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\
&= \frac{2}{7} \cdot 2x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^3}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{7} \sqrt{x^7} - \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались свойствами степеней $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$; $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Также обратите внимание, что в решении пропущен один шаг, а именно, применение правил $\int kf dx = k \cdot \int f dx$, $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$. Обычно уже при начальном опыте решения интегралов данные свойства считают само собой разумеющимися и не расписывают подробно.

6. Найти неопределенный интеграл $\int \cos 2x dx$. Выполнить проверку.

Решение. В таблице интегралов находим похожую формулу: $\int \cos x dx = \sin x + C$. Однако у нас под косинусом не просто буква «икс», а «два икс». Попробуем предположить, что $\int \cos 2x dx = \sin 2x + C$. Сделаем проверку $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$. Вспомним, что $\sin 2x$ сложная функция, поэтому при вычислении производной мы еще умножали на производную внутренней функции $2x$ равной 2. Получили $2\cos 2x$, а у нас просто $\cos 2x$. Значит нужно эту двойку как то сократить, т.е. умножить на $\frac{1}{2}$. Получаем:

$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. Проверка: $(\frac{1}{2} \sin 2x)' = \frac{1}{2} \cdot 2\cos 2x = \cos 2x$. Теперь все верно.

Фактически, этот интеграл легко посчитать, если воспользоваться следующей формулой:

$$\text{Если } \int f(t) dt = F(t) + C, \text{ то } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

В нашем случае $f(x) = \cos x$; $a = 2$; $b = 0$.

7. Найти неопределенный интеграл $\int \sin(3x+1) dx$. Выполнить проверку.

Решение. В таблице интегралов находим похожую формулу: $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Но проблема заключается в том, что у нас под синусом не просто буковка «икс», а сложное выражение. Подводим функцию $3x+1$ под знак дифференциала: $\int \sin(3x+1) dx = \frac{1}{3} \int \sin(3x+1) d(3x+1)$.

Раскрывая дифференциал, легко проверить, что:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \int \sin(3x+1) d(3x+1) &= \frac{1}{3} \int \sin(3x+1) (3x+1)' dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \sin(3x+1) \cdot 3 dx = \int \sin(3x+1) dx.\end{aligned}$$

Фактически $\int \sin(3x+1) dx$ и $\frac{1}{3} \int \sin(3x+1) d(3x+1)$ – это запись одного и того же.

Формула $\int \sin x dx = -\cos x + C$. (и все другие табличные формулы) справедливы и применимы не только для переменной x , но и для любого сложного выражения лишь бы аргумент функции ($3x+1$ – в нашем примере) и выражение под знаком дифференциала были одинаковыми.

Поэтому мысленное рассуждение при решении должно складываться примерно так: «Мне надо решить интеграл $\int \sin(3x+1) dx$. Я посмотрел в таблицу и нашел похожую формулу $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Но у меня сложный аргумент ($3x+1$) и формулой я сразу воспользоваться не могу. Однако если мне удастся получить ($3x+1$) и под знаком дифференциала, то всё будет нормально. Если я запишу $d(3x+1)$, тогда $d(3x+1) = (3x+1)' dx = (3+0) dx = 3 dx$. Но в исходном интеграле $\int \sin(3x+1) dx$ множителя-тройки нет, поэтому, чтобы подынтегральная функция не изменилась, мне надо ее домножить на $\frac{1}{3}$ ». В

ходе примерно таких мысленных рассуждений и рождается запись:

$$\int \sin(3x+1) dx = \frac{1}{3} \int \sin(3x+1) d(3x+1).$$

Теперь можно пользоваться табличной формулой $\int \sin x dx = -\cos x + C$:

$$\int \sin(3x+1) dx = \frac{1}{3} \int \sin(3x+1) d(3x+1) = -\frac{1}{3} \cos(3x+1) + C.$$

Единственное отличие, у нас не буква «икс», а сложное выражение ($3x+1$). Выполним проверку.

$$\begin{aligned}(-\frac{1}{3} \cos(3x+1) + C)' &= -\frac{1}{3} (\cos(3x+1))' + C' = -\frac{1}{3} (-\sin(3x+1)) \cdot (3x+1)' + 0 = \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x+1) \cdot 3 = \sin(3x+1).\end{aligned}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

Обратите внимание, что в ходе проверки мы использовали правило дифференцирования сложной функции $(f(g))' = f' \cdot g'$. По сути дела подведение функции под знак дифференциала и $(f(g))' = f' \cdot g'$ – это два взаимно обратных правила.

Если воспользоваться формулой $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, то этот ответ можно получить сразу. Здесь $f(x) = \sin x$; $a = 3$; $b = 1$

8. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$.

Решение. Проведем замену: $t = (3-4x)$, $dt = d(3-4x) = (3-4x)'dx = -4dx$,
 $dx = -\frac{dt}{4}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} &= -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4} \int t^{-\frac{2}{3}} dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{4} \cdot 3t^{\frac{1}{3}} + C = \\ &= -\frac{3}{4} \sqrt[3]{t} + C = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{3-4x} + C\end{aligned}$$

В результате замены исходный интеграл значительно упростился – свёлся к обычной степенной функции. Это и есть цель замены – упростить интеграл.

Можно вычислить данный интеграл также методом подведения функции под знак дифференциала:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} &= -\frac{1}{4} \int (3-4x)^{-\frac{2}{3}} d(3-4x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(3-4x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \\ &= -\frac{3}{4} \sqrt[3]{3-4x} + C\end{aligned}$$

Оформлять решение можно и так:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} &= \left[\begin{array}{l} t = (3-4x) \\ dt = d(3-4x) = -4dx \end{array} \quad dx = -\frac{1}{4} dt \right] = \int \frac{-\frac{1}{4} dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4} \int t^{-\frac{2}{3}} dt = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{4} \cdot 3t^{\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{t} + C = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{3-4x} + C.\end{aligned}$$

9. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x dx}{(3x+2)^7}$.

Решение. Выполним замену: $t = (3x+2)$.

Далее, $dt = d(3x+2) = (3x+2)'dx = 3dx$; $dx = \frac{dt}{3}$. Выразим x из той же замены $t = (3x+2)$.

$$t = (3x+2) \Rightarrow 3x = t-2 \Rightarrow x = \frac{t-2}{3} = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{(3x+2)^7} &= \left[\begin{array}{l} t = 3x+2 \quad dx = \frac{1}{3} dt \\ x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3} \end{array} \right] = \int \frac{\left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\right) \frac{1}{3} dt}{t^7} = \frac{1}{9} \int \frac{(t-2) dt}{t^7} = \\ &= \frac{1}{9} \int \left(\frac{t}{t^7} - \frac{2}{t^7} \right) dt = \frac{1}{9} \int (t^{-6} - 2t^{-7}) dt = \frac{1}{9} \left(\frac{t^{-5}}{-5} - 2 \frac{t^{-6}}{-6} \right) + C = \\ &= -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{5t^5} - \frac{1}{3t^6} \right) + C = -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{5(3x+2)^5} - \frac{1}{3(3x+2)^6} \right) + C.\end{aligned}$$

10. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x dx}{4x^2+1}$.

Решение. Основная предпосылка использования метода замены переменной: в подынтегральном выражении должна находиться некоторая сложная функция $f(\varphi(x))$ и производная её внутренней функции $\varphi'(x)$.

Сделаем замену $t = \varphi(x)$. Тогда

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f(t) dt,$$

эта формула применяется как «слева направо», так и «справа налево». При этом в случае «удачной» замены переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или сводящимся к табличному. Умение правильно подобрать замену переменной приобретаете практикой.

В рассматриваемом примере замечаем, что степень числителя на единицу меньше степени знаменателя. В таблице производных находим формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, которая как раз понижает степень на единицу. А, значит, если обозначить за t знаменатель, то велики шансы, что числитель $x dx$ превратится во что-нибудь хорошее.

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{4x^2+1} &= \left[\begin{array}{l} t = 4x^2+1 \quad x dx = \frac{dt}{8} \\ dt = d(4x^2+1) = (4x^2+1)' dx = 8x dx \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{\frac{dt}{8}}{t} = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8} \ln|t| + C = \frac{1}{8} \ln|4x^2+1| + C\end{aligned}$$

Замена: $t = (4x^2+1)$; $dt = d(4x^2+1) = (4x^2+1)' dx = 8x dx$. Замечаем, что в последнем равенстве присутствует $8x dx$. Отсюда легко выразить просто $x dx$, а именно $x dx = \frac{dt}{8}$. Таким образом знаменатель превращается в t , числитель в $\frac{dt}{8}$

Можно также подвести функцию под знак дифференциала:

$$\int \frac{x dx}{4x^2+1} = \frac{1}{8} \int \frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1} = \frac{1}{8} \ln|4x^2+1| + C.$$

11. Найти $\int e^{\frac{x}{3}} dx$.

Решение. Сделаем замену $x = 3t$. Тогда $dx = 3dt$ и

$$\int e^{\frac{x}{3}} dx = \int e^t \cdot 3dt = 3 \int e^t dt = 3e^t + C = 3e^{\frac{x}{3}} + C.$$

12. Найти $\int \sin^6 x \cos x dx$.

Решение. Под знаком интеграла есть сложная функция $\sin^6 x$ и рядом стоит производная внутренней функции $\sin x$, которая равна $\cos x$. Внутреннюю функцию $\sin x$ мы и заменяем новой переменной. Пусть $\sin x = t$. Тогда $dt = (\sin x)' dx = \cos x dx$ и

$$\int \sin^6 x \cos x dx = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

В данном примере $\sin x$ мы заменили на t , а $\cos x dx$ превратился в dt .

13. Найти $\int x\sqrt{x-5} dx$.

Решение. Пусть $\sqrt{x-5} = t$. Тогда $x = t^2 + 5$, $dx = 2t dt$ и

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-5} dx &= \int (t^2 + 5) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 + 5t^2) dt = 2 \int t^4 dt + 10 \int t^2 dt = \\ &= 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 10 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

14. Вычислить следующие неопределенные интегралы, сделав соответствующие замены:

а) $\int \sin(3x+2) dx$; б) $\int \operatorname{tg} x dx$; в) $\int e^{\frac{x}{4}} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \sin(3x+2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x+2, \\ dt = (3x+2)' dx = 3dx, \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int \sin t dt = \\ &= -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos(3x+2) + C; \\ \text{б) } \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = (\cos x)' dx = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C; \\ \text{в) } \int e^{\frac{x}{4}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{4}, \\ x = 4t, \\ dx = 4dt, \end{array} \right| = 4 \int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C. \end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, произведение функций, а в ряде случаев – и частное. Как мы помним, нет удобной формулы: $\int (f \cdot g) dx \neq \int f dx \cdot \int g dx$. Зато есть такая:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ – формула интегрирования по частям.}$$

По частям берутся интегралы следующих видов:

1) $\int \ln x dx$, $\int x^n \ln x dx$, $\int x^n \ln^m x dx$, – логарифм, логарифм, умноженный на какой-нибудь многочлен.

2) $\int x e^{\alpha x} dx$, $\int x^n e^{\alpha x} dx$, – экспоненциальная функция, умноженная на какой-нибудь многочлен.

3) $\int x \cos \alpha x dx$, $\int x \sin \alpha x dx$ – тригонометрические функции, умноженные на какой-нибудь многочлен.

4) $\int \arcsin x dx$, $\int x^n \arccos x dx$ – обратные тригонометрические функции («арки»), «арки», умноженные на какой-нибудь многочлен.

Так, при вычислении интегралов вида $\int x^n e^{\alpha x} dx$, $\int x^n \sin \alpha x dx$, $\int x^n \cos \alpha x dx$, где α – число, полагают $u = x^n$, а за dv обозначают остальные сомножители.

При вычислении интегралов вида $\int x^n \arcsin x dx$, $\int x^n \arccos x dx$, $\int x^n \ln x dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x dx$, полагают $x^n dx = dv$, а за u обозначают остальные сомножители.

15. Найти $\int x \cos x dx$.

Решение. Используем формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$. Формула применяется слева направо.

Левая часть формулы: $\int u dv$. В интегралах рассматриваемого типа за u всегда обозначается x .

Технически оформление решения реализуется следующим образом, в столбик записываем:

$$u = x,$$

$$dv = \cos x dx,$$

То есть, за u мы обозначили x , а за dv – оставшуюся часть подынтегрального выражения.

Следующий этап: находим дифференциал du : $du = (x)' dx = 1 \cdot dx = dx$.

Теперь находим функцию v . Для того чтобы найти функцию v необходимо проинтегрировать правую часть нижнего равенства $dv = \cos x dx$:

$$v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x.$$

Теперь в правую часть формулы вместо u подставляем x , а вместо v подставляем $\sin x$. Имеем:

$$\int x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = (x)' dx = 1 \cdot dx = dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right] =$$

$$= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Отметим, что при проведении вспомогательных рассуждений, которые записаны в квадратных скобках, достаточно найти какое-либо одно выражение для функции v . Поэтому в неопределенном интеграле $\int dv = \int \cos x dx = \sin x$ произвольную постоянную считают равной нулю, т. е. фактически находят только одну из первообразных.

16. Найти неопределенный интеграл $\int \ln x dx$.

Решение. Используем формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$. Формула применяется слева направо. Смотрим на левую часть: $\int u dv$. В интегралах рассматриваемого типа за u всегда обозначается логарифм.

Технически оформление решения реализуется следующим образом, в столбик записываем:

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

То есть, за u мы обозначили логарифм, а за dv – оставшуюся часть подынтегрального выражения.

Следующий этап: находим дифференциал du :

$$u = \ln x, \quad du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx$$

Теперь находим функцию v . Для того чтобы найти функцию v необходимо проинтегрировать правую часть нижнего равенства $dv = dx$:
 $v = \int dx = x$

Теперь в правую часть формулы вместо u подставляем логарифм, а вместо v подставляем x . Имеем:

$$\int \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right] = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.$$

17. Вычислите интеграл $\int x e^x dx$.

Решение.

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^x dx \\ du = dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

18. Вычислите интеграл $\int (2x + 3) \sin x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int (2x + 3) \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x + 3, \quad dv = \sin x dx \\ du = 2 dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = (2x + 3) \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot (2 dx) = \\ &= -(2x + 3) \cdot \cos x + 2 \int (\cos x dx) = -(2x + 3) \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x + C. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите неопределённые интегралы

1) $\int (x^2 + 3 - 2x^3) dx$; 2) $\int (x^3 + 3\sqrt{x} - 2x) dx$;

3) $\int (3x + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}) dx$; 4) $\int (x + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}) dx$;

5) $\int \left(3 \sin x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{7}{\cos^2 x} \right) dx$; 6) $\int \frac{2x^4 - \sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt{x}} dx$;

7) $\int \cos(2x + 5) dx$; 8) $\int \frac{dx}{3 + 7x}$.

2. Вычислите интегралы, применив метод замены переменной

1) $\int \sin(5x + 2) dx$; 2) $\int \frac{dx}{2 - 3x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1 - 3x)^3}}$; 4) $\int \frac{3x dx}{(2x + 5)^3}$;

5) $\int 5e^{5x} dx$; 6) $\int \cos^3 x \sin x dx$;

7) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx$; 8) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}} dx$;

9) $\int \frac{x^3}{1 + x^4} dx$; 10) $\int e^{x^4} x^3 dx$;

11) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}$; 12) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.

3. Вычислите интегралы, применив метод интегрирования по частям

1) $\int (x + 3)e^x dx$; 2) $\int \ln 5x dx$;

3) $\int x \sin \frac{1}{2} x dx$; 4) $\int x \ln 7x dx$;

5) $\int x e^{5x} dx$;

6) $\int (x + 4) \cos x dx$;

7) $\int x \arcsin 3x dx$;

8) $\int \arcsin 2x dx$.

Занятие № 7. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла.

Примеры решения задач

1. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^2 2x^2 dx$.

Решение.

$$\int_{-1}^2 2x^2 dx = 2 \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{2}{3} (2^3 - (-1)^3) = \frac{2}{3} (8 + 1) = 6.$$

Действия осуществлены в следующем порядке:

1) вынесли константу за знак интеграла;

2) интегрируем по таблице с помощью формулы $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ и

получаем первообразную $\frac{x^3}{3}$ (появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно вынести за скобку);

3) используем формулу Ньютона-Лейбница, при этом сначала подставляем в x^3 верхний предел интегрирования (число 2), затем нижний предел (число -1), вычисляем разность этих чисел и получаем окончательный ответ.

2. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x^2 dx$.

Решение.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

3. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Решение. Используем формулу из таблицы интегралов $\int \sin x dx = -\cos x + C$. В первообразную $-\cos x$ мы подставляем вместо x

сначала верхний предел интегрирования $\frac{\pi}{2}$, а затем нижний предел 0 и берем разность этих чисел. Получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1.$$

4. Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= 8 \int_{-2}^4 dx + 2 \int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx = 8(x) \Big|_{-2}^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-2}^4 = \\ &= 8(4 - (-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3} (4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3} (64 + 8) = \\ &= 48 + 12 - 24 = 36. \end{aligned}$$

Действия осуществлены в следующем порядке:

- 1) использованы свойства линейности определенного интеграла;
- 2) интегрируем по таблице, при этом все константы выносим за скобки;
- 3) для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница.

Решение можно оформить значительно короче:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = \left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4 = \left(32 + 16 - \frac{64}{3} \right) - \left(-16 + 4 + \frac{8}{3} \right) = 36.$$

5. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, применяя свойства определенного интеграла и формулу Ньютона–Лейбница, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

6. Найти $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x \, dx$.

Решение. Под знаком интеграла мы видим сложную функцию $e^{\sin x}$, производную функции $\sin x$ ($(\sin x)' = \cos x$). Поэтому функцию $\sin x$ мы

заменяем новой переменной t , $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x dx$. Если $x = 0$, то $t = \sin 0 = 0$; если $x = \frac{\pi}{2}$, то $t = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x, dt = \cos x dx; \\ x = 0, t = \sin 0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{2}, t = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Отметим, что используя метод поднесения под знак дифференциала, решение можно оформить также следующим образом.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d \sin x = \left[\begin{array}{l} t = \sin x; \\ x = 0, t = 0; \\ x = \frac{\pi}{2}, t = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e - 1.$$

7. Найти $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

Решение. Положим $x = 2 \sin t$. Тогда $dx = 2 \cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - 2 \left(0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) = \pi. \end{aligned}$$

8. Найти $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Решение. Введем новую переменную t по формуле $\sqrt{1 + x^2} = t$, тогда $1 + x^2 = t^2$, $2x dx = 2t dt$. Найдем новые пределы интегрирования: при $x = 0$ имеем $t = 1$; при $x = \sqrt{3}$, $t = 2$. Таким образом, получаем:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1 + x^2} = t, 1 + x^2 = t^2, 2x dx = 2t dt; \\ x = 0, t = 1; x = \sqrt{3}, t = 2 \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{t dt}{t} = \int_1^2 dt =$$

$$= t \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Используя метод поднесения под знак дифференциала, решение можно оформить так:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\sqrt{3}} d\sqrt{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = t; \\ x=0, t=1; x=\sqrt{3}, t=2 \end{array} \right] = \int_1^2 dt = t \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Здесь мы использовали следующее равенство:

$$d\sqrt{1+x^2} = \left(\sqrt{1+x^2} \right)' dx = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

9. Найти $\int_{-1}^3 x e^{x^2} dx$.

Решение. Под знаком интеграла мы видим сложную функцию e^{x^2} и «почти» производную функции x^2 (с точностью до константы) – это x ($(x^2)' = 2x$). Поэтому функцию x^2 мы заменяем новой переменной t . Находим пределы интегрирования: если $x = -1$, то $t=1$, а если $x=3$, то $t=9$. Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 x e^{x^2} dx &= \left[\begin{array}{ll} x^2 = t, \quad d(x^2) = dt, \quad 2x dx = dt, & x dx = \frac{dt}{2}; \\ x = -1; t = 1 & x = 3; t = 9 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^9 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_1^9 = \frac{1}{2} (e^9 - e^1). \end{aligned}$$

10. Найти $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = (x)' dx = 1 \cdot dx = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

11. Найти $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{arctg} x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\operatorname{arctg} x) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y = x$.

Решение. В этом примере часть фигуры находится под осью Ox , но на вычисление площади это не влияет. Построим графики, и выясним, какую площадь нам нужно найти (рис. 85). График первой функции – парабола (ветви вниз). График второй функции – прямая линия.

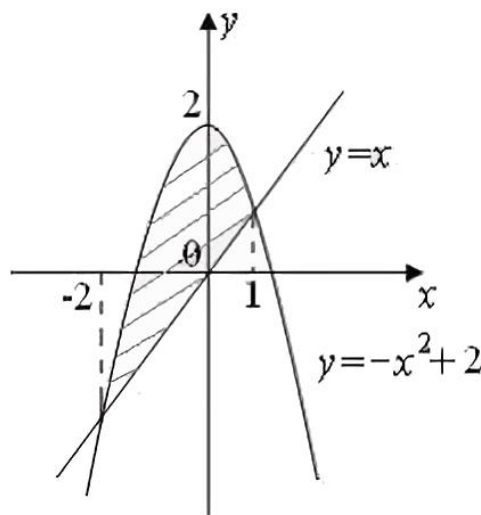


Рис. 85

Сначала найдем пределы интегрирования, решая следующую систему

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases}.$$

Приравниваем правые части $x = 2 - x^2$ и решаем квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, откуда получаем корни $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \\
 &= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = \\
 &= 2 + 4 + 2 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ (ед.}^2\text{)}.
 \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-2}^3 (5x^4 - 3x^2 + 1) dx;$$

$$2) \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{x+1};$$

$$4) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1};$$

$$5) \int_{-1}^2 (x^3 - 2x^2 + 5) dx;$$

$$6) \int_1^4 \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx;$$

2. Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

$$1) \int_0^1 x \cos x^2 dx;$$

$$2) \int_3^{15} \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} dx;$$

$$3) \int_1^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx;$$

$$4) \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$$

$$5) \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}};$$

$$6) \int_1^2 x \sqrt{2-x} dx;$$

3. Вычислить определенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$1) \int_0^1 x e^{2x} dx;$$

$$2) \int_1^e \ln x dx;$$

$$3) \int_0^{\pi/2} x \sin 4x dx;$$

$$4) \int_0^1 \arcsin x dx;$$

$$5) \int_0^{\pi} x \cos x dx;$$

$$6) \int_1^e x \ln x dx.$$

4. Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями.

$$1) y = 4x - x^2, y = 0;$$

$$2) y = 2x - x^2 + 8, y = 0;$$

$$3) y = x^2 - 5x + 4, y = 0;$$

$$4) y = x^2, y = 2 - x;$$

$$5) y = x^2, y = 4;$$

$$6) y = 2x - x^2, y = -x;$$

$$7) x = y^2 - 5y + 4, x = 0;$$

$$8) xy = 5, x + y = 6;$$

$$9) y = x - 1, x = 1, y = \frac{4}{x^2};$$

$$10) y = x^2 + 2, y + x = 4;$$

$$11) y = -x^2 - 3x + 6, y = x^2 - x - 6.$$

Занятие № 8. Элементы теории множеств. Элементы комбинаторики.

Примеры решения задач

1. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово МНОЖЕСТВО», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ГОСУДАРСТВО». Найти множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Решение. Множество A состоит из 8 различных букв: $A = \{М, Н, О, Ж, Е, С, Т, В\}$, а множество B состоит из 9 букв: $B = \{Г, О, С, У, Д, А, Р, Т, В\}$. Пересечением этих множеств является следующий набор из 4 букв: $A \cap B = \{О, С, Т, В\}$, который содержится как во множестве A , так и во множестве B . Объединением этих множеств является следующий набор из 13 букв:

$$A \cup B = \{Г, О, С, У, Д, А, Р, Т, В, М, Н, Ж, Е\}.$$

Разностью этих множеств вида $A \setminus B$ является набор букв $A \setminus B = \{М, Н, Ж, Е\}$, который принадлежит множеству A , но не содержится во множестве B . Другая разность множеств $B \setminus A = \{Г, У, Д, А, Р\}$, т.е. $A \setminus B \neq B \setminus A$.

2. Пусть A – множество иностранных студентов географического факультета, B – множество студентов первого курса географического факультета, U – множество всех студентов географического факультета. Описать словами множества: $\bar{A} \cup B$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \setminus B$, $B \setminus \bar{A}$.

Решение. Дадим описания заданных множеств: $\bar{A} = U \setminus A$ – множество студентов географического факультета, которые являются гражданами Республики Беларусь, тогда $\bar{A} \cup B$ – множество, которое состоит из студентов географического факультета, являющихся гражданами Республики Беларусь, и иностранных студентов первого курса географического факультета; $\bar{A} \cap B$ – множество студентов первого курса географического факультета, являющихся гражданами Республики Беларусь; $\bar{A} \setminus B$ – множество студентов географического факультета, являющихся гражданами Республики Беларусь, кроме студентов первого курса географического факультета; $B \setminus \bar{A} = B \cap A$ – множество иностранных студентов первого курса географического факультета.

3. Пусть A – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы не ниже 7 (т. е. на 7, 8, 9, 10)», и пусть B – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы не выше 8 (т. е. на 4, 5, 6, 7, 8)». Описать словами множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Решение. Имеем, $A \cup B$ – «множество студентов, сдавших сессию, т. е. получившие оценки от 4 до 10», $A \cap B$ – «множество студентов, сдавших сессию на баллы 7 и 8», $A \setminus B$ – «множество студентов, сдавших сессию на баллы 9 и 10», $B \setminus A$ – «множество студентов, сдавших сессию на баллы 4, 5 и 6».

4. В туристической группе из 30 человек 15 человек владеют английским языком, 11 – немецким, трое владеют обоими языками. Сколько человек в группе не владеют ни одним из этих языков?

Решение. Пусть U – «множество туристов группы», A – «множество туристов, владеющих английским языком», B – «множество туристов, владеющих немецким языком». Найдем количество туристов, владеющих английским или немецким языком:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 11 - 3 = 23.$$

Тогда количество человек в группе, не владеющих ни одним из этих языков, равно $n(\overline{A \cup B}) = 30 - 23 = 7$.

5. В группе студентов из 35 человек 18 студентов посещали спецкурс «ООН и современный мир», а 13 человек – спецкурс «ЕС в современном мире». Сколько студентов посещали оба эти спецкурса, если 7 человек группы посещали другие спецкурсы?

Решение. Пусть A – «множество студентов, которые посещали спецкурс «ООН и современный мир», B – «множество студентов, которые посещали спецкурс «ЕС в современном мире». Тогда количество студентов, которые посещали хотя бы один из этих спецкурсов $n(A \cup B) = 35 - 7 = 28$.

Далее получаем:

$$n(A \cup B) = 28 = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 18 + 13 - n(A \cap B).$$

Отсюда, $n(A \cap B) = 3$, т. е. 3 студента посещали оба спецкурса.

6. Пусть в магазине имеются 7 различных видов коробок конфет и 5 различных коробок печенья. Сколькими способами можно выбрать в подарок

коробку конфет или коробку печенья? Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?

Решение. Коробку конфет или коробки печенья можно выбрать согласно правилу суммы $7+5=12$ способами. Составить набор из коробки конфет и коробки печенья можно согласно правилу произведения $7 \cdot 5=35$ способами.

7. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова МОСКВА?

Решение. Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или А), а согласную – существует четыре варианта (М, С, К, В). Следовательно, согласно правилу произведения гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 4=8$ способами.

8. Сколькими способами 6 студенток могут встать в столовой в очередь?

Решение. Необходимо пересчитать способы расположения шести девушек в последовательность, т.е. речь идет о всех перестановках из n элементов, где $n=6$. Число таких перестановок равно $P_n = n! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

9. Из группы студентов, состоящей из 25 человек, играющих в шахматы, надо выбрать шахматную команду из четырех человек играющих на I, II, III и IV доске. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как из 25 человек выбираются четверо и порядок важен при распределении их по доскам, то число способов есть число размещений из 25 по 4, т.е.:

$$A_{25}^4 = 25!/(25-4)! = 25!/21! = 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 = 303600 \text{ способов.}$$

10. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

Решение. Выбираем 3 цифры из 7, порядок важен: $A_7^3 = 7!/4! = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ способов.

11. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг с полосами одинаковой ширины, если есть материал трех различных цветов и возможно как вертикальное, так и горизонтальное расположение полос?

Решение. При вертикальном расположении полос их можно расположить $P_3 = 3! = 6$ способами (число перестановок из трех элементов), и такое же количество способов – для горизонтального расположения полос. Так как на флагах возможно вертикальное или горизонтальное расположение полос, то согласно правилу суммы общее число таких флагов будет равно $6+6=12$.

12. Для занятий по информатике группа студентов факультета БГУ из 25 человек разбивается на две подгруппы А и Б по 13 и 12 человек соответственно. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Выбираем сначала подгруппу А. Выбор 13 человек из 25 можно осуществить C_{25}^{13} способами. Оставшиеся 12 человек составят подгруппу Б (ее можно выбрать $C_{12}^{12} = 1$ способом). Таким образом, данное разбиение можно осуществить $C_{25}^{13} = \frac{25!}{13! \cdot 12!} = 5\,200\,300$ способами.

13. Сколькими способами можно выбрать три человека на три различные должности из 10 кандидатов?

Решение. Искомое число способов равно числу размещений из 10 элементов по 3, т. е.

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

14. Сколькими способами можно выбрать три человека на три одинаковые должности из 10 кандидатов?

Решение. Число способов выбора трех человек на три одинаковые должности из 10 кандидатов равно числу сочетаний из 10 по 3, т. е.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

15. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из пяти человек, можно образовать из 12 преподавателей?

Решение. Нужно число экзаменационных комиссий равно

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть A – «множество иностранных студентов первого курса ФГиГ», B – «множество студентов 1-й группы первого курса ФГиГ». Описать словами множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

2. Пусть A – «множество студентов-отличников ФГиГ», B – «множество студентов 1-го курса ФГиГ», U – «множество всех студентов ФГиГ». Описать словами множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$.

3. В студенческой группе 20 человек изучают английский, 18 человек – французский язык. При этом 5 человек изучают оба эти языка, а 7 человек вообще не изучают иностранный язык. Сколько студентов в группе?

4. Сколькими способами 10 студентов могут встать в очередь друг за другом в университетской столовой?

5. Студенты изучают в каждом семестре восемь различных дисциплин. Расписание занятий на понедельник состоит из 4 различных дисциплин. Сколько различных расписаний на понедельник может составить методист факультета?

6. Сколько поединков по борьбе должны быть проведены между 15 спортсменами, если каждый из них должен встретиться с каждым?

7. В книжный магазин привезли новых 20 книг, из них по философии – 5, по географии – 8, по высшей математике – 4 и по психологии – 3. Сколькими способами можно составить набор для университетской библиотеки, чтобы в него входило 3 книги по философии, 5 по географии, 3 по высшей математике и 2 по психологии?

8. Сколькими способами 3 награды (за I, II, III места) могут быть распределены между 10 участниками математической олимпиады?

9. В конкурсе участвовало 8 фирм, трем из которых жюри должно присудить 1-е, 2-е и 3-е места. Сколько вариантов решения жюри существует?
10. Перед выпуском группа студентов, состоящая из 19 человек, обменялась фотографиями. Сколько всего фотографий было роздано?
11. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в запись числа только один раз?
12. Собрание из 35 человек выбирает председателя, секретаря и помощника. Сколько существует способов это сделать?
13. Вычислить C_{11}^3 , A_7^4 .
14. Предположим, что в записи 7-значного номера телефона используются только две цифры: 2 и 5. Сколько может быть таких различных номеров телефонов?
15. Из девяти различных задач для контрольной работы выбирается пять. Сколько различных вариантов контрольной работы можно составить?
16. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы каждое из них начиналось с комбинации «45»?
17. Сколько среди трёхзначных чисел встречается таких, в записи которых не участвует число 6?
18. 5 групп занимаются в 5-ти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?
19. В стране 20 городов, каждые 2 из которых соединены авиалиниями. Сколько авиалиний в этой стране?
20. Сколькими способами можно разбить 10 человек на 2 баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

Занятие № 9. Случайные события и вероятности.

Примеры решения задач

1. Опыт состоит в извлечении шара из урны, в которой находятся шары трех цветов (черные, белые и красные). Рассмотрим события A = «извлечен шар белого цвета»; B = «извлечен шар красного цвета»; C = «извлечен шар черного цвета». Что представляют собой события: $A+B$, $\overline{A+C}$, AB , $AC+B$?

Решение. $A+B$ – это событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B . Следовательно, $A+B$ – «извлечен шар белого или красного цвета». Так как $A+C$ – «извлечен шар белого или черного цвета», то $\overline{A+C}$ – это событие, противоположное событию $A+C$, т.е. $\overline{A+C}$ – «извлечен шар ни белого и ни черного цвета», а значит он красного цвета. AB – невозможное событие, поскольку шар одновременно не может быть белого и красного цвета. $AC+B$ – это сумма невозможного события AC и события B , равная событию B , т.е. $AC+B$ – «извлечен шар красного цвета».

2. Некоторые клиенты банка приходят в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания 4 человека. Что собой представляют события – брать проценты будут: а) четыре человека; б) три

человека; в) два человека; г) один человек; д) хотя бы два человека; е) хотя бы один человек.

Решение. Обозначим события:

A_1 – «первый клиент пришел брать проценты»;

A_2 – «второй клиент пришел брать проценты»;

A_3 – «третий клиент пришел брать проценты»;

A_4 – «четвертый клиент пришел брать проценты».

Тогда противоположными для каждого из них будут события:

$\overline{A_1}$ – «первый клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_2}$ – «второй клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_3}$ – «третий клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_4}$ – «четвертый клиент не будет брать проценты».

Обозначим также события:

B – «пришли брать проценты с вклада четыре человека», тогда $B = A_1 A_2 A_3 A_4$;

C – «пришли брать проценты с вклада три человека», тогда $C = A_1 A_2 A_3 \overline{A_4} + A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 + A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 A_4$;

D – «пришли брать проценты с вклада два человека», тогда $D = A_1 A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} A_4 + A_1 A_2 A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4 + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4$;

E – «пришел брать проценты с вклада один человек» $E = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} A_4$;

F – «хотя бы два человека пришли брать проценты с вклада». Событие F означает также, что пришли брать процент с вклада либо два, либо три, либо все четыре человека, т.е. $F = D + C + B$.

H – «хотя бы один человек пришел брать проценты с вклада». Событие H означает также, что пришли брать процент с вклада либо один, либо два, либо три, либо все четыре человека, т.е. $H = B + C + D + E$ или $H = F + E$.

3. На трех одинаковых карточках написаны буквы И, М, Р. Карточки тщательно перемешивают, наудачу извлекают три карточки и выкладывают их в порядке появления. Найдите вероятность того, что составит слово МИР.

Решение. Обозначим через A событие, которое состоит в том, что в результате извлечения карточек получится слово МИР. У данного опыта шесть равновозможных исходов: «получено слово ИМР», «получено слово ИРМ», «получено слово МИР», «получено слово МРИ», «получено слово РМИ», «получено слово РИМ». Из них только одно событие, а именно A_3 , благоприятствует событию A . Следовательно, число $n=6$, число $m=1$.

Вычисляем $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

4. Какова вероятность появления слова ДВА, если наугад выбираются 3 карточки из пяти с буквами А, Б, В, Г, Д и располагаются в ряд в порядке появления?

Решение. Число всех исходов испытания состоит в выборе 3-х букв из 5, при этом важен порядок появления букв, поэтому по формуле для числа размещений их всего $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Благоприятный исход для появления слова ДВА всего один.

Следовательно, искомая вероятность равна $P(A) = \frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{60} \approx 0,02$.

5. Для участия в лотерее на карточке, содержащей 49 чисел, нужно отметить 6 чисел. Затем эти числа сверяются с 6 числами, отобранными случайным образом. В зависимости от числа совпавших номеров выплачивается выигрыш. Какова вероятность угадать в лотерее 6 чисел из 49?

Решение. Число всех элементарных исходов n -совокупность всех сочетаний из 49 чисел по 6. Сколько существует различных вариантов заполнения карточки, и каждый из них имеет одинаковый шанс стать выигрышным. Благоприятствует выигрышу только одно событие: номер на

карточке совпал с отобранным. Следовательно,
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{C_{49}^6} = \frac{1}{14000000}$$

6. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Какова вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 3?

Решение. A – «из 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 3». Чтобы определить $P(A)$, надо воспользоваться формулой $P(A) = \frac{m}{n}$.

Опыт состоит в извлечении 5 деталей из 10 имеющихся, значит общее число n возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 5 элементов из 10, т.е. $n = C_{10}^5$.

Определим число m исходов, благоприятствующих событию A . Четыре стандартные детали из 8 стандартных можно извлечь $m_1 = C_8^4$ способами. Оставшиеся детали выборки должны быть нестандартными, их будет $5-4=1$, тогда 1 нестандартная деталь из имеющихся $10-8=2$ может быть извлечена $m_2 = C_2^1$ способами. Тогда, согласно правилу произведения, число m благоприятствующих исходов равно: $m = m_1 \cdot m_2 = C_8^4 \cdot C_2^1$.

Искомая вероятность равна отношению числа m исходов, благоприятствующих данному событию, к числу n всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{C_8^4 \cdot C_2^1}{C_{10}^5} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} : \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{5}{9} \approx 0,56$$

7. На полке стоит 10 книг, из них 6 по высшей математике и 4 книги по философии. Какова вероятность взять книгу по высшей математике, если наудачу берется только одна книга?

В этой задаче $n = 10$ – это число всех равновозможных исходов испытания, а именно количество книг, а $m = 6$ – это число исходов, благоприятствующих

событию $A = \text{«выбрана книга по высшей математике»}$. Поэтому по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

8. Брошены 2 игральные кости. Найдите вероятность следующих событий:
а) сумма выпавших очков равна 7; **б)** сумма выпавших очков равна 8, а разность 4.

Для случая **а)** $n = 36$, так как число равновозможных исходов испытания состоит из числа различных комбинаций очков на одной и второй игральных костях. Для первой кости 6 вариантов от 1 до 6, для второй аналогично 6, следовательно, для первой и второй, согласно комбинаторному принципу умножения – 36. Число благоприятных исходов m , т. е. сумма выпавших очков равна 7, состоит из следующих вариантов: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), т. е. $m = 6$, и поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Для случая **б)** как и в случае **а)** $n = 36$. Число благоприятных исходов m , т. е. сумма выпавших очков равна 8, а разность 4, состоит из следующих двух вариантов: (2, 6), (6, 2), т. е. $m = 2$, и поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

9. Из колоды, состоящей из 36 карт, наудачу вытаскивается 6 карт. Какова вероятность того, что среди вытянутых карт окажется 1 король и 2 дамы?

Для решения этой задачи можно применить *общую схему задачи о выборке*. Общее число всех исходов события $A = \text{«среди вытянутых 6 карт окажется 1 король и 2 дамы»}$ равно числу сочетаний C_{36}^6 . Вытянуть 1 короля из 4, имеющихся в колоде, можно C_4^1 способами, а 2 дам из 4, соответственно, C_4^2 способами. Кроме того, вытягиваются еще 3 карты из $36 - 4 - 4 = 28$ карт, не содержащих ни королей, ни дам, что можно сделать C_{28}^3 способами. Таким образом, согласно известному *комбинаторному принципу умножения*, число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{28}^3$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{28}^3}{C_{36}^6} = \left(\frac{4}{1!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3!} \right) / \left(\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{6!} \right) \approx 0,04.$$

10. Из урны с шарами, на которых написаны буквы, составляющие слово ФИЛОСОФИЯ, выбирают наугад последовательно 4 шара и укладывают один за другим в порядке их появления. Какова вероятность того, что при этом сложится слово СОЛО?

Число всех равновозможных исходов этого испытания – это число всех 4-х буквенных «слов», составленных из 9 «растождествленных» букв $\Phi_1, \Phi_2, \text{И}_1, \text{И}_2, \text{Л}_1, \text{О}_1, \text{О}_2, \text{С}_1, \text{Я}_1$, число которых равно числу размещений $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$. Число благоприятных исходов составления слова СОЛО равно числу $A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1 = 2$, где $A_1^1 = 1$ – это число размещений для букв С и Л, и $A_2^1 = 2$ – это

число размещений для двух из двух букв О. Следовательно искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1}{A_9^4} = \frac{2}{3024} = \frac{1}{1512}.$$

Это вариант задачи об «упорядоченной» выборке.

11. В урне 15 голубых, 10 зеленых и 25 белых шаров. Найдите вероятность того, что из урны наугад будет извлечен цветной шар.

Решение. Извлечение цветного шара означает появление либо голубого, либо зеленого шара. Пусть событие A означает появление голубого шара, B – появление зеленого шара. Тогда

$$P(A) = \frac{15}{15 + 10 + 25} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{10}{15 + 10 + 25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$$

Так как события A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$.

12. Бросают две игральные кости. Какова вероятность выпадения хотя бы одной шестерки?

Решение. Пусть событие A = «выпадение 6 на первой кости» и событие B = «выпадение 6 на второй кости». Очевидно, что $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(AB) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$, поэтому по теореме сложения вероятностей двух событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

13. Студент первого курса факультета философии и социальных наук выучил 10 вопросов из 30 по курсу «Основы высшей математики». Каждый билет состоит из трех вопросов, распределенных случайным образом. Найдите вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос из вытянутого наугад билета.

Решение. Рассмотрим событие A – «студент ответит хотя бы на один вопрос из билета». Тогда противоположное ему событие $\bar{A}$ – «студент не ответит ни на один вопрос из билета», и выполняется равенство $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Так как порядок вопросов в билетах несуществен, то общее количество исходов такого испытания равно количеству способов выбора трех вопросов из всех 30 вопросов, т. е. $n = C_{30}^3$. Поскольку студент выучил 10 вопросов по курсу «Основы высшей математики», то $30 - 10 = 20$ вопросов остались невыученными. Значит, количество благоприятствующих исходов для события $\bar{A}$ равно числу способов выбора трех вопросов из 20 вопросов, невыученных студентом, т. е. $m = C_{20}^3$. Поэтому по формуле классической вероятности имеем

$$P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{20}^3}{C_{30}^3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} \cdot \frac{3! \cdot 27!}{30!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{19 \cdot 3}{29 \cdot 7} = \frac{57}{203}.$$

Следовательно, вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос из вытянутого наугад билета, равна $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{57}{203} = \frac{146}{203}$.

14. Тридцать экзаменационных билетов по курсу «Основы высшей математики» пронумерованы числами от 1 до 30. Билеты тщательно перемешаны. Какова вероятность вытянуть наудачу студенту–социологу билет с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Обозначим события: A – «вытянут билет с четным номером», B – «вытянут билет с номером, кратным 3», AB – «вытянут билет с четным номером, кратным 3». Найдем вероятность искомого события $A+B$. Поскольку A и B – это совместные события, то вероятность события $A+B$ находим по теореме сложения вероятностей двух событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Событию A благоприятствуют 15 исходов, событию B – всего 10 исходов, а событию AB – только 5 исходов. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,667.$$

15. Из урны, в которой 10 черных и 5 белых шаров вынимают 2 шара. Чему равна вероятность того, что а) оба шара черные; б) оба шара белые; в) шары разного цвета?

Решение. Пусть событие A_1 – «первый шар черный», A_2 – «второй шар черный», B_1 – «первый шар белый», B_2 – «второй шар белый». Тогда

$$P(A_1) = \frac{10}{10+5} = \frac{2}{3}; \quad P(B_1) = \frac{5}{10+5} = \frac{1}{3}.$$

Найдем условные вероятности:

$$P(A_2|A_1) = \frac{10-1}{15-1} = \frac{9}{14} \text{ (второй шар был черным, если первый был черным);}$$

$$P(B_2|B_1) = \frac{5-1}{15-1} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \text{ (второй шар был белым, если первый был белым);}$$

$$P(A_2|B_1) = \frac{10}{15-1} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \text{ (второй шар был черным, если первый был белым);}$$

$$P(B_2|A_1) = \frac{5}{15-1} = \frac{5}{14} \text{ (второй шар был белым, если первый был черным).}$$

Отсюда находим искомые вероятности:

$$\text{а) } P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{9}{14} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{7};$$

$$\text{б) } P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{21};$$

$$\text{в) } P(A_1 \cdot B_2 + B_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2|B_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}.$$

16. Брошены последовательно три монеты. Определить, зависимы или независимы события: A – «выпадение “герба” на первой монете», B – «выпадение хотя бы одной “решки”».

Решение. Найдем вероятности этих событий. Очевидно, $P(A) = \frac{1}{2}$. Далее воспользуемся формулой: $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, тогда $P(B) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$. Найдем вероятность произведения событий A и B , т.е. вероятность события, состоящего в одновременном появлении герба на 1-ой монете и выпадения хотя бы одной “решки”

$$P(AB) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

А для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B)$. Следовательно, события A и B зависимы, т.к. $P(A)P(B) = \frac{7}{16} \neq \frac{3}{8} = P(AB)$.

17. Вероятность попадания каждого из трех стрелков соответственно равна: 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найдите вероятность: а) только одного попадания; б) ровно двух попаданий; в) хотя бы одного попадания.

Решение.

Пусть $A_i = \{\text{попадание в мишень при } i\text{-м выстреле}\}$, $\bar{A}_i = \{\text{непопадание в мишень при } i\text{-м выстреле}\}$ $i=1,2,3$.

Т.к. $P(A_1) = 0,8$; $P(A_2) = 0,7$; $P(A_3) = 0,9$, то $P(\bar{A}_1) = 1 - 0,8 = 0,2$; $P(\bar{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3$; $P(\bar{A}_3) = 1 - 0,9 = 0,1$.

а) Обозначим событие $A = \text{«ровно одно попадание в мишень»}$. Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом выстреле, промахи при втором и третьем; попадание при втором, промахи при первом и третьем; попадание при третьем, промахи при первом и втором. Тогда

$$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

Учитывая, что $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$; $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$; $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,092.$$

б) Обозначим событие $B = \text{«ровно два попадания в мишень»}$. Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом и втором выстрелах, промах при третьем; попадание при первом и третьем, промах при втором; попадание при втором и третьем, промах при первом. Тогда

$$B = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$$

Учитывая, что $A_1 A_2 \bar{A}_3$, $A_1 \bar{A}_2 A_3$, $\bar{A}_1 A_2 A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(B) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3) \\ = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) = \\ = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,398.$$

в) Обозначим событие $C = \text{«ровно три попадания в мишень»}$; $D = \text{«хотя бы одно попадание в мишень»}$. Тогда $D = A + B + C$.

Найдем вероятность события $C = A_1 A_2 A_3$:

$$P(C) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Получаем $P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,092 + 0,398 + 0,504 = 0,994$.

Так как попадания каждого стрелка независимы в совокупности события, то вероятность события D можем найти вторым способом:

$$P(D) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994$$

18. В определенной ситуации вероятность выигрыша на бирже в течение дня равна $P=0,3$. Какие варианты событий возможны при биржевой игре в той же ситуации в течение двух дней.

Решение. Введем обозначение событий: A_1 – первый день выигрышный, A_2 – второй день выигрышный. Вероятности проигрышей равны:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,3 = 0,7,$$

$$P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

Возможные варианты событий:

1) оба дня выигрыш $P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$;

2) оба дня проигрыш $P(A) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$;

3) первый день выигрыш, второй – проигрыш
 $P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$;

4) первый день проигрыш, второй – выигрыш $P(A) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$.

Эти события образуют полную группу. Вероятность полной группы событий равна $0,09 + 0,49 + 0,21 + 0,21 = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитываются суммы выпавших очков. Записать полную группу событий на этом опыте.

2. Являются ли несовместными следующие события: а) опыт – подбрасывание симметричной монеты, события: A – появление герба, B – появление цифры; б) опыт – два выстрела по мишени, события: A – хотя бы одно попадание, B – хотя бы один промах.

3. Образуют ли полную группу событий следующие события: а) опыт – подбрасывание симметричной монеты, события: A – появление герба, B – появление цифры; б) опыт – подбрасывание двух симметричных монет, события: A – появление двух гербов, B – появление двух цифр.

4. A , B и C – случайные события. Что означают события: $\bar{A}BC$; $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$?

5. A , B и C – случайные события. Показать, что:

а) $A + AB + BC + \bar{A}C = A + C$;

б) $AB + A\bar{B} + \bar{A}B = A + B$.

6. A , B и C – случайные события. Записать выражения для следующих событий: а) произошло только событие A ; б) произошли A и B , но C не произошло; в) произошли все три события; г) произошло, по крайней мере, одно из этих событий; д) произошло, по крайней мере, два события; е) произошло одно и только одно событие; ж) произошли два и только два события; з) ни одно событие не произошло; и) произошло не более двух событий.

7. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

8. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8 очков?

9. Подбрасываются 3 симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах монет выпало 2 герба?

10. В урне имеется 7 черных и несколько белых шаров. Какова вероятность вытащить белый шар, если вероятность вытащить черный шар равна $1/6$. Сколько белых шаров в урне?

11. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Найдите вероятность следующих событий:

A = «в полученной выборке все карты бубновой масти»,

B = «среди выбранных 4 карт окажутся 2 туза»,

C = «среди выбранных 4 карт окажется бубновый туз».

12. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что извлечены 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

13. Из букв разрезной азбуки составлено слово “ремонт”. Карточки с отрезными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова “море”?

14. Из 30 экзаменационных билетов студент может ответить на 24. Какова вероятность его успешного ответа на экзамене на билет при однократном извлечении билета?

15. Из карточек, из которых составлено слово ДИСПЛЕЙ, случайным образом выбраны 3 и выложены в ряд. Какова вероятность, что они образовали слово ЛЕС?

16. Студент из 30 вопросов к экзамену хорошо усвоил 24. Какова вероятность, что он знает оба из доставшихся ему вопросов?

17. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных, из них 7 женщин, остальные мужчины, состоящих на учете в службе занятости. Какова вероятность того, что из 9 случайно отобранных безработных окажется 5 женщин?

18. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании трех игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найдите вероятности: а) выбросить 11 б) 12 очков; с) выигрыша.

19. В урне 15 шаров: 5 красных, 8 зеленых и 2 синих. Из урны извлекают шар. Какова вероятность того, что этот шар будет зеленым?

20. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе все цифры будут одинаковыми?

21. Все натуральные числа от 1 до 20 записаны на одинаковых карточках. Наугад вытаскивают одну карточку. Какова вероятность того, что: а) число на этой карточке будет кратно 5; б) число на этой карточке будет четным?

22. Участник лотереи «Спортлото» из 36 видов спорта должен назвать пять. Какова вероятность того, что будет угадано три вида спорта?

23. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются 4 карты. Найдите вероятность того, что среди этих карт окажется 2 туза.

24. На шести одинаковых по форме и размерам карточках написаны буквы А; Л; А; Т; Т; Н. Какова вероятность того, что при случайном расположении карточек в ряд получится слово «ТАЛАНТ»?

25. В фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 – среднее специальное образование, у 357 – высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное образование, или высшее образование, или то и другое?

26. Из 20 изделий первого сорта и 10 второго сорта, имеющихся на складе наугад взято 2 изделия. Найдите вероятность того, что оба эти изделия: а) первого сорта; б) второго сорта.

27. Студент-социолог сдаёт зачёт по курсу «Основы информационных технологий», если по пятибалльной системе получит оценку не ниже 4 баллов. Какова вероятность сдачи зачета, если известно, что студент получает оценку 5 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и оценку 4 с вероятностью $\frac{1}{3}$?

28. На стеллажах библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь наудачу берет три учебника. Найдите вероятность того, что все они будут в переплете.

29. В урне 6 белых, 4 черных и 2 красных шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найдите вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – черный и при третьем – красный.

30. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из 3 центральных телеканалов, равна 0,05. Предполагается, что эти события – независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: а) по всем трем каналам; б) по одному каналу?

31. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент знает предложенные экзаменатором три вопроса.

32. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к весеннему сезону, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной модельер оценивает в 0,3, что черный – в 0,2, а красный – в 0,15. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найти вероятность того, что цветовое решение коллекции будет удачным: а) по двум цветам; б) хотя бы по одному из выбранных цветов.

33. В совхозную ремонтную мастерскую поступило 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждаются в замене двигателя, а остальные в замене отдельных узлов. Случайным образом отбирается два трактора. Найдите

вероятность того, что замена двигателя необходима а) в двух тракторах; б) в одном тракторе; в) хотя бы в одном тракторе.

34. Покупатель может приобрести акции 2 компаний А и В. Надежность 1-й оценивается экспертами на уровне 90%, а второй – 80%. Чему равна вероятность того, что обе компании в течении года не станут банкротами.

35. В коробке лежат 15 синих, 5 красных и 20 белых шаров. Какова вероятность того, что из коробки достанут цветной шар?

36. Подбрасывают игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет нечетное число очков?

37. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 5, или и тому и другому одновременно.

38. На 30 одинаковых карточках написаны натуральные числа от 1 до 30. Какова вероятность достать карточку с числом кратным 2 или кратным 3?

39. Вероятность грозы в любой день августа составляет 0,3, вероятность града – 0,2, а вероятность града во время грозы – 0,1. Найдите вероятность того, что в наугад выбранный день будет хотя бы одно из явлений – град или гроза.

40. В коробке лежат 10 яблок и 8 груш. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 4 фрукта. Найдите вероятность того, что все четыре – груши.

41. Подбрасывают две симметричные монеты. Какова вероятность того, что выпадут две цифры?

42. В отделе работают 10 человек, среди них 7 мужчин. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Какова вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами?

2.2. ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Занятие № 1-2. Табличный процессор MS Excel: форматирование, автозаполнение, абсолютная и относительная адресация. Библиотека встроенных функций. Вычисление определителей матрицы. Решение систем линейных уравнений с помощью табличного процессора MS Excel.

Цель:

- ✓ уметь задавать требуемое форматирование для рабочего листа и его элементов (столбцов, строк);
- ✓ устанавливать нужный формат для содержимого ячеек;
- ✓ научиться создавать формулы;
- ✓ познакомиться с использованием встроенных функций;
- ✓ освоить навыки копирования формул и функций в смежные ячейки;
- ✓ закрепить знания об относительной и абсолютной ссылке;
- ✓ изучить возможности работы с массивами данных и обработки статистической информации;
- ✓ пользоваться функциями (МУМНОЖ, МОБР, МОПРЕД);
- ✓ научиться решать системы линейных алгебраических уравнение различными методами в MS Excel (методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса).

Задание 1. В первом году за три сезона (осень, зима и весна) было 70, 64 и 39 дней с дождем и 4, 10 и 8 дней со снегом, а во втором году – 71, 38 и 32 дней с дождем и 0, 35 и 10 дней со снегом. Найдите совместное выпадение осадков, как в виде дождя, так и снега в каждом году.

Решение.

1. Создадим таблицу исходных данных: зададим матрицу А, отражающую выпадение осадков в виде дождя, и матрицу В, отражающую выпадение осадков в виде снега:

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г
1		Матрица А (дождь)			Матрица В (снег)		
2	1 год	70	64	39	4	10	8
3	2 год	71	38	32	0	35	10

Рис. 86

2. Найдём матрицу С, характеризующую совместное выпадение осадков, как в виде дождя, так и снега в каждом году, как сумму матриц А и В. В ячейку Н2 вставим формулу =В2+Е2 и скопируем данную формулу в ячейки Н3, I2:J3

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	И	Ж
1		Матрица А (дождь)			Матрица В (снег)			Матрица С (совместное выпадение осадков)		
2	1 год	70	64	39	4	10	8	74	74	47
3	2 год	71	38	32	0	35	10	71	73	42

Рис. 87

Задание 2. Местной транспортной компании необходимо подсчитать стоимость убытков из-за задержек, вызванных дождем (10 у.е.), снегом (15 у.е.) и туманом (20 у.е.), в районе, для которого получены указанные выше данные. Пусть количество дней с туманом в первом году было 12, а во втором году – 15.

Решение.

1. Получим матрицу D размером 2x3, в которой первый столбец показывает количество дней с дождем, второй – со снегом, третий – с туманом. В ячейку К2 введём формулу =СУММ(В2:Д2) и скопируем ее в ячейку К3. В ячейку L2 введём формулу =СУММ(Е2:Г2) и скопируем ее в ячейку L3. В ячейки М2 и М3 введём количество дней с туманом.

2. Обозначим стоимость задержек транспорта, вызванных дождем (10 у.е.), снегом. (15 у.е.) и туманом (20 у.е.), как столбец матрицы F:

К	Л	М	Н
Матрица D			Матрица задержек F
173	22	12	10
141	45	15	15
			20

Рис. 88

3. Находим общую стоимость убытков за каждый год, умножая матрицу D на F. Для этого выделяем диапазон P2:P3 и вставляем функцию =МУМНОЖ(К2:М3;Н2:Н4), нажимая Ctrl+Shift+Enter.

К	Л	М	Н	О	Р
Матрица D			Матрица задержек F		Общая стоимость убытков
173	22	12	10		2300
141	45	15	15		2385
			20		

Рис. 89

Далее разберем на простых примерах основные формулы комбинаторики, а именно: сочетания, размещения, перестановки без повторений и с повторениями, а также покажем, как можно их вычислять с помощью встроенных функций табличного процессора Excel.

Задание 3. Вычислить определитель пятого порядка.

Решение.

1. На новом листе (название листа – **Определитель**) создайте таблицу исходных данных: матрицу размером 5x5, содержащую произвольные числовые данные.

2. Для вычисления определителя используйте функцию МОПРЕД, в качестве массива укажите весь диапазон матрицы.

Задание 4. Решить систему методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 18 \\ -x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -11 \end{cases}$$

Решение.

1. На новом листе (название листа – **МетодОбратнойМатрицы**) создайте таблицу исходных данных:

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	Матрица А					Матрица В
2	1	2	3	-1		0
3	2	-1	-1	0		1
4	3	1	-2	4		18
5	-1	5	5	-3		-11

2. Найдите обратную матрицу. Для этого выделите диапазон A9:D12 и вставьте функцию МОБР, указав в качестве массива матрицу А. Для получения массива данных необходимо нажимать Ctrl+Shift+Enter. Озаглавьте обратную матрицу (ячейки A8:D8).

3. Найдите неизвестные. Для этого выделите диапазон F9:F12 и вставьте функцию МУМНОЖ, укажите в качестве массива1 – обратную матрицу, массива2 – матрицу свободных членов. Для получения массива данных необходимо нажимать Ctrl+Shift+Enter. Озаглавьте матрицу неизвестных (ячейка F8).

Задание 5. Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 26 \\ 6x_1 + 11x_3 - 3x_4 = 14 \end{cases}$$

Решение.

1. На новом листе (название листа – **МетодКрамера**) создайте таблицу исходных данных:

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица А					Матрица В
2	1	-1	7	-2		5
3	2	-3	8	-4		6
4	4	2	19	1		26
5	6	0	11	-3		14

2. В ячейке Н5 вычислите определитель матрицы А.

3. Получите матрицу А1, следующим образом (в матрице А заменяется первый столбец): начиная с ячейки А9 скопируйте со связью матрицу В в первый столбец, 2-ой, 3-ий и 4-ый столбцы матрицы А – во 2-ой, 3-ий и 4-ый столбцы матрицы А1:

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица А					Матрица В
2	1	-1	7	-2		5
3	2	-3	8	-4		6
4	4	2	19	1		26
5	6	0	11	-3		14
6						
7						
8	Матрица А1					
9	5	-1	7	-2		
10	6	-3	8	-4		
11	26	2	19	1		Определитель А1
12	14	0	11	-3		-396

4. Вычислите определитель матрицы А1.

5. Получите матрицу А2, начиная с ячейки А16 (в матрице А заменяется второй столбец). Вычислите определитель матрицы А2.

6. Аналогично получите матрицы А3 и А4, найдите их определители.

7. Найдите решение системы по формулам: $X1 = \text{Определитель А1} / \text{Определитель А}$, $X2 = \text{Определитель А2} / \text{Определитель А}$ и т.д.

Задание 6. Задания на самостоятельную работу

1. Найти произведение матриц АВ и ВА.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами (методом обратной матрицы, методом Крамера и методом Гаусса):

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 &= -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Занятие № 3. Графические возможности MS Excel: Аналитическая геометрия на плоскости.

Задание 1. Построение треугольника. Построить треугольник, заданный координатами вершин, и точку с заданными координатами.

1. Занести в ячейки **B2:E3** координаты вершин треугольника, повторив координаты 1-й вершины дважды. В ячейки **B6:B7** занести координаты точки (см. рис. 6).
2. Постройте точечную диаграмму для диапазона **A2:E3** (Вставка–Диаграммы–Точечная диаграмма с маркерами).
3. Добавьте ряд данных с именем **Точка** для значений координат точки.
4. Измените координаты точки так, чтобы точка лежала внутри треугольника.
5. Отформатируйте точку указанным маркером (Макет–Формат выделенного фрагмента–Параметры маркера–Встроенный). Один из вариантов форматирования приведен на рис. 91.

	A	B	C	D	E
1	Координаты вершин				
2	X	1	-3	5	1
3	Y	3	8	9	3
4					
5	Координаты точки				
6	Xt	9			
7	Yt	8			

Рис. 90

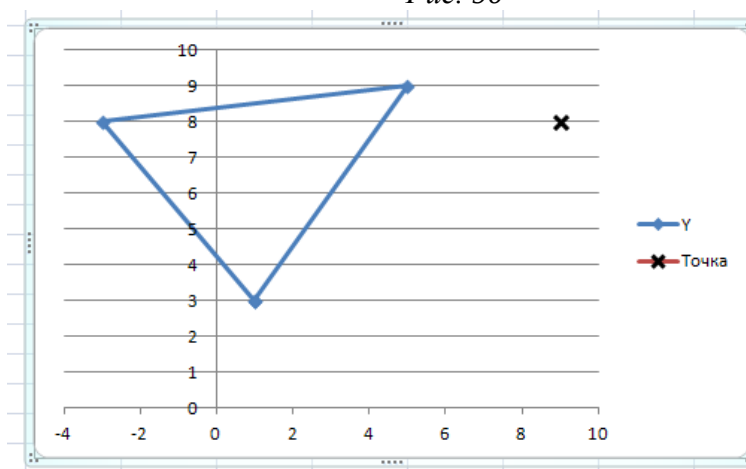


Рис. 91 – Построенный треугольник с точкой

Занятие № 4-6. Графические возможности MS Excel – диаграммы, графики, поверхности. Графика в табличном процессоре.

Цель:

- ✓ Освоить приемы построения диаграмм;
- ✓ Освоить приемы построения графиков функций.

Задание 1. Создайте таблицу «Прибыль от продажи товаров», выполните расчеты по формулам и отразить графически в виде «различных» диаграмм, показанных ниже. Расчетные формулы приведены ниже:

$\text{Возвращаемость} = \text{Продано} * \text{Розничная цена};$
 $\text{Себестоимость} = \text{Возвращаемость} * \text{Процент};$
 $\text{Прибыль} = \text{Возвращаемость} - (\text{Себестоимость} + \text{Расходы}).$

Таблица – Прибыль от продажи товаров

розничная цена	70			
процент	40,00%			
прибыль от продажи товаров				
	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
продано	3000	4500	5000	4000
возвращаемость				
себестоимость				
расходы	60000	60000	70000	80000
прибыль				

Должна получиться следующая таблица:

Таблица – «Прибыль от продажи товаров»

розничная цена	70			
процент	40,00%			
прибыль от продажи товаров				
	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
продано	3000	4500	5000	4000
возвращаемость	210000	315000	350000	280000
себестоимость	84000	126000	140000	112000
расходы	60000	60000	70000	80000
прибыль	66000	129000	140000	88000

- Отобразить графически в виде объемной круговой диаграммы (рис. 92) поквартальную прибыль, полученную от продажи товаров.



Рис. 92 – Диаграмма «Прибыль»

Рекомендации по выполнению

1. Выделить данные, которые вы хотите использовать в диаграмме – это строки (при построении диаграмм нажмите клавишу CTRL для выделения несмежных областей данных).

прибыль	66000	129000	140000	88000
---------	-------	--------	--------	-------

и

	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
--	-----------	-----------	-----------	-----------

2. Далее: Вставка – Диаграммы – Круговая – Объемная круговая.
3. Подпишите все данные и раскрасьте диаграмму так как на рис 36., для этого пользуйтесь вкладками «Работа с диаграммами»: Конструктор, Макет и Формат.
4. Переместите диаграмму на отдельный лист: Работа с диаграммами – Конструктор - Переместить диаграмму - На отдельном листе.
- Отобразить табличные данные в виде диаграммы (Рис. 93) на отдельном листе:



Рис. 93 – Диаграмма «Прибыль 2»

- Отобразить табличные данные в виде диаграммы (Рис. 94) на отдельном листе:



Рис. 94 – Диаграмма «Показатели продаж»

- Отобразить табличные данные в виде диаграммы (Рис. 95) на отдельном листе:



Рис. 95 – Диаграмма «Показатели за 1-ый и 4-ый кварталы»

- Отобразить табличные данные в виде диаграммы (Рис. 96) на отдельном листе:



Рис. 96 – Диаграмма «Оценка себестоимости»

Задание 2. Построение графика тригонометрической функции.

Постройте график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-3; 3]$, шаг 0,4. (Тип диаграммы — точечная).

Переименуйте ЛИСТ2 в COSX.

1. В первой ячейке столбца **A** введите название аргумента (x), в первой ячейке столбца **B** введите название функции ($y = \cos x$).

1. В столбце **A** выведите значения аргумента: во второй ячейке наберите -3, в третьей -2,6, затем, выделив две ячейки, протяните ряд вниз до значения 3 (то же самое можно сделать с использованием прогрессии).

2. В столбце **В** выведите значение функции: во второй ячейке наберите $=\cos(A2)$, затем распространите формулу для всех значений аргумента.

3. Выделите полученные данные и выберите команду **Вставка – Диаграммы – Точечная – Точечная с гладкими кривыми и маркерами**. На рабочем листе появится диаграмма.

4. С помощью дополнительных вкладок **Работа с диаграммами** измените название диаграммы на «График функции $y=\cos x$ » и введите названия осей **X** и **Y** (**Макет - Подписи**). Разместите легенду в правом верхнем углу диаграммы.

5. С помощью дополнительных вкладок **Работа с диаграммами**, команды **Заливка фигуры** покрасьте область диаграммы в зеленый цвет.

7. Разместите названия осей как у обычного графика: **Y**– сверху, **X** – справа.

Задание 3. Построение графиков тригонометрических функций

В одном графическом блоке построить графики функций

$$Y1 = \sin(X) \text{ и } Y2 = \sin^2(X)$$

для X , изменяющегося от **-6,5 до 6,5** с шагом 0,5

1. Переименовать Лист3 в **Тригонометрические функции**.

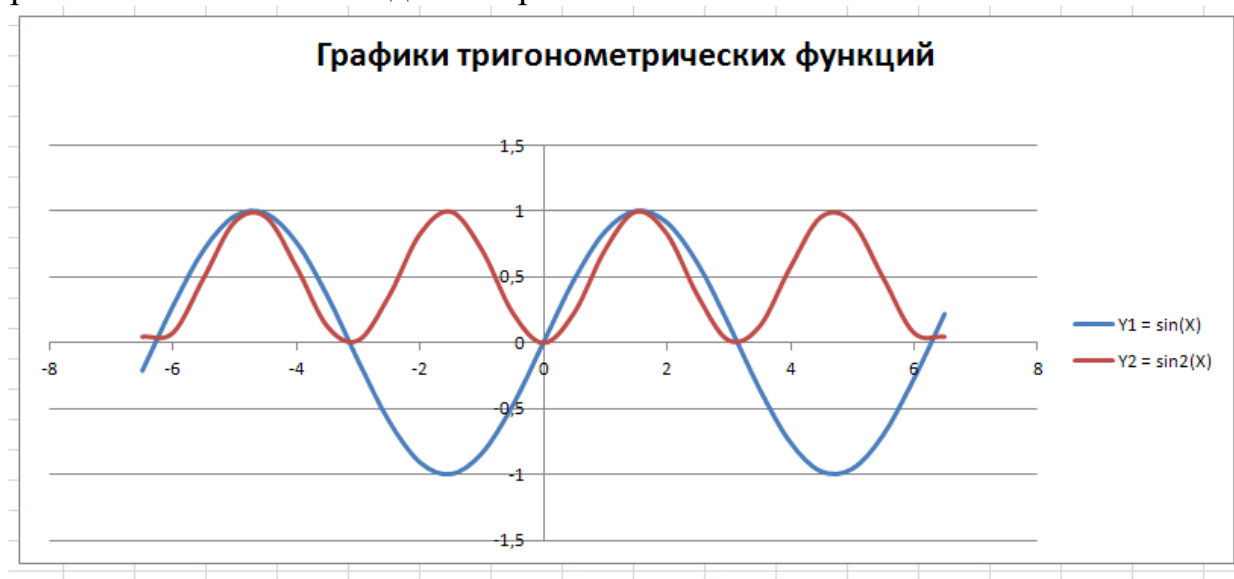
2. В ячейки, начиная с **B1**, занести значения X с шагом 0,5 (на рисунке приведен только фрагмент таблицы).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	-6,5	-6	-5,5	-5	-4,5	-4	-3,5
2	Y1 = sin(X)	-0,215	0,2794	0,7055	0,9589	0,9775	0,7568	0,3508
3	Y2 = sin²(X)	0,05	0,08	0,50	0,92	0,96	0,57	0,12

3. В ячейки нижележащих строк «написать» формулы для вычисления **Y1** и **Y2**. В ячейку B2 пишем формулу $=\sin(B1)$, в ячейку B3 пишем формулу $=\sin(B1)^2$ или $=\sin(B1)*\sin(B1)$.

4. Построить графики функций. Подписать диаграмму «**Графики тригонометрических функций**».

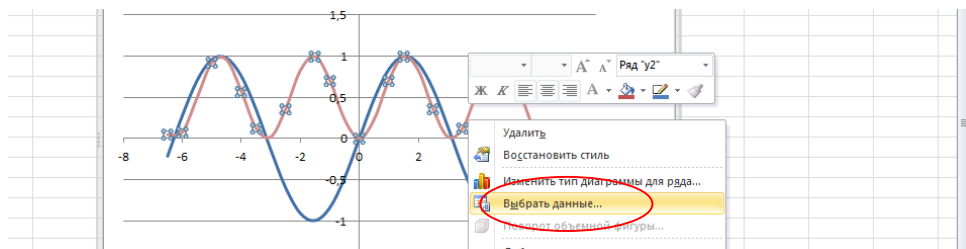
Выделите полученную таблицу данных, т.е. диапазон A1:AB3 – **Вставка – Диаграммы – Точечная с гладкими кривыми**.



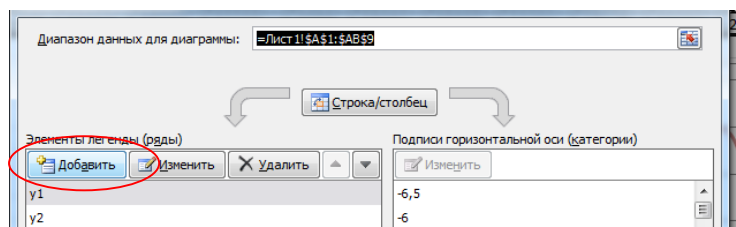
5. Добавить в таблицу значения функции $Y3 = \cos^2(X)$ для тех же значений аргумента.

6. Добавить в графический блок график функции $Y3$.

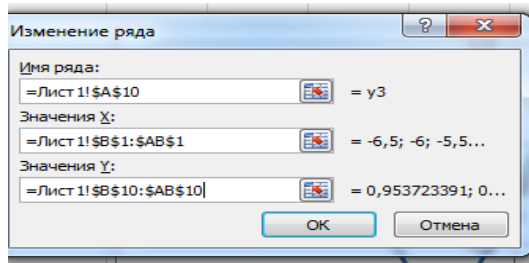
Чтобы добавить в построенные графики пункта 4 график $Y3$, необходимо: правая кнопка мышки по диаграмме – выбрать данные.



В появившемся окне кнопка Добавить:



В новом окне вводим все данные: Имя ряда – ссылка на ячейку A4; значения X – это диапазон B1:AB1; значения Y – это диапазон B4:AB4.



7. Сохранить документ под тем же именем.

Задание 4. Найти количество корней уравнения $x^2 - \ln(x+1) = 0,5$. Т.е. решить уравнение графически на интервале $[0,5;1,5]$ с шагом 0,05.

Рекомендации к выполнению

Представим первоначально записанное уравнение в следующем виде $x^2 - 0,5 = \ln(x+1)$ и рассмотрим две функции $h(x) = x^2 - 0,5$ и $g(x) = \ln(x+1)$.

Для решения задачи следует построить две функции $Y_1 = x^2 - 0,5$ и $Y_2 = \ln(x+1)$ на интервале $[0,5;1,5]$ с шагом 0,05; построить для них диаграмму, состоящую из двух графиков $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$. По диаграмме определить точку пересечения двух графиков и определить значение X в этой точке.

1. Создайте новый лист – **Уравнение**. Создайте в нем таблицу значений функций.

2. В ячейки A1, B1, C1 занести последовательно X , $X^2 - 0,5$, $1 - \ln(X+1)$.

3. В ячейку A2 введите 0,5 (первый член арифметической прогрессии).

4. Выделите ячейку A2. Выполните команду меню **Правки–Заполнить–Прогрессия**. Диалоговое окно **Прогрессия** заполните следующим образом: расположение – по столбцам, тип – арифметическая, шаг – 0,05, предельное значение – 1,5.

5. В ячейку B2 вставьте функцию **=ПРОИЗВЕД(A2;A2)-0,5**. Скопируйте формулу в ячейки B3:B22.

6. В ячейку C2 вставьте функцию **=LN(A2+1)**. Скопируйте формулу в ячейки C3:C22.

7. Постройте график для существующей таблицы значений.

- выделите ячейки B2:C22, загрузите Мастер диаграмм;
- тип - График;
- ряды - в столбцах, на вкладке Ряд для подписей оси X установите диапазон ячеек A2:A22, в качестве подписей рядов установите ячейки B1 и C1 соответственно;
- Название диаграммы – Графическое решение уравнения, оси X - OX, оси Y – OY.

Задание 5. Найти количество корней уравнения $\cos x = \left| \frac{x}{11\pi} \right|$.

Рекомендации к выполнению

Рассматриваем две функции $h(x) = \cos x$ и $g(x) = \left| \frac{x}{11\pi} \right|$. Эти две функции являются четными, поэтому достаточно построить графики этих двух функций при $x \geq 0$.

Для большей наглядности шаг по x рекомендуем брать не более 30° . Для вычисления значений первой функции используем встроенные функции **=COS(РАДИАНЫ(A2))**, а для вычисления значений второй функции **=ABS(РАДИАНЫ(A2)/(11*ПИ()))**.

Задание 6. Задания на самостоятельную работу

1. Построить график функции $y = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[0,1;2]$ с шагом 0,1.

2. Решить уравнение $5x^2e^{-x/10} = \frac{x^4}{2-x}$ графически на интервале $[-0,5;0,5]$ с шагом 0,05.

3. Постройте график функции:

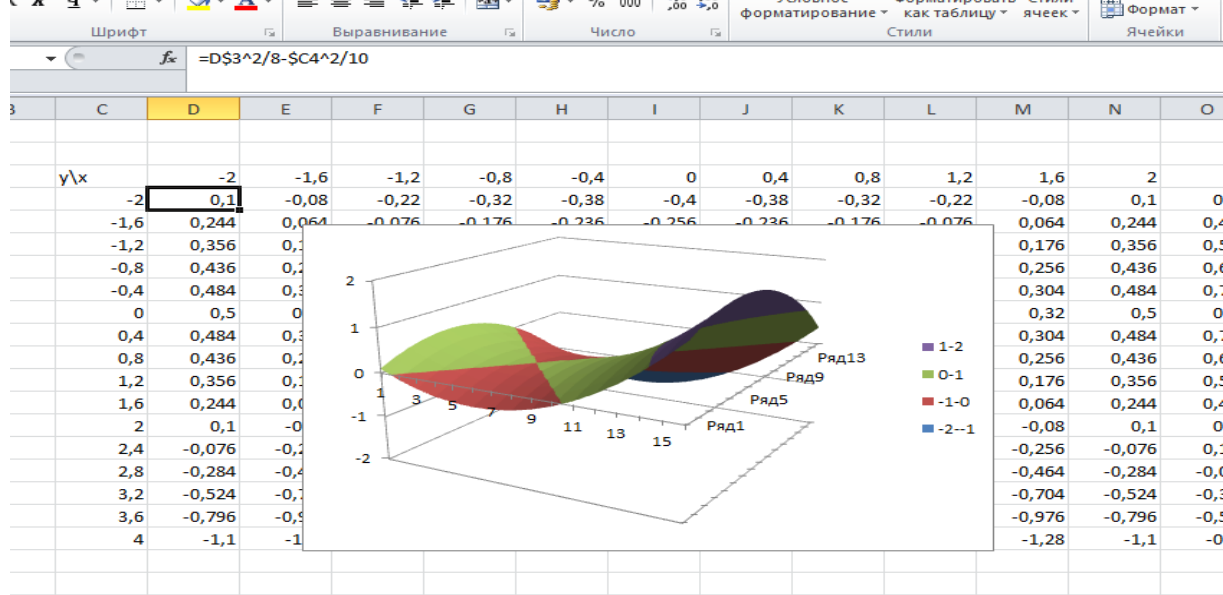
$y = \begin{cases} 1 + \ln(1+x), & x > 0,2 \\ e^x, & x < -0,5 \end{cases}$ на отрезке $[-1;1]$ с шагом 0,05.

Примечание: Для формирования функции использовать ЕСЛИ().

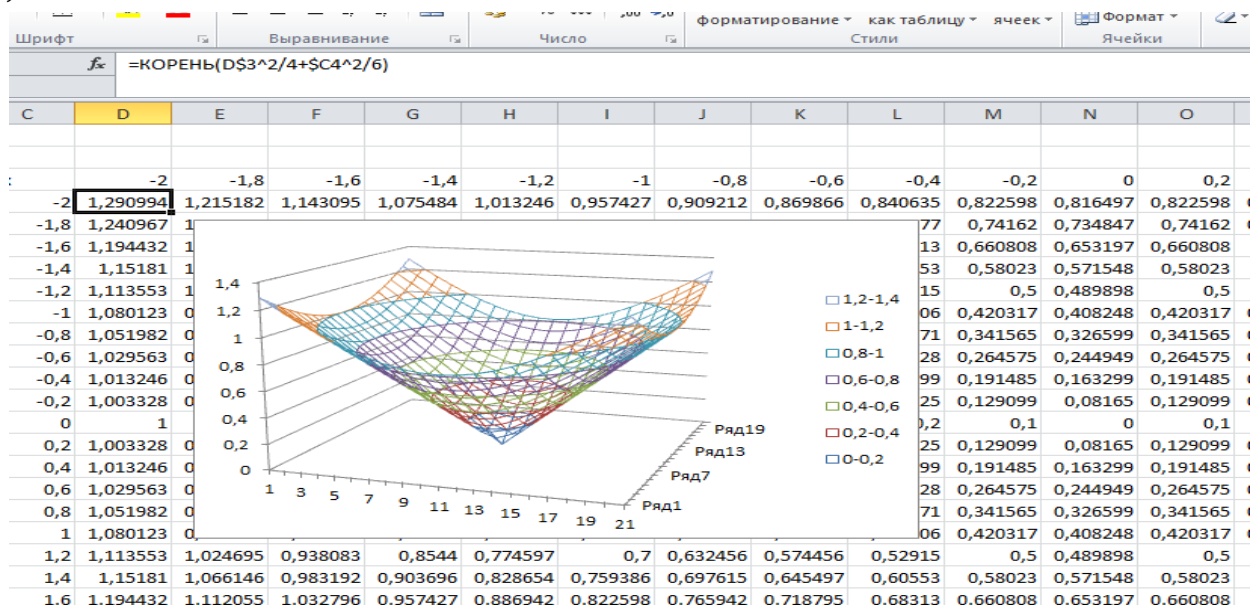
Задание 7. Построение поверхности.

1. Назовите книгу «Поверхности». Постройте гиперболический параболоид $z = \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10}$ на $[-2; 4] * [-2; 4]$ с шагом 0,4.

Указания: Переменные x, y изменяются на отрезках $[-2; 4]$, поэтому строим таблицу значений для этих переменных. Заполним значения переменной x . В ячейку D3 вводим значение: – 2(минус два), в ячейку E3 вводим значение: –1,6. Выделяем вместе ячейки D3 и E3, протягиваем выделенный диапазон до тех пор, пока не появится в ячейке значение 4. Аналогичную операцию повторить для переменной y . Внутри таблицы будут соответственно значения для функции $z(x,y)$. Для заполнения внутренности таблицы вспоминаем относительную и абсолютную адресацию и принцип заполнения Таблицы умножения. В ячейку D4 вводим формулу $=D\$3^2/8-\$C4^2/10$, распространяем ее на всю таблицу значений. Выделяем полученную таблицу значений, без значений переменных x и y , далее Вставка-Диаграмма – Поверхность, получили Гиперболический параболоид.



2. Постройте на том же листе конус $z = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}}$ на $[-2; 2] * [-2; 2]$ с шагом 0,2.

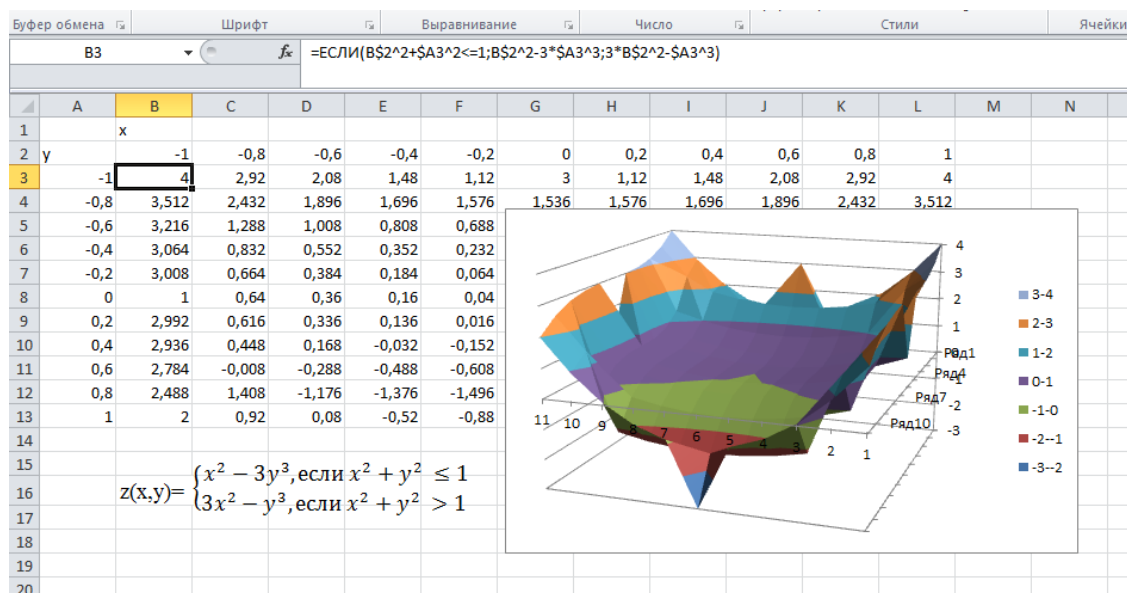


3. Постройте объемную поверхность $z(x,y)=3x^2-2y^2$ на $[-10;10] * [-10;10]$ с шагом с шагом 1.

4. Постройте объемную поверхность на $[-1;1] * [-1;1]$ с шагом 0,2.

Построение таблицы значений аналогичное как в заданиях 1-3. В строке формул после знака равно вводим формулу, используем ЕСЛИ(..)

$$z(x,y)=\begin{cases} x^2-3y^3, & \text{если } x^2+y^2 \leq 1 \\ 3x^2-y^3, & \text{если } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$



Задание 8. Составьте таблицу роста уровня осадков в данной местности в абсолютном и процентном отношении и диаграмму роста доходов на основе исходных данных.

Рост уровня осадков в абсолютном и процентном отношении в данной местности			
Месяцы	Уровень осадков в 2006 г. в мм.	Уровень осадков в 2007 г. в мм.	Рост уровня осадков в 2007 г. в %
Январь	58	58	
Февраль	63	68	
Март	45	49	
Апрель	78	70	
Май	103	111	
Июнь	67	75	
Июль	55	60	
Август	112	113	
Сентябрь	78	79	
Октябрь	72	79	
Ноябрь	81	80	
Декабрь	62	68	
Всего:			

Решение.

1. Составьте таблицу: определить тип, размер и стиль шрифтов для заголовков строк и столбцов: Times New Roman Cyr, размер 12, стиль полужирный; для остального текста - Times New Roman Cyr, размер 10, стиль обычный.

2. Вычислите рост уровня осадков в процентном отношении в каждом месяце 2007 года по отношению к аналогичному месяцу 2006 года, для этого вставьте в ячейку D3 формулу =(C3-B3)/B3 и скопируйте ее с помощью мыши в ячейки D4:D14. Для ячеек D3:D14 установите процентный формат с двумя знаками после запятой.

3. Вычислите суммарный уровень осадков за 2006 и 2007 годы (используйте кнопку **Автосумма** на панели инструментов **Стандартная**), результаты поместите в последней строке второго и третьего столбца соответственно.

4. Вычислите среднее значение роста уровня осадков в процентах, результат поместите в последней строке четвертого столбца. Для вычисления среднего в ячейку D15 вставьте (**Вставка – Функция**) статистическую функцию **СРЗНАЧ** и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек D3:D14.

5. Постройте диаграмму зависимости уровня осадков за 2006 и 2007 годы по месяцам в виде гистограммы.

6. Постройте диаграмму зависимости уровня осадков в процентном отношении в виде линейного графика.

7. Постройте совмещенную диаграмму (тип **нестандартная – график – гистограмма 2**) по данным полученной таблицы (второй, третий и четвертый столбцы).

Задание 9. Создайте в Excel следующую таблицу, отображающую погоду за 20 дней апреля.

Дата	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Температура (град)	4	3	6	6	7	7	10	12	15	16	14	10	9	8	9	5	6	6	8	9
Давление (мм)	758	758	755	750	740	741	742	740	760	761	764	763	762	760	755	754	754	753	750	748
Влажность (%)	73	75	80	90	95	78	80	82	71	85	73	65	63	70	65	77	82	79	85	90

Решение.

1. Вычислите, используя эту таблицу, максимальные (**МАКС**), минимальные (**МИН**) и средние (**СРЗНАЧ**) показатели температуры, влажности, и давления. Для этого озаглавьте следующие столбцы и вставьте соответствующие функции.

2. Вычислите также дисперсию, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану по каждой строке.

а) Для вычисления дисперсии в ячейку У2 вставьте статистическую функцию **ДИСП** и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек В2:У2. Скопируйте полученную формулу в ячейки У3:У4.

б) Для вычисления медианы вставьте статистическую функцию **МЕДИАНА** и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек В2:У2. Скопируйте полученную формулу.

с) Для вычисления моды вставьте статистическую функцию **МОДА** и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек В2:У2. Скопируйте полученную формулу.

3. Постройте диаграммы, отражающие динамику изменения основных показателей погоды (на том же листе, разным цветом, в одной системе координат). Лист назовите **Погода**.

4. Перейдите на следующий лист. Скопируйте первоначальную таблицу. Предскажите динамику изменения погоды на 8 дней вперед. Для этого

постройте точечную диаграмму со значениями, соединенными сглаживающими линиями по первым двум строкам таблицы. Добавьте (с помощью правой кнопки мыши) линию тренда тип «степенная», прогноз вперед на 8 единиц. Повторите со строками «давление» и «влажность». Лист назовите «предсказание погоды». Посмотрите, что случится с линиями тренда, если изменить тип диаграммы.

Задание 10. (Задание на самостоятельную работу). По данным следующей таблицы построите разрезанную кольцевую диаграмму.

Озера Северной Америки

Название	Площадь (км ²)	Наибольшая глубина (м)
Верхнее	82103	393
Гурон	59600	229
Мичиган	57441	281
Б. Медвежье	31153	137
Б. Невольничье	28570	614
Эри	25667	64
Виннипег	24390	18
Онтарио	19554	236
Никарагуа	8430	70
Атабаска	7936	60
Олень	6651	60
Виннипегосис	5374	12
Б. Соленое	4660	14
Манитоба	4659	28

Занятие № 7. Табличный процессор MS Excel: вычисление определенного интеграла.

Вычислите определенный интеграл по определению.

Занятие № 8. Табличный процессор MS Excel: Комбинаторные задачи.

Задание 1. Сколькими способами можно расставить 7 различных книг по социологии на одной полке?

Решение. Для нахождения числа перестановок в табличном процессоре Excel можно использовать одну из двух функций: =ПЕРЕСТ(n ; n) или =ФАКТР(n), где n – число переставляемых объектов.

Вводим число объектов 7 и получаем ответ: 5040 способов.

количество перестановок		
число объектов, n	$n =$	7
число перестановок	$P(n) =$	5040
факториал	$n! =$	5040

Рис. 97

В режиме формул это выглядит так:

количество перестановок	
число объектов, n	$n = 7$
число перестановок	$P(n) = \text{=ПЕРЕСТ}(7;7)$
факториал	$n! = \text{=ФАКТР}(7)$

Рис. 98

Задание 2. Сколько различных слов можно составить из букв слова "колокол"?

Решение. Для нахождения числа перестановок в табличном процессоре Excel будем использовать функцию =ФАКТР(), которая находит факториал чисел и обычные действия умножение и деление.

Вводим число букв $n=7$, а также следующие повторы букв К, О и Л: $n_1=2$, (2 буквы "к"), $n_2=3$ (3 буквы "о"), $n_3=2$ (2 буквы "л"), и получаем ответ: 210 слов.

количество перестановок с повторениями		
число объектов, n	$n =$	7
число повторений буквы "К"	n_1	2
число повторений буквы "О"	n_2	3
число повторений буквы "Л"	n_3	2
Число перестановок с повторениями	P	210

Рис. 99

В режиме формул это выглядит так:

количество перестановок с повторениями		
число объектов, n	$n =$	=СУММ(D5;D6;D7)
число повторений буквы "К"	n_1	2
число повторений буквы "О"	n_2	3
число повторений буквы "Л"	n_3	2
Число перестановок с повторениями	P	=ФАКТР(D4)/(ФАКТР(D5)*ФАКТР(D6)*ФАКТР(D7))

Рис. 100

Задание 3. В группе из 10 студентов нужно выбрать троих на должности старосты, заместителя старосты и дежурного. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Для нахождения числа размещений в табличном процессоре Excel используем функцию =ПЕРЕСТ($n;k$).

Вводим $n=10$, $k=3$ и получаем ответ: 720 способов.

количество размещений из n по k		
число объектов, n	$n =$	10
число выбираемых объект	$k =$	3
число размещений $A(n,k)$	$A(n,k) =$	720

Рис. 101

В режиме формул это выглядит так:

количество размещений из n по k		
число объектов, n	$n =$	10
число выбираемых объектов, k	$k =$	3
число размещений $A(n,k)$	$A(n,k) =$	=ПЕРЕСТ(10;3)

Рис. 102

Задание 4. Сколько трехзначных номеров можно составить для автомобилей, используя все возможные цифры от 0 до 9?

Решение. Для вычисления в табличном процессоре Excel используем функцию =СТЕПЕНЬ($n;k$).

Вводим $n=10$ – это количество всех возможных цифр, $k=3$ – это количество цифр в номере, и получаем ответ: 1000 номеров.

количество размещений с повторениями из n по k		
число объектов, n	$n =$	10
число выбираемых	$k =$	3
число размещений с повторениями $\bar{A}(n,k)$	$\bar{A}(n,k) =$	1000

Рис. 1

В режиме формул это выглядит так:

количество размещений с повторениями из n по k		
число объектов, n	$n =$	10
число выбираемых объектов, k	$k =$	3
число размещений с повторениями $\bar{A}(n,k)$	$\bar{A}(n,k) =$	=СТЕПЕНЬ(D4;D5)

Рис. 104

Задание 5. В студенческий поход пошло 10 студентов. Нужно выбрать из них 3, которые понесут флажки. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Для нахождения числа сочетаний в табличном процессоре Excel используем функцию =ЧИСЛКОМБ($n;k$).

Вводим $n=10$, $k=3$ и получаем ответ: 120 способов.

	В	С	Д	Е
	количество сочетаний из n по k			
число объектов, n		$n =$	10	
число выбираемых		$k =$	3	
число сочетаний $C(n,k)$		$C(n,k) =$	120	

Рис. 105

В режиме формул это выглядит так:

	количество сочетаний из n по k			
число объектов, n		$n =$	10	
число выбираемых объектов, k		$k =$	3	
число сочетаний $C(n,k)$		$C(n,k) =$	<code>=ЧИСЛКОМБ(D4;D5)</code>	

Рис. 106

Задание 6. В книжном магазине есть книги трех различных авторов по социологии. Студенты собираются купить 10 книг, в качестве подарков для первокурсников. Сколько возможных вариантов выбора у них есть?

Решение. Для вычисления в табличном процессоре Excel используем функцию `=ЧИСЛКОМБ( $n+k-1$ ;  $k$ )`.

Вводим $n=3$ – книги из трех авторов выбираются, $k=10$ – количество книг, которое необходимо выбрать. Получаем ответ: 220 способов.

	количество сочетаний с повторениями из n по k			
число объектов, n		$n =$	10	
число выбираемых		$k =$	3	
число сочетаний с повторениями $\hat{C}(n,k)$		$\hat{C}(n,k) =$	220	

Рис. 107

В режиме формул это выглядит так:

	количество сочетаний с повторениями из n по k			
число объектов, n		$n =$	10	
число выбираемых объектов, k		$k =$	3	
число сочетаний с повторениями $\hat{C}(n,k)$		$\hat{C}(n,k) = C(n+k-1; k)$	<code>=ЧИСЛКОМБ(D4+D5-1;D5)</code>	

Рис. 108

Занятие № 9. Табличный процессор MS Excel: Случайные величины.

Цель занятия: научиться обрабатывать статистические данные в Excel.

Задание 1. Построить эмпирическое распределение результатов тестирования 55 студентов в баллах: 64, 57, 63, 62, 58, 61, 63, 60, 60, 61, 65, 62, 62, 60, 64, 61, 59, 59, 63, 61, 62, 58, 58, 63, 61, 59, 62, 60, 60, 58, 61, 60, 63, 63, 58, 60, 59, 60, 59, 61, 62, 62, 63, 57, 61, 58, 60, 64, 60, 59, 61, 64, 62, 59, 65.

Решение.

1. В ячейку A1 введите слово *Наблюдения*, а в диапазоне A2:E12 – результаты тестирования студентов.

2. Найдите минимальное и максимальное значения, для этого в ячейке A14 вставьте статистическую функцию МИН и укажите в качестве аргумента интервал ячеек A2:E12, а в ячейку A15 вставьте статистическую функцию МАКС и укажите в качестве аргумента тот же интервал ячеек.

3. Выберите ширину интервала 1 балл. Тогда при крайних значениях 57 и 65 получится 9 интервалов. В ячейки G1 и G2 введите названия интервалов *Результаты тестирования* и *Баллы*, соответственно. В диапазон G4:G12 введите граничные значения интервалов (57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65).

4. Введите заголовки создаваемой таблицы: в ячейки H1:H2 – *Абсолютные частоты*, в ячейки I1:I2 – *Относительные частоты*, в ячейки J1:J2 – *Накопленные частоты*.

5. Заполните столбец абсолютных частот. Для этого выделите для них блок ячеек H4:H12. На панели инструментов *Стандартная* вызовите *Мастер функций* (кнопка ). В появившемся диалоговом окне *Мастер функций* выберите категорию *Статистические* и функцию ЧАСТОТА, после чего нажмите кнопку ОК. В рабочее поле *Массив_данных* мышью введите диапазон интервалов A2:E12. В рабочее поле *Массив_интервалов* мышью введите диапазон интервалов G4:G12. Последовательно нажмите комбинацию клавиш *Ctrl+Shift+Enter*. В столбце H4:H12 появится массив абсолютных частот.

6. В ячейке H13 найдите общее количество наблюдений. Для этого установите курсор в ячейку H13, на панели *Стандартная* нажмите кнопку *Автосумма*. Убедитесь, что диапазон суммирования указан правильно (H4:H12), и нажмите клавишу *Enter*.

7. Заполните столбец относительных частот. В ячейку I4 введите формулу для вычисления относительной частоты: $=H4/H\$13$. Нажмите клавишу *Enter*. Протягиванием (за правый нижний угол при нажатой левой кнопке мыши) скопируйте введенную формулу в диапазон I5:I12. Получим массив относительных частот.

8. Заполните столбец накопленных частот. В ячейку J4 скопируйте значение относительной частоты из ячейки I4. В ячейку J5 введите формулу: $=J4+I5$. Нажмите клавишу *Enter*. Протягиванием скопируйте введенную формулу в диапазон J6:J12. Получим массив накопленных частот.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Наблюдения						Баллы	Абсолютные	Относительные	Накопленные
2	64	62	58	63	61			частоты	частоты	частоты
3	57	62	63	58	58					
4	63	60	61	60	60		57	2	0,036363636	0,036363636
5	62	64	59	59	64		58	6	0,109090909	0,145454545
6	58	61	62	60	60		59	7	0,127272727	0,272727273
7	61	59	60	59	59		60	10	0,181818182	0,454545455
8	63	59	60	61	61		61	9	0,163636364	0,618181818
9	60	63	58	62	64		62	8	0,145454545	0,763636364
10	60	61	61	62	62		63	7	0,127272727	0,890909091
11	61	62	60	63	59		64	4	0,072727273	0,963636364
12	65	58	63	57	65		65	2	0,036363636	1
13								55		
14	57									
15	65									

9. Постройте диаграмму относительных и накопленных частот. Щелчком указателя мыши по кнопке на панели инструментов вызовите *Мастер диаграмм*. В появившемся диалоговом окне выберите вкладку *Нестандартные* и тип диаграммы *График/гистограмма 2*. После нажатия кнопки *Далее* укажите диапазон данных – I1:J12 (с помощью мыши). Проверьте положение переключателя *Ряды в:* столбцах. Выберите вкладку *Ряд* и с помощью мыши введите в рабочее поле *Подписи оси X* диапазон подписей оси X: G4:G12. Нажав кнопку *Далее*, введите названия осей X и Y: в рабочее поле *Ось X* (категорий) – Баллы; *Ось Y* (значений) – Относительная частота; *Вторая ось Y* (значений) – Накопленная частота. Нажмите кнопку *Готово*.

10. Сохраните документ под именем *Статистика*.

Задание 2. Рассматриваются ежемесячные количества реализованных туристической фирмой путевок за периоды до и после начала активной рекламной компании. Ниже приведены количества реализованных путевок по месяцам.

Месяц	Количество реализованных путевок	
	С рекламой	Без рекламы
Январь	125	110
Февраль	120	115
Март	130	125
Апрель	162	135
Май	156	136
Июнь	144	125
Июль	145	147
Август	168	156
Сентябрь	156	145
Октябрь	137	130
Ноябрь	115	111
Декабрь	155	120

Требуется определить для данных показателей: среднее значение, медиану, моду, дисперсию, ранги, стандартные отклонения, эксцесс и асимметрию.

Решение.

1. Перейдите на второй лист рабочей книги и создайте следующую таблицу:

	А	В	С	Д	Е
1	Месяц	Количество реализованных путевок		Ранги	
2		С рекламой	Без рекламы		
3	Январь	125	110		
4	Февраль	120	115		
5	Март	130	125		
6	Апрель	162	135		
7	Май	156	136		
8	Июнь	144	125		
9	Июль	145	147		
10	Август	168	156		
11	Сентябрь	156	145		
12	Октябрь	137	130		
13	Ноябрь	115	111		
14	Декабрь	155	120		
15	Среднее				
16	Медиана				
17	Мода				
18	Дисперсия				
19	Стандартное отклонение				
20	Эксцесс				
21	Асимметрия				

2. Для вычисления среднего в ячейку В15 вставьте статистическую функцию СРЗНАЧ и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек В3:В14. Скопируйте полученную формулу в ячейку С15.

3. Для вычисления медианы в ячейку В16 вставьте статистическую функцию МЕДИАНА и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек В3:В14. Скопируйте полученную формулу в ячейку С16.

4. Для вычисления моды в ячейку В17 вставьте статистическую функцию МОДА и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек В3:В14. Скопируйте полученную формулу в ячейку С17.

5. Для вычисления дисперсии в ячейку В18 вставьте статистическую функцию ДИСП и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек В3:В14. Скопируйте полученную формулу в ячейку С18.

6. Для определения ранга реализации путевок по месяцам после начала рекламной компании в ячейку D3 вставьте статистическую функцию РАНГ и укажите в качестве аргумента *Число* ячейку В3, а в качестве аргумента *Ссылка* интервал ячеек В3:В14 (также воспользуйтесь клавишей F4 для задания абсолютной ссылки на интервал ячеек). Скопируйте полученную формулу в ячейки D4:D14. Определите месяцы, в которых было наибольшее и наименьшее количество реализованных путевок.

7. Аналогично определите ранг реализации путевок до начала рекламной компании в ячейках Е3:Е14.

8. Для вычисления стандартного отклонения в ячейку B19 вставьте статистическую функцию СТАНДОТКЛОН и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек B3:B14. Скопируйте полученную формулу в ячейку C19.

9. Для вычисления эксцесса в ячейку B20 вставьте статистическую функцию ЭКСЦЕСС и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек B3:B14. Скопируйте полученную формулу в ячейку C20.

10. Для вычисления асимметрии в ячейку B21 вставьте статистическую функцию СКОС и укажите в качестве ее аргумента интервал ячеек B3:B14. Скопируйте полученную формулу в ячейку C21.

11. Сохраните документ.

Задание 3. Психолог исследует эффективность четырех различных методик обучения математике. Для этой цели из всех учащихся СШ были выбраны 4 параллельных класса, обучавшихся четыремя этими методами.

Эффективность обучения оценивалась по итогам контрольной работы (по 20-балльной системе).

Получены следующие данные:

№	Методика А	Методика В	Методика С	Методика D
1	11	15	8	16
2	9	16	8	14
3	10	15	9	12
4	15	14	15	14
5	13	12	14	17
6	20	18	12	18
7	19	17	17	20
8	17	13	10	15
9	11	10	9	11
10	16	11	15	12
11	14	12	12	13
12	10	15	16	10
13	8	16	13	10
14	9	14	18	15
15	15	20	19	16
16	12	19	14	16
17	18	20	8	14
18	16	18	9	18
19	20	15	9	17
20	19	14	7	19
21	17	17	10	20
22	13	12	10	19
23	10	11		
24		11		

Необходимо определить основные статистические характеристики в группах данных.

Решение.

1. Перейдите на третий лист рабочей книги и создайте следующую таблицу:

	A	B	C	D	E
1	№	Методика А	Методика В	Методика С	Методика D
2	1	11	15	8	16
3	2	9	16	8	14
4	3	10	15	9	12
5	4	15	14	15	14
6	5	13	12	14	17
7	6	20	18	12	18
8	7	19	17	17	20
9	8	17	13	10	15
10	9	11	10	9	11
11	10	16	11	15	12
12	11	14	12	12	13
13	12	10	15	16	10
14	13	8	16	13	10
15	14	9	14	18	15
16	15	15	20	19	16
17	16	12	19	14	16
18	17	18	20	8	14
19	18	16	18	9	18
20	19	20	15	9	17
21	20	19	14	7	19
22	21	17	17	10	20
23	22	13	12	10	19
24	23	10	11		
25	24		11		

2. Для использования инструментов пакета анализа в меню *Сервис*, выберите команду *Анализ данных*. Затем в появившемся списке *Инструменты анализа* выберите строку *Описательная статистика*.

3. В появившемся диалоговом окне в рабочем поле *Входной интервал*, укажите входной диапазон B2:E25. Активировав рабочее поле *Выходной интервал*, укажите выходной диапазон – ячейку A27. В разделе *Группировка* переключатель установите в положение по столбцам. Установите флажок в поле *Итоговая статистика* и нажмите кнопку ОК.

4. Проанализируйте полученный результат.

5. Сохраните документ.

Задание 4. Проверить соответствие выборочных данных из задания 1 нормальному закону распределения.

Решение.

1. Перейдите на четвертый лист.

2. Выделите данные в диапазоне A1:J13 на *листе 1* и скопируйте их на *лист 4*.

3. Найдите теоретические частоты нормального распределения. Для этого предварительно необходимо найти среднее значение и стандартное отклонение выборки. В ячейке I14 с помощью функции СРЗНАЧ найдите среднее значение для данных из диапазона A2:E12. В ячейке J14 с помощью функции СТАНДОТКЛОН найдите стандартное отклонение для этих же данных. В ячейки K1 и K2 введите название столбца – *Теоретические частоты*. Затем с помощью функции НОРМРАСП найдите теоретические частоты. Установите курсор в ячейку K4, вызовите указанную функцию и заполните ее рабочие поля: *x*—G4; *Среднее*—\$I\$14; *Стандартное откл*—\$J\$14; *Интегральный*—0. Далее скопируйте содержимое ячейки K4 в диапазон ячеек K5:K12. Затем в ячейки L1 и L2 введите название нового столбца – *Теоретические частоты*. Установите курсор в ячейку L4 и введите формулу =H\$13*K4. Далее скопируйте содержимое ячейки L4 в диапазон ячеек L2:L12.

4. С помощью функции ХИ2ТЕСТ определите соответствие данных нормальному закону распределения. Для этого установите курсор в свободную ячейку L13. На панели инструментов *Стандартная* нажмите кнопку *Вставка функции* (кнопка ). В появившемся диалоговом окне выберите категорию *Статистические* и функцию ХИ2ТЕСТ, после чего нажмите ОК. В появившемся окне в рабочие поля введите фактический H4:H12 и ожидаемые L4:L12 диапазоны частот. В ячейке L13 появится значение вероятности того, что выборочные данные соответствуют нормальному закону распределения.

5. Проанализируйте полученный результат.

6. Сохраните документ.

Задание 5. Какова вероятность того, что из пяти испытуемых: а) три холерика; б) не более 3 холериков. Считать вероятности того, что человек является холериком равной 0,3.

Решение.

1. Установите курсор в ячейку A1. Для получения значения вероятности на панели инструментов *Стандартная* вызовите *Мастер функций* (кнопка ). В появившемся диалоговом окне *Мастер функций* выберите категорию *Статистические* и функцию БИНОМРАСП, после чего нажмите кнопку ОК.

2. В рабочее поле *число_успехов* введите с клавиатуры количество успешных испытаний *m* (в нашем случае 3). В рабочее поле *число_испытаний* введите с клавиатуры общее количество испытаний *n* (в нашем случае 5). В рабочее поле *вероятность_успеха* введите с клавиатуры вероятность успеха в отдельном испытании *p* (0,3). В рабочее поле *интегральная* введите вид функции распределения (для случая а) – 0). Нажмите ОК. В ячейке A1 появится искомое значение вероятности.

3. Для нахождения вероятности в случае б) установите курсор в ячейку B1. Далее поступаем также как и в предыдущем пункте, за исключением того, что в рабочее поле *интегральная* вводим 1. В ячейке B1 появится искомое значение вероятности.

Задание 6. Построить гистограмму биномиальной функции плотности вероятности $P(A = m)$ при $n = 10$ и $p = 0,2$.

Решение.

1. Перейдите на новый лист рабочей книги.
2. В ячейку A1 введите символ количества успешных исходов m , а в ячейку B1 — символ вероятности p .
3. Заполните диапазон A2:A12 возможными значениями исходов: 0,1,2...,10.
4. Установите курсор в ячейку B2 и для получения значения вероятности на панели инструментов Стандартная вызовите Мастер функций (кнопка ). В появившемся диалоговом окне Мастер функций выберите категорию Статистические и функцию БИНОМРАСП, после чего нажмите кнопку ОК.
5. В рабочее поле число_успехов введите количество успешных испытаний m (в нашем случае щелкните мышью на ячейке A2). В рабочее поле число_испытаний введите с клавиатуры общее количество испытаний n (в нашем случае 10). В рабочее поле вероятность_успеха введите с клавиатуры вероятность успеха в отдельном испытании p (0,2). В рабочее поле интегральная введите вид функции распределения — 0. Нажмите ОК. В ячейке B2 появится искомое значение вероятности.
6. Скопируйте значение ячейки B2 в диапазон B3:B12.
7. Постройте диаграмму биномиальной функции распределения. Щелчком указателя мыши по кнопке на панели инструментов вызовите Мастер диаграмм (кнопка ). В появившемся диалоговом окне выберите тип диаграммы Гистограмма, вид — . После нажатия кнопки Далее укажите диапазон данных — B1:B12 (с помощью мыши). Проверьте положение переключателя Ряды в: столбцах. Выберите вкладку Ряд и с помощью мыши введите в рабочее поле Подписи оси X диапазон подписей оси X: A2:A12. Нажав кнопку Далее, введите названия осей X и Y: m и p , соответственно. Нажмите кнопку Готово.
8. Сохраните документ на диске D (Имя папки — номер группы) под именем Задачи1 по ТВиМС.

Задание 7. Вероятность того, что человек страдает аутизмом, равна 0,0001. Найти вероятность того, что среди 20000 исследуемых только один будет страдать аутизмом.

Решение.

1. Для решения данной задачи воспользуемся формулой Пуассона, так как условия ее применения выполнены ($n = 20000$, $p = 0.0001$, $np = 2 < 10$).
2. Перейдите на четвертый лист рабочей книги.
3. Для реализации решения задачи создайте следующую таблицу:

	А	В
1	Количество исследуемых	20000
2	Вероятность аутизма	0,0001
3	Вероятность, того что один человек страдает аутизмом	

4. Установите курсор в ячейку В3, на панели инструментов *Стандартная* вызовите *Мастер функций*. В появившемся *диалоговом* окне *Мастер функций* выберите категорию *Статистические* и функцию ПУАССОН, после чего нажмите кнопку ОК.

5. В рабочее поле x введите количество событий m , которое должно произойти (в нашем примере 1). В рабочее поле *среднее* введите среднее ожидаемое значение (в нашем случае $B2 \cdot B1$). В рабочее поле *интегральная* введите 0. В ячейке $B3$ появится искомое значение вероятности.

6. Сохраните документ (нажмите кнопку  на панели инструментов).

Задание 8. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 80 у.е. и средним квадратическим отклонением, равным 5. Найти значения функции распределения на интервале от 71 до 89. Построить графики плотности вероятности и функции распределения. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 75 и 85 у.е.

Решение.

1. Перейдите на пятый лист рабочей книги.
2. Для реализации решения задачи создайте следующую таблицу:

	А	В	С
1	Средняя стоимость (матем. ожидание)	80	
2	Среднее квадратическое отклонение	5	
3		Функция распределения	Плотность распределения
4	71		
5	72		
6	73		
7	74		
8	75		
9	76		
10	77		
11	78		
12	79		
13	80		
14	81		
15	82		
16	83		
17	84		
18	85		
19	86		
20	87		
21	88		
22	89		
23	Вероятность нахождения в заданных пределах		

3. В ячейку В4 введите формулу: =НОРМРАСП(A4;\$B\$1;\$B\$2;1).

Распространите формулу на диапазон В5:В22.

4. В ячейку С4 введите формулу: =НОРМРАСП(A4;\$B\$1;\$B\$2;0).

Распространите формулу на диапазон С5:С22.

5. В ячейку В23 введите формулу: =В18-В8.

6. Постройте график плотности вероятности, выбрав тип диаграммы – *Гладкие графики* на вкладке *Нестандартные*. Укажите диапазон данных – С4:С22 (с помощью мыши). Проверьте положение переключателя *Ряды* в: столбцах. Выберите вкладку *Ряд* и с помощью мыши введите в рабочее поле *Подписи оси X* диапазон подписей оси X: А4:А22. Нажав кнопку *Далее*, введите названия осей X и Y: x и $f(x)$, соответственно. Нажмите кнопку *Готово*.

7. Постройте график функции распределения вероятности, выбрав тип диаграммы – *Гладкие графики* на вкладке *Нестандартные*. Укажите диапазон данных — В4:В22 (с помощью мыши). Проверьте положение переключателя *Ряды* в: столбцах. Выберите вкладку *Ряд* и с помощью мыши введите в рабочее поле *Подписи оси X* диапазон подписей оси X: А4:А22. Нажав кнопку *Далее*, введите названия осей X и Y: x и $F(x)$, соответственно. Нажмите кнопку *Готово*.

8. Сохраните документ.

Задание 9. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью 0,005. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет только одно неправильное соединение.

Решение. Для решения данной задачи воспользуемся формулой Пуассона.

1. Для реализации решения задачи в MS Excel создадим следующую таблицу (рис. 109):

	А	В
1	Количество соединений	200
2	Вероятность неправильного соединения	0,005
3	Вероятность одного неправильного соединения	=ПУАССОН(1;B2*B1;0)

Рис. 109

2. В ячейку В3 введем *Статистическую функцию* ПУАССОН, после чего нажмём кнопку ОК.

3. В рабочее поле x введём количество событий m , которое должно произойти (в нашем примере 1). В рабочее поле *среднее* введём среднее ожидаемое значение (в нашем случае $B_2 \cdot B_1$). В рабочее поле *интегральная* введём 0. В ячейке В3 появится искомое значение вероятности, которое отражено в следующей таблице (рис. 110):

	А	В
1	Количество соединений	200
2	Вероятность неправильного соединения	0,005
3	Вероятность одного неправильного соединения	0,367879441

Рис. 110

Задание 10. Какова вероятность того, что из пяти следующих новорожденных будут: а) три мальчика; б) не более 3 мальчиков. Считать вероятности рождения мальчика и девочки равными.

Решение. Для решения данной задачи надо вспомнить формулу Бернулли.

1. Создадим следующую таблицу (см. рис. 111). В поле *Число новорожденных мальчиков* введём с клавиатуры количество успешных испытаний m (в нашем случае 3). В рабочее поле *Число новорожденных* введём с клавиатуры общее количество испытаний n (в нашем случае 5). В рабочее поле *Вероятность рождения мальчика/девочки* введём с клавиатуры вероятность успеха в отдельном испытании $p=0,5$.

	A	B
1	Число новорожденных	5
2	Число новорожденных- мальчики	3
3	Вероятность рождения мальчика/девочки	0,5
4	Вероятность рождения 3-х мальчиков	=БИНОМ.РАСП(3;5;0,5;0)

Рис. 111

2. В поле *Вероятность рождения 3-х мальчиков* введём *Статистическую функцию* распределения =БИНОМ.РАСП(3;5;0,5;0). Нажмём ОК. В ячейке B4 появится искомое значение вероятности (см. рис. 112).

	A	B
1	Число новорожденных	5
2	Число новорожденных- мальчики	3
3	Вероятность рождения мальчика/девочки	0,5
4	Вероятность рождения 3-х мальчиков	0,3125

Рис. 112

3. Для нахождения вероятности в пункте б) установим курсор в ячейку B5. Далее поступаем также как и в предыдущем пункте 2, за исключением того, что в рабочее поле *интегральная* вводим 1 (см. рис. 113). В ячейке B5 появится искомое значение вероятности (см. рис. 114).

	A	B
1	Число новорожденных	5
2	Число новорожденных- мальчики	3
3	Вероятность рождения мальчика/девочки	0,5
4	Вероятность рождения 3-х мальчиков	=БИНОМ.РАСП(3;5;0,5;0)
5	Вероятность рождения не более 3-х мальчиков	=БИНОМ.РАСП(3;5;0,5;1)

Рис. 113

	A	B
1	Число новорожденных	5
2	Число новорожденных- мальчики	3
3	Вероятность рождения мальчика/девочки	0,5
4	Вероятность рождения 3-х мальчиков	0,3125
5	Вероятность рождения не более 3-х мальчиков	0,8125

Рис. 114

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Примерные темы для рефератов

1. Основные направления использования математики в географии и геологии.
2. История проникновения математических методов в географические науки.
3. Взаимодействие и межпредметные связи математики и географии.
4. Применение матриц в географии. Применение матриц при изучении географических сетей.
5. Геоморфология и математика.
6. Математическая картография.
7. Аналитическая классификация элементов рельефа на плоскости.
8. Дифференциальное исчисление при изучении структурных и тектонических движений земной коры.
9. Роль и место математической статистики в современном обществе и научных исследованиях.
10. Применение интегрирования в географии и геологии.
11. Геометрическое описание строения земной коры. Аппроксимация складок земной коры линиями первого и второго порядков.
12. Применение математических методов при прогнозировании природных и социальных явлений.
13. Роль и место математического моделирования в современном обществе.

3.2. Примерные вопросы к дифференцированному зачёту

1. Предмет высшей математики. Исторические сведения. Понятие о роли математики в географии. Математическое моделирование.
2. Матрицы. Основные определения. Операции над матрицами (сумма, произведение, умножение на число). Свойства операций. Применение матриц в географии.
3. Определители второго и третьего порядков. Свойства. Вычисление определителей. Теорема Лапласа (разложение определителя по строке или столбцу).
4. Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица. Условие существования обратной матрицы.
5. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера.
6. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.
7. Метод координат на плоскости. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости: нахождение расстояния между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, вычисление площади треугольника.
8. Полярные координаты. Преобразования прямоугольной системы координат: параллельный перенос, поворот осей координат. Системы координат в геодезии и картографии.
9. Уравнение линии на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости.

10.Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

11.Эллипс. Каноническое уравнение. Эксцентриситет, его геометрический смысл.

12.Гипербола. Каноническое уравнение. Эксцентриситет, его геометрический смысл. Директрисы эллипса и гиперболы.

13.Парабола. Уравнение параболы. Фокальный параметр параболы.

14.Общее уравнение линии второго порядка. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду.

15.Функции одной переменной. Примеры функциональной зависимости в географии.

16.Предел функции в точке. Геометрическая интерпретация.

17.Предел функции на бесконечности. Геометрическая интерпретация.

18.Замечательные пределы. Вычисление пределов.

19.Определение производной, ее геометрический и физический смысл. Дифференцируемые и недифференцируемые функции. Уравнение касательной. Скорость перемещения и уклон земной поверхности как производные.

20.Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные высших порядков.

21.Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа). Правило Лопиталя-Бернулли.

22.Исследование функций на возрастание и убывание. Достаточные условия экстремума функции в точке. Исследование функции на выпуклость. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

23.Общая схема исследования функции. Аналитическая классификация элементов рельефа на плоскости. Гребневые и килевые точки, склоны.

24.Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям.

25.Интегрирование рациональных дробей с квадратным трехчленом в знаменателе.

26.Определенный интеграл: определение, геометрический и физический смысл. Условия интегрируемости функций. Свойства определенного интеграла.

27.Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

28.Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур, длины дуги плоской кривой, объемов геометрических тел. Применение интегрирования в географии. Вычисление объёмов холмов, вулканов.

29.Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения. Начальные условия. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения.

30. Приложения дифференциальных уравнений в географии. Задача о росте населения.

31. Элементы комбинаторики. Перестановки, размещения и сочетания.

32. Основы теории вероятностей. Классификация событий. Действия над событиями. Классическое определение вероятности. Теорема сложения вероятностей.

33. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Независимость случайных событий.

3.3. Средства диагностики

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Перечень рекомендуемых средств диагностики:

1. Устный опрос. 2. Контрольные работы. 3. Защита лабораторных работ. 4. Реферат.

При оценивании реферата (доклада) обращается внимание на: содержание и полноту раскрытия темы, структуру и последовательность изложения, источники и их интерпретацию, корректность оформления и т.д.

Оценка за ответы на практических занятиях включает в себя полноту ответа, наличие аргументов, примеров из практики, правильности решения практических примеров и задач и т.д.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Высшая математика с основами информатики» учебным планом предусмотрен **дифференцированный зачет** в I семестре.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- устный опрос – 30 %;
- контрольная работа – 30 %;
- подготовка реферата – 20 %;
- защита лабораторных работ – 20 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) и зачетной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей аттестации составляет 40 %, отметки на зачете – 60 %.

3.4. Примерные промежуточные контрольные работы

Контрольная работа 1. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений (2ч.).

Примерный перечень заданий.

1. Найти обратную матрицу A^{-1} , где $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. Вычислить произведение AA^{-1} .

2. Определение обратной матрицы. У каких матриц обратная не существует? Привести пример такой матрицы. Существует ли обратная у единичной, нулевой матрицы? Определение минора элемента определителя матрицы.

3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -5 & 5 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 18 \end{cases}.$$

5. Найти произведения матриц AB и BA . $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Форма контроля – контрольная работа.

Контрольная работа 2. Аналитическая геометрия на плоскости (2ч.).

Примерный перечень заданий.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(8; -1)$, $B(-8; 11)$, $C(-1; -13)$. Найдите: 1) длину стороны AC ; 2) уравнение высоты, проведенной из вершины C ; 3) расстояние от вершины C до прямой AB ; 4) длину медианы AD .

2. Привести уравнение $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$ к каноническому виду. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты фигуры, заданной полученным уравнением. Построить эту фигуру на плоскости.

3. Напишите уравнение окружности, проходящей через левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$ и имеющей центр в точке $A(-1; -2)$.

4. Запишите канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (F — фокус, a — большая (действительная) полуось, b — малая (мнимая) полуось, ε — эксцентриситет, D — директриса кривой, $2c$ — фокусное расстояние).

а) $b = 4$, $F(9;0)$; б) $a = 5$, $\varepsilon = 7/5$; в) $D: x = 6$.

5. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 1$ и прямой $2x + y - 8 = 0$.

6. Определение эллипса, его каноническое уравнение. Фокусы эллипса, эксцентриситет, его свойства, директрисы.

Форма контроля – контрольная работа.

Контрольная работа 3. Производные и дифференциалы (2ч.).

Примерный перечень заданий.

1. Вычислить производные y' функций а) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$; б) $y = x^2 \cos \sqrt{x}$.

2. Исследовать функции и построить их графики: а) $y = 12x - 2x^3 - 3x^2 + 2$; б)

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}.$$

3. Вычислите пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2 + 3x - 5x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$$

4. Найдите на графике функции $y = 3x^3 - 4x^2 + 1$ точку, касательная к которой образует с осью Ox угол $\pi/4$.

Форма контроля – контрольная работа.

Контрольная работа 4. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. (2ч.).

Примерный перечень заданий.

1. Вычислить интеграл $\int (\sin 2x + e^{-3x} + \frac{2}{\cos^2 3x}) dx$. Результат проверить дифференцированием.

2. Вычислить интегралы:

$$A) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx, \quad B) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx; \quad C) \int (x+3)e^x dx, \quad D) \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x - 1$, $x = 1$, $y = \frac{4}{x^2}$.

4. Найти объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной функциями $y = 0,5x$; $y = \sqrt{x}$ вокруг оси абсцисс.

Форма контроля – контрольная работа.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ 1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

Тема 1.1. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений

Понятие матрицы. Определители и их свойства. Вычисление определителей. Действия над матрицами. Обратная матрица. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричная запись системы. Решение систем уравнений методами Крамера и Гаусса. Применение матриц в географии.

Тема 1.2. Аналитическая геометрия на плоскости

Аналитическая геометрия на плоскости. Простейшие задачи аналитической геометрии. Системы декартовых и полярных координат на плоскости, системы координат в геодезии и картографии. Прямая линия на плоскости. Различные виды уравнения прямой. Расстояние от точки до прямой. Линии второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Приведение общего уравнения второй степени к каноническому виду. Геометрическое описание строения земной коры.

Тема 1.3. Аналитическая геометрия в пространстве

Аналитическая геометрия в пространстве. Системы координат: декартова, сферическая и цилиндрическая. Знакомство с поверхностями 2-го порядка в пространстве. Земной эллипсоид. Элементы математической картографии. Географические координаты точек шара. Геодезические координаты точек эллипсоида вращения. Дуги параллелей и меридианов.

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тема 2.1. Функции одной переменной и пределы

Функции одной переменной. Определение функции, различные способы задания. Примеры функциональной зависимости в географии. Понятие о предельном значении функции. Геометрическая интерпретация. Вычисление пределов.

Непрерывность функции в точке. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Тема 2.2. Производные и дифференциалы

Производная. Геометрический и физический смысл производной. Скорость перемещения и уклон земной поверхности как производные. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Понятие дифференцируемой функции. Производные высших порядков.

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопиталя-Бернулли. Применение

дифференциального исчисления в географии и геологии. Аналитическая классификация элементов рельефа на плоскости.

Тема 2.3. Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования.

Тема 2.4. Определенный интеграл

Определенный интеграл. Понятие определенного интеграла как предела интегральной суммы. Геометрический смысл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Применение интегрирования в географии и геологии. Вычисление объёмов холмов, вулканов.

РАЗДЕЛ 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема 3.1. Элементы теории множеств. Комбинаторика

Элементы теории множеств. Операции над множествами. Комбинаторика. Перестановки, размещения и сочетания.

Тема 3.2. Случайные события и вероятности

Основы теории вероятностей. Классификация событий. Алгебра событий. Вероятности случайных событий. Условные вероятности. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности.

Тема 3.3. Случайные величины

Случайные величины: дискретные и непрерывные. Закон распределения дискретной случайной величины. Математическое ожидание, дисперсия, их свойства. Биномиальное, нормальное, равномерное распределение.

4.2. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Перечень основной литературы

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 19-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 448 с. <https://e.lanbook.com/book/189312>
2. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 492 с. <https://e.lanbook.com/book/200084>
3. Высшая математика. Практикум: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по естественнонаучным и экономическим специальностям: в 2 ч. / [авт.: О. М. Матейко и др.]; под ред. С. А. Самаля. – Минск: РИВШ, 2020 – Ч. 1. – 2020. – 329 с.

4. Высшая математика. Практикум: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по естественнонаучным и экономическим специальностям: в 2 ч. / [авт.: О. М. Матейко и др.]; под ред. С. А. Самаля. – Минск: РИВШ, 2022 – Ч. 2. – 2020. – 360 с.

5. Информатика. Базовый курс: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений / под ред. С. В. Симоновича. – 3-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2020. – 637 с. Режим доступа : <https://ibooks.ru/products/376961>.

6. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие для вузов / Д. В. Клетеник ; Под редакцией Н. В. Ефимова. – 17-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 224 с. <https://e.lanbook.com/book/187823>

7. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. – 16-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 476 с. . <https://e.lanbook.com/book/183752>.

8. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : учебник для вузов : в 2 частях / Г. М. Фихтенгольц. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. – Часть 1 : Основы математического анализа – 2022. – 444 с. <https://e.lanbook.com/book/184192>.

Перечень дополнительной литературы

1. Fowler, A. Mathematical Geoscience / A. Fowler. – Springer-Verlag London, 2011. – 883 p.

2. Гусак, А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. – 4-е издание. – Минск: ТетраСистемс, 2006. – 288 с.

3. Гусак, А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. – 4-е издание. – Минск: ТетраСистемс, 2006. – 416 с.

4. Гусак, А.А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – 6-е издание. – Минск: ТетраСистемс, 2007. – 288 с.

5. Каратаев, Г.И. Геоморфология и математика / Г.И. Каратаев, А.В. Матвеев. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 107 с.

6. Компания Яндекс – Технологии [Электронный ресурс] / Яндекс. – Ресурс доступа: <https://yandex.ru/company/technologies>. – Дата доступа: 15.01.2018.

7. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2001. – 656 с.

8. Макарова, Н.В. Информатика: Учебник для вузов / Н.В. Макарова, В.Б. Волков. – СПб.: Питер, 2012 – 516 с.

9. Матейко, О.М. Высшая математика для географов: учеб. пособие: в 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2012. – Ч. 1. – 271 с.

10. Матейко, О.М. Высшая математика для географов: учеб. пособие: в 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2013. – Ч. 2. – 175 с.

11. Математические методы обработки данных в экологии: учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по спец. "Природоохранная

деятельность (по напр.)" / [авт.: А. А. Волчек и др.]. – Минск: РИВШ, 2018. – 210 с.

12. Серапинас, Б.Б. Математическая картография: Учебник для вузов / Б.Б. Серапинас. – М.: «Академия», 2005. – 336 с.

13. Чертко, Н.К. Математические методы в географии: Учеб.-метод. пособие / Н.К. Чертко, А.А. Карпиченко. – Минск: БГУ, 2009. – 199 с.

4.3. ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. Матейко, О.М. Высшая математика с основами информатики: учебная программа УВО по учебной дисциплине для специальностей: 6-05-0532-01 География; 6-05-0532-02 Гидрометеорология; 6-05-0532-05 Космоаэрокартография; 6-05-0521-03 Геоэкология; 6-05-0532-04 Геология и разведка месторождений полезных ископаемых; 6-05-0532-06 Геоинформационные системы (по направлениям) / О. М. Матейко, М.В. Мартон, Н. Б Яблонская // учебная программа располагается в коллекциях: Кафедра общей математики и информатики. [Электронный ресурс]. – 2023. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/307522>. – Дата доступа: 29.05.2024.

2. Моисеева, Н.А. Информационные технологии : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0311-03 «Мировая экономика». В 2 ч. Ч. 1. / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 138 с. : ил. – Библиогр.: с. 137–138. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304534>. – Дата доступа: 29.05.2024.

3. Моисеева, Н.А. Информационные технологии : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0311-03 «Мировая экономика». В 2 ч. Ч. 2. / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 122 с. : ил. – Библиогр.: с. 121–122. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304537>. – Дата доступа: 29.05.2024.

4. Моисеева, Н.А. Основы высшей математики и теории вероятностей : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0314-01 «Социология» / О. А. Велько , Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 177 с. : ил. – Библиогр.: с. 175–177. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/303891>. – Дата доступа: 29.05.2024.

5. Моисеева, Н.А. Основы высшей математики и теории вероятностей : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0321-03 «Социальные коммуникации» / О. А. Велько , Н. А. Моисеева; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 244 с. : ил.,табл. – Библиогр.: с. 241–244. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/303126>. – Дата доступа: 29.05.2024.

6. Моисеева, Н.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: электронный учебно-методический комплекс для

специальности: 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2022. – 267 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 266–267. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/277186>. – Дата доступа: 29.05.2024.