

Белорусский государственный университет

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05» июля 2024 г.

Регистрационный № УД – 13047/уч.



**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ**

**Учебная программа учреждения высшего образования**

**по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 06 Экономическая кибернетика (по направлениям)**

Направление специальности

1-31 03 06-01 Экономическая кибернетика

(математические методы и компьютерное моделирование в экономике)

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 06-2021 и учебного плана БГУ №G 31-1-033/уч. от 30.06.2021.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

**Н.М. Дмитрук**, заведующий кафедрой методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**О.И. Костюкова**, главный научный сотрудник отдела математической теории систем Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» доктор физико-математических наук, профессор;

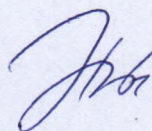
**И.К. Асмыкович**, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного технологического университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой методов оптимального управления БГУ  
(протокол № 10 от 22.05.2024 г.)

Научно-методическим советом БГУ  
(протокол № 9 от 29.06.2024 г.)

Заведующий кафедрой методов  
оптимального управления  
Белорусского государственного университета,  
кандидат физико-математических наук, доцент



Н.М. Дмитрук

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Методы оптимизации в машинном обучении» знакомит студентов с задачами и методами современной оптимизации, охватывая темы выпуклой и невыпуклой непрерывной оптимизации для задач, возникающих в машинном обучении, в частности, особенностей оптимизации в нейронных сетях и алгоритмах обучения с подкреплением.

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Цели** учебной дисциплины «Методы оптимизации в машинном обучении»:

1. формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности;
2. формирование логического мышления, позволяющего грамотно анализировать получаемую информацию и делать соответствующие выводы для достижения желаемых результатов;
3. формирование навыков исследовательской и активной профессиональной деятельности, постановки задач, выработки и принятия решений;
4. формирование у студентов знаний, умений и навыков анализа и решения различных оптимизационных задач, связанных с машинным обучением;
5. демонстрация того, как изученные математические методы могут применяться при решении прикладных задач.

**Задачи** учебной дисциплины «Методы оптимизации в машинном обучении»:

1. освоение теоретических основ и практических навыков для анализа и решения различных оптимизационных задач;
2. формирование представлений об эффективных методах оптимизации, актуальных для нейронных сетей и обучения с подкреплением;
3. выработка практических навыков реализации численных методов оптимизации, актуальных для машинного обучения.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Методы оптимизации в машинном обучении» относится к **дисциплинам по выбору** компонента учреждения высшего образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплины модуля «Математический анализ», дисциплины «Линейная алгебра», «Методы оптимизации». Сведения из дисциплины «Методы оптимизации в машинном обучении» служат базой для выполнения курсовых и дипломных работ.

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Методы оптимизации в машинном обучении» должно обеспечить формирование следующей **специальной компетенции**:

СК. Использовать классические и современные методы численного решения оптимизационных задач в применении к проблемам машинного обучения, реализовывать их для решения практических задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

- формулировки и основные классы задач непрерывной оптимизации, формулировки задач машинного обучения как задач оптимизации;
- концепции выпуклости и невыпуклости в оптимизации и их влияние при выборе метода решения соответствующих задач;
- методы первого и второго порядков, включая градиентные методы, алгоритмы стохастического градиентного спуска, адаптивные градиентные алгоритмы и другие современные методы, актуальные для нейронных сетей;

**уметь:**

- формулировать прикладные задачи как задачи оптимизации, сводить поставленную задачу к одному из основных классов и обосновывать выбор метода их решения;
- применять изученные методы на практике для решения реальных задач в области машинного обучения и анализировать полученные результаты;
- реализовывать программно основные алгоритмы оптимизации;

**владеть:**

- современными методами решения задач машинного обучения;
- средствами и инструментами Matlab, Python для моделирования и численного решения практических задач.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 7 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Методы оптимизации в машинном обучении» отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 200 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## ВВЕДЕНИЕ

Примеры задач. Цели и задачи курса.

## РАЗДЕЛ 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

### Тема 1.1 Задачи математической оптимизации и их приложения

Общая формулировка задачи математической оптимизации. Классы задач непрерывной оптимизации в конечномерных пространствах: линейное программирование, квадратичное программирование, выпуклое программирование, новые классы задач выпуклой оптимизации. Экстремальные задачи в бесконечномерных пространствах: вариационное исчисление и оптимальное управление. Безусловная, условная оптимизация. Эквивалентные преобразования задач. Примеры оптимизационных задач, актуальных для машинного обучения.

### Тема 1.2. Элементы выпуклого анализа

Выпуклые множества. Аффинные множества. Выпуклые конусы. Аффинные, выпуклые, конические оболочки. Операции, сохраняющие выпуклость. Разделяющая и опорная гиперплоскость. Теоремы отделимости. Выпуклые функции. Выпуклые функции. Свойство сильной выпуклости. Свойства выпуклых функций, операции, сохраняющие выпуклость. Эпиграф функции, свойства эпиграфа выпуклой функции. Дифференциальные критерии выпуклой функции, критерии сильной выпуклости. Примеры. Задачи регрессии, способы регуляризации. Негладкая оптимизация.

### Тема 1.3. Двойственность и условия оптимальности

Функция Лагранжа, двойственная функция и двойственная задача. Условие Слейтера. Основные результаты теории двойственности. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера, условия дополняющей нежесткости. Анализ чувствительности. Применение условий оптимальности и двойственности в разных задачах оптимизации, задачах регрессии и классификации. Метод опорных векторов.

## РАЗДЕЛ 2. ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ

### Тема 2.1. Минимизация функций одной переменной

Классификация численных алгоритмов, основные принципы построения итеративных алгоритмов, скорости сходимости. Унимодальные функции и методы поиска их точек минимума. Дихотомический поиск. Метод «золотого сечения». Метод Фибоначчи.

### Тема 2.2 Методы первого порядка

Методы спуска: общая схема методов спуска. Правила выбора направления и шага. Правило Армхо, процедура бэктрекинга. Метод градиентного спуска, сходимость в гладком случае (выпуклые, сильно выпуклые). Субградиентный метод.

Метод сопряженных градиентов. Метод проекции градиента. Метод условного градиента. Проксимальный градиентный метод. Стохастический градиентный спуск. Обучение нейронных сетей с точки зрения оптимизации.

### **Тема 2.3. Методы Ньютона и квазиньютоновские методы**

Методы Ньютона. Сходимость метода Ньютона. Квазиньютоновские методы. Метод Ньютона в задаче с ограничениями-равенствами. Анализ сходимости. Обобщение метода Ньютона на случай старта из недопустимой точки. Методы линейризации и последовательного квадратичного программирования.

## **РАЗДЕЛ 3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ОБУЧЕНИЕ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ**

### **Тема 3.1. Классическое динамическое программирование**

Дискретная задача оптимального управления. Основные понятия и взаимосвязь постановок. Детерминированное и стохастическое динамическое программирование: принцип оптимальности, функция Беллмана, инвариантное погружение, уравнения Беллмана. Оптимальная политика. Q-функция и уравнение Беллмана для Q-функции. Задачи с конечным и бесконечным горизонтом. Примеры.

### **Тема 3.2. Обучение с подкреплением**

Модель взаимодействия агента со средой. Марковский процесс принятия решений: пространство состояний, пространство действий, динамика среды, траектория, награда, дисконтирование, политика. Эпизодические среды. Примеры. Связь оптимального управления и обучения с подкреплением.

### **Тема 3.3. Алгоритмы обучения с подкреплением**

Классификация алгоритмов обучения с подкреплением. Критерии оценки алгоритмов. Аппроксимация в пространстве состояний. Аппроксимация в пространстве политик. Q-обучение, SARSA.

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения образования

| Номер раздела, темы | Наименование раздела, темы                               | Количество аудиторных часов |                      | Количество часов УСР | Форма контроля знаний                                                      |
|---------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------------|
|                     |                                                          | Лекции                      | Лабораторные занятия |                      |                                                                            |
|                     | <b>Введение</b>                                          | 2                           |                      |                      |                                                                            |
| <b>1</b>            | <b>Основы теории оптимизации</b>                         |                             |                      |                      |                                                                            |
| 1.1                 | Задачи математической оптимизации и их приложения        | 2                           | 2                    |                      | Устный опрос.<br>Решение задач                                             |
| 1.2                 | Элементы выпуклого анализа                               | 4                           | 2                    |                      | Устный опрос.<br>Расчетно-графическое задание №1                           |
| 1.3                 | Двойственность и условия оптимальности                   | 4                           | 4                    | 2                    | Решение задач.<br>Расчетно-графическое задание №2<br>Контрольная работа №1 |
| <b>2</b>            | <b>Численные алгоритмы</b>                               |                             |                      |                      |                                                                            |
| 2.1                 | Минимизация функций одной переменной                     | 2                           | 2                    |                      | Устный опрос.                                                              |
| 2.2                 | Методы первого порядка                                   | 6                           | 6                    | 2                    | Расчетно-графическое задание №3                                            |
| 2.3                 | Методы Ньютона и квазиньютоновские методы                | 4                           | 2                    |                      | Расчетно-графическое задание №4<br>Контрольная работа №2                   |
| <b>3</b>            | <b>Оптимальное управление и обучение с подкреплением</b> |                             |                      |                      |                                                                            |
| 3.1                 | Классическое динамическое программирование               | 4                           | 4                    |                      | Устный опрос.<br>Решение задач                                             |
| 3.2                 | Обучение с подкреплением                                 | 2                           | 4                    |                      | Расчетно-графическое задание №5                                            |

|     |                                    |           |           |          |                                 |
|-----|------------------------------------|-----------|-----------|----------|---------------------------------|
| 3.3 | Алгоритмы обучения с подкреплением | 6         | 4         | 2        | Расчетно-графическое задание №6 |
|     | <b>Итого</b>                       | <b>36</b> | <b>30</b> | <b>6</b> |                                 |

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Дайзенрот, М. П. Математика в машинном обучении / М. П. Дайзенрот, Ф. А. Альдо, С. О. Чен – СПб.: Питер, 2024. – 512 с.
2. Методы оптимизации : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»; 1-31 03 04 «Информатика»; 1-31 03 05 «Актуарная математика»; 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.] ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. методов оптимального управления. – Минск : БГУ, 2020. – 203 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/243989>.
3. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Математика" / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - Изд. 2-е, испр. - Москва : ЛЕНАНД : URSS, 2023. - 204 с.
4. Бахтин, В. И. Конечномерные экстремальные задачи : [гладкие, линейные, выпуклые] : учебное пособие для студ. учреждений высшего образования по математическим специальностям / В. И. Бахтин, А. В. Лебедев. - Москва : ЛЕНАНД : URSS, 2023. - 108 с.

### Перечень дополнительной литературы

5. Boyd, S. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe – Cambridge University press, 2004.
6. Wright, S.J. Numerical optimization / S.J. Wright, J. Nocedal – Springer, 1999.
7. Выпуклая оптимизация : учебное пособие / Е.А. Воронцова, Р.Ф. Хильдебранд, А.В. Гасников, Ф.С. Стонякин. – Москва : МФТИ, 2021. – 364 с. Электронный доступ – <https://arxiv.org/pdf/2106.01946.pdf>
8. Dvurechensky, P. First-Order Methods for Convex Optimization / P. Dvurechensky, S. Shtern, M. Staudigl // EURO Journal on Computational Optimization. – 2021. – № 9. Электронный доступ – <https://arxiv.org/abs/2101.00935>.
9. Bertsekas D. Reinforcement learning and optimal control. – Athena Scientific, 2019. Электронный доступ – <https://web.mit.edu/dimitrib/www/rlpref-ace.pdf>.
10. Гасников, А.В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска : учебное пособие / А. В. Гасников. – М.: МФТИ, 2018. – 291 с. Электронный доступ – <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1711/1711.00394.pdf>
11. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации / Ю.Е. Нестеров – М.: МЦНМО, 2010.

## **Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Для диагностики компетенций используются следующие формы:

*Устная форма:*

– устный опрос.

*Письменная форма:*

– контрольная работа;

– расчетно-графические задания.

*Устно-письменная форма:*

– решение задач;

– зачет по учебной дисциплине.

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Методы оптимизации в машинном обучении» предусматривается изложение теории с включением проблемного подхода к изучению отдельных тем.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Методы оптимизации в машинном обучении» учебным планом предусмотрен **зачет**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

– устный опрос – 10 %;

– расчетно-графические задания – 60 %;

– контрольная работа – 30 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 50 % и отметки на зачете – 50 %.

## **Примерный перечень заданий управляемой самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1.3. «Двойственность и условия оптимальности». (2 ч)**

Задание 1. По заданной прямой задаче построить двойственную задачу и получить либо точное решение, либо оценку снизу на оптимальное значение прямой задачи (по вариантам индивидуальных заданий).

Задание 2. Показать эквивалентность предложенных задач оптимизации или получить эквивалентную задачу к заданной.

Форма контроля – Расчетно-графическое задание №2.

### **Тема 2.2. «Методы первого порядка». (2 ч)**

Задание 1. Реализовать выбранный метод первого порядка (по вариантам индивидуальных заданий).

Задание 2. Провести численные эксперименты для ряда модельных задач безусловной минимизации с анализом результата и обоснованными выводами об эффективности методов.

Задание 3. Провести сравнительный анализ по группам методов и группам модельных примеров (групповое задание).

Форма контроля – Расчетно-графическое задание №3.

### **Тема 3.3. «Алгоритмы обучения с подкреплением». (2 ч)**

Задание 1. Реализовать алгоритм обучения с подкреплением (по вариантам индивидуальных заданий).

Задание 2. Провести тестирование алгоритма на модельных примерах.

Форма контроля – Расчетно-графическое задание №6.

Перечень используемых средств диагностики результатов управляемой самостоятельной работы студентов: расчетно-графические задания с использованием ЭВМ.

## **Описание инновационных подходов и методов преподавания учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать перечисленные ниже методы.

**Метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

**Метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

## **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении лабораторных заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- расчетно-графические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и текущей аттестации.

### **Примерный перечень вопросов к зачету**

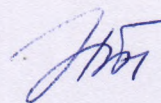
1. Классы задач непрерывной оптимизации в конечномерных пространствах. Эквивалентные преобразования задач.
2. Элементы выпуклого анализа: выпуклые множества, выпуклые функции, операции, сохраняющие выпуклость.
3. Задачи регрессии, регуляризация.
4. Основные результаты теории двойственности.
5. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера.
6. Условия оптимальности и двойственности в задачах регрессии.
7. Применение условий оптимальности и двойственности в задачах классификации. Метод опорных векторов.
8. Классификация численных алгоритмов решения задач оптимизации, основные принципы построения итеративных алгоритмов.
9. Унимодальные функции и методы поиска их точек минимума.
10. Методы спуска: общая схема методов спуска. Правила выбора направления и шага.
11. Метод градиентного спуска, сходимости в гладком случае.
12. Субградиентный метод.
13. Метод сопряженных градиентов.
14. Метод проекции градиента.
15. Метод условного градиента.
16. Проксимальный градиентный метод.
17. Стохастический градиентный спуск.
18. Методы Ньютона. Сходимость метода Ньютона.
19. Квазиньютоновские методы.
20. Методы линеаризации и последовательного квадратичного программирования.

21. Детерминированное и стохастическое динамическое программирование
22. Q-функция и уравнение Беллмана для Q-функции.
23. Модель взаимодействия агента со средой. Марковский процесс принятия решений. Связь оптимального управления и обучения с подкреплением.
24. Аппроксимация в пространстве состояний.
25. Аппроксимация в пространстве политик.
26. Q-обучение, SARSA.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

| Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование | Название кафедры | Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) <sup>1</sup> |
|---------------------------------------------------------------|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Учебная дисциплина не требует согласования                    |                  |                                                                                                               |                                                                                                                |

Заведующий кафедрой методов  
оптимального управления  
Белорусского государственного университета,  
кандидат физико-математических наук, доцент



Н.М. Дмитрук

22.05.2024

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

| №№<br>ПП | Дополнения и изменения | Основание |
|----------|------------------------|-----------|
|          |                        |           |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_