

Белорусский государственный университет

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Е. Прохоренко

«05» июля 2024 г.

Регистрационный №УД- 1469/б.

## **МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**6–05-0533-06 Математика**

2024 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 6-05-0533-06-2023, учебных планов БГУ №6-5.4-54/01, утвержденного 15.05.2023 г., №6-5.4-54/11 ин., утвержденного 31.05.2023.

#### **СОСТАВИТЕЛИ:**

**О.Н. Карневич**, заместитель декана по идеологической и воспитательной работе механико-математического факультета Белорусского государственного университета

#### **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Л.Л. Тухолко**, доцент кафедры математики и методики преподавания математики физико-математического факультета учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат педагогических наук, доцент;

**И.М. Мартыненко**, заместитель декана по идеологической и воспитательной работе факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

#### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ (протокол № 10 от 31.05.2024);

Научно-методическим Советом БГУ  
(протокол №9 от 28.06.2024)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии  
и методики преподавания математики

Д.Ф. Базылев

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Изучение дисциплины «Методы решения задач геометрии» обусловлено необходимостью обобщения, углубления и систематизации знаний студентов по наиболее сложным темам школьного курса геометрии.

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Цель** учебной дисциплины – овладение студентами общими и частными методами и приёмами решения геометрических задач, развитие навыков творческой поисковой математической деятельности.

### **Задачи учебной дисциплины:**

1. Обучение будущих учителей математики общим и частным методам решения геометрических задач.
2. Формирование прочных умений и навыков решения задач школьной геометрии.
3. Развитие творческих способностей студентов путём решения задач повышенной сложности и нестандартных задач.
4. Формирование общих приёмов поиска решения задач.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Алгебра и теория чисел» компонента учреждения образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Программа строится с учетом полученных студентами знаний по учебным дисциплинам «Аналитическая геометрия», «Введение в специальность».

### **Требования к компетенциям**

Изучение дисциплины «Методы решения задач по геометрии» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

БПК Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

СК Применять ключевые методы защиты информационных систем при реализации криптоприложений.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

- геометрические понятия и формулы;
- основные методы решения задач по геометрии;
- приёмы эвристических рассуждений;

**уметь:**

- использовать геометрические понятия и их свойства для доказательства теорем;
- применять основные методы решения геометрических задач;
- использовать эвристические рассуждения и приёмы при решении задач.

**владеть:**

- навыками применения геометрических понятий и их свойств для доказательства теорем;
- методами решения геометрических задач;
- эвристическими методами поиска способов решения задач.

**Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 4-ом семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Методы решения задач по геометрии» отведено:

- для очной формы получения высшего образования: 90 часов, в том числе 34 аудиторных часа, из них: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 12 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## РАЗДЕЛ 1. ПЛАНИМЕТРИЯ

### Тема 1.1. Отношение площадей треугольников

Теоремы об отношениях площадей треугольников, имеющих равные основания, высоты и углы. Теорема об отношении площадей подобных треугольников.

### Тема 1.2. Теоремы Чевы и Менелая

Теорема Чевы. Теорема, обратная теореме Чевы. Обобщенная теорема Чевы. Теорема Менелая. Теорема, обратная теореме Менелая.

### Тема 1.3. Прямая Эйлера. Окружность Эйлера. Формула Эйлера

Прямая Эйлера. Окружность Эйлера. Формула Эйлера. Доказательство соответствующих теорем.

### Тема 1.4. Вписанные и описанные многоугольники

Свойства и признаки вписанных и описанных четырехугольников. Теорема синусов для четырехугольника, вписанного в окружность. Теорема косинусов для четырехугольника, вписанного в окружность. Формула Брахмагупты. Теорема Птолемея.

## РАЗДЕЛ 2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

### Тема 2.1. Углы в пространстве

Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол, угол между двумя плоскостями. Угол между скрещивающимися прямыми. Многогранные углы. Свойства плоских углов многогранного угла. Теорема косинусов для трехгранного угла. Теорема синусов для трехгранного угла. Метод прямоугольного тетраэдра.

### Тема 2.2. Расстояния в пространстве

Расстояния от точки до плоскости, между двумя параллельными плоскостями, от прямой до параллельной ей плоскости. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Основные способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми в курсе стереометрии. Метод вспомогательного объема, метод ортогонального проектирования при вычислении расстояний в пространстве.

**Тема 2.3. Многогранники. Площади поверхностей и объёмы многогранников. Отношение объемов частей пирамиды**

Пирамиды, призмы и их свойства. Площади поверхностей и объёмы многогранников. Отношение объемов частей пирамиды. Теорема Эйлера.

#### **Тема 2.4. Комбинации сферы с многогранниками**

Сфера, описанная около многогранника. Сфера, вписанная в многогранник.

#### **Тема 2.5. Комбинации тел вращения, комбинации тел вращения с многогранниками**

Комбинации шара с цилиндром. Комбинации шара с конусом. Комбинации шара с усеченным конусом. Взаимное расположение двух сфер. Комбинации цилиндра, конуса с многогранниками.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы                                                                         | Количество аудиторных часов |                      |                     |                      |      | Количество часов УСР | Форма контроля знаний |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|------|----------------------|-----------------------|
|                     |                                                                                                | Лекции                      | Практические занятия | Семинарские занятия | Лабораторные занятия | Иное |                      |                       |
| 1                   | 2                                                                                              | 3                           | 4                    | 5                   | 6                    | 7    | 8                    | 9                     |
| <b>4 семестр</b>    |                                                                                                |                             |                      |                     |                      |      |                      |                       |
| <b>1.</b>           | <b>Планиметрия</b>                                                                             |                             |                      |                     |                      |      |                      |                       |
| 1.1                 | Отношение площадей треугольников                                                               | 2                           |                      |                     |                      |      |                      | Устный опрос          |
| 1.2                 | Теоремы Чевы и Менелая                                                                         | 2                           |                      |                     | 2                    |      |                      | Устный опрос          |
| 1.3                 | Прямая Эйлера. Окружность Эйлера. Формула Эйлера                                               | 2                           |                      |                     | 2                    |      |                      | Устный опрос          |
| 1.4                 | Вписанные и описанные многоугольники                                                           | 2                           |                      |                     |                      |      |                      | Устный опрос          |
| <b>2.</b>           | <b>Стереометрия</b>                                                                            |                             |                      |                     |                      |      |                      |                       |
| 2.1                 | Углы в пространстве                                                                            | 2                           |                      |                     |                      |      | 2                    | Решение задач         |
| 2.2                 | Расстояния в пространстве                                                                      | 2                           |                      |                     | 2                    |      |                      | Решение задач         |
| 2.3                 | Многогранники. Площади поверхностей и объёмы многогранников. Отношение объемов частей пирамиды | 2                           |                      |                     | 2                    |      | 2                    | Устный опрос          |
| 2.4                 | Комбинации сферы с многогранниками                                                             | 2                           |                      |                     | 2                    |      |                      | Устный опрос          |
| 2.5                 | Комбинации тел вращения, комбинации тел вращения с многогранниками                             | 2                           |                      |                     | 2                    |      |                      | Контрольная работа    |
|                     |                                                                                                |                             |                      |                     |                      |      |                      |                       |
|                     | <b>Всего по учебной дисциплине</b>                                                             | <b>18</b>                   |                      |                     | <b>12</b>            |      | <b>4</b>             |                       |

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Сендер, А. Н. Методологический компонент в изучении школьного систематического курса геометрии : учебно-методическое пособие / А. Н. Сендер, Л. В. Фёдорова ; УО "Брестский гос. ун-т им. А. С. Пушкина". – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2020. – 146 с.
2. Тухолко, Л. Л. Развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении стереометрии / Л. Л. Тухолко ; М-во образования Республики Беларусь, Бел. гос. педагогический ун-т им. М. Танка. – Минск : БГПУ, 2019. – 245 с.
3. Эвристические задания, занятия, интернет-занятия для студентов-математиков и студентов-механиков : учебно-методическое пособие для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям 1-31 03 02 "Математика (по направлениям)", 1-31 03 02 "Механика и математическое моделирование" / БГУ ; [науч. ред. А. Д. Король ; редкол. Н. И. Морозова и др.]. – Минск : БГУ, 2019. – 91 с.

### Перечень дополнительной литературы

1. Азаров, А.И. Математика для старшеклассников. Методы решения планиметрических задач. 8-11 классы : пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / А.И. Азаров, В.В.Казаков, Ю.Д. Чурбанов. – Мн. : Аверсэв, 2005. – 336 с.
2. Амелькин, В. В. Геометрия на плоскости : теория, задачи, решения : учеб. пособие по математике для общеобразоват. шк. / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич, В. Л. Тимохович. – М. : ОНИКС 21 век, 2003. – 590 с.
3. Барвенов, С.А. Математика: ЦТ за 60 уроков / С.А. Барвенов, Т.П. Бахтина. – 2-е изд., перераб. – Минск : Аверсэв, 2021. – 302 с.
4. Готман, Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения. – М. : МЦНМО, 2006. – 160 с.
5. Гусев, В.А. Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1992. – 352 с.
6. Зив, Б. Г. Геометрия. 7–11 классы. Задачи : учеб. пособие / Б. Г. Зив, А. Г. Баханский, В. М. Мейлер. – 16-е изд. – М. : Просвещение, 2021. – 271 с.
7. Лисова, М. И. Планиметрия: итоговое повторение : пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / М. И. Лисова, О. Н. Пирютко. – Минск : Аверсэв, 2004. – 415 с.

8. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике. Геометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. ин-тов / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М. : АБФ, 1995. – 352 с.
9. Пирютко, О. Н. 60 уроков стереометрии : 10 кл. : пособие для учителей учрежд. общ. ср. образования с рус. яз. обучения / О. Н. Пирютко, А. А. Черняк, И. Г. Арефьева. – Минск : Нар. асвета, 2022. – 167 с.
10. Прасолов, В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука, 1989. – 288 с.
11. Рогановский, Н.М. Геометрия. 10-11 классы. Многообразие идей и методов : пособие для учителей общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. Обучения / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская, О.И. Тавгень. – Минск : Аверсэв, 2011. – 208 с.
12. Тавгень, О. И. Математика в задачах. Теория и методы решений. Планиметрия, стереометрия, текстовые задачи : пособие для учащихся / О. И. Тавгень, А. И. Тавгень. - Минск : Аверсэв, 2005. – 511 с.
13. Фельдман, А. М. Математики в школе много не бывает: из опыта работы преподавания некоторых тем учебной программы по математике / А. М. Фельдман. – Минск : Нар. асвета, 2017. – 143 с.
14. Шарыгин, И.Ф. Задачи по геометрии (стереометрия). – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 160 с.
15. Шлыков, В. В. Задачи по планиметрии : учеб. пособие для 7–9 кл. общеобразов. шк. / В. В. Шлыков. – Минск : Асар, 1997. – 288 с.
16. Шлыков, В. В. Задачи по стереометрии : учеб. пособие для 10 –11 кл. общеобразов. шк. с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков, Т. В. Валаханович. – Минск : Асар, 1998. – 239 с.

### **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- решение задач;
- устный опрос;
- контрольная работа.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Методы решения задач по геометрии» учебным планом предусмотрен зачет.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

#### **Тема 2.1. Углы в пространстве (2ч)**

Многогранные углы. Свойства плоских углов многогранного угла.

**Задание:** решение десяти задач по данной теме по вариантам.

Примерный перечень задач размещен на образовательном портале БГУ (<https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=489>).

**Форма контроля** – решение задач.

### **Тема 2.3. Многогранники. Площади поверхностей и объёмы многогранников. Отношение объемов частей пирамиды (2ч)**

Пирамиды, призмы и их свойства.

**Задание:** Изучение и конспектирование доказательств свойств призм и пирамид.

**Форма контроля** – устный опрос по доказательствам свойств призм и пирамид.

### **Примерная тематика лабораторных занятий**

**Занятие 1.** Теоремы Чевы и Менелая.

**Занятие 2.** Прямая Эйлера. Окружность Эйлера. Формула Эйлера.

**Занятие 3.** Расстояния в пространстве.

**Занятие 4.** Многогранники. Площади поверхностей и объёмы многогранников. Отношение объемов частей пирамиды.

**Занятие 5.** Комбинации сферы с многогранниками.

**Занятие 6.** Комбинации тел вращения, комбинации тел вращения с многогранниками.

### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используются следующие **подходы и методы:**

- **эвристический**, ориентированный на: - осуществление студентами личностно-значимых открытий в процессе подготовки к практическим занятиям по дисциплине; - демонстрацию многообразия способов решения геометрических задач; - индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлекссию собственной образовательной деятельности, выполнять индивидуальные домашние задания;

- **практико-ориентированный**, предполагающий: - освоение содержания образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;

- **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности студентов,

предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

В процессе самостоятельной работы по дисциплине «Методы решения задач по геометрии» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и лабораторных занятиях на самостоятельное изучение по источникам из списков основной и дополнительной литературы;
- подготовка к различным формам текущей и промежуточной аттестаций (устным опросам, проверочным и контрольным работам, экзамену);
- выполнение домашних заданий.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Методы решения задач по геометрии» является качество усвоения учебного материала, которое проверяется и оценивается на лабораторных и лекционных занятиях при выполнении контрольных и проверочных работ, устных опросах, при сдаче зачета.

### **Примерный перечень вопросов к зачету**

1. Теорема Чевы. Теорема, обратная теореме Чевы. Обобщенная теорема Чевы.
2. Теорема Менелая. Теорема, обратная теореме Менелая.
3. Окружность и прямая Эйлера. Формула Эйлера.
4. Вписанные многоугольники. Теоремы о вписанном в окружность четырехугольнике.
5. Описанные многоугольники. Теоремы о четырехугольнике, в который можно вписать окружность.
6. Взаимное расположение прямых в пространстве. Признаки параллельных и скрещивающихся прямых. Угол между скрещивающимися прямыми.
7. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Признаки параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
8. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Признаки параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Угол между двумя плоскостями.
9. Многогранные углы. Свойства плоских углов многогранного угла.
10. Теорема косинусов для трехгранного угла. Теорема синусов для трехгранного угла.

11. Понятие расстояния в пространстве. Расстояние между точкой и плоскостью, двумя плоскостями, двумя прямыми. Основные способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми.
12. Сфера, вписанная в призму, пирамиду.
13. Сфера, описанная около призмы, пирамиды.
14. Пирамида. Классификация пирамид, свойства правильной пирамиды и пирамид, у которых боковые ребра (границы) образуют равные углы с плоскостью основания. Площадь поверхности и объем пирамиды.
15. Выпуклые многогранники. Призма. Классификация призм и их свойства. Площадь поверхности и объем призмы.
16. Комбинации шара и тел вращения.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

| Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование | Название кафедры                                        | Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Методика преподавания математики                              | Геометрии, топологии и методики преподавания математики | Изменений не требуется                                                                                        |                                                                                                   |

Заведующий кафедрой геометрии,  
топологии и методики преподавания математики,  
кандидат физико-математических наук, доцент



Д.Ф.Базылев

« 31 » 05 2024 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

| №<br>п/п | Дополнения и изменения | Основание |
|----------|------------------------|-----------|
|          |                        |           |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

\_\_\_\_\_