Е. А. ДУДКО

РОЛЬ АБСТРАКЦИИ В ПРОЦЕССАХ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ И ИНТЕГРАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

Одной из характерных тенденций развития современной науки является дифференциация знания и в то же время стремление к внутренней интеграции как результату взаимодействия различных областей знания. Дифференциация и интеграция знания, по выражению Овчинникова Н., «образуют основание внутреннего развития знания» [1].

Столь характерные для современной науки в целом процессы дифференциации и интеграции первоначально наиболее очевидным образом проявились локально, в отдельных областях знания, и, в частности, в математике. Попытаемся определить внутрилогические закономерности интеграции и дифференциации путем исследования понятийного аппарата в математике и выяснить роль абстракции в реализации процессов дифференциации и интеграции.

Под абстракцией обычно понимают сам мыслительный процесс и его результат. Для отличия абстракции-результата от абстракции-процесса последний нередко называют абстрагированием. В структуре процесса абстрагирования, представляющего собой мысленное выделение отдельных сторон, свойств, признаков предмета, явления или события при одновременном отвлечении от других сторон, свойств или признаков, выделяют такие ступени, как акт обнаружения объективных отношений независимости (или несущественной зависимости, которой можно пренебречь) явлений или их сторон от определенных факторов и акт замещения «объект-модель» [2].

Роль абстракции в научном познании проявляется в том, что на ее основе происходит конституирование объекта научного исследования. Рассматривая научное знание как отражение закономерностей объективного мира, следует учитывать, что научные высказывания и утверждения непосредственно относятся к объектам, не тождественным объектам материального мира. Активность человеческого мышления проявляется в том, что область материальной действительности, вовлеченная в человеческую практику, преобразуется ею и подвергается в сознании человека логической реконструкции. В теоретическом исследовании, как отмечает В. А. Смирнов, термин «объект» мы употребляем в особом смысле, понимая под объектом «внутритеоретический объект» и отличая объект науки от вещей и процессов реального мира, моделями которых и являются объекты науки [3]. Внутритеоретические объекты науки фиксируются и функционируют в знаковой форме. Как указывает В. С. Степин, «идеальные объекты существуют в науке как смыслы терминов ее языка, а их связи и отношения образуют непосредственное содержание научных высказываний» [4].

В конструировании абстрактных объектов математики (например, «точка», «прямая» в евклидовой геометрии) большую роль играет процесс идеализации, на основе которого абстрактный объект наделяется свойствами, вообще отсутствующими у реальных объектов.

Одна из закономерностей развития математического знания — переход от одних уровней абстракции к другим, более высоким. В этом случае, по словам Н. А. Шанина, образование понятий идет путем многоступенчатого наслоения различных актов абстрагирования и идеализации [5]. К абстрактным объектам, являющимся результатом определенных процессов абстрагирования, можно повторно и многократно применять те или иные виды абстракции и получать новые абстрактные объекты более высокой ступени общности и отвлеченности.

Восхождение к более высоким уровням абстракции в познании выражает один из моментов сложного и противоречивого процесса отражения закономерностей развивающегося материального мира в голове человека, ибо, как писал В. И. Ленин, «движение познания к объекту всегда может идти лишь диалектически: отойти, чтобы вернее попасть...» [6]

В развитии математического знания тенденция к обретению более обобщенного и более абстрактного знания переплеталась с тенденцией дифференциации знания и выявления единства теорий на различных уровнях (как в математике в целом, так и в различных ее областях).

Геометрия — одна из областей знания, способы систематизации, обобщения и представления знания которой стали в XX веке типичными для других областей математики и естествознания. Одна из специфических черт развития геометрии XIX века — расщепление ее на отдельные ветви, представляющие собой замкнутые системы понятий (неевклидова, конформная, аффинная, проективная геометрии и др.).

Идеализированные объекты евклидовой геометрии послужили базой для конструирования таких теорий как конформная и аффинная геометрии. В новых системах отношений геометрические объекты утрачивают некоторые свойства. В аффинной геометрии, изучающей свойства геометрических фигур, сохраняющихся при параллельном проектировании, такое свойство как различие геометрических фигур по форме не рассматривается, так как при параллельном проектировании фигуры не сохраняются.

Конструирование аффинной геометрии составляет один из промежуточных этапов движения познания к абстрагированию от метрических свойств пространства. По словам Х. С. М. Кокстера, «аффинная геометрия оставляет нас на полпути с концепцией расстояния» [7], ибо, как он далее разъясняет, мы уже не имеем возможности сравнивать отрезки, лежащие на прямых, имеющих различные направления, но в то же время можем измерять длины отрезков, расположенных на одной или двух параллельных прямых, и даже измерять площадь.

Существенный шаг в направлении дальнейшего абстрагирования от метрических свойств пространства был сделан в проективной геометрии. Идея центрального проектирования послужила тем систематизирующим фактором, благодаря которому из евклидовой геометрии выделилась целостная совокупность понятий, фиксирующих свойства геометрических объектов, которые сохраняются при центральном проектировании.

В отличие от евклидовой геометрии в проективной геометрии всякие две прямые пересекаются. Это обобщение, расширяющее взгляд на взаимное пересечение геометрических элементов, достигается путем введения нового геометрического образа — проективной прямой, проективной плоскости. Образование нового геометрического образа («проективной прямой») достигается присоединением к множеству точек обычной прямой нового элемента, называемого «несобственной», «бесконечно удаленной» или «идеальной» точкой [8].

В математике нередко употребляется термин «идеальный» элемент в противоположность обычным, собственным элементам. С точки зрения философской терминологии и собственные, и не собственные элементы идеальны по своей природе как конструкции человеческого ума. На наш взгляд, введение в математическую терминологию «идеального» элемента, в противоположность обычному, выражает отличия в способе образования, истолкования этих конструктов и их функционирования в теоретической системе. Обычные или собственные абстрактные объекты (точка, прямая в евклидовой геометрии) образованы путем абстрагирования от некоторых свойств реальных объектов, они имеют прообразы, модели. В отношении конструктов, называемых «идеальными» элементами, можно отметить, что они вводятся иным путем в целях обобщения теории, в формальных целях. «Идеальный» элемент может вообще не иметь прообраза, содержательной интерпретации, но с его помощью выделяется сетка отношений, которая имеет содержательную интерпретацию.

Углубление процесса дифференциации с необходимостью ставило проблему поиска внутреннего единства различных областей знания, выявления общности структуры, способов образования, субординации теорий. Тенденция к интеграции и синтезу ярко проявилась в развитии математики второй половины XIX века. В процессе формирования концепций синтезирующего характера исходным пунктом выступают не только конкретно-научные представления о «своей» и «соседних» областях, но и общеметодологические идеи, которые способствуют осознанию необходимости выявления единства знания и направляют мышление на поиск фундаментальных принципов преобразования рассматриваемых теорий с целью отыскания исходной аналогии между предметами различных научных дисциплин и создания базы для переброски «мостиков» от одной теории к другой.

Несомненна заслуга Ф. Клейна в выработке единого взгляда на геометрические теории, чему способствовало создание теории инвариантов («Эрлангенская программа»). Ф. Клейн указывал, что в результате научных исследований у него постепенно сложилось убеждение в существовании единства между внешне различными и специфичными геометриями, и он пришел к мысли о необходимости искать теоретическую форму этого единства. Ф. Клейн высоко оценил математические идеи исследования Кэли, который опирался на идеи теории инвариантов, дал проективное определение евклидовой метрики [9].

Он отмечал в то же время, что Кэли недооценил сделанное им открытие, не осмыслил полученные математические результаты во всей их общности и широте. Ф. Клейн с иных позиций оценивал концепцию Кэли о проективном мероопределении, анализируя его результаты с точки зрения выявления связи между геометрическими теориями. В поисках единых исходных принципов построения основ геометрии Ф. Клейн дополняет построения Кэли, подчеркивая, что «не меняется имманентное значение системы Кэли, но вырастает ее значение в деле **обоснования** геометрии (выделено нами—Е. Д.)» [10]. В работе «О так называемой неевклидовой геометрии» Ф. Клейн выявил связь проективной метрики с неевклидовой геометрией.

В своих исследованиях Ф. Клейн обосновывал мысль о самостоятельном характере проективной геометрии и развил в то же время идею о том, что проективная геометрия «содержит в себе как частные случаи, поддающиеся отчетливой классификации, все известные геометрические системы» [11]. Идеи Ф. Клейна о возможности классификации и синтеза геометрических систем выходили за рамки сложившегося стереотипа математического мышления. Насколько трудным ранее было восприятие факта существования равноправных и независимых геометрических систем, настолько мучительным был позже и поворот к осмыслению единства между самостоятельными геометриями.

Задача выявления единства геометрических теорий и общих закономерностей их образования разрешилась путем выхода за пределы совокупностей абстрактных образов, специфичных для той или иной геометрической системы, и выработки более общих понятий. В «Эрлангенской программе» в качестве синтезирующего понятия выделяется «группа геометрических преобразований». Ф. Клейн писал о том, что поставил перед собой объемную задачу: «Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразования группы» [12]. Теория Ф. Клейна указывает на своеобразие абстракции как логического приема построения целого ряда геометрических систем. Акт обнаружения несущественности или независимости, характерный для процесса абстрагирования, в данном случае связан с понятием инварианта. Выделяются как инвариантные такие свойства объектов и связанные с объектами величины, которые не зависят от данной группы геометрических преобразований.

Логические приемы образования геометрических теорий имеют свое объективное основание, отражают закономерности развивающегося материального мира. В природе мы наблюдаем и открываем сохранение и изменение различного рода объектов, их свойств, состояний. Единство сохранения и изменения выражается в принципе инвариантности, как сохранение любого рода объектов (вещей, свойств, отношений), соответствующих любому типу изменений [13]. В математике общий принцип сохранения и изменения находит свое абстрактное выражение в понятии преобразования, представляющим не что иное как своеобразное движение абстрактных объектов, при котором сохраняется совокупность заданных свойств. Данная ступень обобщения в геометрии была детерминирована соответствующим уровнем развития математического и естественнонаучного знания. К. Маркс, подчеркивая исторически обусловленный характер научных абстракций, отмечал, что «даже самые абстрактные категории, несмотря на то, что они именно благодаря своей абстрактности имеют силу для всех эпох, в самой определенности этой абстракции представляют собой... продукт исторических условий...» [14]

Не только в геометрии, но и в математике в целом, а также в естественнонаучных областях знания постепенно складывался теоретико-групповой стиль мышления. Объектом исследования в естествознании выступает движение твердых тел в пространстве. Как отмечает В. П. Визгин, в кинематике и статике твердого тела было слабо развито учение о группе движений евклидова и отчасти неевклидова пространства [15]. Задачи минералогии и кристаллографии привели французского математика К. Жордана к необходимости исследовать всевозможные движения твердого тела, составленные из вращений и трансляций [16].

Гельмгольц в 1868 году в работе «О фактах, лежащих в основании геометрии» показал, что существует тесная связь между механикой Ньютона и геометрией Евклида. Интенсивное изучение специфики движения твердых тел стимулировало мышление геометров в направлении выделения в качестве объекта исследования совокупности геометрических движений.

В теории решения алгебраических уравнений утвердился термин «группа» в своем первоначальном конкретном значении как группа подстановок. Постепенно групповые операции выделяются в качестве внутритеоретического объекта исследования. В трудах Кэли под группой понимается уже не группа подстановок, а совокупность элементов, в которой подчеркивается роль соотношений между ними, а не природа самих элементов [17]. Транслирование идей теории групп и теории инвариантов на объекты геометрической природы привело к рассмотрению в качестве элементов группы геометрических движений. Совокупность геометрических движений, допустимых в данной области, стала рассматриваться как группа геометрических преобразований.

Теория инвариантов выступает как фундаментальный принцип субординации геометрических теорий, отражает общую сущность, общие законы функционирования отдельных геометрических систем, интегрируя автономные доселе теории в одну целостную науку.

Введение особого типа абстракции, когда рассматриваются не абстрактные объекты теории как таковые, а их инварианты относительно некоторой группы преобразований, означает формирование нового типа знания — операционного. На этой ступени обобщения объект вводится через задание инвариантов. Выйдя за пределы математики, идеи теории инвариантов прочно вошли в другие области как фундаментальные принципы организации естественнонаучных теорий, выступая орудием познания устойчивого, закономерного в явлениях материального мира.

Таким образом, логика развития самих абстракций, основных понятий теорий приводит к разветвлению областей знания и установлению связи между ними. Интегративные процессы, выражающиеся в координации и субординации, синтезе в единое целое ранее автономных, разрозненных, несистематизированных знаний, выражаются в формировании новых абстракций, поднимающих знание на новую ступень обобщения.

1 Овчинников Н. Особенности развития и тенденции к единству научного знания. — В кн.: Проблемы истории и методологии научного познания. — М., 1974, с. 103.

2 См.: Розов М. А. Научная абстракция и ее виды. — Новосибирск, 1965, с. 17.

3 См.: Смирнов В. А. Уровни знания и этапы познания. — В кн.: Проблемы логики научного познания. — М., 1964, с. 26.

4 Степин В. С. Становление научной теории. — Минск, 1976, с. 13.

5 См.: Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 67, — М. — Л., 1962, с. 284.

6 Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 252.

7 Кокстер Х. С. М. Действительная проективная плоскость. — М., 1959, с. 16.

8 См.: Моденов П. С., Пархоменко А. С. Геометрические преобразования. — М., 1961, с. 132.

9 См.: Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. 1. — ОНТИ, 1937, с. 187.

10 Там же, с. 189.

11 Там же.

12 Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»). — В сб.: Об основаниях геометрии. — М., 1956, с. 402.

13 См.: Овчинников Н. Ф. Принципы сохранения. — М., 1966, с. 268.

14 Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 12, с. 731.

15 См.: Визгин В. П. К истории «Эрлангенской программы» Ф. Клейна. Историко-математические исследования, вып. XVII. — М., 1973, с. 29—30.

16 Там же, с. 31.

17 См.: Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. — М., 1976, с. 298.