

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД - 13059/уч.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

Минск, 2023 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 03 02-2021, типового учебного плана, регистрационный №G31-1-025/пр-тип. от 30.06.2021 г., учебного плана БГУ: №G31-1-029/уч.-СИБД от 30.06.2021 г.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Мармыш Денис Евгеньевич – доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

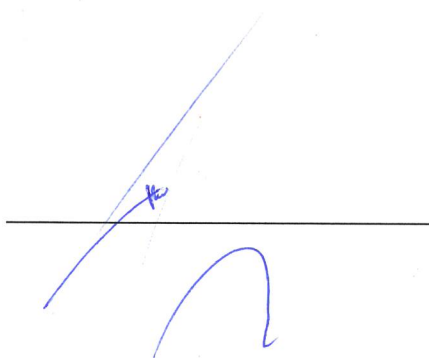
Желткович Андрей Евгеньевич – доцент кафедры «Прикладная механика» машиностроительного факультета Брестского государственного технического университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теоретической и прикладной механики
механико-математического факультета БГУ
(протокол № 12 от 17.05.2023)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой



М.А. Журавков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящая программа по учебной дисциплине разработана и утверждена для студентов Совместного института Белорусского государственного университета и Даляньского политехнического университета обучающихся по специальности 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование.

В настоящее время средства вычислительной техники, компьютеры и программные комплексы (пакеты программ) стали неотъемлемой частью работы механика-исследователя и механика-прикладника. Решение прикладных задач всех разделов механики не представляется возможным без использования современных вычислительных инструментов.

Проблемы и задачи актуальных фундаментальных и прикладных исследований, а также инженерных расчетов, связанных с изучением поведения и состояния сложных механических систем и конструкций, невозможно эффективно решать без интенсивного использования вычислительных техник и численных методов. Численные подходы охватывают различные аспекты механико-математического моделирования: от формулировки и постановки модельных задач до вычислений, интерпретаций и анализа результатов расчетов, а также верификации данных экспериментальных исследований.

Сегодня практически все производственные предприятия, научно-исследовательские и проектные организации, конструкторские бюро и технологические компании разрабатывают собственные алгоритмические подходы к численному анализу сложного напряженно-деформированного состояния тел и систем твердых тел. В наши дни численное моделирование физических процессов активно применяется в машиностроении, судостроении, авиастроении, промышленном и гражданском строительстве, биоинженерии, геотехнике и других высокотехнологичных и наукоемких отраслях промышленности. Так, например, классические концепции механики сплошных и дискретных сред совместно с современными вычислительными программными комплексами используются для расчётов прочности, устойчивости и долговечности различных механических систем.

С развитием науки и техники узкоспециальные знания довольно быстро устаревают. В связи с этим, для решения возникающих принципиально новых актуальных прикладных задач научные работники и инженеры должны не только обладать хорошей подготовкой в области фундаментальных наук и иметь высокую способность к самообразованию, но и владеть современными вычислительными средствами и информационными технологиями. Это требует постоянного всестороннего совершенствования вузовского образования. В области прикладной механики наиболее популярным вычислительным методом является метод конечных элементов и его модификация для многоэлементных стержневых систем, который изучается в данной учебной дисциплине. Наиболее перспективный путь лежит именно в

повышении значимости общенаучных и прикладных дисциплин в учебных планах подготовки будущих научных работников и инженеров, в совершенствовании преподавания таких фундаментальных дисциплин, как физика, математика и механика, их приложений.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Метод конечных элементов» состоит в создании базы для освоения основных идей и методов современной механики и математики, подготовка высококвалифицированных специалистов, способных ставить и решать задачи из различных областей науки и техники. Формирование установки на творческую профессиональную деятельность; развитие профессионального мышления, которое обеспечило бы будущему специалисту возможность свободно оперировать профессиональными знаниями, видеть проблемы и оптимальные пути их решения в самостоятельной практической деятельности.

Метод конечных элементов – один из основных курсов инженерной механики. По окончании изучения дисциплины студенты должны овладеть основными принципами и процедурами метода конечных элементов, базовым методом проектирования расчетных кодов конечных элементов и уметь выполнять структурный анализ с использованием программных средств конечных элементов.

Задачи учебной дисциплины:

- а) ознакомление магистрантов с основными методами и техниками метода конечных элементов для решения прикладных задач механики;
- б) формирование навыков решения прикладных инженерных задач с использованием математических моделей механики;
- в) использование комплексного подхода к анализу напряженно-деформированного состояния моделируемого твердого тела.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Численные методы. Пакеты прикладных программ» компонента учреждения высшего образования.

Как прикладная дисциплина «Метод конечных элементов» является приложением таких дисциплин как «Сопротивление материалов и основы строительной механики», «Теория упругости», «Вычислительная механика». Она также служит базой для формирования у будущих специалистов необходимых творческих навыков к построению математических моделей происходящих в природе и технике процессов, а также помогает совершенствованию способностей к научным обобщениям и выводам.

Требования к компетенциям

В результате изучения дисциплины «Метод конечных элементов» студент должен обладать следующими компетенциями:

универсальные компетенции:

УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;

УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий;

УК-4. Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;

УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;

УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности.

базовые профессиональные компетенции:

БПК-1. Применять основные законы и методы естественнонаучных дисциплин для решения теоретических и практических задач в профессиональной деятельности;

БПК-5. Применять современные технологии и базовые конструкции языков программирования для реализации алгоритмических прикладных задач;

БПК-8. Использовать основные аналитические и численные методы теоретической механики, механики сплошных сред, сопротивления материалов к исследованию механических процессов;

БПК-9. Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности;

специализированные компетенции:

СК-1. Осуществлять обоснованный выбор рациональной численной методики для решения типовых задач механики, проводить ее реализацию с использованием современных программных средств компьютерных вычислений, оценивать корректность полученных результатов и анализировать возможности альтернативных подходов.

В результате изучения дисциплины «Метод конечных элементов» обучающийся должен:

знать:

- математические инструменты тензорного анализа для анализа линейной и нелинейной кинематики деформирующихся конструкций;
- показатели напряженно-деформированного состояния и их взаимосвязь с упругой энергией и работой внешних сил;
- проблематику составления математических моделей и постановки граничных задач для описания напряженно-деформированного состояния моделируемого тела и системы тел;
- основные особенности построения конечно-элементных расчетных сеток для моделей, способы задания граничных и начальных условий для численных моделей;
- алгоритмы, методы, принципы создания численных моделей и порядок решения задач в системах компьютерной математики;
- основные элементы общего назначения для реализации вычислительных алгоритмов построения сложных моделей деформирования материалов.

уметь:

- уметь выполнять простой конечно-элементный анализ и, таким образом, развивать способность использовать метод конечных элементов;
- понимать текущее состояние и будущее развитие метода конечных элементов и программного обеспечения для анализа.
- составлять алгоритмы для решения систем алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений, описывающих механические процессы;
- получать аналитические решения для модельных задач и проводить анализ полученных результатов;

владеть:

- подходить к решению математических моделей основных задач механики.
- освоить основные принципы и расчетные процедуры метода конечных элементов и, таким образом, в дальнейшем освоить основные принципы и методы современной вычислительной механики;
- освоить базовый метод проектирования конечно-элементного кода и, таким образом, иметь возможность использовать конечные элементы и программировать простые конечно-элементные коды;

Структура учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Метод конечных элементов» изучается в 6 семестре.

Всего на изучение учебной дисциплины отведено:

– в очной форме получения высшего образования: 120 часов, в том числе 68 аудиторных часов, их них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 28 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Обзор базовых положений и законов теории упругости

Основные положения теории упругости. Уравнения равновесия и движения дифференциального элемента твердого тела. Обобщенный закон Гука. Соотношения Коши. Уравнения совместности деформаций. Плоское напряженное состояние. Плоское деформированное состояние. Функция Эйри.

Тема 2. Теоретические основы метода конечных элементов

Основные предположения метода конечных элементов. Метод взвешенных невязок. Вариационные подходы к формулировке математической модели задачи. Виртуальная работа и метод виртуальных перемещений. Основные численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Тема 3. Одномерный стержневой конечный элемент

Аппроксимация объекта одномерными стержневыми конечными элементами. Матрица жесткости и функции формы для стержневого элемента. Преобразование координат для стержневого конечного элемента на плоскости.

Тема 4. Балочный конечный элемент

Математическая модель балочного конечного элемента. Аппроксимация объекта балочными элементами. Матрица жесткости и функции формы для балочного элемента. Эквивалентные узловые нагрузки. Преобразование координат для балочного конечного элемента на плоскости.

Тема 5. Плоский треугольный конечный элемент

Математическая модель плоского треугольного конечного элемента. Площадь, координаты и функции формы для треугольного элемента. Свойства глобальной матрицы жесткости при разбиении объекта на треугольные элементы. Эквивалентные узловые нагрузки для плоского треугольного элемента.

Тема 6. Плоский прямоугольный конечный элемент

Особенности конечно-элементного анализа с использованием прямоугольных элементов. Функции формы плоских прямоугольных элементов. Изопараметрические элементы. Общие методы интегрирования. Метод интегрирования Гаусса.

Тема 7. Конечно элементный анализ с использованием трехмерных элементов

Понятие трехмерного конечного-элемента Лагранжа. Особенности конечно-элементного анализа с использованием трехмерных элементов Лагранжа. Функции формы. Функции полей перемещений для трехмерных конечных элементов Лагранжа. Сеточная сходимость численных процедур при конечно-элементном анализе.

Тема 8. Конечно элементный анализ с использованием элементов высших порядков

Функции формы и функции полей перемещений для конечных элементов Лагранжа высшего порядка. Сеточная сходимость и точность численные процедур. Определения совместимого элемента, несовместимого элемента.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия: перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов						Форма контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	иное	Количество часов УСП	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Обзор базовых положений и законов теории упругости	2			2			Вопросы для самопроверки, устный опрос
2	Теоретические основы метода конечных элементов	4						Вопросы для самопроверки, устный опрос
3	Одномерный стержневой конечный элемент	4			4			Вопросы для самопроверки, устный опрос
4	Балочный конечный элемент	4			4		2	Вопросы для самопроверки, устный опрос, отчет по индивидуальному заданию
5	Плоский треугольный конечный элемент	6			4			Вопросы для самопроверки, устный опрос контрольная работа по темам 2-5
6	Плоский прямоугольный конечный элемент	4			6		2	Вопросы для самопроверки, устный опрос, отчет по индивидуальному заданию

7	Конечно элементный анализ с использованием трехмерных элементов	6			4		2	Вопросы для самопроверки, устный опрос, отчет по индивидуальному заданию
8	Конечно элементный анализ с использованием элементов высших порядков	4			4			Вопросы для самопроверки, устный опрос
	Всего	34			28		6	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Босяков, С. М. Сопротивление материалов и основы строительной механики [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 7-06-0533-06 «Механика и математическое моделирование» / С. М. Босяков ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. био- и наномеханики. - Минск : БГУ, 2023. - URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309960>.
2. Журавков, М. А. Современные численные методы в механике [Электронный ресурс] : курс лекций / М. А. Журавков ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. теоретической и прикладной механики. - Минск : БГУ, 2022. - URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/286556>.
3. Смиловенко, О. О. Техническая механика : учебник для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям / О. О. Смиловенко, Т. М. Мартыненко, С. А. Лосик. - Минск : РИВШ, 2021. - 517 с.
4. Юдин, М. Н. Прикладные методы гармонического анализа : учебное пособие / М. Н. Юдин, Н. А. Севостьянов, О. М. Юдин. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 253 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/187583>.

Перечень дополнительной литературы

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир 1986. – 318 с.
2. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Физматгиз, 1963. – 659 с.
3. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Физматгиз, 1963. – 400 с.
4. Ghaboussi J., Wu X.S. Numerical methods in computational mechanics. – CRC Press, 2017. – 313 p.
5. Hoffman J.D. Numerical methods for engineers and scientists. 2nd edition. – Marcel Dekker, 2001. – 822 p.
6. Kassimali A. Matrix analysis of structures, 2nd ed. – Cengage Learning, 2012. – 643 p.
7. Lyu Y. Finite Element Method Element Solutions. – Springer, 2022. – 191 p.
8. Meirovitch L. Computational methods in structural dynamics. – Sijthoff and Noordhoff, 1980. – 439 p.
9. Zohdi T. A finite element primer for beginners. The basics, 2nd ed. – Springer, 2018. – 135 p.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Диагностика результатов учебной деятельности по дисциплине «Метод конечных элементов» проводится, как правило, во время аудиторных занятий. Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля:

- вопросы для самопроверки;
- устный опрос;
- отчеты по индивидуальным заданиям;
- контрольная работа.

Оценка за ответы на лекциях (опрос) и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, наличие аргументов, примеров из практики.

Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины.

Для студентов, пропустивших контрольные мероприятия или получивших неудовлетворительную отметку, решение о повторном проведении контрольного мероприятия выносится в соответствии с Положением о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Метод конечных элементов» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- ответы на устный опрос – 20 %;
- отчеты по индивидуальным заданиям – 40 %;
- контрольная работа – 40 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 40 % и экзаменационной отметки – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 4. Балочный конечный элемент. (2 ч)

Задание (примерный вариант). Для балки конечной длины и заданных граничных условий провести конечно-элементный анализ с использованием балочных элементов. Построить конечно-элементную сетку. Сформировать локальные матрицы жесткости. Составить глобальную матрицу жесткости и вектор внешних усилий. Определить прогибы балки. Построить эпюры прогибов балки и внутренних усилий. Провести сравнение численного анализа с результатами аналитического моделирования.

Форма контроля - отчет по индивидуальному заданию.

Тема 6. Плоский прямоугольный конечный элемент. (2 ч)

Задание (примерный вариант). Провести конечно-элементный анализ плоского напряженного состояния пластины с заданными граничными условиями. Сформировать конечно-элементную сетку с использованием прямоугольных элементов. Формировать локальные матрицы жесткости. Составить глобальную матрицу жесткости и вектор внешних усилий. Решить полученную систему уравнений и построить распределение полей напряжений в пластине.

Форма контроля - отчет по индивидуальному заданию.

Тема 7. Конечно элементный анализ с использованием трехмерных элементов. (2 ч)

Задание (примерный вариант). Для заданного трехмерного конечного элемента построить функции формы, построить графики функций формы. Сформулировать локальную матрицу жесткости для отдельного трехмерного конечного элемента Лагранжа. На заданном пространственном объекте построить конечно-элементную сетку из 4-х трехмерных элементов. Составить глобальную матрицу жесткости и вектор внешних усилий. Решить полученную систему уравнений.

Форма контроля - отчет по индивидуальному заданию.

Примерная тематика лабораторных занятий

Лабораторное занятие 1. **Тема 1.** Обзор базовых положений и законов теории упругости. Сформулировать математическую модель плоского напряженного состояния для заданного объекта. Записать систему разрешающих дифференциальных уравнений, поставить соответствующие граничные условия.

Лабораторное занятие 2. **Тема 3.** Одномерный стержневой конечный элемент.

Провести конечно-элементный анализ для одномерного ступенчатого бруса при действии на него системы сосредоточенных и распределенных нагрузок.

Лабораторное занятие 3. **Тема 4.** Балочный конечный элемент.

Провести конечно-элементный анализ для балки постоянного поперечного сечений при действии на нее системы сосредоточенных и распределенных нагрузок. Рассмотреть шарнирное закрепление балки и жесткое защемление.

Лабораторное занятие 4. **Тема 5.** Плоский треугольный конечный элемент.

Провести конечно-элементный анализ плоского напряженного состояния заданного объекта с использованием треугольных конечных элементов.

Лабораторное занятие 5. **Тема 6.** Плоский прямоугольный конечный элемент.

Провести конечно-элементный анализ плоского напряженного состояния пластины с использованием прямоугольных конечных элементов. Построить КЭ сетку, рассчитать матрицу жесткости и узловые нагрузки.

Лабораторное занятие 6. **Тема 7.** Конечно элементный анализ с использованием трехмерных элементов.

Построить функции формы для заданного трехмерного конечного элемента Лагранжа.

Лабораторное занятие 7. **Тема 8.** Конечно элементный анализ с использованием элементов высших порядков.

Для заданного пространственного объекта построить КЭ сетку с использованием трехмерных конечных элементов Лагранжа. Провести анализ сеточной сходимости.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих формирование профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком

смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. Внеаудиторная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя.
2. Аудиторная самостоятельная работа при выполнении студентом учебных и творческих задач.
3. Творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

На практических занятиях нужно не менее 1 часа из двух (50% времени) отводить на самостоятельное решение задач. Практические занятия целесообразно строить следующим образом: 1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены). 2. Беглый опрос. 3. Решение 1-2 типовых задач. 4. Самостоятельное решение задач. 5. Разбор типовых ошибок при решении (в конце текущего занятия или в начале следующего).

1. Самостоятельная работа в процессе работы с литературой.

Просмотрите конспект сразу после занятий. Пометьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания.

Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя предлагаемую литературу.

Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь на ближайшей лекции за помощью к преподавателю.

Каждую неделю рекомендуется отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

2. Самостоятельная работа по составлению конспекта.

1. Соберите литературу по теме. Изучите тот источник, где она изложена наиболее полно и на современном уровне.

2. По этому источнику составьте подробный план с указанием страниц книги, относящихся к определенному пункту плана.

3. Изучите другие источники. Если в них встречается материал по уже имеющемуся пункту плана, запишите в плане и новый источник с указанием страниц. Если же в другом источнике материал раскрывает тему с другой стороны, добавьте еще пункт плана.

4. Проанализировав всю литературу, собранную по теме, вы получите окончательный план, по которому можно писать конспект, объединяя по пунктам материал из разных источников.

5. Отредактируйте составленный вами конспект, внимательно прочтите его и подумайте: - удовлетворяет ли вас его общий план; - хорошо ли воспринимается смысловая, логическая связь между отдельными элементами содержания.

3. Подготовка к лабораторным занятиям

Назначение лабораторных занятий - углубление и проработка теоретического материала предмета путем регулярной и планомерной самостоятельной работы студентов на протяжении всего изучения дисциплины. Непосредственное проведение лабораторного занятия предполагает: решение задач и упражнений по образцу; проведение анализа результатов; систематизацию материала и подготовка отчета о проведенной работе.

Инструкция:

Изучите нормативные документы, обязательную и дополнительную литературу по рассматриваемому вопросу.

прочтите конспект лекции по теме.

Внимательно изучите порядок выполнения индивидуальной практической работы или алгоритм, представленный преподавателем.

4. Подготовка к экзамену

Внимательно прочитайте материал по конспекту, составленному на учебном занятии.

Прочитайте тот же материал по учебнику, учебному пособию.

Постарайтесь разобраться с непонятными, в частности новыми терминами.

Ответьте на контрольные вопросы для самопроверки, имеющиеся в учебнике.

Кратко перескажите содержание изученного материала «своими словами».

Заучите «рабочие определения» основных понятий, законов.

Освоив теоретический материал, приступайте к выполнению заданий, упражнений; решению задач, расчетов по индивидуальным заданиям и т.д.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Методы взвешенных невязок. Определение и математическая формулировка.
2. Метод коллокаций. Определение и математическая формулировка.
3. Метод наименьших квадратов. Определение и математическая формулировка.
4. Метод Галеркина. Определение и математическая формулировка.
5. Вариационные принципы формулировки граничных задач теории упругости. Определение и математическая формулировка.
6. Метод виртуальных перемещений. Уравнение виртуальных работ.
7. Метод виртуальных напряжений. Основное уравнение метода.
8. Принцип наименьшей потенциальной энергии. Определение и математическая формулировка.
9. Принцип наименьшей дополнительной энергии. Определение и математическая формулировка.

10. Этапы конечно-элементного анализа с использованием одномерных стержневых элементов.
11. Конечно-элементная сетка и основные особенности дискретизации.
12. Вектор перемещения для стержневого конечного элемента.
13. Понятие граничных условий в конечно-элементном анализе. Определение и примеры.
14. Определение деформации для одномерного стержневого элемента.
15. Определение напряжений для одномерного стержневого элемента.
16. Определение потенциальной энергии для стержневого элемента.
17. Функция формы для стержневого элемента и ее свойства.
18. Матрица жесткости для стержневого элемента и ее свойства.
19. Преобразование координат для стержневого элемента.
20. Этапы конечно-элементного анализа с использованием конечных элементов балочного типа.
21. Элементарные эквивалентные узловые усилия для балочного конечного элемента.
22. Преобразование координат для балочного конечного элемента. Пример.
23. Формулировка граничных условий для балочного конечного элемента.
24. Определение вектора перемещений для балочного конечного элемента.
25. Определение узловых деформаций для балочного конечного элемента.
26. Определение узловых напряжений для балочного конечного элемента.
27. Расчет упругой потенциальной энергии для балочного конечного элемента.
28. Функция формы балочного элемента и ее свойства.
29. Матрица жесткости для балочного элемента и ее свойства.
30. Элементарные эквивалентные узловые усилия для балочного элемента. Пример.
31. Влияние нумерации на глобальную матрицу жесткости при КЭ анализе с использованием балочных элементов.
32. Уравнение жесткости в глобальной системе координат. Пример.
33. Процедура КЭ анализа с использованием треугольных конечных элементов.
34. Функция формы треугольного элемента.
35. Глобальная матрица жесткости треугольного элемента.
36. Эквивалентные узловые усилия для треугольного конечного элемента. Пример.
37. Процедура конечно-элементного анализа с использованием треугольных элементов
38. Сформулируйте поле смещений для треугольного элемента.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) ¹
Компьютерное моделирование	Кафедра теоретической и прикладной механики	нет	Изменений не требуется (протокол № 9 от 17.05.2023)
Теория пластин и оболочек	Кафедра теоретической и прикладной механики	нет	Изменений не требуется (протокол № 9 от 17.05.2023)

Заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики
д-р физ.-мат. наук,
профессор

М.А. Журавков

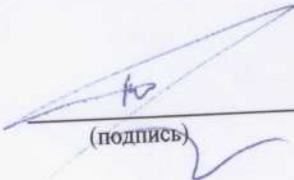
МКЭ

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**
на 2024 / 2025 учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание
1.	Учебная дисциплина может быть проведена на английском языке для студентов Совместного института БГУ и ДПУ.	Решение кафедры теоретической и прикладной механики, протокол № 12 от 28.05.2024 г.
2.	Учебная программа УД – 13059/уч. верна и остается без изменений для учебного плана G 31-1-209/уч. – СИБД от 28.03.2022 г.	

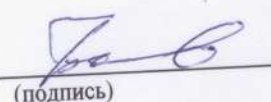
Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № 12 от 28.05 2024 г.)

Заведующий кафедрой
д-р физ.-мат. наук,
профессор
(степень, звание)


(подпись)

М.А. Журавков
(И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
д-р физ.-мат. наук,
профессор
(степень, звание)


(подпись)

С.М. Босяков
(И.О. Фамилия)