

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

3
—
1980

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Агранов Г. А., Зайцева А. М., Коренная Л. Н., Соболев В. С. Распределение энергии в плоскости трансформанты	3
Данилькевич М. И. Влияние закладки на магнитный момент и температуру Кюри никель-кобальтовых ферритов	8
Андреев А. Д., Дитковский В. М., Ткач А. В. Выявление нарушений структуры оксида кремния при экспонировании его в газовой плазме	10
Афанасенко В. Н., Данилов В. А., Зенченко С. А. Акустооптический модулятор стоячей волны	13
Васильев Н. Н., Зажогин А. П. Перестраиваемый струйный лазер на растворах красителей	15
Бариков В. Н., Некрашевич И. Г., Смирнов А. В. Электроразносные явления на электродах в импульсном разряде при различных скоростях нарастания тока	18
Абрамчук Н. М., Ефимчик М. К., Шушкевич С. С. Фронтальный учебный практикум по радиоэлектронике для физиков (специальность 2016)	22

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Мелешко А. Н. Интерполяционные квадратурные формулы для интегралов Шварца и Гильберта	26
Журбенко И. Г., Зуев Н. М. Перемешивание случайных процессов	29
Алейникова Э. М., Забелло Л. Е. К исследованию второй вариации функционалов вдоль траекторий дискретных систем	33
Буза М. К., Левинер Л. В. Об одной интерпретирующей системе	37
Василевич Ю. В. Плоская смешанная задача термоупругости для плоскости с подкрепленным отверстием	40
Чупригин С. А. Лакунарное тригонометрическое интерполирование типа $(0, 1, \dots, p, q, r)$	44
Калитин Б. С. Одна теорема о неустойчивости	49
Кравцов М. К., Кашинский Ю. И. Об одной задаче оптимального распределения топливных ресурсов	50

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Казакевич Л. А., Лугаков П. Ф. Образование радиационных дефектов в кремнии с дислокациями	56
Яновский С. Ю. Цилиндрические и сферические волны температуры в материалах с тепловой памятью	58
Гурачевский В. Л., Солнцев А. С. Мессбауэровский спектрометр с постоянным ускорением	60
Граков В. Е., Майга А. С. К вопросу о происхождении катодных плазменных струй	62
Курейчик К. П., Саржевский А. М. Импульсный корректор темного тока в фоточувствительных устройствах	63
Борисоглебский Л. А., Лобко С. И. Частица со спином $1/2$ в поле одномерного осцилляторного потенциала	66
Дробушев Г. А., То Гуан. Об одном методе синтаксического анализа языков программирования	67
Мелешко И. Н. О вычислении коэффициентов некоторых интерполяционных квадратурных формул	69
Аннотации депонированных статей	72

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Александр Михайлович Саржевский (К 50-летию со дня рождения)	74
--	----



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

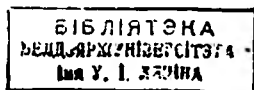
СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 3
СЕНТЯБРЬ



Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО (главный редактор),
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (ответственный секретарь), **В. С. ГРИГОРЬЕВ**, **Г. П. ДАВИДЮК**, **В. Г. ИВАШИН**, **В. Г. РУДЬ**
(зам. главного редактора), **А. М. САРЖЕВСКИЙ**, **А. Е. СУПРУН**, **И. Г. ТИЩЕНКО**

Редакционная коллегия серии:

А. М. САРЖЕВСКИЙ (ответственный редактор), **Ю. С. БОГДАНОВ** (зам. ответственного редактора), **Э. И. ЗВЕРОВИЧ**, **Е. А. ИВАНОВ**, **В. В. ИЗОХ**, **Л. И. КОМАРОВ**, **Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ**, **И. П. ПРУСОВ**, **В. Ф. СТЕЛЬМАХ**, **А. С. ФЕДЕНКО**, **Б. Ю. ХАНОХ** (ответственный секретарь), **М. П. ХАЛИМАНОВИЧ**, **А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ**, **С. С. ШУШКЕВИЧ**

**ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА**

Серия 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3

Редактор **И. П. Стрельченя**
Художественный редактор **Л. Г. Медведева**
Технический редактор и корректор **Г. Н. Хмарун**

Сдано в набор 25.04.80. Подписано в печать 09.09.80. АТ 13608. Формат 70×108¹/₁₆. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 7,17. Тираж 1090 экз. Заказ 1210. Цена 80 коп.

Издательство Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. 220048, Минск, Парковая магистраль, 11.
Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, юридический факультет, к. 62. Тел. 22-87-64.
Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

УДК 621.391

Г. А. АГРАНОВ, А. М. ЗАЙЦЕВА.
Л. Н. КОРЕННАЯ, В. С. СОБОЛЕВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ПЛОСКОСТИ ТРАНСФОРМАНТЫ

Эффективная система передачи изображения должна обеспечить выполнение двух требований: сокращение полосы частот, занимаемой видеосигналом, и одновременно сохранение качества принятого изображения. В основе методов сокращения избыточности лежит амплитудная корреляция между соседними точками изображения [1].

В последнее время большое внимание уделяется методам, использующим глобальные преобразования для кодирования изображения. Выбором соответствующего ортогонального преобразования можно сконцентрировать энергию видеосигнала в небольшой области преобразованного пространства, что позволяет достаточно просто осуществлять сжатие информации. Одним из преимуществ таким образом закодированного сигнала является его высокая помехоустойчивость.

Рассмотрим характер распределения энергии по элементам трансформанты при кодировании изображения с помощью преобразований Уолша — Адамара и Фурье [2, 3]. В работе [4] по данным обработки нескольких фотографий получены кривые, описывающие плотность вероятности и функции распределения абсолютных значений элементов трансформанты Адамара, а также представлены результаты теоретического расчета энергии коэффициентов Адамара для одномерного преобразования в предположении нормального закона перехода между двумя последовательными выборками. Однако имеющихся в литературе экспериментальных данных не хватает для того, чтобы ввести достаточно хорошее приближенное аналитическое представление для плотности вероятности распределения элементов трансформанты, относящейся к определенному классу изображений. К тому же, в последнее время появились работы по исследованию корреляционной функции двумерного изображения [5], поэтому в нашем исследовании среднеквадратичные характеристики трансформанты изображения будут оценены, исходя из заданной функции пространственной корреляции исходного видеосигнала:

$$R(x, x'; y, y') = \overline{F(x, y) F(x', y')} - \overline{F(x, y)} \cdot \overline{F(x', y')}, \quad (1)$$

где $F(x, y)$ — функция, описывающая амплитуду исходного изображения. Черта сверху означает статистическое усреднение по распределению, соответствующему данному типу изображения.

Проектирование функции Уолша — Адамара $H_i(x) \cdot H_j(y)$ на непрерывную функцию $F(x, y)$ производит одновременно дискретизацию поля изображения:

$$F(x, y) \rightarrow F_{kl} = \int_{x_0 + k\Delta}^{x_0 + (k+1)\Delta} \int_{y_0 + l\Delta}^{y_0 + (l+1)\Delta} F(x, y) dy. \quad (2)$$

Здесь $\Delta = \frac{L}{N}$ — шаг пространственной дискретизации; L — линейный размер поля изображения; N — число элементов вдоль одной из пространственных осей; $k, l = 0, 1, 2, \dots, N-1$; x_0, y_0 — координаты начала отсчета.

Процесс усреднения (2) ограничивает диапазон пространственных частот, которые могут быть восстановлены после передачи сигналов по каналу связи. Предельная частота пространственного спектра определяется числом интервалов дискретизации N , содержащихся в датчике изображения. В дальнейшем весь анализ проводится для дискретной функции изображения F_{kl} , т. е. предполагается, что N достаточно велико и процесс усреднения (2) не вносит сколько-либо заметных искажений в пространственно-частотные характеристики изображения.

Прямое и обратное преобразования Уолша — Адамара имеют вид [2]:

$$\Phi_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} H_{ik} F_{kl} H_{lj}, \quad F_{kl} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} H_{ki} \Phi_{ij} H_{jl}. \quad (3)$$

При использовании естественной формы записи матрицы H_{ik} представляются в виде

$$H_{ik} = (-1)^{P(i, k)}, \quad P(i, k) = \sum_{v=0}^{n-1} i_v \cdot k_v; \\ i = \sum_{v=0}^{n-1} i_v \cdot 2^v; \quad k = \sum_{v=0}^{n-1} k_v \cdot 2^v; \quad N = 2^n. \quad (4)$$

Для частотно-упорядоченной формы H_{ik}

$$H_{ik} = (-1)^{q(i, k)}, \quad q(i, k) = i_{n-1} \cdot k_0 + \sum_{v=1}^{n-1} (i_{n-v} + i_{n-v-1}). \quad (5)$$

Величина, определяющая распределение энергии в области преобразованного пространства, определяется следующим образом:

$$\overline{\Phi_{ij}^2} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \sum_{l'=0}^{N-1} H_{ik} H_{ik'} [R(k, k'; l, l') + \overline{F_{kl}} \cdot \overline{F_{k'l'}}] H_{l'l'} H_{lj}, \quad (6)$$

где $R(k, k'; l, l') = \overline{F_{kl} \cdot F_{k'l'}} - \overline{F_{kl}} \cdot \overline{F_{k'l'}}$.

Изменение энергии $\overline{\Phi_{ij}^2}$ в зависимости от номера коэффициента (i, j) определяется поведением корреляционной функции $R(k, k'; l, l')$. Так, в предельном случае отсутствия корреляции $R(k-k'; l-l') = R\delta_{kk'} \delta_{ll'}$; $\overline{F_{kl}} = F$. Здесь $\delta_{kk'} = 1$ при $k = k'$; $\delta_{kk'} = 0$ при $k \neq k'$ и энергия элементов трансформанты $\overline{\Phi_{ij}^2}$ (кроме члена $i = 0, k = 0$) распределена равномерно: $\overline{\Phi_{ij}^2} = RN^2 + F^2 N^4 \delta_{i0} \delta_{j0}$. В случае полной корреляции $R(k-k'; l-l') \rightarrow R$ вся энергия сосредоточена в нулевом коэффициенте: $\overline{\Phi_{ij}^2} = (R + F^2) N^4 \delta_{i0} \delta_{j0}$.

Рассмотрим случай частичной корреляции. Пусть

$$R(k-k'; l-l') = R \exp(-\gamma |k-k'|) \exp(-\gamma |l-l'|)^{**}. \quad (7)$$

$\overline{\Phi_{ij}^2}$ при этом определится выражением:

$$\overline{\Phi_{ij}^2} = F^2 N^4 \delta_{i0} \delta_{j0} + R \rho_i(\gamma) \rho_j(\gamma), \quad (8)$$

* В дальнейшем будем рассматривать изображения, для которых $R(k, k'; l, l')$ зависит лишь от разности координат $k-k', l-l'$, т. е. F_{kl} не зависит от наложения элемента (k, l) .

** Функция корреляции ТВ кадров с хорошей точностью описывается выражением (7).

$$\text{где } \rho_i(\gamma) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} H_{ik} H_{ik'} \exp(-\gamma |k - k'|).$$

Трудность вычисления $\rho_i(\gamma)$ заключается в том, что функции H_{ik} определяются компонентами двоичного разложения чисел i, k и суммирование по этим индексам в аналитической форме провести невозможно. Частично от этих сложностей можно избавиться, анализируя поведение функции $\rho_i(\gamma)$ для индексов i , заданных в определенной последовательности.

Будем рассматривать зависимость $\rho_i(\gamma)$ от i для функции H_{ik} в частотно-упорядоченной форме (5).

Представим i (номер строчки матрицы H_{ik}) в виде $i = v - v$, где $v = 2^m$, $1 \leq m \leq n$, $1 \leq v \leq \frac{v}{2}$. Число k (номер элемента в строке) запишем в следующем виде: $k = \mu\lambda + u$, где $\mu = 2^{n-m}$, $0 \leq \lambda \leq v-1$; $0 \leq u \leq \mu-1$. Такая форма записи позволит ввести достаточно удобные для расчетов выражения для элементов матрицы Уолша — Адамара:

$$\begin{aligned} H_{v-1, \mu\lambda+u} &= (-1)^{\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{v}{2} - 1, \\ &(-1)^{\lambda+1}, \quad \frac{v}{2} \leq \lambda \leq v-1, \\ H_{v-3, \mu\lambda+u} &= (-1)^{\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{v}{4} - 1, \quad \frac{3v}{4} \leq \lambda \leq v-1, \\ &(-1)^{\lambda+1}, \quad \frac{v}{4} \leq \lambda \leq \frac{3v}{4} - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), находим для $\rho_i(\gamma)$:

$$\rho_{v-v}(\gamma) = A_1(\gamma) + B_1(\gamma) \cdot C_v(\gamma). \quad (10)$$

$$\text{Здесь } A_1(\gamma) = N \frac{1+e^{-\gamma}}{1-e^{-\gamma}} - 4v \frac{1-e^{-\gamma \frac{N}{v}}}{(1-e^{-\gamma})(1-e^{-\gamma})(1+e^{-\gamma \frac{N}{v}})},$$

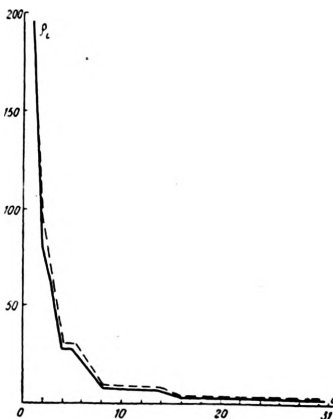


Рис. 1. Зависимость функции $\rho_i(\gamma)$ от номера элемента трансформанты при $\gamma=0,1$:

--- точное выражение; — первое приближение

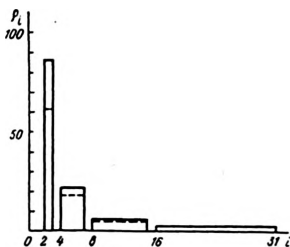


Рис. 2. Характер распределения функции ρ_i в нулевом приближении:

--- оценка по формуле (13) при $\gamma=0,1$; — результаты работы [4]

$$B_v(\gamma) = 2 \frac{(1 - e^{-\frac{N}{v}})(1 - e^{-\frac{N}{v}})}{(1 - e^1)(1 - e^{-1})(1 + e^{-\frac{N}{v}})(1 + e^{-\frac{N}{v}})},$$

$$C_{v=1}(\gamma) = 1 - e^{-N}, \quad C_{v=2}(\gamma) = (1 - e^{-\frac{N}{2}})[2 - (1 - e^{-\frac{N}{2}})e^{-\frac{N}{2}}],$$

$$C_{v=3}(\gamma) = (1 - e^{-\frac{N}{2}})[4 + (1 - e^{-\frac{N}{4}})(e^{-\frac{3N}{4}} - 2e^{-\frac{N}{2}} - e^{-\frac{N}{4}})],$$

$$C_{v=4}(\gamma) = (1 - e^{-\frac{N}{2}})[4 + (1 - e^{-\frac{N}{4}})(e^{-\frac{3N}{4}} + 2e^{-\frac{N}{2}} - 3e^{-\frac{N}{4}})].$$

Явный вид функции $C_v(\gamma)$ при произвольном v чрезвычайно громоздкий. Анализ полученных выражений показывает, что $\rho_{v-v}(\gamma)$ достаточно резко спадает с увеличением v . Зависимость функции $\rho_{v-v}(\gamma)$ от v при данном γ гораздо слабее. Это позволяет ввести приближенное аналитическое выражение для функции $\rho_{v-v}(\gamma)$. В первом приближении по v получаем:

$$\rho_{v-v}(\gamma) = A_v(\gamma) + B_v(\gamma) \cdot C_v^{(1)}(\gamma), \quad (11)$$

где $C_v^{(1)}(\gamma) = (1 - e^{-\frac{N}{v_1}})v_1$, причем v_1 определяется из данного v по правилу: $v = v_1 - v_1$, $v_1 = 2^{m_1}$, $1 \leq m_1 \leq m-1$, $1 \leq v \leq \frac{v_1}{2}$.

Относительная ошибка в вычислении ρ по (11) не превышает 10—15%. При этом ошибка монотонно возрастает от 0 до максимального значения по мере увеличения v от 0 до $\frac{v}{2}$. (Средняя ошибка порядка 6%.)

Зависимость $\rho_i(\gamma)$ от i носит характер спадающей ступенчато сглаженной функции. На рис. 1 представлена кривая, определяющая поведение функции $\rho_i(\gamma)$ в рассматриваемом приближении. Для сравнения приведена кривая $\rho_i(\gamma)$, полученная из точного выражения (8).

В работе [4] в предположении нормального распределения (для одномерного преобразования) получено выражение для среднеквадратичного отклонения коэффициентов Уолша — Адамара:

$$\sigma_{i0}^2 = \overline{\Psi}_{i0}^2 - \overline{\Psi}_{i0}^2 = \frac{2^n}{6} (1 + 2^{2n-2k-1}) \text{ для } 2^k \leq i \leq 2^{k+1}. \quad (12)$$

По существу, используемая в [4] модель дает информацию о поведении σ_{i0}^2 в нулевом приближении, т. е. изменение от i сводится к нахождению зависимости от главной части числа i (v). Функция $\rho_i(\gamma)$ из (8), представленная в нулевом приближении, имеет вид

$$\rho_{v-v}(\gamma) = A_v(\gamma) + B_v(\gamma). \quad (13)$$

Относительное отклонение $\rho_{v-v}(\gamma)$ из (13) по отношению к точному выражению (8) не превышает 45%.

На рис. 2 показана зависимость $\rho_i(\gamma)$, полученная в соответствии с приближениями (12) и (13). Некоторые количественные расхождения связаны с частичным несоответствием исходных моделей, так как используемая нами функция корреляции (7) лишь приближенно соответствует нормальному распределению.

Таким образом, используемая методика расчета позволила получить выражения для энергии элементов трансформанты (11) с более высокой точностью, чем в работе [4], что дает возможность описать изменения σ_{i0}^2 в пределах энергетических зон $2^k \leq i \leq 2^{k+1}$.

При кодировании изображения с использованием дискретного преобразования Фурье энергия s, t пространственно-частотной гармоник определяется выражением:

$$|\overline{\Psi}_{st}|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \sum_{l'=0}^{N-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{N} [(k' - k)s + \dots]\right\}$$

$$+ (l' - l) t \} [R(k, k'; l, l') + \bar{F}_k \cdot \bar{F}_{k' \cdot l'}], \quad (14)$$

$$\text{где } \Psi_{st} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp \left[-i \frac{2\pi}{N} (ks + lt) \right] F_{kl},$$

$$F_{kl} = \frac{1}{N^2} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} \Psi_{st} \cdot \exp \left[i \frac{2\pi}{N} (ks + lt) \right].$$

Для функции корреляции вида (7) получаем для $|\bar{\Psi}_{st}|^2$:

$$|\bar{\Psi}_{st}|^2 = \bar{F}^2 N^4 \delta_{s0} \delta_{t0} + R \chi_s(\gamma) \chi_t(\gamma), \quad (15)$$

$$\text{где } \chi_s(\gamma) = N \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{e^{\gamma} + e^{-\gamma} - 2 \cos \frac{2\pi}{N} s} + 2(1 - e^{-\gamma N}) \frac{2 - (e^{\gamma} + e^{-\gamma}) \cos \frac{2\pi}{N} s}{\left(e^{\gamma} + e^{-\gamma} - 2 \cos \frac{2\pi}{N} s \right)^2},$$

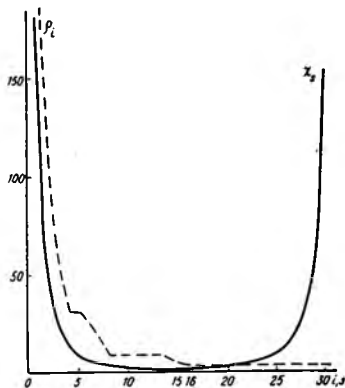
$$\chi_0(\gamma) = N \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma} + 2(1 - e^{-\gamma N})}{(1 - e^{\gamma})(1 - e^{-\gamma})}.$$

Из (15) следует, что минимальной энергией обладает пространственно-частотная гармоника, соответствующая $s = \frac{N}{2}$, $t = \frac{N}{2}$ (в плоскости частот Адамара минимум энергии приходится на коэффициент с $i = N - 1$, $j = N - 1$), что связано со свойством симметрии коэффициентов Фурье: $\Psi_{st} = \Psi_{N-s, N-t}^*$.

На рис. 3 показаны кривые, описывающие характер спада функции $\chi_s(\gamma)$ (преобразование Фурье) и $\rho_i(\gamma)$ (преобразование Адамара). Как показывают расчеты, относительная доля потерянной энергии при фиксированном числе отброшенных элементов в случае преобразования Адамара несколько выше, чем при использовании преобразования Фурье (при $\gamma = 0,1$).

Рис. 3. Сравнение зависимости характера спада функций χ_s и ρ_i от номера элемента трансформанты:

--- функция $\rho_i(\gamma)$; — функция $\chi_s(\gamma)$



Информация о законе распределения энергии в плоскостях Уолша — Адамара и Фурье необходима при разработке алгоритмов сокращения избыточности, при анализе динамического диапазона элементов трансформанты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хочман Д., Кацман Н., Вебер О. — ТИИЭР, 1967, № 3, т. 55, с. 25.
2. Трахтман А. Н., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. — М., 1975.
3. Хармут Х. Ф. Передача информации ортогональными функциями. — М., 1975.
4. Понсен — Зарубежная радиоэлектроника, 1972, т. 30, № 3.
5. Кrasil'ников П. Н. Статистическая теория передачи изображений. — М., 1975.

ВЛИЯНИЕ ЗАКАЛКИ НА МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ И ТЕМПЕРАТУРУ КЮРИ НИКЕЛЬ-КОБАЛЬТОВЫХ ФЕРРИТОВ

Бинарная система $\text{Ni}_{1-x}\text{Co}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$ является удобным объектом для изучения изменения магнитных свойств, обусловленного перераспределением катионов между тетраэдрическими A и октаэдрическими B позициями решетки шпинели при изменении температуры. Крайние компоненты этой системы — NiFe_2O_4 и CoFe_2O_4 — являются обращенными шпинелями. В равновесных условиях при низкой температуре катионы Ni^{2+} и Co^{2+} в этих ферритах занимают только B позиции, а катионы Fe^{3+} распределены поровну между A и B позициями. Энергия предпочтения ΔE_s к октаэдрическому окружению Ni^{2+} существенно больше ΔE_s ионов Co^{2+} (22,8 и 2,1 ккал/моль [1]), поэтому способность к статистическому распределению катионов по A и B позициям при высоких температурах, когда в свободной энергии $F=U-TS$ становится преобладающим энтропийный член, должна быть больше у феррита кобальта и в твердых растворах на его основе, по сравнению с ферритом никеля и твердыми растворами на его основе.

Распределение ионов по A и B позициям (или подрешеткам) шпинели характеризуется коэффициентом δ :

$$\frac{\text{Fe}_{\frac{1}{2}-\delta}^{3+} \text{Me}_{\frac{1}{2}+\delta}^{2+}}{A} \frac{[\text{Fe}_{\frac{1}{2}+\delta}^{3+} \text{Me}_{\frac{1}{2}-\delta}^{2+}]}{B} \text{O}_4 \quad (1)$$

$\delta=1$ соответствует нормальной шпинели, $\delta=0$ — обращенной. У смешанной шпинели со статистическим распределением катионов $\delta=1/3$. Для феррита заданного состава δ зависит от температуры [1]:

$$\frac{\delta(1+\delta)}{(1-\delta)^2} = e^{-\frac{\Delta E_s}{RT}} \quad (2)$$

Используя (2), получаем, что в CoFe_2O_4 при 1100°C $\delta=0,226$, или 67,8% статистического. Это дает, согласно (1), прирост спонтанного магнитного момента $m_0 = |m_{0A} - m_{0B}|$ на «молекулу» CoFe_2O_4 около $0,7 \mu_B$ при закалке от 1100°C на комнатную температуру. (Здесь m_{0A} — суммарный магнитный момент подрешетки A ; m_{0B} — то же для подрешетки B). Экспериментально такое изменение m_0 можно получить при условии, что высокотемпературное распределение ионов при быстром охлаждении полностью сохраняется, а при медленном подвижность катионов при низких температурах достаточна для получения равновесного распределения за время охлаждения печи (около 10 ч).

Для NiFe_2O_4 при 1100°C $\delta=0,00023$, что не дает достаточного для измерения обычным индукционным методом приращения m_0 при закалке.

Таковы оценочные результаты о влиянии состава в системе $\text{Ni}_{1-x}\text{Co}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$ на возможность изменения магнитного момента при закалке.

Для экспериментального изучения влияния состава и закалки на изменение магнитных свойств мы синтезировали 11 составов системы $\text{Ni}_{1-x}\text{Co}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$ ($x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$). Образцы в форме параллелепипедов приготовлены спеканием (предварительно тщательно смешанных и спрессованных при давлении $3,92 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$) окислов при 1250°C . Скорость закалки от 1100 до 600°C составляла примерно 200°C/с . Намагниченность измерена по методу Штебляна в полях от 500 до 12000 Э ; точки Кюри определены из температурной зависимости магнитной проницаемости; m_0 получали делением намагниченности насыщения на число «молекул» MeFe_2O_4 в единице объема, которое определяли по постоянной решетки и заданному химическому составу.

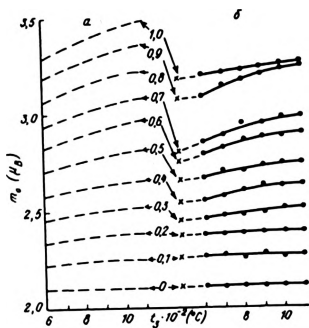


Рис. 1. Зависимость молярного магнитного момента m_0 системы $\text{Ni}_{1-x}\text{Co}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$ от температуры закалки T_3 :

а — расчет; б — эксперимент; х — незакаленный образец. Цифры у кривых — величина х

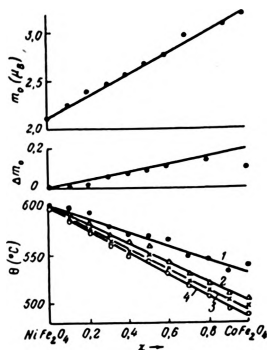


Рис. 2. Магнитный момент m_0 , изменение его при закалке Δm_0 и температура Кюри Θ системы $\text{Ni}_{1-x}\text{Co}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$:

прямая $\Delta m_0(x)$ — расчет; точки — эксперимент; 1 — незакаленные образцы; 2, 3, 4 — закаленные от 700, 900 и 1100°С

Пересчет m_0 на рентгеновски плотные образцы вели при аддитивном учете пористости.

На рис. 1 приведены рассчитанные по (1) и (2) и экспериментально измеренные зависимости m_0 от температуры нагрева под закалку T_3 . При расчете принималось $m_0(\text{Fe}^{3+}) = 5\mu_B$, $m_0(\text{Co}^{2+}) = 3\mu_B$, $m_0(\text{Ni}^{2+}) = 2,1\mu_B$ [2], т. е. значения магнитных моментов ионов при 0К. Результирующие m_0 ферритов измерялись при комнатной температуре, поэтому при сравнении с экспериментом вычисленные m_0 уменьшались на величину $m_0 \cdot (\Delta I/I_0)$, обусловленную температурным разупорядочением спонтанной намагниченности. Здесь ΔI — уменьшение спонтанной намагниченности феррита при увеличении температуры от 0К до комнатной, I_0 — спонтанная намагниченность при 0К. $\Delta I/I_0$ для ферритов никеля и кобальта известны [2], а для их твердых растворов определялись линейной интерполяцией. Вычисленная для CoFe_2O_4 в твердых растворах уменьшалась прямо пропорционально уменьшению доли ионов Co^{2+} в твердом растворе данного состава от их полного количества в феррите кобальта.

Подтверждаются ожидаемые результаты о влиянии энергии предпочтения на изменение m_0 при закалке. Феррит никеля и твердые растворы с $x \leq 0,1$ практически не изменяют m_0 в исследованном интервале T_3 . Это связано с большой, по сравнению с RT , величиной энергии предпочтения Ni^{2+} к В позициям и малым количеством ионов Co^{2+} в указанных ферритах. Феррит кобальта и твердые растворы с $x > 0,2$ увеличивают m_0 с ростом T_3 .

Для изменения $\Delta m_0(T_3) = m_0$ (закаленного) — m_0 (незакаленного) имеется не только качественное, но и удовлетворительное количественное согласие расчета и эксперимента (рис. 2). Однако согласие Δm_0 рассчитанного и экспериментального получается, если взять $\Delta m_0 = m_0(T_3) - m_0(600^\circ\text{C})$. Это связано с тем, что ниже 500—600°С подвижность ионов в ферритах очень мала [1]. Температура 600°С для ферритов равна примерно 0,4 абсолютной температуры плавления. Известно, что, начиная именно с этой температуры, подвижность атомов в твердых телах становится достаточно большой, чтобы за время порядка 10^2 — 10^4 с получились заметные изменения структуры, связанные со смещениями атомов из положений равновесия. Для исследуемых ферритов, закаленных от 700, 800, 900, 1000 и 1100°С на комнатную температуру, характерно

почти такое же изменение магнитного момента, как и при закалке на 600 °С. Ниже этой температуры подвижность катионов становится недостаточной, чтобы за время охлаждения печи (в наших экспериментах примерно 10 ч) получить равновесное распределение катионов, соответствующее соотношению (2). Магнитный момент даже при таком медленном охлаждении получается завышенным и соответствует распределению при ~600 °С, поэтому, например, закалка CoFe_2O_4 от 1100 °С на комнатную температуру дает $\Delta m_0 = 0,2 \mu_B$, что соответствует, согласно (1) и (2), изменению перераспределения катионов при переходе от 1100 к 600 °С.

Концентрационная зависимость m_0 исследуемой системы (см. рис. 2) как медленно охлажденных, так и закаленных образцов в целом хорошо описывается аддитивной зависимостью

$$m_0(x) = m_0(\text{NiFe}_2\text{O}_4)(1-x) + m_0(\text{CoFe}_2\text{O}_4)x, \quad (3)$$

вытекающей из теории Нееля для антипараллельно ориентированных магнитных подрешеток *A* и *B* при линейном изменении или постоянстве $\delta(x)$ и малых изменениях количества магнитных ионов в подрешетках при изменении x (в нашей системе последняя величина постоянна).

Изменение температуры Кюри Θ при закалке (см. рис. 2) коррелирует с изменением m_0 . Наибольшее изменение Θ при закалке наблюдается в феррите кобальта и в твердых растворах, содержащих большое его количество. Минимальное изменение Θ имеют феррит никеля и твердые растворы на его основе. У всех составов закалка уменьшает Θ . Относительное уменьшение Θ CoFe_2O_4 при закалке от 1100 °С составляет 50 K/813 K = 0,062. Расчетное изменение количества ионов Fe^{3+} в *A* подрешетке при такой же закалке $(0,827 - 0,744)/(0,827) = 0,064$. Хорошее соответствие между уменьшением количества ионов Fe^{3+} в *A* подрешетке и Θ отмечается и для других составов, заметно изменяющих Θ при закалке. Можно предположить поэтому, что изменение Θ при закалке вызвано в основном перераспределением катионов: обеднением *A* подрешетки ионами Fe^{3+} со значительно большим числом неспаренных спинов по сравнению с числом неспаренных спинов в замещающих их ионах Co^{2+} (5 и 3 соответственно). Относительный прирост количества некомпенсированных спинов в *B* подрешетке при переходе туда равного количества ионов Fe^{3+} значительно меньше, так как в ней вдвое больше магнитных ионов по сравнению с *A* подрешеткой. Так как температура Кюри определяется в основном обменным взаимодействием между подрешетками, перераспределение катионов, имеющее место при закалке, должно снижать температуру Кюри, что и наблюдается в действительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крупичка С. Физика ферритов и родственных им магнитных окислов, т. 1.— М., 1976.
2. Смит Я., Вейн Х. Ферриты.— М., 1962.

Поступила в редакцию
18.01.79.

Кафедра физики твердого тела

УДК 621.396.6.181.48

А. Д. АНДРЕЕВ, В. М. ДИТКОВСКИЙ, А. В. ТКАЧ

ВЫЯВЛЕНИЕ НАРУШЕНИЙ СТРУКТУРЫ ОКИСЛА КРЕМНИЯ ПРИ ЭКСПОНИРОВАНИИ ЕГО В ГАЗОВОЙ ПЛАЗМЕ

Оксид кремния находит широкое применение при изготовлении активных или пассивных элементов полупроводниковых приборов и интегральных схем, в качестве изолятора металлических электродов, маски

при диффузии и фотолитографии. В процессе термического окисления в слое окисла могут образоваться сквозные каналы, нарушающие сплошную структуру окисла и оказывающие влияние на характеристики приборов. Известно, что при возбуждении газового разряда в вакуумных лампах, поверхность катода которых покрыта изолирующей пленкой, наблюдается усиление тока и образование сквозных каналов в диэлектрической пленке. Увеличение тока объясняется тем, что ионы плазмы притягиваются к поверхности диэлектрика и между образовавшимся слоем ионов плазмы и металлическим катодом возникает электрическое поле, которое вызывает холодную эмиссию электронов [1]. Сквозные каналы в пленке диэлектрика являются проводниками электрического тока; у выхода этих каналов на поверхности пленки свечение плазмы имеет большую яркость.

В данной работе в качестве катода применялись кремниевые пластины $n(0,2 \text{ Ом}\cdot\text{см})$ - и $p(0,1 \text{ Ом}\cdot\text{см})$ -типа, толщиной 200 мкм, вырезанные в направлении [111], на поверхность которых методом термического окисления при температуре 1150°C наносились слои окисла кремния. Для измерений применялась схема, показанная на рис. 1. Плазма возбуждалась в стеклянной цилиндрической камере 3 размером $80 \times 30 \text{ мм}$ от источника переменного тока частотой 50 Гц. Камера находилась под непрерывной откачкой, давление воздуха регулировалось в пределах $13,33\text{—}666 \text{ Н/м}^2$. Переменное напряжение подавалось между молибденовым электродом 5 диаметром 0,5 и длиной 15 мм и кремниевой подложкой 1, на которую были нанесены слои окисла кремния 2. Прижимной электрический контакт к кремниевой подложке осуществлялся посеребренной медной фольгой. Металлическая сетка 6 с размером ячеек $2 \times 2 \text{ мм}$, расположенная на расстоянии 1 мм от поверхности окисла, использовалась для управления протекающим током через контакт плазма — окисел кремния. Пробой газового промежутка осуществлялся при давлении $\sim 13,33 \text{ Н/м}^2$.

На рис. 1 даны зависимости тока I от приложенного напряжения U для различных толщин окисла кремния. Как видно из рисунка, вольт-амперные характеристики (ВАХ) смещаются в область более высоких напряжений с увеличением толщины окисла. При протекании тока через кремниевые пластины с толщиной окисла 0,17 и 0,72 мкм наблюдаются его нестабильности, величина которых показана на ВАХ отрезками прямых.

Различие в величине токов, протекающих в кремниевых пластинах n и p -типа, увеличивается с ростом толщины окисла. На рис. 2, а и б приведены осциллограммы тока для окислов толщиной 0,01 мкм (а) и 0,72 мкм (б). На рис. 2, б видны пульсации тока, длительность которых составляет 10^{-4} с , а амплитуда беспорядочно изменяется во времени. С увеличением приложенного напряжения число пульсаций растет и нестабильность уменьшается. При подаче на управляющую сетку 6 положительного смещения величина протекающего тока уменьшается, а его пульсации исчезают. Нестабильности протекающего во внешней цепи тока возникают в полупериоде, соответствующем движению ионов к поверхности окисла, а электронов к проводящему зонду. Для устранения влияния второго полупериода, в котором такой эффект не наблюдается,

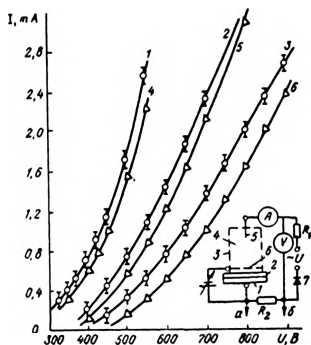


Рис. 1. Зависимость тока в цепи контактов (5—1) от приложенного напряжения:

1—6 соответственно для кремния n - и p -типа при толщине окисла 1,2 $\sim$ 0,02; 2,5 $\sim$ 0,2; 3,6 $\sim$ 0,7 мкм. R_1 , R_2 — ограничительное сопротивление. Остальные обозначения в тексте

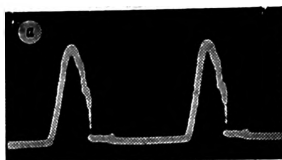


Рис. 2. Осциллограммы тока в отрицательном полупериоде приложенного напряжения для SiO_2 толщиной $\sim 0,01$ (а) и $0,72$ (б) мкм

в схему включен диод 7. Возникновение пульсаций тока сопровождается появлением на поверхности окисла со стороны плазмы световых вспышек, яркость свечения которых несколько превышает яркость свечения газоразрядной плазмы. Свечение этих пятен на поверхности изменяется во времени таким образом, что яркость одних увеличивается, а других уменьшается. При этом наблюдается картина, подобная блужданию (миграции) светящегося пятна на поверхности. Вспышки света появляются в местах эрозионных пятен (пор), возникающих на поверхности окисла. Число эрозионных пятен возрастает с увеличением времени экспонирования окисла в плазме, что приводит к увеличению тока в цепи. Эти пятна являются выходом сквозных каналов, соединяющих подложку с поверхностью окисла.

Полученные экспериментальные данные дают основание предполагать, что та часть положительно заряженных ионов плазмы, которая проникает на поверхность окисла через сетку, создает в нем электрическое поле, способное вызвать холодную эмиссию электронов из кремниевой подложки. При этом в тонких пленках окисла электрический ток может протекать через всю поверхность, в более толстых пленках протекание тока осуществляется в основном через сквозные каналы, которые образуются под воздействием плазмы. В исследуемом полупериоде ток положительных ионов, текущий к электроду, вследствие наличия проводящих каналов в слое окисла, будет распадаться на отдельные токи. Так как эти токи обеднены электронами, при подходе к каналу они создают между вершинами тока и катодом электрическое поле, что может вызвать электронную эмиссию и заметный рост протекающего тока. Известно, что холодная эмиссия электронов в сильном электрическом поле возникает между головкой стримера и поверхностью катода при пробое воздушного промежутка [2]. Изменение амплитуды тока во времени можно объяснить изменением эмиссионного тока, протекающего в отдельных каналах. Это изменение вызывается нейтрализацией заряда положительных ионов вблизи канала эмитированными электронами, изменяющими величину электрического поля между вершиной тока и катодом. Поэтому протекающий ток в одних каналах будет уменьшаться, в других увеличиваться. Это явление и порождает миграцию светового пятна. Так как протекание тока через тонкий окисел осуществляется по всей поверхности, нестабильности его не проявляются (см. рис. 1, кривые 1, 4, рис. 2, а). Увеличение числа эрозионных пятен с течением времени экспонирования окисла в плазме может быть связано с дефектами его структуры. При термическом окислении на границе раздела образуются как сквозные, так и находящиеся в глубине окисла поры, поэтому в начальный период экспонирования ток протекает через сквозные поры. С увеличением времени экспонирования число сквозных пор возрастает вследствие эрозии неполностью зарастаемых пор. Наблюдаемое различие в величине тока, протекающего через подложки n - и p -типа, нельзя объяснить только одним взаимодействием ионов плазмы с поверхностью окисла. Для этого необходимо дальнейшее исследование механизма холодной эмиссии структуры плазма — окисел — подложка.

1. Кноль М., Эйхмейер, Техническая электроника.— М., 1969.
2. Nasser—J. Appl. Phys., 1966, v. 37, p. 4712.

Поступила в редакцию
12.02.79.

Кафедра радиотехники и физической электроники

УДК 535.5

В. Н. АФАНАСЕНКО, В. А. ДАНИЛОВ, С. А. ЗЕНЧЕНКО

АКУСТООПТИЧЕСКИЙ МОДУЛЯТОР СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ

Для управления лазерным излучением широкое применение получили акустооптические устройства, которые используются во многих случаях для тех же целей, что и электрооптические приборы. Преимущество акустооптических устройств по сравнению с электрооптическими в меньшей управляющей мощности, более высоком контрасте, меньших оптических потерях, что особенно важно при использовании этих устройств в резонаторе лазера. Одним из основных достоинств акустооптических модуляторов считается независимость их характеристик от температуры [1, 2]. Однако такой особенностью отличаются только акустооптические модуляторы бегущей волны. Для модуляторов стоячей волны в работах [3, 4] отмечается влияние температуры на их характеристики. Акустооптические модуляторы стоячей волны широко применяются для синхронизации мод лазеров. Изменение характеристик модулятора под действием температуры будет приводить к изменению параметров оптических импульсов на выходе лазера с синхронизованными модами.

Целью настоящей работы было исследование влияния изменений температуры на характеристики акустооптических модуляторов, применяемых для синхронизации мод лазеров, кроме того, исследовалось влияние изменений мощности подводимого к модулятору высокочастотного сигнала на характеристики модулятора.

Нами исследовались акустооптические модуляторы стоячей волны, аналогичные описанным в [5].

Для исследования работы акустооптического модулятора была собрана установка (рис. 1), позволяющая измерять зависимость глубины модуляции от частоты и степени электрического согласования как в широком диапазоне частот, так и в пределах одного резонансного пика при изменении температуры модулятора и подводимой радиочастотной мощности.

Акустооптический модулятор (АОМ) помещался на пути луча He—Ne лазера. С помощью диафрагмы (Д) вырезался дифрагированный луч, который регистрировался фотодетектором (ФД). АОМ помещался в активный термостат, позволяющий изменять температуру в пределах 20—70 °С и поддерживать ее с точностью 0,1 °С в любой точке.

Для измерения частотной характеристики модулятора на его вход через усилитель (УС) и рефлектометр (Р) поступал сигнал от свнпп-генератора типа ХІ—ІА. Типичный вид характеристики представляет собой ряд эквидистантных резонансных пиков, разнесенных по частоте примерно на 100—300 кГц, что определяется размером и материалом звукопровода.

Изменение температуры модулятора на 20 °С вызывало изменение собственной частоты примерно на 200 кГц, т. е. температурная стабильность такого модулятора составляет величину около 10 кГц/град.

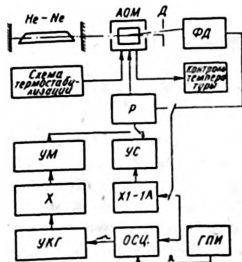


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки

Для исследования характеристик модулятора в пределах одного резонансного пика использовался управляемый кварцевый генератор (УКГ), сигнал с которого через умножитель (Х), усилитель мощности (УМ) и рефлектометр (Р) подавался на модулятор. Перестройка кварцевого генератора осуществлялась с помощью пилообразного напряжения, снимаемого с развертки осциллографа (ОСЦ), которым регистрировалась интенсивность дифрагированного луча и величина радиочастотной мощности, отраженной от модулятора. Диапазон перестройки частоты на выходе умножителя 50 кГц, что позволяло просмотреть форму резонансного пика модулятора.

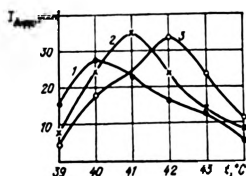


Рис. 2. Зависимость глубины модуляции от температуры для фиксированных частот модуляции

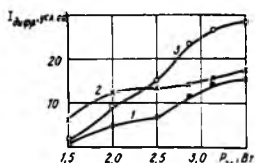


Рис. 3. Зависимость глубины модуляции от подводимой ВЧ-мощности при фиксированных частотах модуляции

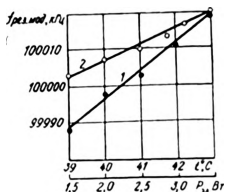


Рис. 4. Зависимость собственной частоты модулятора от температуры (1) и подводимой ВЧ-мощности (2)

Методика измерений в этом случае имела некоторые особенности. Осциллограф (ОСЦ) работал в ждущем режиме, и запуск развертки осуществлялся от генератора пусковых импульсов (ГПИ) с низкой частотой (5 Гц). Весь диапазон перестройки сканировался за время не более 5 мс. Это позволяло избежать изменений температуры модулятора в процессе перестройки, так как при перестройке вблизи резонансного пика происходят резкие изменения К. С. В. модулятора, а соответственно, и изменения уровня рассеиваемой в пьезопреобразователе радиочастотной мощности. При более медленном сканировании эти изменения рассеиваемой мощности вызывают изменения температуры модулятора, что делает невозможным наблюдение истинной формы резонансного пика.

Развертка осциллографа предварительно градуировалась в частотной области, что позволяло измерять как изменения глубины модуляции на фиксированных частотах (рис. 2, рис. 3), так и зависимости частоты резонанса (рис. 4) от температуры и поступающей радиочастотной мощности. Кривые 1—3 на рис. 2 и 3 приведены для различных частот модуляции, различающихся примерно на 10 кГц. Видно, что изменение температуры модулятора на 1°C (см. рис. 2), а также подводимой мощности на 1 Вт (см. рис. 3) может привести к изменению глубины модуляции в два — три раза, и каждой частоте модуляции соответствует своя оптимальная температура (см. рис. 2). Изменение подводимой мощности на 1 Вт вызывает такой же сдвиг резонансной частоты модулятора, как и изменение температуры на 1°C (см. рис. 4).

Таким образом, при использовании акустооптического модулятора стоячей волны необходима не только его температурная стабилизация, но и стабилизация уровня подводимой радиочастотной мощности. Изменения подводимой радиочастотной мощности вызывают локальный разогрев пьезопреобразователя и прилегающей к нему области звукопровода. Изменение температуры модулятора приведет к изменению его линейных размеров, но значение коэффициента линейного расширения для плавленого кварца $\alpha_l = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ [6] не может полностью объяснить наблюдаемую температурную зависимость собственной частоты модулятора от температуры ($\Delta f/f = 10^{-4}$). Основной вклад в изменение

собственной частоты модулятора вносит температурный коэффициент изменения скорости звуковых волн в плавленном кварце α_s , который составляет величину порядка 10^{-4} град $^{-1}$ [7].

В исследованиях [3, 8] синхронизация мод лазеров с помощью акустооптических модуляторов стоячей волны осуществлялась непосредственно на резонансной частоте модулятора. Такой режим, как и работа на высокочастотном склоне характеристики, является неустойчивым. Изменения температуры или уровня подводимой мощности могут привести к лавинообразному уходу резонансного пика модулятора с модулирующей частоты. Работа на низкочастотном склоне характеристики приводит к самостабилизации рабочей точки и снижению требований к системе термостабилизации.

Для того чтобы максимально использовать радиочастотную мощность, подводимую к модулятору, необходимо электрическое согласование импедансов усилителя и пьезопреобразователя модулятора. Такое согласование осуществлялось нами с помощью одношлейфового трансформатора или согласующего LC-фильтра. К. С. В. в обоих случаях был не хуже 2. Хорошее согласование, кроме того, облегчает электрический и тепловой режим выходного каскада усилителя мощности, что особенно важно для полупроводниковых каскадов. Аналогичный эффект можно получить в результате применения эффективной развязки выхода усилителя и нагрузки, например, с помощью ферритового вентиля или циркулятора.

Исследованные модуляторы позволили осуществить синхронизацию мод АИГ:Nd лазера с частотами повторения импульсов 200 и 250 МГц. Выбор модулирующей частоты ниже частоты собственного резонанса модулятора, термостабилизирование модулятора и стабилизация подводимой радиочастотной мощности дали возможность получить долговременную стабильную работу лазеров в режиме синхронизации мод без дополнительных схем автоподстройки.

В заключение авторы выражают благодарность Л. Н. Магдичу и П. И. Шницеру за предоставленные модуляторы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chang I. C.—IEEE Trans. on Sonic and Ultrasonic, 1976, v. SU-23, № 1, p. 2.
2. Магдич Л. Н., Молчанов В. Я. Акустооптические устройства и их применение.— М., 1978.
3. Спирс, Ларсен — Приборы для научных исследований, 1977, № 4, с. 100.
4. Falk J., Hitz C. B.—IEEE J. Quant. Electron., 1975, v. QE-11, № 7, p. 365.
5. Магдич Л. Н., Сасов В. Н., Шницер П. И.—Электронная техника. Сер. 10, квантовая электроника, 1975, вып. 1, с. 67.
6. Таблицы физических величин. Справочник.— М., 1976.
7. Бокан П. Я. Механические свойства силикатных стекол.— М., 1970.
8. Галкин С. Л., Кружалов С. В., Николаев В. М. и др.—Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, № 1, с. 18.

Поступила в редакцию
10.05.79.

НИИ ПФП

УДК 621.375.826

Н. Н. ВАСИЛЬЕВ, А. П. ЗАЖОГИН

ПЕРЕСТРАИВАЕМЫЙ СТРУЙНЫЙ ЛАЗЕР НА РАСТВОРАХ КРАСИТЕЛЕЙ

Исследования в области комбинационного рассеяния света, абсорбционный и люминесцентный анализ требуют источников когерентного излучения с перестройкой частоты генерации в широком спектральном диапазоне и достаточно хорошей воспроизводимостью излучения. Таким требованиям удовлетворяют лазеры на растворах органических красителей (ЛРОК). Использование в качестве активного элемента свободной струи раствора красителя позволяет избежать проблем, связанных с потерями на окнах кюветы, нагреванием окон, их загрязнением продук-

тами распада раствора, что существенно при больших мощностях накачки и длительном режиме работы.

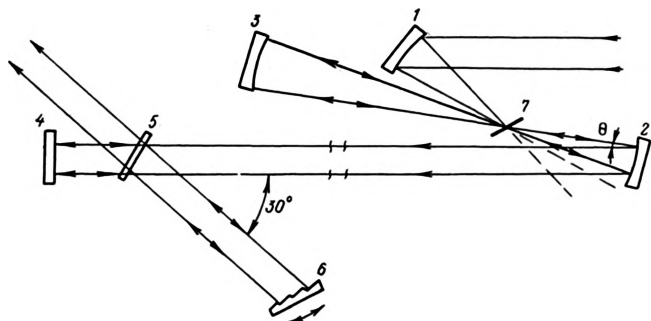


Рис. 1. Схема резонатора лазера на растворах красителей. Обозначения см. в тексте

ЛРОК (рис. 1) выполнен в виде приставки к серийному ОКГ ЛТИПЧ-5, работающему в частотном режиме. Созданная установка позволяет преобразовать излучение второй гармоники ЛТИПЧ (532 нм) в желто-красную область спектра и плавно перестраивать частоту генерации красителя. В ОКГ на красителях использован «сломанный» резонатор с компенсацией астигматизма, предложенный в [1]. Перестраивающим элементом служит реплика 300 штрих/мм, работающая во втором порядке. Решетка 6 связана с высокодобротным резонатором ЛРОК через делительную тонкую полупрозрачную пластинку 5 по методу [2]. Такой селектор позволяет получить узкую линию генерации и уменьшить интенсивность света, падающего на решетку. Перестройка частоты осуществляется поворотом селектора. Угол между плечами резонатора ($\theta = 7,5^\circ$) рассчитан так, что астигматизм наклонного падения пучка генерации на зеркало 2 компенсирует астигматизм активного элемента, расположенного под углом Брюстера. Излучение накачки фокусируется зеркалом 1 в пятно ~ 20 мкм, что совпадает с диаметром шейки основной моды ЛРОК. Зеркала 1—3 вогнутые ($R = 70$ мм). Максимум отражения зеркала 1 в области 510—530 нм; для зеркала 2, 3 99,9% отражения на длине волны 590 нм. Зеркало 4 плоское, 100% отражения в интервале 550—700 нм. Активным элементом служит струя раствора красителя в смеси этиленгликоля и воды. Плоскопараллельная струя 7 хорошего оптического качества создается системой прокачки из специально сконструированного центробежного насоса, который обеспечивает напор $\sim 0,75 \cdot 10^5$ Н/м² и скорость прокачки раствора до 6 м/с, теплообменника, узла фильтрации из нескольких капроновых фильтров, сопла. Основным элементом, определяющим качество струн, является сопло, выполненное из тонкостенной трубки из нержавеющей стали $\varnothing 5,5$, отполированной вначале механически, а затем электролитически в растворе серной и ортофосфорной кислот. Участок, формирующий струю, получен сжатием заполненной свинцом трубки под прессом. Длина плоского участка сопла ~ 6 мм, ширина щели сопла $\sim 7,5$ мм, а толщина 0,32 мм. Размеры сопла выбраны так, чтобы в струе был плоскопараллельный участок, свободный от краевых эффектов и поверхностных волн, а неоднородность накачки была минимальна.

Предложенная конструкция отличается от используемых в работах [2—5] простотой изготовления, малыми конструктивными размерами, что облегчает размещение сопла в сложном резонаторе. Плоскопараллельность и нестационарность струи контролировалась по искажению пучка гелий — неоновый лазер, прошедшего через нее. Для определения воз-

душных пузырьков рассматривалось увеличенное изображение струи, помещенной в диаскоп. Качество струи можно оценить по форме тонкой проволоки за плоскостью струи. После истечения из сопла раствор поступает в сборник, который расположен так, чтобы предотвратить образование пузырьков воздуха при ударе струи о стенки сборника. Скорость прокачки достаточна для предупреждения возникновения термических неоднородностей в активной среде. Минимальное количество раствора, необходимое для работы, 300 мл. ЛРОК смонтирован на дюралевой платформе 500×200 мм.

Генерация получена на растворах родамина 6Ж и родамина С при частотах следования импульсов ЛТИПЧ-5 12,5, 25 и 50 Гц и длительности импульса ~ 10 нс. Концентрация красителей (10^{-3} м/л) подбиралась так, чтобы поглощалось $\sim 90\%$ накачки. Спектральный диапазон перестройки для родамина 6Ж 553—600 и 574—610 нм для родамина С. На длинноволновых краях областей перестройки наблюдалась двухчастотная генерация, одна частота которой соответствует генерации лазера, определяемой положением решетки, другая определяется неселективной частью резонатора. На рис. 2 показано изменение мощности генерации при перестройке генерируемой длины волны для родамина 6Ж. Снятием делительной пластины 5 ЛРОК переводится в режим работы без селектора. В этом случае выходным является зеркало 4 с пропусканием 96% (без покрытия). Ширина линии генерации при работе без решетки 557—570 нм для родамина 6Ж и 584—591 нм для родамина С, а средняя мощность генерации соответственно 0,29 и 0,2 мВт при средней мощности накачки 1,3 мВт. Пороговая мощность импульса ЛТИПЧ для родамина 6Ж, определенная методом калиброванных потерь, 50 Вт в резонаторе без селектора.

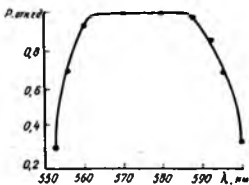


Рис. 2. Зависимость мощности генерации ЛРОК от генерируемой длины волны для родамина 6Ж

Спектральные измерения проводились на монохроматоре УМ-2, поэтому ширина линии генерации в резонаторе с селектором не определялась. Для энергетических измерений пользовались измерителем мощности ИМО-2. Излучение ЛРОК плоско поляризовано в той же плоскости, что и излучение накачки. Уменьшение скорости прокачки раствора до 2 м/с существенно не влияло на характер генерации, при скоростях струи менее 2 м/с плоскопараллельный участок струи, свободный от краевых эффектов, очень мал, при этом резко увеличивалась расходимость и неоднородность излучения ЛРОК и генерация становилась неустойчивой.

Описанный ЛРОК может быть использован для селективного возбуждения в желто-красной области, при исследовании резонансного комбинационного рассеяния, в активной спектроскопии комбинационного рассеяния.

Авторы выражают глубокую признательность Ц. И. Ивашину за помощь и ценные советы при конструировании ЛРОК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kogelnic H., Ippen E. P., Dienes A., Shank C. V.—IEEE J. Quant. Electr., 1972, v. QE-8, № 3, p. 373.
2. Marinero E. E., Angus A. M., Colles M. J.—Opt. Commun., 1975, v. 14, № 2, p. 226.
3. Runge P. K., Rosenberg R.—IEEE J. Quant. Electr., 1972, v. QE-8, № 12, p. 910.
4. Балыкин В. И., Клозе Э., Мишин В. И., Семчичев В. А.—Квант. электроника, 1978, т. 5, № 4, с. 753.
5. Welleghausen B., Welling H., Beigang R.—Appl. Phys., 1974, v. 3, № 5, p. 387.

Поступила в редакцию
10.05.79.

Кафедра спектрального анализа

В. Н. БАРИНОВ, И. Г. НЕКРАШЕВИЧ, А. В. СМЕРНОВ

ЭЛЕКТРОЭРОЗИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОДАХ В ИМПУЛЬСНОМ РАЗРЯДЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СКОРОСТЯХ НАРАСТАНИЯ ТОКА

Импульсный газовый разряд находит широкое применение в различных областях техники, где требуется получение высоких значений энергии, выделяемой в незначительном объеме вещества за короткие промежутки времени (электроноскопический способ обработки материалов, лазерная техника, газоразрядная светотехника, импульсные плазменные ускорители и т. д.). При этом в зависимости от конкретных задач условия протекания разряда выбираются самыми разнообразными. Этим, видимо, объясняется все возрастающий интерес специалистов к импульсному разряду как объекту исследования и неуклонный рост числа научных работ, посвященных изучению физических процессов, протекающих в условиях существования импульсной газоразрядной плазмы.

В данной работе описаны результаты исследований влияния скорости нарастания тока в импульсе дугового разряда на характер разрушения материала электродов в воздухе при атмосферном давлении и различных межэлектродных промежутках. Ранее подобного рода исследования проведены авторами [1] в условиях вакуума на ограниченном числе материалов.

Для получения необходимой информации нами собрана экспериментальная установка (рис. 1). Источником питания разряда служит $R-L-C$ контур с изменяющимися параметрами, позволяющий получать аперриодические импульсы тока с амплитудой до 15,5 кА, длительностью до 600 мс и скоростью нарастания (спада) тока в импульсе от 10^3 А/с до $2 \cdot 10^7$ А/с.

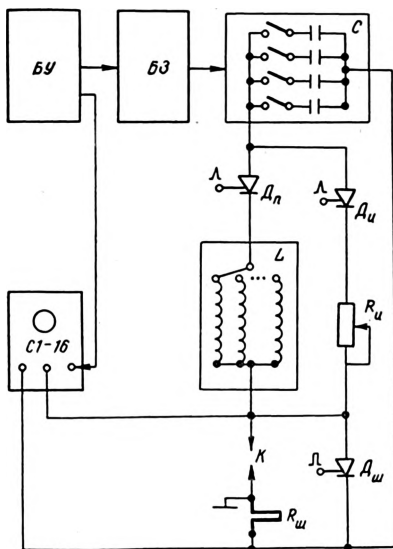


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки

Зарядка конденсаторной батареи осуществляется с постоянной скоростью при помощи блока зарядки (БЗ), который также поддерживает на заданном уровне напряжение с точностью 0,1%. Разряд инициируется путем зажигания слаботочной контактной дуги после подачи включающего импульса на тиристор D_n в момент, предшествующий началу разведения электродов*. Ток слаботочной дуги величиной 8–10 А поддерживается постоянным на всех режимах гашения сопротивлением $R_{ш}$. При достижении заданной величины межэлектродного промежутка происходит включение проходного тиристора D_u , шунтирую-

* Этот метод инициирования разряда имеет ряд преимуществ по сравнению с широко применяемым искровым способом в том отношении, что, во-первых, отпадает необходимость в использовании дополнительного источника высокого напряжения; во-вторых, разряд, как правило, инициируется в центральной части рабочей поверхности электрода; в-третьих, в плазму разряда не вносится материал поджигающего электрода.

щего цепь слаботочной дуги, что обеспечивает разряд батареи конденсаторов непосредственно через межэлектродный промежуток K и малое безындуктивное сопротивление $R_{ш}$.

Синхронная работа механических и электрических узлов установки, а также задание количества и частоты следования импульсов тока осуществляется автоматически с помощью блока управления (БУ).

Для получения информации о физических процессах, протекающих в межэлектродном промежутке на различных участках разрядного импульса тока, нами применен метод принудительного гашения дуги, заключающийся в шунтировании межэлектродного промежутка через заданные интервалы времени от начала протекания разряда с помощью управляемого тиристорного ключа $D_{ш}$.

В наших исследованиях был использован начальный участок импульса тока, характеризующийся лостоянной (в пределах 10%) скоростью его нарастания. При этом количество электричества q , протекающего через разрядный промежуток, безотносительно к амплитуде и длительности импульса тока, оставалось постоянным и равным 5 Кл. Объектом исследования служили электроды диаметром 30 мм, изготовленные из металлов, отличающихся друг от друга своими теплофизическими и ионизационными характеристиками (молибден, медь, алюминий и цинк). В процессе эксперимента весовым методом с точностью 0,1 мг оценивалась величина эрозии Δm катода и анода в расчете на один импульс

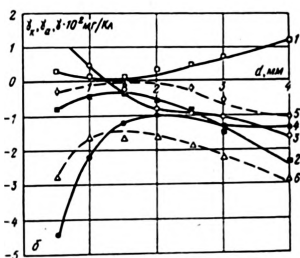
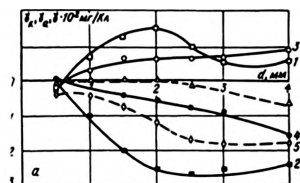


Рис. 2. Зависимость коэффициента электропереноса молибденовых электродов отрицательной γ_k (1, 3) и положительной γ_a (2, 4) полярности, а также $\gamma = \gamma_k + \gamma_a$ (5, 6) от величины d межэлектродного промежутка при различных скоростях нарастания

тока $\frac{di}{dt}$ в импульсе;

$$a - \frac{di}{dt} = 3 \cdot 10^3 \text{ A/c (1, 2, 5); } \frac{di}{dt} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ A/c (3, 4, 6); } b - \frac{di}{dt} = 1,2 \times 10^5 \text{ A/c (1, 2, 5); } \frac{di}{dt} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A/c (3, 4, 6)}$$

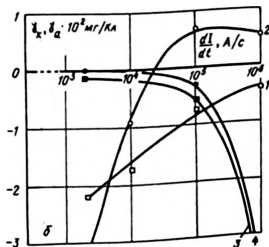
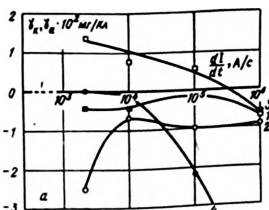


Рис. 3. Зависимость коэффициента электропереноса электродов отрицательной γ_k (1, 3) и положительной γ_a (2, 4) полярности от скорости нарастания тока $\frac{di}{dt}$ в им-

пульсе при $d = 2$ мм;

а — для молибденовых (1, 2) и медных (3, 4) электродов; б — для цинковых (1, 2) и алюминиевых (3, 4) электродов

тока, а затем для каждого конкретного случая из соотношения $\gamma = \Delta m/q$ определялись значения коэффициентов электропереноса материала электродов.

Одновременно с этим при помощи осциллографов С1-16 и С1-54 фиксировались напряжение на электродах и ток в разрядной цепи. Для получения информации о характере взаимодействия плазменных потоков в зоне разряда скоростным фоторегистратором СКС-1 со скоростью 1000 кадр/с производилось фотографирование канала импульсной дуги.

Как показали предварительные эксперименты, разрушение электродов за время протекания слаботоочного иницирующего разряда составляет 0,1—2% от общей величины их эрозии при прохождении полного силовиточного импульса тока.

На рис. 2 представлены зависимости коэффициентов электропереноса γ молибденовых электродов от величины межэлектродного промежутка d при различных скоростях нарастания тока dI/dt в импульсе; на рис. 3 — зависимости γ электродов, изготовленных из меди, молибдена, алюминия и цинка, от величины dI/dt при фиксированных расстояниях d между электродами.

Для интерпретации полученных данных воспользуемся общепринятыми представлениями о гидродинамическом характере взаимодействия плазменных потоков, истекающих при протекании разряда с поверхности обоих электродов. Эти представления в основном сводятся к следующему.

1. Возникновение высокоскоростных плазменных потоков с поверхности электродов является результатом термического воздействия на них электродных пятен дугового разряда [2, 3].

2. Процесс истечения плазменных потоков с поверхности электродов подчиняется законам гидродинамики [3—5].

3. Скорость (энергия) плазменной струи при горении разряда в плотных средах уменьшается с увеличением расстояния от поверхности электрода до рассматриваемого сечения, а также при удалении от оси разряда [6].

4. При небольших межэлектродных промежутках плазменная струя может дополнительно оказывать разрушающее действие на противозлектрод за счет кинетической энергии нейтральных частиц и ионов, движущихся со скоростями $V \sim 10^5\text{—}10^6$ см/с [7—9].

5. Количество и направление перенесенного в процессе горения дуги материала с одного электрода на другой, а также доля вещества, удаленного при этом за пределы межэлектродного промежутка (суммарная эрозия катода и анода), во многом определяются интенсивностью взаимодействующих друг с другом встречных плазменных потоков.

Анализ экспериментальных данных, представленных на рис. 2, показал, что длительность τ и амплитуда $I_{\max}$ разрядного импульса, определяющие в конечном счете величину скорости нарастания тока dI/dt в импульсе, существенно влияют на ход эрозионных кривых молибденовых электродов. В частности, при больших длительностях τ импульса ($dI/dt = 3 \cdot 10^3$ А/с), когда время взаимодействия плазменных потоков, истекающих с катода и анода, относительно велико, наблюдается интенсивный выброс материала электродов за пределы межэлектродного промежутка. С увеличением скорости нарастания тока (уменьшением τ) доля продуктов эрозии, удаленных из области разряда (см. рис. 2, кривые 5 и 6) уменьшается, что особенно характерно для малых межэлектродных расстояний ($d < 2\text{—}3$ мм). Однако при переходе к импульсам тока с максимальной амплитудой ($I_{\max} = 3,4$ кА и $dI/dt = 1,2 \cdot 10^6$ А/с) при незначительных расстояниях d наблюдается заметное увеличение суммарной эрозии обоих электродов. Удаление продуктов эрозии из зоны разряда происходит в этом случае, по-видимому, не столько за счет взаимодействия «свободно» истекающих плазменных струй, сколько в результате резкого повышения давления паров и концентрации эродированных частиц в области интенсивного испарения [3, 10]. С увеличением расстоя-

ния d между электродами до 2 мм и более эффективность действия указанного фактора ослабевает.

В этом случае удаление продуктов эрозии за пределы разрядного промежутка, безотносительно к амплитуде и длительности импульса тока, происходит в результате увеличения числа частиц плазмы, имеющих значительную скорость разлета в радиальном направлении после их взаимодействия друг с другом и с поверхностью электродов.

Следует отметить, что на всех режимах горения дуги наряду с описанными явлениями, процесс испарения молибденовых электродов сопровождается также направленным переносом материала, как правило, с анода на катод. В отдельных случаях (для импульсов тока с большой амплитудой) наблюдается интенсивное разрушение обоих электродов.

Из анализа экспериментальных данных, представленных на рис. 3, видно, что при прочих равных условиях (давлении и химическом составе окружающей среды, межэлектродном расстоянии), величина и характер разрушения исследованных электродов сильно зависят от скорости нарастания тока в импульсном разряде. Причем указанные зависимости для электродов, выполненных из различных материалов, существенно отличаются друг от друга. Из сопоставления данных по электрической эрозии материалов, металлографических исследований электроэрозионных следов, получаемых на их поверхности, а также СКС-грамм канала дуги выяснилось, что при длительном воздействии электрического разряда на цинковые электроды, характеризующиеся низкой температурой плавления и относительно малой теплопроводностью, происходит сильное оплавление их рабочей поверхности с последующим удалением продуктов эрозии с обоих электродов преимущественно в жидкой фазе. С увеличением значений di/dt в импульсе и с одновременным уменьшением длительности разряда разрушение электродов из цинка приобретает поверхностный характер, причем имеет место направленный перенос материала с катода на анод.

При горении разряда на алюминиевых электродах на их поверхности образуется толстая непроводящая пленка окисла, затрудняющая свободное перемещение электродных пятен дуги. В связи с этим воздействие разряда на электроды носит в основном локальный характер, что является причиной глубокого проплавления их поверхности в области протекания тока и выброса материала обоих электродов за пределы разрядного промежутка в виде крупных капель. При этом роль указанного фактора возрастает с увеличением амплитуды импульса тока.

Как видно, удельный износ медных и молибденовых электродов, характеризующихся высокими значениями таких теплофизических констант, как теплопроводность и температура плавления, относительно невелик. Однако и в этом случае с ростом значений di/dt импульса тока наблюдается увеличение суммарной величины эрозии обоих электродов. Причем, если для меди данное обстоятельство связано с усилением эффекта разрушения электрода положительной полярности, то для молибденовых электродов характерен постепенный переход от режима с направленным переносом плазмообразующего вещества с анода на катод к режиму с интенсивным испарением обоих электродов.

Таким образом, на основании проведенных исследований можно заключить, что величина коэффициента электропереноса исследованных электродов в значительной степени зависит от теплофизических свойств материала, скорости нарастания тока в импульсе и величины межэлектродного промежутка. Характер их разрушения (перенос материала с одного электрода на другой, выброс продуктов эрозии за пределы межэлектродного промежутка) определяется процессом образования взаимодействующих друг с другом и с поверхностью электродов плазменных потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. R a k h o v s k y V. I. — In: Proc. of 5-th Intern. Symposium on Electrical Discharges and Insulation in Vacuum.— Poznan, 1972, p. 215.

2. Месяц Г. А., Ротштейн В. П., Фурсей Г. Н., Карцев Г. К.— ЖТФ, 1970, т. 40, с. 1551.
3. Любимов Г. А.— В сб.: Экспериментальные исследования плазматронов.— Новосибирск, 1977, с. 207.
4. Maescker H.— Ztschr. f. Phys., 1955, B. 141, S. 198.
5. Ecker G.— Ergebnisse exakt. Naturwiss., 1961, B. 33, S. 1.
6. Wienecke R.— Ztschr. f. Phys., 1955, B. 143, S. 128.
7. Мандельштам С. Л., Райский С. М.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1949, т. 13, с. 549.
8. Зянгерман А. С., Каплан Д. А.— ЖТФ, 1958, т. 28, с. 387.
9. Морозов В. А., Киселевский Л. И.— ИФЖ, 1967, т. 13, с. 644.
10. Bauer A.— Ztsch. f. Phys., 1954, B. 138, S. 35.

Поступила в редакцию
07.06.79.

НИИ ПФП

УДК 53.05/08

Н. М. АБРАМЧУК, М. К. ЕФИМЧИК, С. С. ШУШКЕВИЧ

ФРОНТАЛЬНЫЙ УЧЕБНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ ДЛЯ ФИЗИКОВ (специальность 2016)

Преимущества фронтального учебного практикума, т. е. цикла лабораторных работ, в котором все обучаемые параллельно выполняют одни и те же (или эквивалентные по содержанию) задания, общезвестны. Однако существует мнение, что затраты на оборудование при этом значительно возрастают, к тому же фронтальный метод усложняет постановку новых лабораторных работ, изменение содержания уже написанных работ и т. д.

Описываемый практикум лишен этих предполагаемых недостатков, а затраты на оборудование мало отличаются от затрат на оборудование учебной лаборатории соответствующего уровня с последовательным выполнением работ.

При разработке фронтального практикума сделана попытка решить следующие задачи.

1. Свести к минимуму затраты времени на вспомогательные операции типа соединений, подключений и т. п.

2. Обеспечить условия для выполнения всей работы непосредственно в лаборатории от подготовки к ней до оформления результатов в виде отчета. В значительной мере это облегчается тем, что вопросы теории, относящиеся к работе, рассматриваются, как правило, на лекции, непосредственно предшествующей лабораторным занятиям.

3. Дифференцировать задания в зависимости от индивидуальной подготовки и от степени усвоения лекционного материала, а также с целью исключения заимствования итоговых результатов друг у друга.

4. Добиться строгой синхронности изучения вопросов на лекциях и в лаборатории. Под этим подразумевается не только предварительное рассмотрение теоретических положений на лекциях, но и использование (в отдельных случаях) лабораторных занятий в качестве введения к определенной теме с целью повышения интереса к этой теме и к поиску ответа в лекционном курсе на возникшие вопросы. Таким образом построено, в частности, изучение вопроса о синхронном детектировании в физическом эксперименте для выделения сигналов из шума. Сначала в лаборатории продлевается работа по изучению свойств синхронного детектора, а затем на лекциях поясняются вопросы применения таких устройств в экспериментальной физике.

5. Предусмотреть возможность использования типового оборудования лабораторных мест для выполнения учебно-исследовательской работы студентов (УИРС) по индивидуальным заданиям с минимальными затратами времени на подготовку эксперимента.

6. Добиться возможности дальнейшего развития практикума с минимумом дополнительных затрат при том же типовом оборудовании на местах.

7. Минимизировать потери учебного времени из-за выхода из строя приборов, предусмотреть защиту приборов от наиболее вероятных ошибочных подключений и т. п. действий обучаемого.

8. Обеспечить соответствие уровня постановки практикума современным научно-техническим требованиям.

9. Свести к минимуму затраты на оборудование.

10. Максимально повысить информационные характеристики практикума.

Оборудование лаборатории. Все 16 лабораторных мест (на 32 человека) оборудованы идентично. На каждом из них имеется генератор сигналов звуковой частоты ГЗ-33, генератор стандартных сигналов Г4-18А, осциллограф С1-48Б, ампервольтметр Ц4341 и микрокалькулятор БЗ-18А. Естественно, что могут быть применены любые приборы эквивалентного назначения, но других типов (например, ГЗ-56/1, Г4-102, С1-59 и т. д.). Кроме того, на каждом месте имеется специально разработанный для целей практикума универсальный стенд, представляющий собой наборное поле, на котором могут быть установлены до 12 модулей. При установке на наборное поле модуль фиксируется на нем при помощи контактных штырей, и собранное в нем устройство оказывается подключенным к одному или нескольким источникам стабилизированных напряжений (+5 В; +12 В; -12 В; -27 В). В модулях, содержащих только пассивные элементы (например, резисторы, контуры, фильтры), штыри служат только для фиксации. Схемы всех стабилизаторов типовые, в них предусмотрена тиристорная защита от короткого замыкания.

Каждый вывод модуля состоит из двух контактных гнезд, применяемых в разъемах типа 2РМД, что позволяет при помощи проводников, со штырями диаметром 1,5 мм на обоих концах, объединить любое количество выводов, т. е. собирать на базе этих модулей различные функциональные схемы и исследовать их характеристики.

Лабораторные работы. В соответствии с программой курса [1] и учебным планом на практикуме последовательно выполняются следующие лабораторные работы.

1. Основные вопросы измерений и обработка экспериментальных данных.

2. Основные радиотехнические измерения и радионизмерительные приборы.

3. Простейшие линейные цепи.

4. Колебательный контур.

5. Основные характеристики и параметры транзисторов на низких частотах.

6. Простейшие усилительные каскады.

7. Обратная связь в усилителях.

8. Генерирование колебаний.

9. Амплитудная модуляция и детектирование амплитудно-модулированных колебаний.

10. Преобразование частоты и синхронное детектирование.

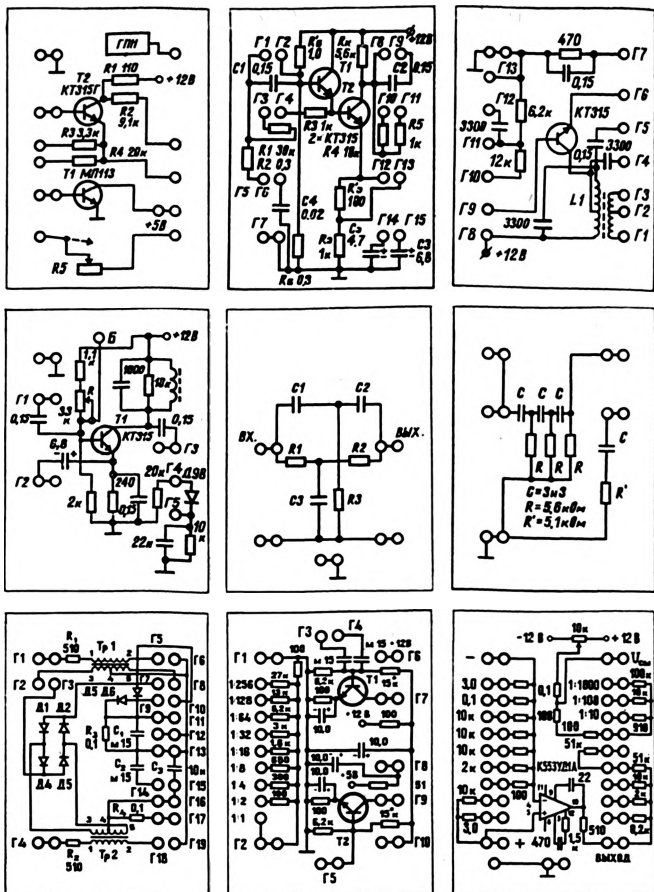
11. Операционные усилители. Измерение основных параметров.

12. Операционные усилители. Основные схемы включения.

13. Транзисторный радиоприемник. Изучение схемы и измерение основных характеристик.

Схемы некоторых модулей, применяемых при выполнении лабораторных работ, приведены на рисунке.

Пониманию сущности физических процессов способствует сопоставление различных методов измерения одного и того же параметра схем. Добротность колебательных систем определяется, например, тремя способами, в том числе и наиболее надежным методом — счетом числа колебаний на интервале уменьшения амплитуды затухающих колебаний



Принципальные схемы основных модулей, применяемых в лабораторном практикуме

в е раз. Специально для таких целей изготовлены модули простейших генераторов импульсов ударного возбуждения, пилообразного напряжения (для получения на экране осциллографа характеристик диодов и транзисторов) и другие модули.

Одной из особенностей практикума является возможность дифференциации заданий: студенты, быстро выполнившие основную часть лабораторной работы, могут получить интересное дополнительное задание. В ряде случаев для этого требуются дополнительные модули. Как правило, такие модули разрабатываются самими студентами в этой же лаборатории в качестве заданий по УИР. Естественно, что в отдельных случаях разработанные в плане УИР модули не являются столь совершенными, как тщательно проверенные «серийные» модули для фронтального практикума. Однако наиболее подготовленные студенты в состоянии оценить достоинства и недостатки этих модулей, а зачастую и предложить

способ их усовершенствования. Иногда выполнение такой задачи перерастает в задание по УИР.

Таким образом, переход от последовательного метода проведения лабораторных работ к фронтальному повысил интерес студентов к занятиям; существенно изменилось их отношение к работе в лаборатории. Лаборатория воспринимается как неотъемлемая часть единого комплекса по изучению основ радиоэлектроники.

Следует отметить, что затраты на оборудование составили приблизительно 1800 руб. на рабочее место (включая микрокалькулятор БЗ-18А), т. е. около 33 тыс. руб. на лабораторию для полной студенческой группы, что мало отличается от стоимости оборудования лабораторий практикума последовательного типа.

Отметим, что однотипность приборов на рабочих местах существенно упрощает ремонт и эксплуатацию лаборатории в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Программа курса «Основы радиоэлектроники». — М., 1979.

Поступила в редакцию
11.10.79.

Кафедра ядерной физики



ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ШВАРЦА И ГИЛЬБЕРТА

В работе рассматривается вопрос о приближенном вычислении интегралов

$$S(z) = S(f; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma) \frac{t+z}{t-z} d\sigma, \quad t = e^{i\sigma}, \quad |z| < 1, \quad (1)$$

$$\Gamma(\theta) = \Gamma(f; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \theta}{2} d\sigma, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (2)$$

Интегралы (1), (2) в теории краевых задач называют соответственно интегралом Шварца и интегралом Гильберта.

1. Приближенные формулы для интегралов (1), (2), основанные на аппроксимации плотности. Заменяем плотность $f(Q)$ в интегралах Шварца и Гильберта некоторым ее приближением по формуле

$$f(\theta) \approx \tilde{f}(\theta) \quad (3)$$

с остаточным членом

$$E(f; \theta) = f(\theta) - \tilde{f}(\theta).$$

Тогда для интегралов (1), (2) получим приближенные формулы

$$S(z) \approx \tilde{S}(z) = S(\tilde{f}; z), \quad (4)$$

$$\Gamma(\theta) \approx \tilde{\Gamma}(\theta) = \Gamma(\tilde{f}; \theta) \quad (5)$$

с остаточными членами

$$E_s(f; z) = S(z) - \tilde{S}(z), \quad E_\Gamma(f; \theta) = \Gamma(\theta) - \tilde{\Gamma}(\theta).$$

Установим зависимость между оценками погрешности приближенных формул (3) — (5).

Теорема. Пусть $E(f; \theta)$ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|z| = 1$ и пусть для остаточных членов $E(f; \theta)$ и $E_\Gamma(f; \theta)$ приближенных формул (3), (5) имеют место равномерные оценки

$$|E(f; \theta)| \leq E_f, \quad |E_\Gamma(f; \theta)| \leq E_\Gamma; \quad (6)$$

тогда всюду в круге $|z| \leq 1$ выполняется неравенство

$$|E_s(f; z)| \leq \sqrt{E_f^2 + E_\Gamma^2}. \quad (7)$$

Доказательство. Остаточный член приближенной формулы (4)

$$E_s(f; z) = S(E; z) \quad (8)$$

является функцией, аналитической в круге $|z| < 1$ и непрерывной на окружности $|z| = 1$; поэтому в силу принципа максимального модуля для всех $|z| \leq 1$ будет выполняться неравенство

$$|S(E; z)| \leq \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |S^+(E; e^{i\theta})|, \quad (9)$$

где $S^+(E; e^{i\theta})$ — предельное значение интеграла Шварца $S(E; z)$, когда z стремится к точке единичной окружности изнутри. Применяя к интегралу (8) аналоги формул Сохоцкого — Племеля [1, 2], найдем, что

$$|S^+(E; e^{i\theta})| = \sqrt{[E(\theta)]^2 + [E_r(\theta)]^2}.$$

Из последнего равенства и неравенств (6), (9) следует неравенство (7) теоремы.

2. Интерполяционные квадратурные формулы. В [3] вычислены интегралы Шварца и Гильберта от полинома

$$S(P_n; z) = A_0 + 2 \left\{ \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_s L^{2s}(-z) + i \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} B_s L^{2s-1}(-z) \right\}, \quad (10)$$

$$\Gamma(P_n; \theta) = 2 \left\{ \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_s N^{2s}(\pi - \theta) - \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} B_s M^{2s-1}(\pi - \theta) \right\}, \quad (11)$$

где $L^s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} z^k$, ($s = 1, 2, \dots$), $|z| \leq 1$;

$$M^s(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \cos k\theta, \quad N^s(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sin k\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi;$$

$$A_0 = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2m+1} c_{2m}, \quad A_s = \frac{(-1)^{s-1}}{\pi^{2s}} \sum_{m=s}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2m)!}{(2m-2s+1)!} c_{2m};$$

$$B_s = \frac{(-1)^{s-1}}{\pi^{2s}} \sum_{m=s}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(2m-1)!}{(2m-2s+1)!} c_{2m-1},$$

а c_m — коэффициенты полинома

$$P_n(\bar{\theta}) = \sum_{m=0}^n c_m \bar{\theta}^m, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\pi}, \quad \bar{\theta} \in [-1, 1].$$

Полилогарифмы $L^s(z)$ и их значения на единичной окружности — функции $M^s(\theta)$ и $N^s(\theta)$ — достаточно хорошо изучены и разработаны эффективные методы их вычисления [4]. Составлены стандартные программы, позволяющие вычислять данные функции любого порядка с заданной степенью точности. Таким образом, источником получения приближенных формул для интегралов Шварца и Гильберта могут служить алгебраические интерполяционные полиномы.

Пусть $f(\theta)$ есть интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(\theta)$ по системе точек отрезка $[-1, 1]$, т. е.

$$\tilde{f}(\theta) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^n(\bar{\theta})}{\omega_k^n(\bar{\theta}_k)} \cdot f_*(\bar{\theta}_k), \quad (12)$$

где $\omega_k^n(\bar{\theta}) = \frac{\omega_n(\bar{\theta})}{\bar{\theta} - \bar{\theta}_k}$, $\omega_n(\bar{\theta}) = \prod_{k=0}^{n-1} (\bar{\theta} - \bar{\theta}_k)$,

$$\omega_k^n(\bar{\theta}_k) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} (\bar{\theta}_l - \bar{\theta}_k), \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\pi}, \quad f_*(\bar{\theta}) = f(\theta), \quad \bar{\theta} \in [-1, 1].$$

Тогда для интегралов (1), (2) получим следующие приближенные формулы:

$$S(z) \approx \tilde{S}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(z) \cdot f_*(\bar{\theta}_k), \quad (13)$$

$$\Gamma(\theta) \approx \tilde{\Gamma}(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(\theta) \cdot f_*(\bar{\theta}_k), \quad (14)$$

определяемые коэффициентами

$$A_k(z) = \frac{1}{\omega_k^n(\bar{\theta}_k)} S(\omega_k^n; z), \quad A_k(\theta) = \frac{1}{\omega_k^n(\bar{\theta}_k)} \Gamma(\omega_k^n; \theta) \quad (15)$$

и узлами $\bar{\theta}_k \in [-1, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Приближенные формулы (13), (14) с коэффициентами (15) будем называть **интерполяционными квадратурными формулами** для интегралов Шварца и Гильберта. Коэффициенты (15) легко вычисляются, если воспользоваться формулами (10), (11).

Оценим погрешности интерполяционных квадратурных формул (13), (14) в предположении, что точки $\theta = \pm\pi$ включаются в число узлов интерполяции. Пусть плотность $f(\theta)n+1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, тогда остаточный член интерполирования по (12) может быть записан в виде

$$E_n(f; \bar{\theta}) = \omega_n(\bar{\theta}) \cdot f(\bar{\theta}, \bar{\theta}_0, \dots, \bar{\theta}_{n-1}).$$

Остаточные члены приближенных формул (13), (14) представляют собой соответственно интегралы Шварца и Гильберта с плотностью $E_n(f; \theta)$, т. е.

$$E_s(f; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_n(\sigma) \frac{t+z}{t-z} d\sigma, \\ E_\Gamma(f; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_n(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-\theta}{2} d\sigma. \quad (16)$$

Займемся сначала оценкой погрешности приближенной формулы (14). Запишем интеграл (16) в виде

$$E_\Gamma(f; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega_n(\sigma)}{\pi^2 - \sigma^2} \cdot f_1(\sigma, \theta, \theta_0, \dots, \theta_{n-1}) \cdot \left(\pi^2 - \left(\frac{\sigma-\theta}{2} \right)^2 \right) (\sigma-\theta) \times \\ \times \frac{\pi^2 - \sigma^2}{\pi^2 - \left(\frac{\sigma-\theta}{2} \right)^2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\sigma-\theta}{2} d\sigma + \frac{1}{2\pi} f(\theta, \theta_0, \dots, \theta_{n-1}) \int_{-\pi}^{\pi} \omega_n(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-\theta}{2} d\sigma,$$

$$\text{где } f_1(\sigma, \theta, \theta_0, \dots, \theta_{n-1}) = \frac{f(\sigma, \theta_0, \dots, \theta_{n-1}) - f(\theta, \theta_0, \dots, \theta_{n-1})}{\sigma - \theta}.$$

Можно показать, что

$$\left| \left(\pi^2 - \left(\frac{\sigma-\theta}{2} \right)^2 \right) (\sigma-\theta) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-\theta}{2} \right| \leq 4\pi^2, \quad \sigma \in [-\pi, \pi], \quad \theta \in [-\pi, \pi]; \quad (17)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2 - \sigma^2}{\pi^2 - \left(\frac{\sigma-\theta}{2} \right)^2} d\sigma \right| \leq \frac{4}{\pi}, \quad \sigma \in [-\pi, \pi], \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Из (17) и известных [5] неравенств $|f_1(\sigma, \theta, \theta_0, \dots, \theta_{n-1})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$, $|f(\theta, \theta_0, \dots, \theta_{n-1})| \leq \frac{M_n}{n!}$ следует оценка

$$|E_\Gamma(f; \theta)| \leq \frac{M}{n!} \left(\frac{16\pi\omega_n^*}{n+1} + \varphi_n \right), \quad (18)$$

где $M_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f^{(n)}(\theta)|$, $M_{n+1} = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f^{(n+1)}(\theta)|$, $M = \max(M_n, M_{n+1})$,

$$\omega_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{\omega_n(\theta)}{n^2 - \theta^2} \right|, \quad \varphi_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |\varphi_n(\theta)|,$$

$$\varphi_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_n(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \theta}{2} d\sigma.$$

Обратимся теперь к остаточному члену приближенной формулы (13). Для его оценки воспользуемся неравенством (7). Из неравенств (7), (18) и известного [5] неравенства $|E_n(f; \bar{\theta})| \leq \frac{\omega_n}{n!} M_n$, $\omega_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |\omega_n(\theta)|$ найдем, что остаточный член $E_n(f; z)$ интерполяционной квадратурной формулы (13) оценивается по формуле

$$|E_n(f; z)| \leq \frac{1}{n!} \sqrt{\omega_n^2 + \left(\frac{16\pi\omega_n^*}{n+1} + \varphi_n \right)^2} \cdot M.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М., 1977.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М., 1968.
3. Пыхтеев Г. Н., Мелешко А. Н. — Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1978, № 5, с. 131.
4. Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления. — Минск, 1976.
5. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М., 1967.

Поступила в редакцию
21.11.78.

Вычислительный центр

УДК 519.21

И. Г. ЖУРБЕНКО, Н. М. ЗУЕВ

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Изучение различных асимптотических законов теории вероятностей для слабозависимых случайных величин представляет интерес как для самой теории вероятностей, так и для ее различных приложений. Первые идеи перенесения методов независимых случайных величин на случай слабых зависимостей принадлежат С. Н. Бернштейну [1]. Условие перемешивания, получившее впоследствии название перемешивание «по Розенблатту», введено в работе [2]. Более сильное условие перемешивания предложено И. А. Ибрагимовым в работе [3].

Будем рассматривать случайный процесс x_t , $t \in R$. Обозначим F_a^b — σ -алгебру, порожденную случайными величинами x_t , $t \in [a, b]$, F_{ξ}^{∞} — σ -алгебру, порожденную случайной величиной ξ .

Определение 1. Случайный процесс x_t называется удовлетворяющим условию перемешивания «по Розенблатту», если

$$\alpha(\tau) = \sup_{\substack{t, A \in F_{-\infty}^t \\ B \in F_{t+\tau}^{\infty}}} |P(AB) - P(A)P(B)| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (1)$$

Определение 2. Случайный процесс x_t называется удовлетворяющим условию перемешивания «по Ибрагимову», если

$$\beta(\tau) = \sup_{\substack{t, A \in F_{-\infty}^t \\ B \in F_{t+\tau}^{\infty}}} |P(B/A) - P(B)| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (2)$$

Определение 3. Случайная величина x_i называется удовлетворяющей условию Крамера $K(a, c)$, если при некоторых $a > 0$, $C > 1$ $M \exp\{a|x_i|\} \leq C$.

Исходя из условий перемешивания процесса «по Розенблатту» или «по Ибрагимову», получаем следующие оценки ковариаций случайных величин [4, 5].

Теорема 1. Пусть случайные величины ξ и η измеримы относительно σ -алгебр F_{t-}^{ξ} , F_{t-}^{η} соответственно. Тогда справедливы оценки

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq 4C_1C_2\alpha(\tau), \quad (3)$$

если $|\xi| \leq C_1$, $|\eta| \leq C_2$;

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq 10(C_1C_2)^{\frac{1}{2+\delta}} \alpha(\tau)^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \quad (4)$$

если $M|\xi|^{2+\delta} \leq C_1$, $M|\eta|^{2+\delta} \leq C_2$;

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \frac{72}{a^2} \alpha(\tau) (\ln \alpha(\tau) - \ln c)^2, \quad (5)$$

если случайные величины ξ и η удовлетворяют условию $K(a, C)$. Функция $\alpha(\tau)$ определяется равенством (1). Оценки (3), (4), (5) в существенном неулучшаемы, так как справедлива

Теорема 2. Пусть $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$. Тогда на множестве случайных величин ξ, η , удовлетворяющих условию $\sup_{A \in F_{t-}^{\xi}, B \in F_{t-}^{\eta}} |P(AB) - P(A)P(B)| = \alpha$

1) существуют случайные величины ξ и η такие, что $|\xi| = C_1$, $|\eta| = C_2$ и $|\text{cov}(\xi, \eta)| = 4C_1C_2\alpha$;

2) существуют случайные величины ξ и η такие, что $M|\xi|^{2+\delta} C_1$, $M|\eta|^{2+\delta} C_2$ и $|\text{cov}(\xi, \eta)| \geq 0,5(C_1C_2)^{\frac{1}{2+\delta}} \alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}$;

3) существуют случайные величины ξ, η , удовлетворяющие условию $K(a, C)$ и $|\text{cov}(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{a^2} \alpha \left(\ln \alpha - \ln \frac{C-1}{2} \right)^2$ при $C \geq 3$.

Теорема 3. Пусть случайные величины ξ и η измеримы относительно σ -алгебр F_{t-}^{ξ} , F_{t-}^{η} соответственно. Пусть, кроме того, $M|\xi|^p < \infty$,

$M|\eta|^q < \infty$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq 2M^{\frac{1}{p}} |\xi|^p \times$

$\times M^{\frac{1}{q}} |\eta|^q \beta(\tau)^{\frac{1}{p}}$, где функция $\beta(\tau)$ определяется равенством (2).

Условия перемешивания процесса «по Розенблатту» или «по Ибрагимову» позволяют получить центральную предельную теорему как для случайных процессов [4], так и для случайных полей [6], а также, используя условия на моменты случайных величин, оценить сходимости в центральной предельной теореме [7].

Условия перемешивания процесса x_t «по Розенблатту» или «по Ибрагимову» позволяют также получить оценки смешанных семинвариантов, зависящих от максимального расстояния между соседними координатами семинварианта [8].

Определение 4. Семинварианты $S_n(t_1, \dots, t_n)$ процесса x_t определяются как коэффициенты формального разложения

$$\ln M e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{t_i}} = \sum_n \frac{i^n}{n!} \sum_{t_1, \dots, t_n} S_n(t_1, \dots, t_n) \lambda_{t_1} \dots \lambda_{t_n},$$

где $S_n(t_1, \dots, t_n)$ предполагаются симметричными функциями аргументов $t_1, \dots, t_n$, суммирование производится по всем упорядоченным наборам целых чисел $t_1, \dots, t_n$, $t_j \in R$. Смешанные семинварианты можно непосредственно определить через смешанные моменты $M[x_{t_1} \dots x_{t_n}]$ (см. [8]).

Теорема 4. Для смешанных семинвариантов $S_n(t_1, \dots, t_n)$ случайного процесса x_t справедливы оценки

$$|S_n(t_1, \dots, t_n)| \leq 4C^n n^n \alpha(r), \quad (6)$$

если $|x_i| \leq C$;

$$|S_n(t_1, \dots, t_n)| \leq 10 C_1^{\frac{1}{2+\delta}} n^n [\alpha(r)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \\ |t_i|^k \leq C_1, \quad \delta > 0;$$

$$|S_n(t_1, \dots, t_n)| \leq 2C_{12}^{\frac{1}{p}} n^n [\beta(r)]^{1-\frac{1}{p}},$$

если $\max M |x_i|^k \leq C_2, \quad p \geq 2$;

$k \leq pn, \quad t$

$$|S_n(t_1, \dots, t_n)| \leq C(16+n) \frac{n^{2n}}{a^n} \alpha(r) [\ln \alpha(r)]^n,$$

если случайный процесс x_t удовлетворяет условию $K(a, C)$, функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ определяются равенствами (1) и (2) соответственно, $r = \max(t_{i+1} - t_i)$, считая $t_1 \leq \dots \leq t_n$.

Доказательство этих оценок в основном повторяет доказательство теорем, приведенных в работах [5, 8]. Оценка (6) в существенном не улучшаема, так как справедлива

Теорема 5. Для любых $r \geq n = 2k$ и $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ существует случайный процесс $x_t, t \in Z, |x_t| \leq C$, с функцией перемешивания $\alpha(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, причем $\alpha(r) = \alpha$, и существует семинвариант $S_n(t_1, \dots, t_n)$ этого процесса, для которого выполняется неравенство $|S_n(t_1, \dots, t_n)| \geq 4 \sqrt{2\pi} \left(\frac{C}{\pi e}\right)^n n^n \alpha(r)$, где $r = \max(t_{i+1} - t_i)$, считая $t_1 \leq \dots \leq t_n$.

Приведем доказательство этой теоремы. Пусть $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$. Рассмотрим случайные величины ξ и η , имеющие распределение $P(\xi = C, \eta = C) = \frac{1}{4} + \alpha, P(\xi = -C, \eta = C) = \frac{1}{4} - \alpha, P(\xi = C, \eta = -C) = \frac{1}{4} - \alpha, P(\xi = -C, \eta = -C) = \frac{1}{4} + \alpha$. Для этих случайных величин ξ и η выполняется условие $\sup_{A \in F_\xi, B \in F_\eta} |P(AB) - P(A)P(B)| = \alpha$. Пусть $y_t, t \in Z,$

$|y_t| \leq C$, случайный процесс, независимый от случайных величин ξ и η , с функцией перемешивания $\alpha_1(\tau)$, удовлетворяющей условию $\alpha_1(r) = \alpha$. Рассмотрим случайный процесс

$$x_t = \begin{cases} \xi, & t = 1, 2, \dots, n-1, \\ \eta, & t = n-1+r \\ y_t & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Функция перемешивания $\alpha(\tau)$ случайного процесса x_t удовлетворяет условию

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \tau \leq n-2, \\ \alpha_1(\tau), & \tau > n-2. \end{cases}$$

Рассмотрим смешанный семинвариант процесса x_t , заданный в точках

$$t_k = \begin{cases} k, & k = 1, \dots, n-1, \\ n-1+r, & k = n. \end{cases}$$

Из определения смешанных семинвариантов следует

$$S_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln Me^{i \sum_{k=1}^n x_{t_k} \lambda_k} \Big|_{\lambda_1=0 \dots \lambda_n=0} =$$

$$= \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \left(\cos C \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cos C \lambda_n - 4 \alpha \sin C \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \times \right. \\ \left. \times \sin C \lambda_n \right) \Big|_{\lambda_1=0, \dots, \lambda_n=0} = 4 \alpha C^n \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \cos \sum_{k=1}^n \lambda_k \Big|_{\lambda_1=0, \dots, \lambda_n=0} \quad (7)$$

В работе [9] показано, что при четном n

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \cos \sum_{k=1}^n \lambda_k \right|_{\lambda_1=0, \dots, \lambda_n=0} \geq \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\pi e} \right)^n n^n. \quad (8)$$

Из (7), (8) следует доказательство теоремы.

В работе [10] приводится пример, показывающий невозможность получения в условиях перемешивания «по Розенблатту» или «по Ибрагимову» оценки смешанных семинвариантов случайных процессов, зависящих от максимальной длины этого семинварианта. Такие оценки оказываются возможными в условиях перемешивания почти марковского типа, которые изучаются в работах [10–12] и приведены ниже.

Определение 5. Случайный процесс x_t называется удовлетворяющим условию перемешивания почти марковского типа, если

$$|P(x_{t_m} \in B | x_{t_{m-1}} = y_{m-1}, \dots, x_{t_1} = y_1) - P(x_{t_m} \in B | x_{t_{m-1}} = y_{m-1}, \dots, x_{t_1} = y_2)| \leq K \exp \{-b(t_m - t_1)\} \quad (9)$$

для любого борелевского множества B , любых $y_1, \dots, y_{m-1}$, $t_1 < \dots < t_m$.

Теорема 6 [12]. Если процесс x_t удовлетворяет условию (9) и $|x_t| \leq C$, то справедливо неравенство

$$S_n(t_1, \dots, t_n) \leq C_1^n \exp \left\{ -b \max_{i,j} |t_i - t_j| \right\},$$

где постоянная C_1 зависит только от b, K, C .

В условиях перемешивания почти марковского типа возможны представление характеристической функции суммы случайных величин, по своей структуре близкое к случаю независимых случайных величин [10], а также вывод теоремы о максимальном отклонении от предельного нормального закона, теоремы о больших отклонениях, асимптотическое разложение предельных законов [11].

Описанные условия перемешивания оказываются полезными в спектральной теории стационарных процессов [5] и полей [13], где с их помощью удается доказать ограниченность всех старших спектральных плотностей и их производных.

Спектральные плотности $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ стационарного процесса x_t , $t \in Z | t \in R$ определяются равенствами

$$f_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_n \\ \min t_i = 0}} S_n(t_1, \dots, t_n) \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^n t_k \omega_k \right\},$$

$$\left| f_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \int_{\substack{t_1, \dots, t_n \\ \min t_i = 0}} S_n(t_1, \dots, t_n) \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^n t_k \omega_k \right\} d\vec{t} \right|$$

Используя приведенные оценки смешанных семинвариантов, получаем следующие оценки старших спектральных плотностей и их производных [5, 14, 15].

Теорема 7. Для спектральных плотностей $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ стационарного процесса x_t , $t \in Z | t \in R$ справедлива оценка $|f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \leq$

$$\leq C_3^n n^{2n} K_1, \text{ где } C_3 \text{ выбирается из условия } C_3^n \geq \frac{10 C_1^{\frac{2+\delta}{2+\delta}}}{(2\pi)^{n-1}}, C_1 = \max_{k \leq (2+\delta)n} M |x_t|$$

при некотором $\delta > 0$, и функция $\alpha(\tau)$, определенная равенством (1), удовлетворяет условию $1 + \sum_{m=1}^{\infty} m^n \alpha(m)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq K_1$.

Теорема 8. Для спектральных плотностей $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ стационарного процесса x_t , $t \in Z | t \in R$ справедлива оценка $|f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \leq C_4^n n^{2n} K_2$, где C_4 выбирается из условия $C_4^n \geq \frac{2C_2^{\frac{1}{p}}}{(2\pi)^{n-1}}$, $C_2 = \max_{k < n} M|x_t|^k$

при некотором $p \geq 2$, и функция $\beta(\tau)$, определяемая равенством (2), удовлетворяет условию $1 + \sum_{m=1}^{\infty} m^n \beta(m)^{1-\frac{1}{p}} \leq K_2$.

Теорема 9. Если стационарный процесс x_t , $|x_t| \leq C$ удовлетворяет условию (9), то функция $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ аналитична в полосе $|f_n \omega_i| \leq \frac{b}{2n}$ и удовлетворяет в этой полосе оценке $|f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \leq n! C_5^n$, где постоянная C_5 зависит только от b, K, C .

Приведенные результаты допускают распространение на случайные поля, которые усиленно изучаются в последнее время ввиду их крайней важности в различных приложениях. Вся данная область приобрела в последнее время интерес в статистике стационарных процессов и полей ввиду ее разнообразных применений и возможности постановки дальнейших задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бериштейн С. Н.— Успехи математических наук, 1944, т. 10, с. 65.
2. Rosenblatt M.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, v. 42, p. 43.
3. Ибрагимов И. А.— Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4, с. 711.
4. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М., 1965.
5. Журбенко И. Г., Зуев Н. М.— Литовский математический сборник, 1975, т. 15, № 1, с. 111.
6. Булинский А. В., Журбенко И. Г.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, № 4, с. 707.
7. Сунклодас И.— Литовский математический сборник, 1977, т. 17, № 3, с. 41, 194.
8. Зуев Н. М.— Математические заметки, 1973, т. 13, № 4, с. 581.
9. Булинский А. В.— Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, № 4, с. 869.
10. Журбенко И. Г.— Сибирский математический журнал, 1972, т. 13, № 2, с. 293.
11. Statulevicius V.— Int. Congress of Mathemat., Vancouver, August, 1974, AMS Translations Series 2.
12. Журбенко И. Г.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, т. 15, № 3, с. 541.
13. Журбенко И. Г.— Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 5, с. 971.
14. Зуев Н. М.— Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 4, с. 773.
15. Журбенко И. Г., Зуев Н. М.— Украинский математический журнал, 1975, т. 27, № 4, с. 452.

Поступила в редакцию
07.12.78.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 62-50

З. М. АЛЕЯНИКОВА, Л. Е. ЗАБЕЛЛО

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

вдоль траекторий определим функционал

$$I[u(\cdot)] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} L(x(t), u(t), t) + \varphi(x(t_1)), \quad (2)$$

где x — n -вектор состояния; u — r -вектор управления; $A(t)$, $B(t)$ — матрицы соответствующих размеров; L — скалярная функция, имеющая вторые непрерывные производные по x и по u .

В данной статье для невырожденного случая исследуется вторая вариация функционала (2), играющая важную роль при изучении условий оптимальности высокого порядка [1, 2]. Получены достаточные условия положительности и неотрицательности второй вариации.

1. Вывод уравнения Риккати. На решениях системы (1) рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I_1[u(\cdot)] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\frac{1}{2} x' Q x + u' C x + \frac{1}{2} u' R u \right],$$

где $Q(t) \geq 0$, $R(t) > 0$ — симметричные матрицы. Обратное уравнение Беллмана [3] и соответствующее граничное условие в данном случае имеют вид:

$$B(\tau, y) = \min_v [y' Q(\tau) y + 2v' C(\tau) y + v' R(\tau) v + B(\tau+1, A(\tau) y + B(\tau) v)], \quad (3)$$

$$B(t_1, y) = K(t_1). \quad (4)$$

Функцию $B(\tau, y)$ будем искать в форме

$$B(\tau, y) = y' L(\tau) y \quad (5)$$

с неизвестной матрицей $L(\tau)$.

Из граничного условия (4) получим $y' L(t_1) y = y' K(t_1) y$; так как y — произвольный вектор, то $L(t_1) = K(t_1)$. Подставив функцию (5) в уравнение (3), получим:

$$y' L(\tau) y = \min_v [y' Q(\tau) y + 2v' C(\tau) y + v' R(\tau) v + [A(\tau) y + B(\tau) v]' L(\tau+1) [A(\tau) y + B(\tau) v]] = \min_v \psi(v, \tau). \quad (6)$$

Минимум в правой части выражения (6) достигается при $v = v_0$, для которого $\frac{\partial \psi(v, \tau)}{\partial v} = 0$. Имеем

$$C(\tau) y + R(\tau) v_0(y, \tau) + B'(\tau) L(\tau+1) B(\tau) v_0(y, \tau) + B'(\tau) L(\tau+1) A(\tau) y = 0. \quad (7)$$

Подставляя в (6) $v = v_0$ и объединяя (6), (7), получаем систему уравнений, которую назовем матричным уравнением типа Риккати в дискретной форме. Случай, когда $R_1(\tau) = R(\tau) + B'(\tau) L(\tau+1) B(\tau) > 0$ для $\tau = t_0, t_0+1, \dots, t_1-1$, назовем невырожденным. В противном случае, будем говорить о вырожденной задаче. В данной работе рассматривается только невырожденная задача.

2. Достаточные условия положительности и неотрицательности второй вариации.

Определение. Функционал $I_1[u(\cdot)]$ называется положительным, если $I_1[u(\cdot)] > 0$ для каждого $u(\cdot) \in U$, $u(\cdot) \neq 0$.

Вторая вариация функционала (2) вдоль траекторий системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta^2 I[u] &= \frac{d^2 I \left[u + \frac{1}{\epsilon} \delta u \right]}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} = I_2[u(\cdot)] = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\frac{1}{2} x'(t) Q(t) x(t) + u'(t) C(t) x(t) + \frac{1}{2} u'(t) R(t) u(t) \right] + \\ &\quad + x'(t_1) K(t_1) x(t_1), \end{aligned} \quad (8)$$

где $v(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, а $Q(t) = \frac{1}{2} [\bar{Q} + \bar{Q}']$, $\bar{Q} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L(x^0, w, t)}{\partial x}$, $R(t) = \frac{1}{2} [\bar{R} + \bar{R}']$, $\bar{R} = \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial L(x^0, w, t)}{\partial w}$, где через $x^0(t)$ обозначена исследуемая оптимальная траектория.

Теорема 1. Если матричная функция $L(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (6), (7), то функционал $I_2[u(\cdot)]$ положительно определен.

Доказательство. Обозначим $D_1(t) = B'(t)L(t+1)A(t) + C(t)$, тогда уравнение Риккати переписывается в виде

$$L(t) = Q(t) - 2[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'C(t) + [R_1^{-1}(t)D_1(t)]'R(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)] + \\ + [A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]'L(t+1)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]. \quad (9)$$

Тождество $\frac{1}{2} [x'(t_0)L(t_0)x(t_0) - x'(t_1)L(t_1)x(t_1) - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [x'(t)L(t)x(t) - x'(t+1)L(t+1)x(t+1)]] \equiv 0$, где $L(t_1) = K(t_1)$ в силу (8), (9) и (1) можно записать следующим образом:

$$- \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \{ x'(t)Q(t)x(t) - 2x'(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'C(t)x(t) + \\ + x'(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'R(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]x(t) + \\ + x'(t)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]'L(t+1)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]x(t) - \\ - x'(t)A'(t)L(t+1)A(t)x(t) - 2u'(t)B'(t)L(t+1)A(t)x(t) - \\ - u'(t)B'(t)L(t+1)B(t)u(t) \} \equiv 0. \quad (10)$$

Присоединив ко второй вариации (7) выражение (10), получим

$$\frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \{ x'(t)Q(t)x(t) + 2u'(t)C(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t) - x'(t)Q(t)x(t) + \\ + 2x'(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'C(t)x(t) - x'(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'R(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]x(t) - \\ - x'(t)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]'L(t+1)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]x(t) + \\ + x'(t)A'(t)L(t+1)A(t)x(t) + 2u'(t)B'(t)L(t+1)A(t)x(t) + \\ + u'(t)B'(t)L(t+1)B(t)u(t) = \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [u'(t)R_1(t)u(t) + 2u'(t)D_1(t)x(t) + \\ + x'(t)D_1'(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)x(t)] = \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [u'(t)R_1(t) + x'(t)D_1'(t)]R_1^{-1}(t) \times \\ \times [D_1(t)x(t) + R_1(t)x(t)]. \text{ Следовательно,}$$

$$I_2[u(\cdot)] = \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [u'(t)R_1(t) + x'(t)D_1'(t)]R_1^{-1}(t)[D_1(t)x(t) + \\ + R_1(t)x(t)]. \quad (11)$$

Из выражений (11) и (8) следует, что $I_2[u(\cdot)] \geq 0$ и $I_2[u(\cdot)]$ принимает свое минимальное значение, равное нулю, при $u(t) = -R_1^{-1}(t)D_1(t)x(t)$, $t \in T = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\}$. Но это возможно, в силу задания начальных данных и линейности системы (1), тогда и только тогда, когда $u(\cdot) \equiv 0$. Следовательно, $I_2[u(\cdot)]$ определено положительно.

Пример 1. Пусть вдоль некоторой оптимальной траектории системы (1) с параметрами $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ вторая вариация функционала (2) содержит следующие коэффициенты: $Q = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = (1, 1)$, $R = 2$. В этом случае решением уравнений Риккати, в чем

нетрудно убедиться прямой подстановкой, будет следующая последовательность матриц:

$$L(2) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad L(1) = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad L(0) = \begin{pmatrix} 6,3 & 0,9 \\ 2,1 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, $R_1(2) = 2 > 0$, $R_1(1) = 3/2 > 0$, $R_1(0) = 10/3 > 0$. Согласно теореме 1, исследуемая вторая вариация положительна.

Определение 2. Функционал $I_2 u(\cdot)$ называется неотрицательным, если для каждого $u(\cdot) \in U$ его значения неотрицательны.

Теорема 2. Если существует симметричная матричная функция $P(t)$, $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$, такая, что

$$D(t) = \{d_{ij}(t)\} = \begin{pmatrix} Q + PA - A'P & C' - PB \\ C + B'P & R \end{pmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

для всех $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$, то $I_2[u(\cdot)]$ неотрицательна.

Доказательство. Рассмотрим величину, тождественно равную нулю

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{1}{2} \{x'(t) P(t) [A(t)x(t) + B(t)u(t) - x(t+1)]\}.$$

Добавим эту тождественно равную нулю величину к $I_2[u(\cdot)]$, получим

$$I_2[u(\cdot)] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left\{ \frac{1}{2} x' Q x + u' C x + \frac{1}{2} u' R u + \frac{1}{2} P [A x + B u - x(t+1)] \right\}.$$

Используя, что $\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{1}{2} x'(t) P(t) x(t+1) = -\frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [A(t)x(t) + B(t)u(t)]' P(t) x(t)$, получим

$$\begin{aligned} I_2[u(\cdot)] &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\frac{1}{2} x' Q x + u' C x + \frac{1}{2} u' R u + \frac{1}{2} x' P A x + \frac{1}{2} x' P B u - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (x' A' + u' B') P x \right] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\frac{1}{2} x' Q x + u' C x + \frac{1}{2} u' R u + \frac{1}{2} x' P A x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} x' P B u - \frac{1}{2} x' A' P x - \frac{1}{2} u' B' P x \right] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{1}{2} \{x' [Q + PA - A'P] x + \\ &\quad + u' (C + B'P) x + x' (C' + PB) u + u' R u\} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q + PA - A'P & C' - PB \\ C + B'P & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) и (12) следует, что $I_2[u(\cdot)] \geq 0$. Теорема доказана.

Пример 2. Пусть система (1) имеет те же параметры, что и в примере 1, а вторая вариация задается теми же коэффициентами, за исключением $R(t): R(t) \equiv 1$. Положим $P(t) \equiv E$. Левая часть в выражении (12) для любого t после замены $P(t) \equiv E$ принимает вид: $d_{11}(t) = d_{22}(t) = d_{23}(t) = d_{32}(t) = d_{33}(t) = 1$, $d_{12}(t) = -2$, $d_{21}(t) = 2$, $d_{13}(t) = d_{31}(t) = 0$. Нетрудно убедиться, что все восемь главных миноров матрицы неотрицательны. Согласно критерию Сильвестра и теореме 2, рассматриваемая вторая вариация $I_2[u(\cdot)]$ неотрицательна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М., 1973.
2. Bell D. J., Jacobson D. H. Singular Optimal Control Problems. — London, 1975.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования. — Минск, 1975.

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПРЕТИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

Разработка неоднородных многопроцессорных вычислительных систем (МВС) предполагает, в частности, что каждый процессор может обрабатывать информацию, используя свой способ кодирования. Одним из таких способов может быть кодирование информации в системе в коде вычетов (СКВ) [1]. Разработанные алгоритмы основных операций в безранговой СКВ (БСКВ) [2, 3] эффективнее соответствующих алгоритмов в СКВ, что позволяет использовать их в МВС. Для обмена информацией между процессорами такого типа, построения специального математического обеспечения МВС, учитывающего специфику обработки информации в данной системе кодирования, а также для оценки качества функционирования указанных процессоров системы, возникает необходимость в создании интерпретирующей системы (ИС) для моделирования работы команд процессоров в БСКВ.

Ниже излагаются основные принципы построения ИС (рис. 1), моделирующей работу команд процессора Ассемблер-программы (АП) в БСКВ.

Структура данной ИС соответствует структуре обычного интерпретатора [3], который выполняет следующие функции: 1) транслирует исходную АП во внутреннюю форму; 2) моделирует работу данной АП, представленной во внутренней форме.

Управляющая программа анализирует текст АП и в зависимости от типа операции АП обращается к соответствующей программе, моделирующей работу арифметических и логических операций в БСКВ, или непосредственно обрабатывает информацию соответствующим образом, если речь идет об операциях, выполнение которых не зависит от способа кодирования данных.

УП одновременно с анализом каждого оператора АП строит информационные таблицы (ТИ), структура которых указана на рис. 2. ТИ используются как при анализе последующих операторов АП, так и при генерации эквивалента оператора в БСКВ.

На рис. 3 изображена блок-схема работы УП. Здесь *FRR*, *FRX*, *FRS*, *FSS*, *FSI* — команды с форматами *RR*, *RX*, *RS*, *SS*, *SI*, соответственно; *FRS1* — формат команд со структурой *R1*, *R3*, *D2* (*B2*) или *R1*, *R3*, *S2* (где *R1*, *R3* — номера регистров, *D2* — смещение, *B2* — адрес базы, *S2* —

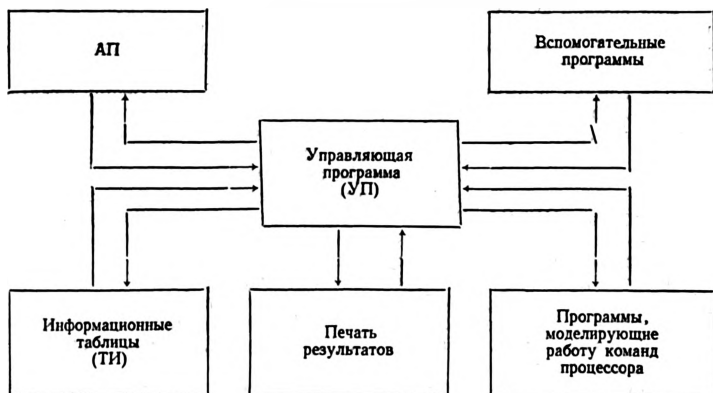


Рис. 1. Принципиальная схема ИС

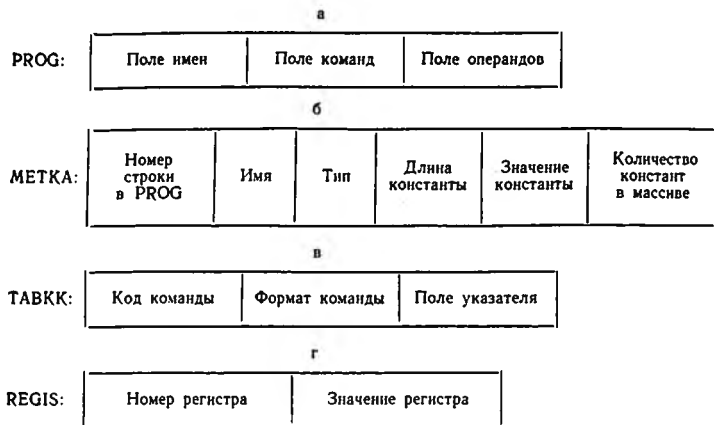


Рис. 2. Структура информационных таблиц:
а — PROG; б — МЕТКА; в — TABKK; г — REGIS

неявный адрес). Примером таких команд являются команды *BXLE*, *BXH*. Формат *FØØ* означает, что для данного оператора АП управляющая программа никаких действий не производит.

Предполагается, что анализируемая АП отперфорирована на перфокартах по правилам перфорации Ассемблер-программ. АП просматривается два раза. Во время первого просмотра, осуществляемого одновременно с вводом АП с перфокарт, происходит считывание информации с перфокарт в таблицу *PROG* (см. рис. 2, а) и частичное формирование таблицы *МЕТКА* (см. рис. 2, б).

Во время второго просмотра выделяется код операции анализируемой команды и в таблице *TABKK* (см. рис. 2, в) осуществляется поиск соответствующего эквивалента. Полученный элемент таблицы определяет формат команды, определяющей способ обработки. Таблица *TABKK* не пополняется и не изменяется во время работы ИС.

Для команд формата *RR* вычисляется содержимое каждого из двух полей таблицы регистров *REGIS* (см. рис. 2, г), определяющее значения регистров. Вычисленные значения помещаются в соответствующее поле таблицы *REGIS*.

Для команд формата *SS* выделяются операнды, адресующие память. При этом проверяется тип адресации. Если мы имеем дело с явной адресацией, то, выделив регистры базы и индекса, с помощью таблиц *REGIS* и *МЕТКА* находим в таблице *PROG* номер строки, соответствующей искомому адресу памяти. При неявной адресации номер строки в *PROG* определяется простым сравнением имени выделенного операнда с полем имен таблицы *МЕТКА*. Вычисленные значения помещаются в соответствующее поле таблицы *МЕТКА*. Другие форматы команд обрабатываются аналогичным образом (см. рис. 2).

Каждая из операций АП требует специальной обработки. После дешифрации кода команды УП либо выполняет ее непосредственно, либо, если речь идет о командах, имеющих в БСКВ специфичный алгоритм выполнения, передает управление подпрограммам, выполняющим следующие действия:

- 1) отображение памяти ЭВМ в БСКВ в память ЭВМ ЕС-1020;
- 2) интерпретацию работы соответствующей операции в БСКВ;
- 3) фиксацию времени интерпретации заданной операции.

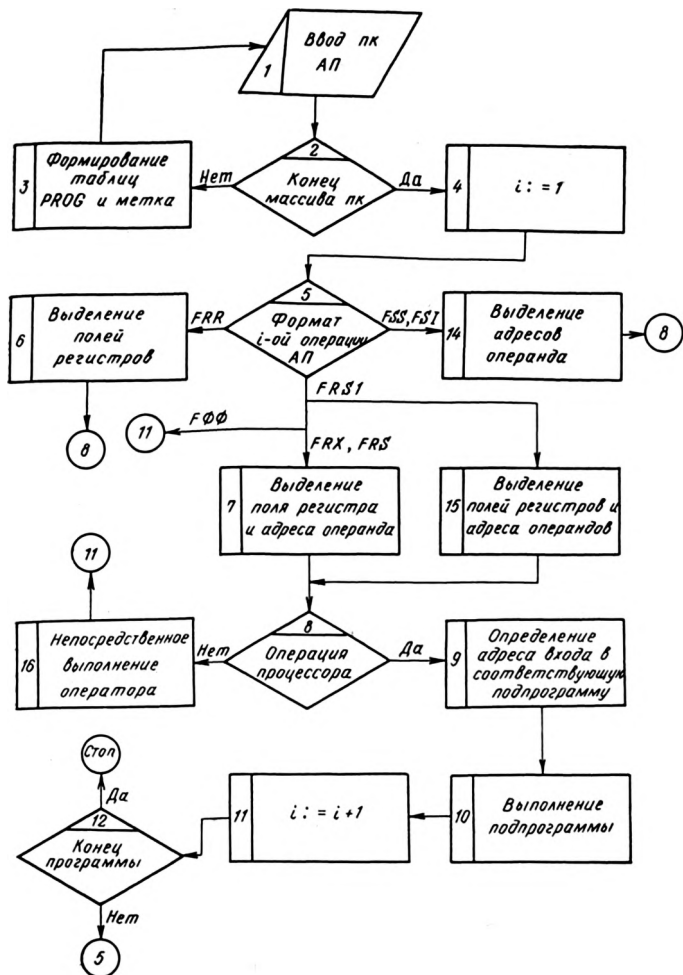


Рис. 3. Блок-схема управляющей программы

Следует отметить, что последнее действие необходимо не столько для работы ИС как таковой, сколько для получения оценок эффективности ее при решении различных задач. Адрес входа в обрабатывающую программу для заданной команды управляющая программа определяет по полю указателя таблицы TABKK.

После обработки очередного оператора изменяется значение счетчика команд АП, и обработка продолжается со следующей строки таблицы PROG. Завершение процесса интерпретации указывает команда EOJ (или SVC).

УП использует также вспомогательные программы: определение орто-

Операция	Верхняя оценка числа тактов в БСКВ	Верхняя оценка числа тактов в СКВ	Экспериментальные оценки работы программы в миллисекундах
Преобразование чисел из позиционной системы счисления (ПСС) в БСКВ	$2 + \lceil \log_{2n} \rceil$		3 — 23
Преобразование чисел из БСКВ в ПСС	$\lceil \log_{2n} \rceil$	$n - 1$	0 — 3
Умножение	$3 + \lceil \log_{2n} \rceil$	$4n + 9$	20 — 47
Сложение (вычитание)	3	$n + 1$	3 — 10
Определение знака	$3 + \lceil \log_{2n} \rceil$	n	3 — 10
Сравнение	$3 + \lceil \log_{2n} \rceil$	$2(n + 1)$	3 — 13
Деление	$2\lceil \log_{2n} \rceil + 6$	$n^2 + 3n$	47 — 120

гональных базисов и их весов, выделение операнда в команде АП, подсчет допустимых сумм весов и формирования поля имени операнда.

ИС работает под управлением ДОС ЕС ЭВМ. Все программы данной ИС содержат 1119 операторов языка PL/I для ДОС ЕС ЭВМ.

Теоретические и экспериментальные оценки быстродействия моделируемых операций приведены в таблице. Здесь n — количество оснований в БСКВ, такт — совокупность элементарных операций, которые могут выполняться одновременно. Оценки сверху числа тактов в СКВ взяты из [1], а в БСКВ из [2, 3]. Экспериментальные оценки быстродействия операций в БСКВ получены для $n=6$, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=7$, $p_4=47$, $p_5=481$, $p_6=2203$.

Разработанная ИС позволяет успешно использовать в МВС с неоднородными процессорами кодирование информации в безранговой системе в коде вычетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Торгашев В. Н. Системы остаточных классов и надежность ЦВМ. — М., 1973.
2. Буза М. К. — Вычислительная техника в машиностроении, 1974, № 3, с. 96.
3. Буза М. К. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1975, № 2, с. 80.
4. Грис Д. Конструирование компиляторов для цифровых вычислительных машин. — М., 1975.

Поступила в редакцию
07.12.78.

Кафедра МО ЭВМ

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Результаты исследований по концентрации напряжений в пластинках, подкрепленных абсолютно жесткими и упругими элементами, имеющие практическое приложение в инженерной деятельности, содержатся в ряде работ [1—4].

Основываясь на эффективном решении смешанной задачи термоупругости анизотропного тела для плоскости с эллиптическим отверстием [4], в настоящей работе решаем задачу об определении термонапряженного состояния в упомянутой области в зависимости от температурного поля, внешней нагрузки, термоупругих свойств пластинки, типа подкрепления отверстия и других факторов.

равномерно повышается до $T_0 = \text{const}$ и в бесконечности равномерно растягивается грузом $\sigma_x = P$, $\sigma_y = Q$, $\tau_{xy} = 0$. Равномерная нагрузка интенсивности q^+ , действующая на участках L_1' , L_2' контура L внешних сил L_1 и L_2 расположены на оси x (см. рис. 1).

...отропней, определяется по формуле

$$(z_1) + \mu_2^2 \Psi_1(z_2)], \quad ($$

$$[z_1) + \Psi_1(z_2)], \quad (2)$$

$$D_1(z_1) + \mu_2 \Psi_1(z_2)], \quad (3)$$

$$- \rho_3 \psi_1(z_3) + \beta_1 \psi_0(z_3)], \quad (4)$$

$$-q_2\psi_1(z_2) + \beta_2\psi_0(z_3)], \quad (5)$$

известные коэффициенты; $\psi_0(z_3)$ — константа поля T ; $\psi_0(z_3) = \int \Psi_0(z_3) dz_3$.

с методом аналитического продолжения основных краевых задач по определению напряженного состояния в односвязной области с помощью рациональных функций. В основу решения смешанной задачи положены теорема Гурса о продолжении аналитической функции в плоскости, ослабленной эллиптич-

точек которой $|\xi| = |\sigma| = 1$ на внешности L и что для всех точек $t(x, y)$ на L

$$j) \omega(\xi) + (1 + i\mu_j) \omega\left(\frac{1}{\xi}\right)]. \quad (6)$$

иведенных в [6], напомним гранично

$$(\sigma) = 0 \text{ на } \gamma'', \quad (7)$$

$$s_j F(\sigma)|^- = \overline{g(\sigma)} + \lambda_j g(\sigma) \text{ на } \gamma'. \quad (1)$$

$$= \Psi_0[\omega_3(\sigma)], g_1 = \sigma g'_0(\sigma) - q_0 \sigma \omega'_3(\sigma)$$

$\times \Psi_*(\sigma) + q_7 \overline{\sigma \omega_3(\sigma)} \overline{\Psi_*(\sigma)}$, $g(\sigma) = \frac{2\mu_1 g_1}{(\mu_1 - \mu_2) q_8}$, $g_0(\sigma) = u q_2 - v p_2$; $p_j (j = 5, 6, 7)$, $\mu_j (j = 1, 2)$ — известные мнимые величины; $\lambda_j (j = 1, 2)$ — вещественные корни уравнения

$$\kappa k \lambda^2 + (\kappa^2 + k^2 - 1) \lambda + \kappa k = 0; \quad (9)$$

$\gamma' = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \beta_k$, $\gamma' = \gamma - \gamma'$; α_k, β_k — точки окружности γ , соответствующие точкам a_k, b_k контура L .

Решение граничной задачи (7), (8), имеющее в точках a_k и β_k особенности интегрируемого порядка, запишем в виде

$$\bar{F}(\xi) + s_j F(\xi) = \frac{-X_j(\xi)}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{g}(\tau) + \lambda_j g(\tau)}{X_j^-(\tau)(\tau - \xi)} d\tau + k_0 [X_{0j}(\xi) P_j(\xi) + d_j X_j(\xi)]. \quad (10)$$

Решая систему уравнений (10), находим

$$F(\xi) = \frac{1}{k_0} [F_1(\xi) - F_2(\xi)], \quad (11)$$

где $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ — правые части соотношения (10) при $j = 1, 2$; остальные обозначения приведены в [4].

Перемещения точек $t(x, y)$, принадлежащих дугам L_1' и L_2' с точностью до несущественных постоянных, определим соотношениями

$$u = 0,5 RT_0 (\alpha'_1 - \alpha_1) (1 + m) (\sigma + \bar{\sigma}), \quad v = -0,5 i RT_0 (\alpha'_2 - \alpha_2) (1 - m) (\sigma - \bar{\sigma}), \quad (12)$$

где $\alpha'_i, \alpha_i (i = 1, 2)$ — линейные коэффициенты температурного расширения включений и пластинки.

Воспользовавшись далее общим выражением для функции $g(\sigma)$ с учетом (12), будем иметь

$$g(\sigma) = M_0 \sigma + N_0 \bar{\sigma},$$

$$\text{где } M_0 = \frac{2\mu_2 M_3}{(\mu_1 - \mu_2) q_8}, \quad N_0 = \frac{2\mu_2 N_3}{(\mu_1 - \mu_2) q_8},$$

$$M_3 = M_2 - q_6 N_1 - q_7 N_2, \quad N_3 = -M_1 + q_6 N_2 + q_7 N_1,$$

$$M_j = 0,5 RT_0 [(1 + m) (\alpha'_1 - \alpha_1) q_2 + (-1)^j \cdot i (1 - m) (\alpha'_2 - \alpha_2) p_2] (j = 1, 2),$$

$$N_1 = 0,25 RT_0 [1 - i\lambda_0 + m(1 + i\lambda_0)],$$

$$N_2 = 0,25 RT_0 [1 + i\lambda_0 + m(1 - i\lambda_0)].$$

Полагая, что дискриминант квадратного уравнения (9) $D > 0$ на основании формул (11), получаем

$$F(\xi) = M_* \xi + \frac{N_*}{\xi} + X_{01}(\xi) t \left(\frac{c_0}{\xi} + c_1 + c_2 \xi + c_3 \xi^2 + c_4 \xi^3 \right) - X_{02}(\xi) v \left(c_0 \xi^3 + c_1 \xi^2 + c_2 \xi + c_3 + \frac{c_4}{\xi} \right), \quad (13)$$

где $M_* = \frac{M_0(1 + \kappa) - k N_0}{(1 + \kappa)^2 - k^2}$, $N_* = \frac{(1 + \kappa) N_0 - k M_0}{(1 + \kappa)^2 - k^2}$, $v = \frac{\kappa_1}{\lambda_1}$, $t = -\exp\left(\frac{\omega \ln \kappa_1}{\pi}\right)$, ω — центральный угол, соответствующий дуге γ'_1 , $X_{0j}(\xi) = (\xi^2 - \alpha_j^2)^{1/2} (\xi^2 - \beta_j^2)^{1/2}$, $\gamma_j = -\frac{1}{2} + \frac{\ln \kappa_j}{2\pi i}$, c_j — произвольные вещественные коэффициенты, $\bar{\gamma}_j = -\frac{1}{2} - \frac{\ln \kappa_j}{2\pi i}$.

Поднятия полученное решение условиям поведения функции $F(\xi)$ в окрестности нуля и бесконечно удаленной точки $F(\xi) = a_* + \frac{B_*}{\xi} + O(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$, $F(\xi) = a_0 + \xi A_* + O\left(\frac{1}{\xi}\right)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ и учитывая при этом, что

$X_{0j}(\xi) = \xi^{-2}$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, $X_{01}(0) = t^{-1}$, $X_{02}(0) = t$, получаем выражения, определяющие значения коэффициентов c_j :

$$c_1 = \frac{a_* + a_0 v}{1 - v^2}, \quad c_0 = \frac{B_* - N_* - v(M_* - A_*)}{1 - v^2},$$

$$c_3 = \frac{a_0 + a_* v}{t(1 - v^2)}, \quad c_4 = \frac{v(B_* - N_*) - M_* + A_*}{t(1 - v^2)},$$

где $a_* = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} a_0 + \frac{2\mu_2 b_0}{\mu_2 - \mu_1}$, $A_* = m_1 \Gamma$,

$$B_* = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \bar{m}_1 \Gamma + \frac{2\mu_2 \bar{m}_2 \Gamma'}{\mu_2 - \mu_1}, \quad m_j = 0,5 R [1 - i\mu_j + (1 + i\mu_j) m],$$

$$a_0 = \frac{iq_2 X}{4\pi(\mu_1 q_2 - \mu_2 q_1)}, \quad b_0 = \frac{iq_1 X}{4\pi(q_1 \mu_2 - \mu_1 q_2)}, \quad \Gamma = \frac{P - Q\mu_2^2}{2(\mu_1^2 - \mu_2^2)},$$

$$\Gamma' = \frac{P - Q\mu_1^2}{2(\mu_2^2 - \mu_1^2)}, \quad X = s(q^+ - q^-); \quad s - \text{длина хорды } a_1 b_1.$$

Для определения коэффициента c_2 воспользуемся соотношением

$$(\mu_2 - \mu_1) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{\sigma} [F^-(\sigma) - F^+(\sigma)] d\sigma = X_1 + \mu_2 Y_1, \quad (14)$$

где X_1, Y_1 — проекции главного вектора внешней нагрузки, действующей на дугу $\alpha_1 \beta_1$ со стороны области $D^+ (|\xi| < 1)$. В рассматриваемом случае $X_1 = q^+ s$, $Y_1 = 0$.

Поскольку $\kappa_j X_{0j}^+(\sigma) + X_{0j}^-(\sigma) = 0$ на γ' , выражение (14) с учетом (13) преобразуется к виду

$$(1 + \kappa_1^{-1}) t (c_0 I_{-2}^1 + c_1 I_{-1}^1 + c_2 I_0^1 + c_3 I_1^1 + c_4 I_2^1) e^{\beta_1(z-\omega)} - e^{\beta_2(z-\omega)} (1 + \kappa_2^{-1}) v (c_0 I_{-2}^2 + c_1 I_{-1}^2 + c_2 I_0^2 + c_3 I_1^2 + c_4 I_2^2) = \frac{i X_1}{\mu_1 - \mu_2},$$

$$\text{где } I_k^j = 2 \int_0^{\omega/2} \frac{\cos(A_j - k\theta) d\theta}{R(\theta)}, \quad A_j = \beta_j \ln \left| \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha - \theta)} \right|,$$

$$R(\theta) = V |\sin(\theta - \alpha) \sin(\theta + \alpha)|, \quad \beta_j = -\frac{\ln \kappa_j}{2\pi}, \quad j = 1, 2; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2.$$

Из последнего соотношения легко определяется постоянная c_2 .

Компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ на контуре $L(\gamma)$ найдем, воспользовавшись формулами:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \operatorname{Re} [(q_\theta - \kappa q_\theta) F^-(\sigma) + q_\theta (M_0 \sigma + N_0 \bar{\sigma} - k \bar{F}^-(\sigma))],$$

$$f(\sigma) = (1 + \kappa) F^-(\sigma) - M_0 \sigma - N_0 \bar{\sigma} + k \bar{F}^-(\sigma) \text{ на } L_1^*(\gamma_i);$$

$$f(\sigma) = \frac{i}{2(\mu_2 - \mu_1)} \{ \sigma \omega'(\sigma) [\sigma_r + \mu_2 \tau_{r\theta} + i(\tau_{r\theta} - \sigma_r \mu_2)] + \overline{\sigma \omega'(\sigma)} [\sigma_r + \mu_2 \tau_{r\theta} - i(\tau_{r\theta} - \sigma_r \mu_2)] \};$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \operatorname{Re} [(q_\theta + q_\theta) F^-(\sigma)], \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_1^*(\gamma_i);$$

значения величин q_θ, q_θ, k приведены в [4].

Для определения напряженно-деформированного состояния в других точках области D^- следует воспользоваться формулами (1) — (5), учитывая при этом, что

$$\Phi_1(z_1) = \Phi_1[\omega_1(\xi)] = \Phi(\xi_1), \quad \Psi_1(z_2) = \Psi_1[\omega_2(\xi)] = \Psi(\xi_2).$$

$$\Phi(\xi_1) = \frac{F(\xi_1)}{\xi_1 \omega_1'(\xi_1)}, \quad \Psi(\xi_2) = \frac{1}{2\mu_2 \xi_2 \omega_2'(\xi_2)} \left[(\mu_1 - \mu_2) \bar{F}\left(\frac{1}{\xi_1}\right) + (\mu_1 + \mu_2) F(\xi_1) \right],$$

$$\xi_1 = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 4d_1^1 d_1^1}}{2d_1^1} = \frac{2d_2^1}{z_1 - \sqrt{z_1^2 - 4d_1^1 d_2^1}}, \quad \xi_2 = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - 4d_1^2 d_2^2}}{2d_1^2} =$$

$$= \frac{2d_2^2}{z_1 - \sqrt{z_2^2 - 4d_1^2 d_2^2}}, \quad \xi_3 = \frac{z_3 + \sqrt{z_3^2 - 4d_1^3 d_2^3}}{2d_1^3} = \frac{2d_2^3}{z_3 - \sqrt{z_3^2 - 4d_1^3 d_2^3}},$$

$$d_1^j = 0,5 R [1 - i\mu_j + m(1 + i\mu_j)], \quad d_2^j = 0,5 R [1 + i\mu_j + m(1 - i\mu_j)] \quad j = 1, 2, 3.$$

Соотношения (15) получены путем обращения формулы (6).

З а м е ч а н и е. Чтобы получить искомое решение при $D < 0$, надо учесть зависимость между коэффициентами полиномов функции $F(\xi)$, а также некоторые другие зависимости, приведенные в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем.— Львов, 1960.
2. Савин Г. Н., Тульчий В. И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками.— Киев, 1971.
3. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит.— Минск, 1975.
4. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости.— Минск, 1972, с. 171.

Поступила в редакцию
04.01.79.

НИИ ПФП

УДК 517.518.84

С. А. ЧУПРИГИН

ЛАКУНАРНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ТИПА $(0, 1, \dots, p, q, r)$

1. Пусть заданы n узлов

$$x_{kn} = \frac{2k\pi}{n} \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad (1)$$

натуральные числа $0 \leq p < q < r$ и произвольные действительные числа α_{ki} ($k = \overline{0, n-1}$; $i = \overline{0, p, q, r}$). Требуется исследовать проблему существования, единственности и дать представление тригонометрического $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционного полинома по узлам (1), т. е. полинома $T(x)$ порядка не выше $\frac{n}{2}(p+3)$, удовлетворяющего условиям

$$T^{(i)}(x_{kn}) = \alpha_{ki} \quad (k = \overline{0, n-1}; i = \overline{0, p, q, r}). \quad (2)$$

При этом, если число $j = \frac{n}{2}(p+3)$ является целым, то будем искать полином $T(x)$ в виде

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + a_j \cos jx \quad (3)$$

или

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + b_j \sin jx. \quad (4)$$

Если же $j = \frac{n}{2}(p+3)$ не является целым числом, то $T(x)$ ищем в виде

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-\frac{1}{2}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (5)$$

При $q=p+1$, $r=p+2$, т. е. в случае интерполирования Эрмита, указанные проблемы решаются положительно [1—3]. Если же $q-p > 1$ или $r-q > 1$, т. е. в случае лакунарного тригонометрического интерполирования, проблема существования и единственности полинома $T(x)$ не всегда решается положительно.

Известен ряд результатов, получающихся из $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования при определенном выборе параметров p, q, r . Так, случай $q=p+1$ рассмотрен в [4, 5], случай $p=0, p=1$ изучен Э. М. Зеелем [6, 7]. Другие частные случаи можно найти в обзорной статье [8].

2. Условия (2) можно записать в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $T(x)$. Эти коэффициенты, а следовательно, и единственный интерполяционный полином, можно найти при любых a_{ki} тогда и только тогда, когда главный определитель системы (2) отличен от нуля. В этом случае однородная система

$$T^{(i)}(x_{kn}) = 0 \quad (k = \overline{0, n-1}; i = \overline{0, p, q, r}) \quad (6)$$

имеет только нулевое решение. Если же однородная система (6) имеет ненулевое решение, то $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином, вообще говоря, не существует.

Теорема 1. Если $n=2m$ и $r-q$ четно, то при любом p тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином по узлам (1), вообще говоря, не существует.

Доказательство. Легко проверить, что если r и q одинаковой четности, то нетривиальным решением однородной системы (6) является тригонометрический полином $\sin^{p+1} mx$, если p одинаковой четности с q и r , и полином $\sin^{p+2} mx$, если p различной четности с q и r .

Теорема 2. Пусть $n=2m+1$, тогда тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ — интерполяционный полином, вообще говоря, не существует в следующих случаях: 1) при любом p и нечетных q, r ; 2) при четных p, q, r .

Доказательство. В первом случае нетривиальным решением однородной системы (6) является полином $\sin^{p+1} \frac{n}{2} x$ при p нечетном и

$\sin^{p+2} \frac{n}{2} x$ при четном p . Во втором случае будем искать ненулевое решение системы (6) в виде $Q(x) = \sin nx + A_1 \sin 2nx + \dots + A_{p/2} \sin (p/2 + 1)nx$. Очевидно, что полином $Q(x)$ и его четные производные обращаются в нуль в узлах (1) при любом выборе коэффициентов A_v ($v = \overline{1, p/2}$). Выберем A_v так, чтобы обращались в нуль в узлах (1) нечетные производные полинома $Q(x)$. Для этого A_v должны удовлетворять условиям $n^{2s-1} + (2n)^{2s-1} A_1 + (3n)^{2s-1} A_2 + \dots + [(p/2+1)n]^{2s-1} A_{p/2} = 0$, ($s = \overline{1, p/2}$). Полученная система разрешима относительно A_v , так как определитель ее отличен от нуля, ибо, как легко заметить, он равен $n^{p/4} (p/2+1)! W(2^3, 3^3, 4^3, \dots, (p/2+1)^3)$, где W — определитель Вандермонда.

3. **Теорема 3.** Если n четно, а $r-q$ нечетно, то при любом p существует единственный тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином по узлам (1) вида (3) при четном p и вида (4) при p нечетном.

Теорема 4. Пусть n нечетно, тогда

1. Если q и r — числа различной четности, то при любом p существует единственный тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином по узлам (1) вида (4) при нечетном p и вида (5) при p четном.

2. Если p нечетно, а q и r четны, существует единственный тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином по узлам (1) вида (3).

Доказательство теорем 3, 4 во всех случаях проводится по единой схеме, поэтому мы ограничимся лишь одним случаем, например, нечетного n , четного p и q и r различной четности.

Заметим, что если нам удалось доказать существование тригонометрического полинома вида (5), удовлетворяющего условиям (2) при любых a_{ki} , то отсюда следует единственность такого полинома.

Введем, как обычно, фундаментальные полиномы $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования $U_{\alpha i}(x) = U_{\alpha i}(0, 1, \dots, p, q, r; x)$, т. е. полиномы вида (5), которые в узлах (1) удовлетворяют условиям

$$U_{\gamma i}^{(\mu)}(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i - \mu)^2 + (k - \gamma)^2 = 0 \\ 0, & \text{если } (i - \mu)^2 + (k - \gamma)^2 > 0 \end{cases} \quad (\gamma, k = \overline{0, n-1}; \mu, i = \overline{0, p, q, r}).$$

Тогда интерполяционный полином можно представить в виде

$$T(x) = \sum_{\gamma=0}^p \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ki} U_{ki}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{kq} U_{kq}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{kr} U_{kr}(x),$$

и, следовательно, исследование проблемы существования и единственности и представления интерполяционного полинома сводится к построению фундаментальных полиномов $U_{\gamma i}(x)$. В свою очередь, задача построения фундаментальных полиномов $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования сводится к построению полиномов $U_i(x) = U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ вида (5), удовлетворяющих условиям

$$U_i^{(\mu)}(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i - \mu)^2 + k^2 = 0 \\ 0, & \text{если } (i - \mu)^2 + k^2 > 0 \end{cases} \quad (k = \overline{0, n-1}; \mu, i = 0, p, q, r), \quad (7)$$

ибо, как легко заметить, $U_{ki}(x) = U_i(x - x_{kn})$ ($k = \overline{0, n-1}; i = 0, p, q, r$). Построением полиномов $U_i(x) = U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ мы и займемся. Построение $U_r(x) = U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ ведется по схеме, предложенной в [6, 7]. Будем искать $U_r(x)$ в виде

$$U_r(x) = (-1)^{r/2} 2^{p+1} \sin^{p+1} \frac{n}{2} x \sum_{v=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} b_v \sin\left(\frac{n}{2} + v\right) x \quad (8)$$

для четного r и в виде

$$U_r(x) = (-1)^{r/2} 2^{p+1} \sin^{p+1} \frac{n}{2} x \sum_{v=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} b_v \cos\left(\frac{n}{2} + v\right) x \quad (8')$$

для r нечетного.

Из (7) следует, что полином $U_r(x)$ должен удовлетворять следующим условиям:

$$U_r^{(\mu)}(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\mu - r)^2 + k^2 = 0 \\ 0, & \text{если } (\mu - r)^2 + k^2 > 0 \end{cases} \quad (k = \overline{0, n-1}; \mu = \overline{0, p, q, r}). \quad (9)$$

Благодаря наличию множителя $\sin^{p+1} \frac{n}{2} x$ для всех $k = \overline{0, n-1}$ и $\mu = \overline{0, p}$ условия (9) выполняются при любом выборе коэффициентов b_v . Осталось показать, что можно так подобрать коэффициенты b_v , чтобы выполнялись оставшиеся условия

$$U_r^{(q)}(x_{kn}) = 0 \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad U_r^{(r)}(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Для четного r , исходя из (8), представив $\sin^{p+1} \frac{n}{2} x$ в виде $\sin^{p+1} \frac{n}{2} x = \frac{1}{2} p \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} \sin(2s+1) \frac{n}{2} x$, путем несложных выкладок можно получить:

$$U_r^{(r)}(x_{kn}) = b_0 n^r \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^{s+1} \binom{p+1}{p/2-s} [(s+1)^r - s^r] + \\ + \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ b_v \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [(\nu - sn)^r - (\nu + (s+1)n)^r] + \right.$$

$$+ b_{-} \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [(v+sn)^r - ((s+1)n-v)^r] \cos v x_{kn}, \quad (11)$$

$$U_r^{(q)}(x_{kn}) = (-1)^{\frac{r+q+1}{2}} \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ b_{+} \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [v-sn]^q - \right. \\ \left. - (v+(s+1)n)^q \right\} - b_{-} \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [-(v+sn)^q - \\ - ((s+1)n-v)^q] \sin v x_{kn}. \quad (12)$$

Для выполнения условий (10), учитывая, что полином

$$l(x) = \frac{\sin \frac{n}{2} x}{n \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos v x \quad (13)$$

удовлетворяет условиям $l(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0 \\ 0, & \text{если } k=1, \dots, n-1 \end{cases}$, достаточно выбрать коэффициенты при $\sin v x_{kn}$ в (12) равными нулю, а коэффициенты при $\cos v x_{kn}$ в (11) равными соответствующим коэффициентам полинома (13). Тогда получим для определения b_0 уравнение

$$b_0 n^r \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^{s+1} \binom{p+1}{p/2-s} [(s+1)^r - s^r] = \frac{1}{n},$$

а для определения коэффициентов b_{+} , b_{-} , $(v=1, \frac{n-1}{2})$ следующую систему

$$\begin{cases} b_{+} A(v, r) + b_{-} A(-v, r) = \frac{2}{n} \left(v=1, \frac{n-1}{2} \right), \\ b_{+} A(v, q) - b_{-} A(-v, q) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

где

$$A(y, z) = \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [(y-sn)^z - (y+(s+1)n)^z]. \quad (15)$$

Легко проверить, что при $v=0$ первое уравнение системы (14) совпадает с уравнением для определения b_0 , а второе тривиальное, поэтому мы можем в системе (14) считать v меняющимся от 0 до $\frac{n-1}{2}$.

Заметим, что для нечетного r , исходя из представления (8'), мы получим такую же систему, как и (14), только q и r нужно поменять местами.

Простыми, но довольно громоздкими выкладками можно показать, что коэффициент при b_0 и определитель системы (14)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A(v, r) & A(-v, r) \\ A(v, q) & -A(-v, q) \end{vmatrix}$$

отличны от нуля; более того, $\text{sgn } \Delta = (-1)^{p/2+1}$ и, следовательно, система (14) разрешима. Найдя b_0 , b_{+} , b_{-} и подставив их в (8), получим представление для $U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x)$. Фундаментальные же полиномы $U_{kr}(0, 1, \dots, p, q, r; x)$, как было указано выше, равны соответственно $U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x-x_{kn})$.

Теперь легко проверить, что полиномы $U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ ($i=0, \dots, q$) могут быть представлены в следующей форме:

$$U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x) = U_i(0, 1, \dots, p, q; x) - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ji} U_{jr}(0, 1, \dots, p, q, r; x), \quad (16)$$

где $U_i(0, 1, \dots, p, q; x)$ — фундаментальные полиномы $(0, 1, \dots, p, q)$ -интерполирования, построенные нами в [4, 5], а $\beta_{ji} = U_i^{(r)}(0, 1, \dots, p, q; x_{jn})$. В самом деле, выполнение условий (7) при $\mu = 0, p, q$ следует из представления (16) и свойств фундаментальных полиномов $(0, 1, \dots, p, q)$ - и $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования, выполнение же условий (7) при $\mu = r$, т. е. равенство нулю производных порядка r в узлах (1), обеспечивается специальным выбором коэффициентов β_{ji} в (16).

Итак, для нечетного n имеет место

Теорема 5. В случае четных p, r и нечетного q для фундаментальных полиномов $U_{ki}(0, 1, \dots, p, q, r; x) = U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x - x_{kn})$ ($k = 0, n-1$) тригонометрического $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования по узлам (1) справедливо представление:

$$U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x) = (-1)^{r/2} 2^{p+2} \frac{1}{n} \sin^{p+1} \frac{\pi}{2} x \times \\ \times \sum_{v=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \frac{A(-v, q)}{A(v, r) A(-v, q) + A(v, q) A(-v, r)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + v\right) x,$$

где $A(y, z)$ определяется по формуле (15),

$$U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x) = U_i(0, 1, \dots, p, q; x) - \sum_{j=0}^{n-1} U_i^{(r)}(0, 1, \dots, p, q; x_{jn}) U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x - x_{jn}) \quad (i = 0, p, q).$$

З а м е ч а н и е. Как видно из предыдущего, существование и представление интерполяционного полинома зависит от четности чисел p, q, r . Во всех случаях, указанных в теоремах 3, 4, построение фундаментальных полиномов проводится аналогично разобранным случаям четных p, r и нечетного q . Однако при реализации предложенной схемы могут возникнуть особенности. Например, при нечетных p, q и четном r предложенную схему построения фундаментальных полиномов следует изменить, так как входящие в (16) полиномы $U_i(0, 1, \dots, p, q; x)$, как доказано в [5], вообще говоря, не существуют. Поэтому сначала строятся полиномы $U_q(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ рассмотренным выше методом, а затем остальные фундаментальные полиномы $U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ ($i = 0, p, r$), причем они представляются по формуле, аналогичной (16), содержащей полиномы $U_i(0, 1, \dots, p, r; x)$, которые уже существуют, единственны и определены в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Турецкий А. Х. — Труды Витебского пед. ин-та имени С. М. Кирова, 1936, т. 1, с. 73.
2. Salzer H. E. — J. Math. and Phys., 1960, v. 39, № 1, p. 83.
3. Зеель Э. М. — Изв. вузов. Матем., 1974, № 3, с. 43.
4. Чупригин О. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. мат., физ., мех., 1971, № 3, с. 24.
5. Чупригин О. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1972, № 3, с. 17.
6. Зеель Э. М. — Изв. вузов. Матем., 1970, № 3, с. 27.
7. Зеель Э. М. — В сб.: Матем. анализ и теория функций, вып. 8. — М., 1970, с. 150, 191.
8. Sharma A. — SIAM Rev., 1972, v. 14, № 1, с. 129.

ОДНА ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Известные критерии А. М. Ляпунова о неустойчивости [1], основанные на методе вспомогательной функции (метод функций Ляпунова), неоднократно дополнялись и обобщались многими авторами. В первую очередь это работы Н. Г. Четаева [2] и К. П. Персидского [3]. Позднее теоремы о неустойчивости можно найти у Н. П. Еругина [4], Х. Л. Массера [5], Н. Н. Красовского [6], В. И. Зубова [7]. Варианты теорем о неустойчивости с использованием векторных функций Ляпунова выполнены В. М. Матросовым [8]. В этой же работе содержится и обширный список литературы по указанной теме.

Исходя из интересов настоящей статьи, выделим теорему 12.1 [6]. Здесь за счет выбора функции Ляпунова не только гарантируется отсутствие устойчивости положения равновесия, но и указано существование траектории, входящей в эту неустойчивую особую точку при неограниченном убывании времени t . Ниже приводится обобщение этого результата на случай периодических систем, при этом используются конструкции доказательств [6].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad f(0, t) = 0, \quad \forall t \in R, \quad (1)$$

где x — n -вектор; f — вектор-функция, определенная и непрерывная в цилиндре $D_H = \{(x, t) : \|x\| < H, t \in R\}$. Считаем, что f периодична по t с периодом $\Theta > 0$ и удовлетворяет в D_H некоторым условиям существования и единственности решений.

В дальнейшем воспользуемся следующими обозначениями: $x(x_0, t_0, t)$ — решение (траектория) системы (1) с начальными условиями x_0, t_0 ; $S_\alpha = \{x : \|x\| < \alpha\}$ — шар; S_α — замыкание шара S_α ; $V(x, t)$ — вещественная скалярная функция, определенная и непрерывно дифференцируемая в D_H ; $\dot{V}(x, t)$ — производная по времени, вычисленная от функции $V(x, t)$ в силу системы (1); D_h — замыкание D_h по x . Следуя [6], введем

Определение. Функция $V(x, t)$ называется определенно положительно определенной в области $G = \{(x, t) : V(x, t) \geq 0, (x, t) \in D_h, 0 < h < H, \text{ если } \forall \eta > 0, 0 < \eta < h, \exists \gamma > 0 \text{ такое, что } \dot{V}(x, t) > \gamma \forall (x, t) \in G \text{ и } \|x\| > \eta\}$.

Теорема. Пусть в $D_h, 0 < h < H$, существует функция $V(x, t)$, периодическая по t периода Θ , имеющая определенно положительную производную $V(x, t)$ в $G = \{(x, t) : V(x, t) \geq 0, (x, t) \in D_h\}$ и точка $x=0$ входит в замыкание области $V(x, t) > 0$ по $x \forall t \in R$. Тогда решение $x=0$ неустойчиво в смысле Ляпунова, и в области G существует полутраектория $x(x_0, t_0, t), t \leq t_0$, такая, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(x_0, t_0, t)\| = 0.$$

Доказательство. Выберем в фазовом пространстве последовательность точек $\{q_n\}$ таких, что $V(q_n, 0) = 0, 0 < \|q_n\| < h$, и $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу свойств функции V и ее производной $\dot{V}$ всякая траектория $x(q_n, 0, t)$ обладает тем свойством, что $\|x(q_n, 0, t), t\| > 0$ при тех значениях времени t , при которых она не покидает шар S_h . С учетом периодичности функция V допускает бесконечно малый высший предел при $x \rightarrow 0$ [1]. Поэтому аналогично [6] существуют числа $t_n > 0$, при которых $\|x(q_n, 0, t_n)\| = h$. Положим $p_n = x(q_n, 0, t_n)$ и пусть P — предельная точка последовательности $\{p_n\}$ (не усложняя обозначений считаем, что $p_n \rightarrow P$ при $n \rightarrow \infty$).

Далее, пусть $m(n)$ — целочисленная функция натурального аргумента такая, что $t_n = t'_n + m(n)\Theta$, где $t'_n \in [0, \Theta]$. Ограниченная последовательность $\{t'_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность (пусть это

сама последовательность, т. е. $t_n^* \rightarrow t^*$ при $n \rightarrow \infty$). Покажем, что траектория $x(P, t^*, t)$ и является искомой. Действительно, предположим сначала, что эта траектория покидает шар S_n при убывании времени t . Тогда найдется число $\Delta < 0$, для которого $\|x(P, t^*, t^* + \Delta)\| > h$. По теореме об интегральной непрерывности решений можно указать число N настолько большое, что из предыдущего неравенства будем иметь $\|x(P_n, t_n^*, t_n^* + \Delta)\| > h \forall n > N$. Но тогда с учетом свойств решений периодических систем сразу получаем неравенство $\|x(P_n, t_n, t_n + \Delta)\| > h \forall n > N$, противоречащее построению чисел $t_n > 0$ и $\Delta < 0$. Покажем это. Так как вектор-функция f непрерывна в D_N , а значит, и равномерно ограничена в D_N , то $t_n \rightarrow \infty$, как только $n \rightarrow \infty$. Поэтому с учетом равенства $x(p_n, t_n, t_n + \Delta) = x(q_n, 0, t_n + \Delta)$ и условия $t_n + \Delta > 0$ при $n > \bar{N} > N$ соотношение $\|x(q_n, 0, t_n + \Delta)\| > h$ невозможно. Теперь уже легко проверить, что $\|x(P, t^*, t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это можно сделать так же, как и при доказательстве теоремы 12.1 [6] с учетом равномерной ограниченности f в D_N .

Пример. Для системы третьего порядка $\dot{x} = yf(x, y, z, t)$, $\dot{y} = -xf(x, y, z, t)$, $\dot{z} = \psi(x, y, z, t)$, удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к системе (1), функция $V = z - x^2 - y^2$ имеет производную по времени $\dot{V} = \psi(x, y, z, t)$. Пусть $\forall \eta$, $0 < \eta < h$, существует число $\gamma > 0$ такое, что $\psi(x, y, z, t) > \gamma$ в области $\{(x, y, z, t): z \geq x^2 + y^2, \eta^2 < x^2 + y^2 + z^2 < h^2, t \in \mathbb{R}\}$. В этом случае будут, очевидно, выполнены все требования доказанной теоремы, а значит, в указанной области существует траектория, входящая в начало координат при неограниченном убывании времени t .

З а м е ч а н и е. Существование нетривиальной траектории, для которой начало координат является α -предельной точкой, есть достаточный признак неустойчивости нулевого решения автономных систем [4, 9, 10]. В [10] отмечено, что это условие не является необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М. — Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М., 1962.
3. Персидский К. П. — УМН, 1946, т. 1, вып. 5—6.
4. Еругин Н. П. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
5. Массера Х. Л. — Сб. переводов. Математика. — М., 1957, т. 1:4.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М., 1959.
7. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л., 1959.
8. Матросов В. М. — Труды III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 1. — М., 1965.
9. Зубов В. И. — Матем. сб., 1959, т. 48 (90), № 2.
10. Богданов Ю. С. — Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 1.

Поступила в редакцию
01.02.79.

Кафедра МОУ

УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ, Ю. И. КАШИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОПЛИВНЫХ РЕСУРСОВ

Проблема рационального использования топливных ресурсов республики связана с решением задач по оптимальному их распределению на коммунально-бытовые и производственно-эксплуатационные нужды.

В работах [1—4] рассмотрена задача распределения топливных ресурсов на коммунально-бытовые нужды БССР. Экономическая эффективность от результатов ее внедрения составит свыше миллиона рублей в год.

Цель исследования настоящей работы — построение экономико-математической модели задачи оптимального распределения топливных ресурсов на производственно-эксплуатационные нужды (ПЭН) республики для каждого временного интервала планирования и рассмотрение вопросов, связанных с ее анализом. В частности, указан критерий разрешимости этой задачи, а также показано, что в некоторых случаях решение ее может быть сведено к решению двух подзадач меньшего порядка.

1. Постановка задачи. Пусть рассмотрению подлежат m поставщиков и n потребителей, связанных с поставками и потреблением топливных ресурсов. Будем считать, что число видов топливных ресурсов равно s , а планируемый период разбит на r интервалов, которые назовем кварталами. Пусть j — индекс предприятия, выступающего в качестве потребителя; i — индекс поставщика; R — множество поставщиков, расположенных на территории республики; M_p — множество поставщиков p -го вида топлива, причем $\bigcup_{p=1}^s M_p = \{1, \overline{m}\}$, $M_h \cap M_g = \emptyset$ при $h \neq g$; N_q — множество предприятий, входящих в q -е министерство (ведомство), причем $\bigcup_{q=1}^l N_q = \{1, \overline{n}\}$, $N_h \cap N_g = \emptyset$ при $h \neq g$.

Заданы следующие величины: b_j — объем спроса в условном топливе j -го потребителя в планируемом периоде (этот показатель может быть рассчитан по алгоритму из [5]); d_{pq}^- , d_{pq}^+ — соответственно минимальный и максимальный объем топливных ресурсов p -го вида в условном выражении, потребляемый q -ым министерством (ведомством) в планируемом периоде; α_i — калорийный эквивалент единицы ресурса i -го поставщика; a'_i — максимально возможный объем топливных ресурсов i -го поставщика, выделенного к поставке на ПЭН республики в планируемом периоде; c'_{ij} — транспортные затраты (расходы), связанные с перевозкой единицы ресурса от поставщика i к потребителю j (предполагается, что транспортные затраты не зависят от времени доставки); a'_{ik} — объем топливных ресурсов i -го поставщика, планируемого к поставке на ПЭН республики в квартале k ; b_{jk} — объем спроса в условном топливе — j -го потребителя в квартале k ; u_{jk} — затраты (штраф) за недопоставку единицы условного топлива j -му потребителю в конце квартала k ($1 \leq k \leq r-1$); v_{ik} — затраты i -го поставщика на хранение единицы условного топлива в конце квартала k ($1 \leq k \leq r-1$).

Предполагается, что имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{i \in R} a_i < \sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i, \quad \sum_{k=1}^r a_{ik} = a_i \quad \forall i \in R,$$

$$\sum_{k=1}^r a_{ik} \leq a_i \quad \forall i \in \{1, \overline{m}\} \setminus R, \quad \sum_{k=1}^r b_{jk} = b_j, \quad j = 1, \overline{n},$$

где $a_i = a'_i \alpha_i$, $a_{ik} = a'_{ik} \alpha_i$.

Задача заключается в составлении такого плана перевозок по кварталам, при котором все топливные ресурсы поставщиков, расположенных на территории республики, вывозятся; потребности всех пунктов потребления в планируемом периоде удовлетворяются; ограничения, задаваемые минимальными и максимальными объемами топливных ресурсов по их видам для каждого министерства (ведомства) республики в планируемом периоде, учитываются. При этом требуется, чтобы суммарные затраты на транспортировку, на хранение поставщиками и за недопоставку потребителям топливных ресурсов в конце каждого квартала k ($1 \leq k \leq r-1$) достигали минимума.

Приведем математическую формулировку данной задачи. Пусть x_{ijk} — объем перевозок топливных ресурсов в условном выражении, доставляемых от i -го поставщика к j -му потребителю в квартале k . Тогда

математическая модель задачи сводится к вычислению переменных x_{ijk} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, r}$, которые обеспечивают минимум целевой функции

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \sum_{k=1}^r x_{ijk} + \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^{r-1} u_{jt} \sum_{k=1}^t \left(b_{jk} - \sum_{i=1}^m x_{ijk} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^{r-1} v_{it} \sum_{k=1}^t \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^n x_{ijk} \right) \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t b_{jk}, \quad t = \overline{1, r-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t a_{ik}, \quad t = \overline{1, r-1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r x_{ijk} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in R, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq a_i \quad \forall i \in \{\overline{1, m}\} \setminus R, \quad (6)$$

$$d_{pq}^- \leq \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq d_{pq}^+, \quad p = \overline{1, s}, \quad q = \overline{1, l}, \quad (7)$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, r}, \quad (8)$$

где $c_{ij} = \frac{c'_{ij}}{\alpha_i}$.

Заметим, что эта модель близка к предложенной в [6]. В ней, в отличие от рассматриваемой нами модели (1)–(8), вместо условий (5)–(7)

приводятся условия: $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{k=1}^{t-1} b_{jk} \sum_{i=1}^t x_{ijk} \geq \sum_{k=1}^t b_{jk} \times$
 $\times \sum_{k=1}^{t-1} x_{ijk}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $t = \overline{2, r}$.

В тех случаях, когда по тем или иным причинам представляется целесообразным учитывать ограничения, определенные минимальными и максимальными объемами топливных ресурсов по их видам для каждого предприятия, выступающего в качестве потребителя, следует заметить условия (7) неравенствами вида

$$d_{pj}^- \leq \sum_{i \in M_p} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq d_{pj}^+, \quad p = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где d_{pj}^- , d_{pj}^+ — соответственно, нижняя и верхняя границы возможной потребности топливных ресурсов p -го вида в условном выражении для j -го потребителя.

2. Разрешимость задачи. Легко видеть, что задача (1)–(6), (8) всегда будет разрешимой. Иначе обстоит дело с задачей (1)–(8). Здесь могут встретиться ситуации, когда ограничения (7) оказываются настолько жесткими, что в задаче вообще отсутствует допустимое реше-

ние. Поэтому возникает вопрос: при каких условиях задача (1)–(8) будет разрешимой? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1. Для разрешимости задачи (1)–(8) необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$B_q \geq 0, \quad q = \overline{1, l}, \quad (10)$$

$$A_p \geq 0, \quad p = \overline{1, s}, \quad (11)$$

$$\sum_{p=1}^s \min \left(A_p, \sum_{q \in L} (d_{pq}^+ - d_{pq}^-) \right) \geq \sum_{q \in L} B_q \quad \forall L \subseteq \{\overline{1, l}\}, \quad (12)$$

$$\text{где } B_q = \sum_{j \in N_q} b_j - \sum_{p=1}^s d_{pq}^-, \quad A_p = \sum_{i \in M_p} a_i - \sum_{q=1}^l d_{pq}^+.$$

Доказательство. Покажем, что система (2)–(8) совместна тогда и только тогда, когда совместна следующая система:

$$\sum_{p=1}^s y_{pq} = \sum_{j \in N_q} b_j, \quad q = \overline{1, l}, \quad (13)$$

$$\sum_{q=1}^l y_{pq} \leq \sum_{i \in M_p} a_i, \quad p = \overline{1, s}, \quad (14)$$

$$d_{pq}^- \leq y_{pq} \leq d_{pq}^+, \quad p = \overline{1, s}, \quad q = \overline{1, l}. \quad (15)$$

Действительно, если $\|x_{ijk}\|_{m \times n \times r}$ — некоторое решение системы (2)–(8), то $y_{pq}^* = \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk}$, $p = \overline{1, s}$, $q = \overline{1, l}$, является, очевидно, решением системы (13)–(15); так что совместность системы (13)–(15) следует из совместности системы (2)–(8).

Пусть теперь совместна система (13)–(15) и $\|y_{pq}^*\|_{s \times l}$ — ее некоторое решение. Тогда, как легко видеть, числа

$$x_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, r-1}, \\ x_{ij}^*, & \text{если } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = r \end{cases}$$

удовлетворяют условиям (2)–(8), где x_{ij}^* — некоторое решение системы:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \forall i \in R, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \in \{\overline{1, m}\} \setminus R, \\ \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} x_{ij} = y_{pq}^*, \quad p = \overline{1, s}, \quad q = \overline{1, l}, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{которая}$$

в силу условий (13) и (14) всегда будет разрешимой.

Так как множество допустимых решений задачи (1)–(8) ограничено и замкнуто, а любая непрерывная функция достигает на нем своей нижней границы, то для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой Гофмана [7], которая утверждает, что система (13)–(14) совместна тогда и только тогда, когда выполняются условия (10)–(12). Теорема 1 доказана.

Из теоремы непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $d_{pq}^- = d_{pq}^+$, $p = \overline{1, s}$, $q = \overline{1, l}$. Для разрешимости задачи (1)–(8) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\sum_{i \in M_p} a_i \geq \sum_{q=1}^l d_{pq}^-, \quad p = \overline{1, s}, \quad \sum_{j \in N_q} b_j = \sum_{p=1}^s d_{pq}^+, \quad q = \overline{1, l}.$$

Следствие 2. Для разрешимости задачи (1)–(6), (8), (9) необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$b_j \geq \sum_{p=1}^i d_{pj}^-, j = \overline{1, n}, \sum_{i \in M_p} a_i \geq \sum_{j=1}^n d_{pj}^-, p = \overline{1, s}.$$

$$\sum_{p=1}^i \min \left[\left(\sum_{i \in M_p} a_i - \sum_{j=1}^n d_{pj}^- \right), \sum_{j \in J} (d_{pj}^+ - d_{pj}^-) \right] \geq \sum_{j \in J} \left(b_j - \sum_{p=1}^i d_{pj}^- \right) \forall J \subseteq \{\overline{1, n}\}.$$

3. Декомпозиция задачи. Пусть существуют непустые множества $S \subsetneq \{\overline{1, s}\}$ и $L \subsetneq \{\overline{1, l}\}$ такие, что

$$\sum_{p \in S} \sum_{i \in M_p} a_i = \sum_{q \in L} \sum_{j \in N_q} b_j = \sum_{p \in S} \sum_{q \in L} d_{pq}^-. \quad (16)$$

Положим $E = \bigcup_{p \in S} M_p$, $F = \bigcup_{q \in L} N_q$, $\bar{E} = \{\overline{1, m}\} \setminus E$, $\bar{F} = \{\overline{1, n}\} \setminus F$, $Q = \bar{E} \cap R$, $\bar{Q} = \bar{E} \setminus Q$, $\bar{S} = \{\overline{1, s}\} \setminus S$, $\bar{L} = \{\overline{1, l}\} \setminus L$. Рассмотрим две подзадачи задачи (1)–(8):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E} \sum_{j \in F} c_{ij} \sum_{k=1}^r x_{ijk} + \sum_{j \in F} \sum_{t=1}^{r-1} u_{jt} \sum_{k=1}^t \left(b_{jk} - \sum_{i \in E} x_{ijk} \right) + \\ + \sum_{i \in E} \sum_{t=1}^{r-1} v_{it} \sum_{k=1}^t \left(a_{ik} - \sum_{j \in F} x_{ijk} \right) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sum_{i \in E} \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t b_{jk}, \quad t = \overline{1, r-1} \quad \forall j \in F, \quad (18)$$

$$\sum_{j \in F} \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t a_{ik}, \quad t = \overline{1, r-1} \quad \forall i \in E, \quad (19)$$

$$\sum_{i \in E} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = b_j \quad \forall j \in F, \quad (20)$$

$$\sum_{j \in F} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in E, \quad (21)$$

$$\sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = d_{pq}^- \quad \forall (p, q) \in S \times L, \quad (22)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i \in E, \quad \forall j \in F, \quad k = \overline{1, r}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \bar{E}} \sum_{j \in \bar{F}} c_{ij} \sum_{k=1}^r x_{ijk} + \sum_{j \in \bar{F}} \sum_{t=1}^{r-1} u_{jt} \sum_{k=1}^t \left(b_{jk} - \sum_{i \in \bar{E}} x_{ijk} \right) + \\ + \sum_{i \in \bar{E}} \sum_{t=1}^{r-1} v_{it} \sum_{k=1}^t \left(a_{ik} - \sum_{j \in \bar{F}} x_{ijk} \right) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sum_{i \in \bar{E}} \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t b_{jk}, \quad t = \overline{1, r-1} \quad \forall j \in \bar{F}, \quad (25)$$

$$\sum_{j \in \bar{F}} \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t a_{ik}, \quad t = \overline{1, r-1} \quad \forall i \in \bar{E}, \quad (26)$$

$$\sum_{i \in \bar{E}} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = b_j \quad \forall j \in \bar{F}, \quad (27)$$

$$\sum_{j \in \bar{F}} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in Q, \quad (28)$$

$$\sum_{j \in \bar{F}} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq a_i \quad \forall i \in \bar{Q}, \quad (29)$$

$$d_{pq} \leq \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq d_{pq}^+ \quad \forall (p, q) \in \bar{S} \times \bar{L}, \quad (30)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i \in \bar{E}, \quad \forall j \in \bar{F}, \quad k = \bar{1}, \bar{r}. \quad (31)$$

Следующая теорема дает описание некоторого класса задач, решение которых сводится к решению двух подзадач меньшего порядка.

Теорема 2. Существование непустых множеств $S \subseteq \{\bar{1}, s\}$ и $L \subseteq \{\bar{1}, l\}$, для которых выполняются равенства (16), необходимо и достаточно для того, чтобы решение задачи (1)–(8) сводилось к решению подзадач (17)–(23) и (24)–(31).

Доказательство. Необходимость условий теоремы 2 очевидна. **Достаточность.** Из условий (10), (11), (16) вытекает, что для любого допустимого решения задачи (1)–(8) справедливы равенства: $x_{ijk} = 0 \quad \forall i \in E, \quad \forall j \in \bar{F}, \quad k = \bar{1}, r, \quad x_{ijk} = 0 \quad \forall i \in \bar{E}, \quad \forall j \in F, \quad k = \bar{1}, r$. Стало быть, решение задачи (1)–(8) сводится к решению подзадач (17)–(23) и (24)–(31).

Заметим, что аналог теоремы 2 справедлив и для задачи (1)–(8) в случае, когда существуют непустые множества $S \subseteq \{\bar{1}, s\}$ и $L \subseteq \{\bar{1}, l\}$, для которых выполняются равенства $d_{pq}^+ = 0 \quad \forall (p, q) \in (S \times \bar{L}) \cup (\bar{S} \times L)$, где, как и раньше, $\bar{S} = \{\bar{1}, s\} \setminus S$, $\bar{L} = \{\bar{1}, l\} \setminus L$. В этом случае одна из подзадач совпадает с подзадачей (24)–(31), а другая подзадача представляется

$$\begin{aligned} & \text{в виде (17)–(20), (23) и дополнительных условий: } \sum_{j \in F} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in \\ & \in R \cap E, \quad \sum_{j \in F} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq a_i \quad \forall i \in E \setminus (R \cap E), \quad d_{pq} \leq \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq \\ & \leq d_{pq}^+ \quad \forall (p, q) \in S \times L. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И., Корзников А. Д.— В сб.: Вопросы оптимизации планирования народного хозяйства союзной республики.— Минск, 1976, с. 31.
2. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И.— Промышленность Белоруссии, 1978, № 10, с. 82.
3. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И., Корзников А. Д., Шилкин В. Г.— В сб.: Автоматизированные системы плановых расчетов в республиканских плановых органах, вып. 13.— Минск, 1978, с. 6.
4. Голованчиков И. Я., Душук С. В.— Промышленность Белоруссии, 1980, № 1, с. 15.
5. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И.— В сб.: Планирование и прогнозирование экономического развития, вып. 6.— Минск, 1974, с. 157.
6. Беляева Л. В., Журбенко Н. Г., Шор Н. З.— Экономика и математические методы, 1978, т. 14, вып. 1, с. 137.
7. Берж К. Теория графов и ее приложения.— М., 1962.

Л. А. КАЗАКЕВИЧ, П. Ф. ЛУГАКОВ

ОБРАЗОВАНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ДЕФЕКТОВ В КРЕМНИИ С ДИСЛОКАЦИЯМИ

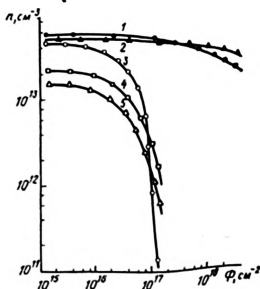
Эффективность введения радиационных дефектов (РД) в кремнии зависит [1—3] от его исходного совершенства, в первую очередь, от примесного состава. При этом большинство исследований, как правило, проводилось на бездислокационных кристаллах, в силу чего оказалось невыясненным влияние дислокаций на процессы дефектообразования при облучении кремния частицами высоких энергий. В данном сообщении приведены некоторые результаты по изучению скоростей введения РД в кремнии с дислокациями.

Исследовались кристаллы *n*- и *p*-типа с исходным удельным сопротивлением $\rho=20\text{--}100$ Ом·см, выращенные по методу Чохральского (тянутые) и зонной плавкой в вакууме (зонные). Образцы с ориентацией ребер $\langle 111 \rangle$, $\langle 112 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ имели соответственно размеры $1,3 \times 1,8 \times 15$ мм³. Дислокации вводились при пластической деформации кристаллов методом четырехопорного изгиба вокруг направления $\langle 112 \rangle$ при температуре 750 °С в течение 1—5 мин. Плотность дислокаций определялась по подсчету ямок травления после обработки образцов в хромовом травителе. Облучение исходных, контрольных (прошедших идентичную термообработку без деформации) и деформированных кристаллов производилось гамма-квантами Co^{60} при температуре ≤ 50 °С.

Исследовались температурные (80—400 К) зависимости коэффициента Холла.

Из их анализа следует, что в запрещенной зоне деформированных кристаллов кремния появляется ряд дополнительных (по сравнению с исходными и контрольными образцами) донорных и акцепторных уровней дефектов. Следствием этого является уменьшение концентрации электронов в зоне проводимости кремния *n*-типа при увеличении плотности дислокаций, тогда как для *p*-кремния, наоборот, характерным является некоторое увеличение концентрации дырок в валентной зоне.

На рисунке приведены измеренные при комнатной температуре зависимости концентрации (*n*) свободных электронов в зоне проводимости исходных (плотность дислокаций $N_D \approx 3 \cdot 10^4$ см⁻²) и дислокационных



Зависимость концентрации носителей тока в кремнии от интегрального потока гамма-квантов Co^{60} :

1, 2 — тянутый кремний; 3—5 — зонный. N_D , см⁻²: 1, 3 — $3 \cdot 10^4$; 4 — $3 \cdot 10^4$; 2, 5 — $6 \cdot 10^4$

($N_D \geq 3 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2}$) кристаллов n -кремния от интегрального потока гамма-квантов (Φ)*. Воспользовавшись этими результатами, можно, например, по 10%-ному изменению концентрации определить начальные скорости удаления носителей тока (НСУН). Полученные значения НСУН $\left(\frac{dn}{d\Phi}\right)_0$, $\left(\frac{dp}{d\Phi}\right)_0$ для некоторых из исследовавшихся кристаллов n - и p -кремния приведены в таблице. Здесь же даны скорости введения А-центров $\left(\frac{dN_A}{d\Phi}\right)$, которые являются одними из основных РД в зонном и тянутом n -кремнии [1]. Анализ этих результатов показывает, что с ростом плотности дислокаций уменьшается как НСУН, так и скорость введения А-центров в зонных и тянутых кристаллах n -кремния различного удельного сопротивления. Аналогично обстоит дело и в p -кремнии. Все это указывает на то, что независимо от примесного состава (концентрации и типа легирующих и технологических примесей) исследуемых кристаллов кремния дислокации оказывают значительное влияние на скорость образования РД.

Начальные скорости удаления носителей тока и скорости введения А-центров

N_D см^{-2}	Зонный n -Si $\rho = 90 \text{ Ом}\cdot\text{см}$		Тянутый n -Si $\rho = 80 \text{ Ом}\cdot\text{см}$		Тянутый n -Si $\rho = 25 \text{ Ом}\cdot\text{см}$		Тянутый p -Si $\rho = 20 \text{ Ом}\cdot\text{см}$
	$\left(\frac{dn}{d\Phi}\right)_0$ см^{-1}	$\frac{dN_A}{d\Phi}$ см^{-1}	$\left(\frac{dn}{d\Phi}\right)_0$ см^{-1}	$\frac{dN_A}{d\Phi}$ см^{-1}	$\left(\frac{dn}{d\Phi}\right)_0$ см^{-1}	$\frac{dN_A}{d\Phi}$ см^{-1}	$\left(\frac{dp}{d\Phi}\right)_0$ см^{-1}
$3 \cdot 10^4$	$8,0 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$
$3 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	—	—	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$
$6 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	—
$1 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	—	—	—

Изучение температурных зависимостей концентрации носителей тока показывает, что энергетический спектр уровней РД один и тот же в исходных и деформированных кристаллах. Основные из них — это $E_c - 0,17 \text{ эВ}$ (А-центр) и $E_c - 0,40 \text{ эВ}$ (Е-центр, дивакансия) в n -кремнии и $E_v + 0,21 \text{ эВ}$ (бор-дивакансия), $E_v + 0,27 \text{ эВ}$ (дивакансия), $E_v + 0,35 \text{ эВ}$ (кислород-дивакансия) в кремнии p -типа [3—5]. В таком случае НСУН будет определяться заполненными в условиях эксперимента ($T = 300 \text{ К}$) уровнями дефектов $E_c - 0,40 \text{ эВ}$ (n -кремний) и $E_v + 0,27$, $E_v + 0,35 \text{ эВ}$ (p -кремний). Так как с ростом N_D уменьшается НСУН, то на основании этого можно сделать вывод об уменьшении скорости введения этих дефектов, как и А-центров, с увеличением плотности дислокаций.

Полученные экспериментальные результаты можно объяснить следующим образом. Генерируемые облучением первичные РД (вакансии и междоузельные атомы) под действием возникающих вокруг дислокационных линий полей упругих напряжений мигрируют к дислокациям, где они исчезают на краю лишней полуплоскости или аннигилируют между собой. С другой стороны, вокруг дислокаций возможно образование атмосферы комплексов первичных РД с примесными атомами или друг с другом. В результате этого концентрация свободных вакансий (и междоузельных атомов), участвующих в образовании электрически активных РД, в дислокационных кристаллах будет намного меньше по сравнению с исходными.

Таким образом, результаты эксперимента интерпретируются с учетом того, что вводимые при пластической деформации дислокации являются стоками для первичных РД. По этой причине с увеличением

* Для контрольных и исходных образцов зависимости $n(\Phi)$ оказались совпадающими.

плотности дислокаций эффективность введения основных РД в p - и p -кремнии уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов И. П., Логвиненко Т. А., Лугаков П. Ф., Ткачев В. Д.—ФТП, 1974, т. 8, № 8, с. 1431.
2. Винецкий В. Л., Ерицян Г. Н., Конозенко И. Д., Старчик М. И.—ФТП, 1968, т. 2, № 9, с. 1236.
3. Вавилов В. С. Действие излучений на полупроводники.—М., 1963.
4. Лугаков П. Ф., Лукашевич Т. А.—ФТП, 1978, т. 12, № 8, с. 1660.
5. Козлов И. П., Литвинко А. Г., Лугаков П. Ф. и др.—ФТП, 1972, т. 6, № 10, с. 2048.

Поступила в редакцию
04.11.78.

НИИ ПФП

УДК 536.21+536.631

С. Ю. ЯНОВСКИЙ

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ТЕМПЕРАТУРЫ В МАТЕРИАЛАХ С ТЕПЛОВОЙ ПАМЯТЬЮ

Одним из актуальных вопросов теории теплопроводности является исследование процессов переноса тепла в материалах с тепловой памятью [1]. Особый интерес представляют температурные волны в таких материалах, которые имеют скорости распространения и коэффициенты затухания, отличные от аналогичных соотношений в классической теории теплопроводности. Интерес этот также стимулируется экспериментальными работами по распространению тепла в чистых кристаллических телах при низких температурах, где наблюдаются отклонения от закона Фурье [2].

Рассмотрим бесконечное изотропное пространство, наделенное тепловой памятью с а) цилиндрической полостью радиуса R ; б) сферической полостью радиуса R .

Температура пространства и скорость его нагревания в начальный момент времени равны нулю. Температура Θ на поверхностях $r=R$ принимает в начальный момент некоторое значение Θ_0 и остается в дальнейшем постоянной.

Для определения нестационарного температурного поля в пространстве используем линсализованное уравнение теплопроводности Гуртина — Пипкина [3] без источника:

$$\begin{aligned} c_v \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \beta(0) \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \int_0^{\bar{t}} \beta'(s) \frac{\partial \Theta(\bar{r}, t-s)}{\partial t} ds = \\ = \alpha(0) \Delta \Theta + \int_0^{\bar{t}} \alpha'(s) \Delta \Theta(\bar{r}, t-s) ds, \end{aligned} \quad (1)$$

где c_v — объемная теплоемкость; $\alpha(t)$ — функция релаксации теплового потока; $\beta(t)$ — функция релаксации внутренней энергии; Δ — оператор Лапласа.

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$\Theta(\bar{r}, 0) = \dot{\Theta}(\bar{r}, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\Theta(R, t) = \eta(t) \Theta_0; \lim_{|\bar{r}| \rightarrow \infty} \Theta(\bar{r}, t) \neq \infty, \quad (3)$$

где $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Записывая оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах с учетом симметричности задач и применяя к (1), (3) преобразование Лапласа с учетом начальных условий (2), получаем

$$\frac{d^2 \bar{\Theta}(r, p)}{dr^2} + \frac{k}{r} \frac{d \bar{\Theta}(r, p)}{dr} - p \left(\frac{c_v + \bar{\beta}}{\alpha} \right) \bar{\Theta} = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\Theta}(R, p) = \Theta_0 |p|; \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\Theta}(r, p) \neq \infty, \quad (5)$$

где $\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt$; $k=1$ для случая (а), $k=2$ для случая (б).

Решение уравнения (4) при граничных условиях (5) имеет вид: для случая (а)

$$\bar{\Theta}(r, p) = \frac{\Theta_0 K_0 \left(r \sqrt{p \frac{c_v + \bar{\beta}}{\alpha}} \right)}{p K_0 \left(R \sqrt{p \frac{c_v + \bar{\beta}}{\alpha}} \right)}, \quad (6)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя, и для случая (б)

$$\bar{\Theta}(r, p) = \frac{\Theta_0 R \exp \left[-(r-R) \sqrt{p \frac{c_v + \bar{\beta}}{\alpha}} \right]}{rp}. \quad (7)$$

Для того, чтобы перейти в (6), (7) от изображений к оригиналам зададим функции релаксации в виде [4]:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha(0) + \alpha'(0)t + o(t^2), \\ \beta(t) &= \beta(0) + \beta'(0)t + o(t^2) \end{aligned} \quad (8)$$

и будем искать решение для малых времен (или для больших p). Тогда, используя разложение в ряд Тейлора выражения

$$\sqrt{p \frac{c_v + \bar{\beta}}{\alpha}} \approx \frac{p}{u} \left[1 + \frac{1}{2p} \left(\frac{\beta(0)}{c_v} - \frac{\alpha'(0)}{\alpha(0)} \right) + o\left(\frac{1}{p^2}\right) \right], \quad (9)$$

где $u^2 = \alpha(0)/c_v$, и асимптотические представления функций Бесселя для больших значений аргумента

$$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad (10)$$

мы получим приближенное решение для распределения температуры в пространстве в виде

$$\Theta(r, t) \approx \Theta_0 \sqrt{\frac{R}{r}} \eta \left(t - \frac{r-R}{u} \right) \exp \left[\frac{\alpha'(0) - u^2 \beta(0)}{2u\alpha(0)} (r-R) \right] \quad (11)$$

для случая (а),

$$\Theta(r, t) \approx \Theta_0 \frac{R}{r} \eta \left(t - \frac{r-R}{u} \right) \exp \left[\frac{\alpha'(0) - u^2 \beta(0)}{2u\alpha(0)} (r-R) \right], \quad (12)$$

для случая (б).

Решения (11), (12) представляют собой цилиндрическую и сферическую волны температуры, распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью $u = \sqrt{\alpha(0)/c_v}$. Тем самым снимается парадокс бесконечной скорости распространения тепла в классической теории теплопроводности.

На фронтах волн температура терпит разрыв, затухающий в глубь пространства при выполнении условия $\alpha'(0) - u^2 \beta(0) < 0$, что согласуется с результатами работы [5].

Задавая функцию релаксации теплового потока в виде ядра Максвелла — Каттонго $\alpha(t) = -\frac{\lambda}{\tau_r} \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right)$ и считая, что релаксации внутренней энергии не происходит: $\beta(t) = 0$; $\beta(0) = c_v/\tau_r$, мы получаем из (6), (7) решение гиперболического уравнения теплопроводности [6].

Наконец, если задать функции релаксации в виде $\alpha(t) = A \exp(-\omega_1 t)$; $\beta(t) = B \exp(-\omega_2 t)$ и рассмотреть случай больших времен, то полученное

решение будет удовлетворять классическому уравнению теплопроводности и полностью совпадать с ним при $\omega_1 = \beta_0 / c_0$; $\omega_2 = \infty$; $\alpha(0) / \beta(0) = a$, где a — коэффициент температуропроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. — ИФЖ, 1974, т. 26, № 5, с. 781.
2. Rogers S. J. — Phys. Rev., 1971, v. B3, p. 1440.
3. Gurtin M. E., Pipkin A. C. — Arch. Rational Mech. Anal., 1968, v. 31, № 2, p. 113.
4. Amos D. E., Chen P. J. — Trans. ASME, 1970, v. 37E, p. 243.
5. Chen P. J. — ZAMP, 1969, v. 20, p. 448.
6. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. — Киев, 1976.

Поступила в редакцию
29.01.79.

Кафедра теплофизики

УДК 539.107.5

В. Л. ГУРАЧЕВСКИЙ, А. С. СОЛНЦЕВ

МЕССБАУЭРОВСКИЙ СПЕКТРОМЕТР С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Высокая точность, стабильность, автоматическая регистрация всего спектра в выбранном диапазоне скоростей, наконец, удобство работы делают мессбауэровские спектрометры с постоянным ускорением предпочтительными в целом ряде исследований [1, 2]. В таких спектрометрах источник γ -квантов совершает периодическое движение относительно поглотителя, причем в каждом периоде скорость изменяется от максимального отрицательного до максимального положительного значения и, наоборот, по линейному закону; при этом создается необходимое для наблюдения спектров доплеровское смещение энергии излучаемых квантов относительно энергии резонансного поглощения.

Система движения, или вибратор, является важнейшей частью спектрометра. Нами используется электромеханический вибратор, созданный на основе магнитных систем двух мощных громкоговорителей с общей подвижной частью, на которой крепится мессбауэровский источник. Катушка одного из громкоговорителей (задающая) подключена к выходу усилителя мощности, сигнал со второй (измерительной), пропорциональный скорости движения, используется для создания 100%-ной отрицательной обратной связи, благодаря чему закон изменения скорости с большой точностью повторяет изменение входного напряжения. Для получения мессбауэровского спектра, таким образом, достаточно произвести сортировку импульсов, поступающих с детектора, в зависимости от значения скорости движения (или входного напряжения вибратора). Это осуществляется с помощью многоканального анализатора (МА).

Блок-схема спектрометра приведена на рис. 1. МА работает в режиме многоканального пересчета, т. е. в его арифметический регистр поочередно на равные промежутки вызывается и изменяется на число посту-

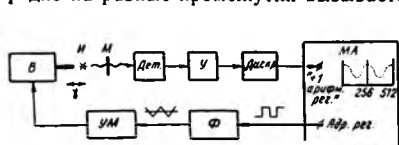


Рис. 1. Структурная схема мессбауэровского спектрометра с постоянным ускорением:

МА — многоканальный анализатор; Ф — формирователь; УМ — усилитель мощности; В — вибратор; И — источник излучения γ -квантов; М — мишень; Дет. — детектор; У — усилитель; Дискр. — дискриминатор

павших входных импульсов содержимое каналов памяти от первого до последнего и т. д. Синхронно с этим формируется симметричный сигнал треугольной формы с периодом, равным периоду развертки. С этой целью используется сигнал с последнего триггера адресного регистра МА, который симметризируется и интегрируется прецизионным интегратором.

Сформированный сигнал поступает на вход вибратора. Таким образом устанавливается однозначное линейное соответствие между значением скорости источника и номером канала МА.

Прошедшие через поглотитель γ -кванты регистрируются детектором, импульсы с которого после усиления поступают на дискриминатор, выделяющий нужный участок спектра (мессбауэровскую линию) и, далее, на вход «+1» арифметического регистра МА. Из сказанного ясно, что эти импульсы будут записываться в каналы памяти, соответствующие мгновенной скорости источника.

Вся электронная часть спектрометра выполнена с применением высококачественных операционных усилителей серии К153, благодаря чему достигнуты высокие параметры. Линейность спектрометра, измеренная с помощью калибровочного источника Co^{57} в железной матрице, составляет величину, меньшую 1%, что достаточно для проведения большинства измерений. Диапазон скоростей вибратора от 1 до 10 см/с. Прибор обладает высокой долговременной стабильностью, в частности, при проведении некоторых экспериментов он обеспечивал непрерывную работу в течение 10 суток.

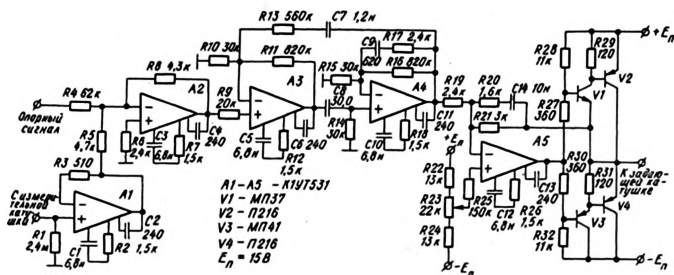


Рис. 2. Принципиальная схема усилителя к вибратору

Принципиальная схема усилителя к электромеханическому вибратору изображена на рис. 2. Каскад на микросхеме А2 образует сумматор. Повторитель на А1 служит для согласования высокоомной измерительной катушки с сумматором. Все усиление по напряжению сосредоточено в каскадах на А3, А4. Частотно-зависимые обратные связи $R13$, $C7$ и $R17$, $C9$ предотвращают самовозбуждение усилителя вследствие побочных механических резонансов вибратора [1, 2]; А5, В1-В4 образуют усилитель мощности, к выходу которого подключена задающая катушка вибратора.

Описанный спектрометр эксплуатируется на кафедре ядерной физики около двух лет и показал хорошие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

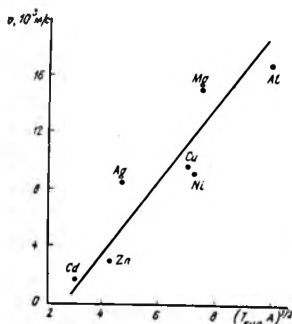
1. Сб.: Экспериментальная техника эффекта Мессбауэра. Под ред. И. Грувермана.— М., 1967.
2. Panel proceedings series. Mössbauer spectroscopy and its applications.— IAEA, Vienna, 1972.

Поступила в редакцию
16.04.79.

Кафедра ядерной физики

К ВОПРОСУ О ПРОИСХОЖДЕНИИ КАТОДНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СТРУЙ

Высокоскоростные потоки плазмы, исходящие из катодной области вакуумных дуг, были обнаружены Р. Танбергом в 1930 г. [1]. Их исследованию посвящена обширная литература, подробный обзор которой можно найти в [2]. Наибольшего доверия, по-видимому, заслуживают результаты работы [3], авторы которой, используя маятниковый метод, измерили средние скорости потоков плазмы v в дугах на семи различных металлах. Однако выдвинутый в [3] механизм ускорения катодных струй, основанный на предположении о бугре потенциала вблизи катода, является достаточно искусственным, на что неоднократно указывалось [2—5].



Зависимость экспериментальных значений скорости v катодных плазменных струй [3] от параметра $(T_{\text{кип}} A)^{1/2}$

В настоящем сообщении приводятся некоторые аргументы в пользу термического происхождения катодных плазменных струй, которое было подвергнуто сомнению из-за неспособности объяснить большие значения их скорости, оказавшиеся, как впоследствии выяснилось, сильно завышенными [2, 3]. При термическом механизме образование катодных потоков плазмы непосредственно связывается с обычным термическим испарением в вакуум материала катода вследствие его локального разогрева катодным пятном. Поток пара частично ионизируется в катодном пятне. Определенная доля ионов, ускоренных катодным падением потенциала, возвращается на катод и сообщает ему энергию, необходимую для поддержания процесса испарения. Однако нейтральные атомы и те ионы, которые образовались в периферийном слое зоны

ионизации, будут продолжать движение в направлении от катода, увлекая за собой электроны. Струйный характер этих плазменных потоков обусловлен скачкообразным движением катодного пятна и его достаточно сложной структурой. Очевидно, при термическом механизме средняя скорость катодных плазменных струй v не должна сильно отличаться от средней скорости теплового движения испаряющихся атомов и, следовательно, будет связана с температурой кипения $T_{\text{кип}}$ материала катода соотношением

$$1/2 \cdot m v^2 = 3/2 \cdot k T_{\text{кип}}, \quad (1)$$

где m — масса атома; k — постоянная Больцмана.

Если воспользоваться атомным весом A , то соотношение (1) даст простую формулу для оценок скорости катодных струй:

$$v = 1,58 \cdot 10^2 (T_{\text{кип}} A)^{1/2}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что скорость катодных плазменных струй должна быть прямо пропорциональна параметру $(T_{\text{кип}} A)^{1/2}$. График, построенный по данным работы [3], показывает, что экспериментальные точки достаточно хорошо группируются возле прямой, подтверждая тем самым общий характер закономерности, вытекающей из термического механизма. В пользу термического происхождения катодных струй свидетельствует и то, что скорость плазмы не зависит от направления движения, а распределение интенсивности плазменных потоков по углам хорошо согласуется с законом косинуса [3].

Конечно, при более точном теоретическом рассмотрении необходимо учитывать также влияние электрического и магнитного полей на динамику струй и специфику структуры катодных пятен, связанную с их типом. Интересная попытка построения последовательной теории катодных плазменных струй была недавно предпринята в работе [5].

Абсолютная величина скорости катодных струй v , рассчитанная по формуле (2), примерно в четыре раза меньше измеренной в [3]. Так, для кадмия формула (2) дает значение $v = 0,48 \cdot 10^3$ м/с. Интересно, что этот результат хорошо согласуется с экспериментальной оценкой ($v = 0,5 \cdot 10^3$ м/с), полученной в [4] по размерам светящейся области кадмиевой дуги в поперечном магнитном поле. Не исключено, что маятниковые измерения не свободны от систематической погрешности, возможность которой допускают и сами авторы [3]. Тогда различие рассчитанных и измеренных значений скорости катодных струй можно было бы отнести за счет этой погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanberg R. — Phys. Rev., 1930, v. 35, p. 1080.
2. Кесаев И. Г. Катодные процессы электрической дуги. — М., 1968.
3. Плюто А. А., Рыжков В. Н., Капин А. Т. — ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 8, с. 494.
4. Граков В. Е. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1978, № 1, с. 38.
5. Любимов Г. А. — В сб.: Экспериментальные исследования плазматронов. — Новосибирск, 1977.

Поступила в редакцию
07.06.79.

Кафедра физической оптики

УДК 681.142.621

К. П. КУРЕЛЧНИК, А. М. САРЖЕВСКИЙ

ИМПУЛЬСНЫЙ КОРРЕКТОР ТЕМНОВОГО ТОКА В ФОТОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Сигнал, генерируемый фоточувствительным устройством (например, фотоэлектронным умножителем — ФЭУ), как правило, состоит из смеси

$$A(t) = B(t) + C(t), \quad (1)$$

где $B(t)$ — полезная, а $C(t)$ — шумовая части сигнала.

Составляющая $C(t)$ представляет собой смесь как темнового тока ФЭУ, так и тока, вызванного внешними причинами (засветка, рассеянный свет и т. д.). Уровень $C(t)$ может превышать в некоторых случаях (особенно при атомно-абсорбционных измерениях, использующих неплазменные атомизаторы) полезный сигнал в десятки раз, существенно увеличивая погрешности измерения.

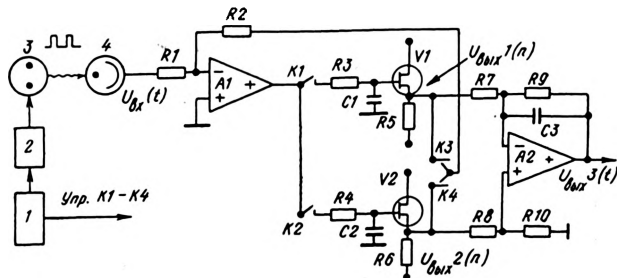


Рис. 1. Структурная схема импульсного корректора темнового тока ФЭУ

Модуляция оптического канала и фильтрование смеси (1) позволяют минимизировать влияние $C(t)$. Однако указанное фильтрование достаточно просто осуществляется лишь при гармонической модуляции.

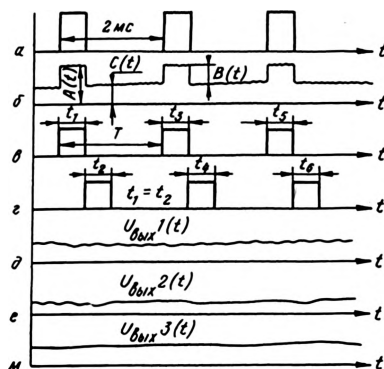


Рис. 2. Временные диаграммы работы импульсного корректора:

а — импульсы запуска лампы; б — выходное напряжение ФЭУ; в — импульсы запуска ключей К1, К2, К3, К4; д — выходное напряжение первой, е — второй ячейки памяти; ж — выходное напряжение импульсного корректора

решить поставленную задачу. Задающий генератор 1 вырабатывает последовательность импульсов (рис. 1, 2, а) и через блок питания 2 модулирует источник 3. Световой поток источника 3 преобразовывает ФЭУ 4 (рис. 2, б) и поступает на вход операционного усилителя А1. Пусть в момент времени $t_1, t_3, t_5, \dots$ замыкаются ключи К1, К3, а в моменты $t_2, t_4, t_6, \dots$ — ключи К2, К4 (рис. 2, в, г). Пусть также емкости С2, С1 за указанные промежутки времени успевают зарядиться. Поскольку ячейки памяти $R_3, C_1, V_1, R_5; R_4, C_2, V_2, R_6$ аналогичны, то найдем выражение выходного сигнала, воспользовавшись методикой, описанной в [2], например, для ячейки R_2, C_1, V_1, R_5 . Обозначим: $U_{вх1}(t) = A(t)$; $U_{вх2}(t) = C(t)$; $U_{вх3}(t) = B(t)$; тогда

$$U_{вх1}(n) = U_{вх1}(n-1) + \frac{1}{\tau_1} \frac{R_2}{R_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} U_{вх1}(t) dt - \frac{1}{\tau_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} U_{вх1}(n-1) dt. \quad (2)$$

Обозначим $\tau_1 = R_3 \cdot C_1$; $\frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{R_2}{R_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} U_{вх1}(t) dt = D_n$. Учитывая, что $U_{вх1}(n-1)$ не зависит от времени, а лишь от номера цикла, получаем

$$U_{вх1}(n) = U_{вх1}(n-1) \left[1 - \frac{T}{\tau_1} \right] + D_n. \quad (3)$$

Очевидно, что выражение (3) можно представить в виде

$$U_{вх1}(n) = D_n + D_{n-1} \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right) + D_{n-2} \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right)^2 + \dots + D_1 \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right)^{n-1} + U_0 \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right)^n, \quad (4)$$

где $U_0 \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right)^n$ — начальное выходное напряжение ячейки памяти.

Положим, что $D_1 = D_2 = \dots = D_n$, т. е. интегрируется неизменяющаяся величина, тогда будем иметь:

В случае импульсной модуляции полезного сигнала спектр его значительно шире спектра гармонически модулированного сигнала, что затрудняет процесс фильтрования. Еще более усложняется задача фильтрования смеси (1) при использовании нескольких источников излучения, работающих по принципу временного разделения на одной несущей частоте, причем с целью увеличения интенсивности излучения скважность модулирующих сигналов всегда более двух [1]. Фактически устройство выделения полезного сигнала из смеси (1) должно решать задачу синхронного приема импульсных сигналов с одновременным фильтрованием аддитивных помех.

В данной работе предлагается устройство, позволяющее

$$U_{\text{вых1}}(n) = \frac{1}{\tau_1} \frac{R_2}{R_1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} U_{\text{вх1}}(t) dt \frac{\tau_1}{T} \left[1 - \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right)^n \right] + U_0 \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right)^n =$$

$$= \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{T} \int_0^T U_{\text{вх1}}(t) dt \left[1 - \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right)^n \right] + U_0 \left(1 - \frac{T}{\tau_1} \right)^n; \quad (5)$$

Если $0 < \frac{T}{\tau_1} < 2$, т. е. $1 - \frac{T}{\tau_1} < 1$, то

$$U_{\text{вых1}}(\infty) = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{T} \int_0^T U_{\text{вх1}}(t) dt. \quad (6)$$

Таким образом, выходное напряжение первой ячейки памяти есть усредненная за время T величина $A(t)$ (рис. 2, ∂). Очевидно, что выходное напряжение второй ячейки памяти есть усредненная за время T величина $C(t)$ (рис. 2, e):

$$U_{\text{вых2}}(\infty) = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{T} \int_0^T U_{\text{вх2}}(t) dt. \quad (7)$$

Указанные напряжения подаются на дифференциальный усилитель А2, в обратной связи которого для подавления высших гармоник включена емкость С3.

Выходное напряжение А2 определим следующим образом:

$$U_{\text{вых3}}(t) = U_{\text{вых1}}(\infty) - U_{\text{вых2}}(\infty) = K \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt, \quad (8)$$

где K — коэффициент передачи А2 (рис. 2, $ж$).

Интересно отметить, что в формулах (6)–(8) величина емкостей С1, С2 не учитывается (необходимо лишь, чтобы они успевали заряжаться за время работы ключей К1, К2), что на практике позволяет применять емкости без отбора.

Таким образом, предлагаемое устройство выполняет функции импульсного синхронного демодулятора с фильтрованием аддитивной помехи, обусловленной как темновым током ФЭУ, так и внешними причинами.

Описанный демодулятор применяется в импульсном двухлучевом атомно-абсорбционном спектрофотометре в качестве входного фильтра. Частотный режим его следующий: период повторения работы ключей К1, К3, К2, К4 — 2 мс, при длительности включения 200 мкс. В качестве усилителей А1 и А2 применимы микросхемы типа К140УД8А, V_1 , V_2 — 2ПЗ03Г, С1, С2, С3 — К77-1, резисторы R_1 , R_2 , R_7 , R_8 , R_9 , R_{10} типа С5-55.

Глубина подавления аддитивных помех не менее 70 дБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курейчик К. П. — ЖСП, 1977, т. 27.
2. Ноултон Д. — Электроника, 1972, т. 18.

Поступила в редакцию
13.06.79.

Кафедра общей физики

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ $1/2$ В ПОЛЕ ОДНОМЕРНОГО
ОСЦИЛЛЯТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим поведение частицы со спином $1/2$ по теории Дирака в случае потенциала $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$. Поскольку задача одномерная, то уравнение Дирака запишется

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \kappa \right) \psi(x, x_4) = 0, \quad \kappa = \frac{mc}{\hbar}, \quad x_4 = ict. \quad (1)$$

После введения взаимодействия градиентно-инвариантным способом, т. е. в нашем случае заменой $\frac{\partial}{\partial x_4} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{V(x)}{\hbar c} = \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{1}{2} \frac{m \omega^2 x^2}{\hbar c}$, уравнение (1) примет вид

$$\left[\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 \left(\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{1}{2} \frac{m \omega^2 x^2}{\hbar c} \right) + \kappa \right] \psi(x, x_4) = 0. \quad (2)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\psi(x, x_4) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$. Из (2) для искомого биспинора $\psi(x)$ получим уравнение

$$\left[\hbar c \gamma_1 \frac{d}{dx} - \gamma_4 \left(E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) + mc^2 \right] \psi(x) = 0. \quad (3)$$

Точное решение системы (3) получить не удалось. Был совершен переход к нерелятивистскому приближению согласно правилам $E \rightarrow E + mc^2$, $E - V(x) \ll mc^2$ [1]. Это значит, что мы ограничиваемся случаем малых скоростей. Опустив поэтому в системе (3) релятивистские члены и исключив малые компоненты волновой функции, получим для больших компонент уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{1,2}}{dx^2} - \frac{\hbar^2 \omega^2 x}{4mc^2} \frac{d \psi_{1,2}}{dx} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi_{1,2} = E \psi_{1,2}. \quad (4)$$

Уравнение (4) отличается от известного уравнения Шредингера для линейного гармонического осциллятора членом $-\frac{\hbar^2 \omega^2 x}{4mc^2} \frac{d \psi_{1,2}}{dx}$, который дает дополнительную энергию частицы со спином в поле квазиупругих сил и аналогичен поправке Томаса — Френкеля в случае полуклассического рассмотрения спин-орбитального взаимодействия электрона в атоме.

Уравнение (4) будем решать с помощью теории возмущений, взяв в качестве оператора возмущения $H' = \lambda x \frac{d}{dx}$, где $\lambda = -\frac{\hbar^2 \omega^2}{4mc^2}$. Обозначив уровни энергии невозмущенного оператора $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ через $E_n^{(0)} = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$, а собственные функции через

$$\psi_n^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) -$$

— полиномы Чебышева — Эрмита, получим для собственных значений оператора $H = H_0 + H'$ выражение $E_n = E_n^{(0)} + \lambda \left(x \frac{d}{dx} \right)_{nn}$. Вычисление поправки первого приближения дает $\left(x \frac{d}{dx} \right)_{nn} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(n^{3/2} - \frac{1}{2} \sqrt{n+1} \right)$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Окончательно собственные значения энергии частицы в поле одномерного осцилляторного потенциала с учетом спина будут

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2 \omega^2}{4\sqrt{2}mc^2} \left(n^{3/2} - \frac{1}{2} \sqrt{n+1} \right). \quad (5)$$

Как видно из (5), учет наличия спина у частицы приводит к сдвигу ее энергетических уровней, величина которого зависит от квантового числа n и существенно зависит от частоты колебаний осциллятора. Условием применимости полученных результатов является требование, чтобы $\hbar\omega \ll mc^2$. Только в этом случае возможно применение теории возмущений. С другой стороны, для возможности обнаружения этого взаимодействия на опыте нужно, чтобы $\hbar\omega$ была не слишком малой по сравнению с mc^2 .

В заключение сравним поправку на спин-орбитальное взаимодействие с поправкой на ангармоничность линейного осциллятора. Если взять выражение для потенциальной энергии в виде $V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \lambda x^3$, то во втором приближении теории возмущений получим для поправки к уровням энергии осциллятора выражение $-\frac{15}{4} \left(\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \right) \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^3 \left(n^2 + n + \frac{11}{30} \right)$ [2]. Последняя будет сравнима со спиновой поправкой для частот осциллятора удовлетворяющих условию $\omega \simeq \left(\frac{5\lambda c}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$.

Проведенное сравнение позволяет сделать вывод о том, что в широкой области частот колебаний осциллятора спин-орбитальное взаимодействие должно учитываться наряду с ангармоничностью (оба сдвигают уровни энергии в одном и том же направлении).

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М. Квантовая механика.— М., 1962.
2. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики.— М., 1976.

Поступила в редакцию
06.06.79.

Кафедра теоретической физики

УДК 681.3.06

Г. А. ДРОБУШЕВИЧ, ТО ТУАН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СИНТАКСИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЯЗЫКОВ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Одним из двух принципов построения математического обеспечения обучающих систем (ОБС) является опознавание ответов обучаемых [1]. Решение этой задачи в системах обучения языкам программирования прежде всего предусматривает использование диагностических возможностей транслятора или интерпретатора. Однако выделить анализатор из транслятора, как правило, очень трудно, и транслятор анализирует только один язык программирования по заданной схеме, изменить которую нелегко, так как для этого нужно переделывать блок анализа [2]. В данной работе предлагается один метод синтаксического анализа языков программирования, в частности, языка Ассемблер ЕС ЭВМ, который является объектом обучения разрабатываемой нами ОБС. Синтаксис любого известного языка программирования может описываться с помощью БНФ [3]. Пусть T — множество терминальных символов; V — множество нетерминалов. Рассмотрим БНФ со следующими свойствами:

- 1) ее правила вывода не являются леворекурсивными;
- 2) ее правила вывода имеют либо вид $\langle A \rangle ::= \alpha_0$, либо вид $\langle A \rangle ::= t_1 \alpha_1 | t_2 \alpha_2 | \dots | t_m \alpha_m | \langle B \rangle \alpha_{m+1}$, где $t_i \in T$, $i = 1, 2, \dots, m$ и $t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_m$; $\alpha_i \in (VUT)^*$, $i = 0, 1, \dots, m+1$, $A, B \in V$. Кроме этого, не

существует вывода типа $\langle B \rangle \Rightarrow *t_i \alpha$ ни для какого-либо i из $\{1, 2, \dots, m\}$ ($\alpha \in (VUT)^*$).

Такие БНФ будем обозначать через МБНФ. Очевидно, что, если синтаксис некоторого языка описывается с помощью МБНФ, для синтаксического анализа его предложений можно использовать алгоритм безвозвратного нисходящего разбора слева направо по символам. Язык Ассемблер ЕС ЭВМ не может описываться с помощью МБНФ, так как второй операнд формата *RX* имеет следующий синтаксис:

$\langle \text{ВТОРОЙ ОПЕРАНД} \rangle :: = \langle \text{НЕЯВНЫЙ АДРЕС} \rangle \alpha_1 |$
 $\langle \text{СМЕЩЕНИЕ} \rangle \alpha_2,$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in (VUT)^*$. Однако это не мешает нам использовать алгоритм безвозвратного нисходящего анализа. Действительно, известно, что $\langle \text{НЕЯВНЫЙ АДРЕС} \rangle$ и $\langle \text{СМЕЩЕНИЕ} \rangle$ задаются перемещаемым и абсолютным выражениями соответственно. Из этого следует, что первые символы второго операнда необходимо обрабатывать, как любое арифметическое выражение. После вычисления перемещаемости этого выражения нетрудно определить, какую из двух альтернатив надо выбрать для дальнейшего анализа.

Мы пришли к выводу, что необходимо иметь такой метаязык, который в отличие от БНФ наиболее естественно увязывает синтаксис и семантику языка. Рассмотрим пример использования МУ-метаязыка, который является модификацией предложенного в [4] метаязыка управляющих грамматик. В языке Ассемблер ЕС ЭВМ каждый терм [5] имеет следующий синтаксис:

$\langle \text{ТЕРМ} \rangle :: = X' \langle \text{Ш. ЧИСЛО} \rangle' | V' \langle \text{ДВ. ЧИСЛО} \rangle' |$
 $C' \langle \text{СИМВОЛ} \rangle' | L' \langle \text{МЕТКА} \rangle | \langle \text{МЕТКА} \rangle | \langle \text{ДЕС. ЧИСЛО} \rangle | *$

Здесь используются сокращения: шестнадцатеричное, двоичное, десятичное число соответственно. Поскольку $\langle \text{МЕТКА} \rangle$ может начинаться с любой из букв X, B, C, L , то невозможно определить нужную альтернативу из этого правила по текущему символу. Необходимое направление анализа можно выбрать только при сравнении следующего символа с апострофом. Синтаксис и семантика термина очень легко и удобно описываются на МУ-метаязыке, который ориентирует на распознавание следующим образом:

$\langle \text{ТЕРМ} \rangle : [X], 1, \langle \text{Ш. ЦИФРА} \rangle, + \langle \text{АПОСТРОФ} \rangle, \text{ЧТ}$
 $[B], 2, \langle \text{ДВ. ЦИФРА} \rangle, + \langle \text{АПОСТРОФ} \rangle, \text{ЧТ}$
 $[C], 3, \langle \text{СИМВОЛ} \rangle, + \langle \text{АПОСТРОФ} \rangle, \text{ЧТ}$
 $[L], 4, \langle \text{МЕТКА} \rangle, + \langle \text{АПОСТРОФ} \rangle, \text{ЧТ}$

- * Для стоящих выше строк старая верхушка МЦ заменяется первым
- * нетерминалом, а второй нетерминал (после знака +) становится
- * новой вершиной.

$[*], 5, -, \text{ЧТ}, PR0 / * \text{МЦ выталкивается}$

$DSIFRA, 6, \langle \text{ДЕС. ЦИФРА} \rangle, \text{ЧТ}, PR1$

$BUCVA, 7, \langle \text{БУКВА} | \text{ЦИФРА} \rangle, \text{ЧТ}, PR1$

- * Для стоящих выше строк верхушка МЦ заменяется новым нетермина-
- * лом.

$\text{ЛСТ}, 8, 0; \text{ТЕРМ НЕВЕРЕН}, \text{ПА} / * \text{вывести сообщение}$

$\langle \text{АПОСТРОФ} \rangle : [], 1, -, \text{ЧТ}, PR8 / * \text{МЦ выталкивается}$

$\text{ЛСТ}, 2, -, \langle \text{БУКВА} | \text{ЦИФРА} \rangle, \text{ПА}, PR5$

- * Для стоящей выше строки МЦ выталкивается, затем новая вершина
- * МЦ заменяется нетерминалом $\langle \text{БУКВА} | \text{ЦИФРА} \rangle$

$\langle \text{Ш. ЦИФРА} \rangle : SSIFRA, 1, =, \text{ЧТ}, PR3 / * \text{МЦ не изменяется}$

$[], 2, -, \text{ЧТ}, PR4$

$\text{ЛСТ}, 3, 0; \text{НЕ Ш. ЦИФРА}, \text{ПА}$

$\langle \text{ДЕС. ЦИФРА} \rangle : DSIFRA, 1, =, \text{ЧТ}, PR3$

$\text{ЛСТ}, 2, -, \text{ПА}, PR6$

$\langle \text{БУКВА} | \text{ЦИФРА} \rangle : BUSI, 1, =, \text{ЧТ}, PR3$

$\text{ЛСТ}, 2, -, \text{ПА}, PR2$

Для синтаксического анализа используется так называемый магазин

целей МЦ, вершушка которого является текущей целью анализа (МЦ состоит из нетерминалов). В зависимости от текущего символа анализируемой цепочки содержимое МЦ изменяется (В МУ-метаязыке действия по изменению МЦ указываются символами $\{+, -, =\}$, которые поясняются в комментариях). Пусть конфигурация К МУ-грамматики (т. е. грамматики, правила вывода которой задаются на МУ-метаязыке) есть кортеж $K = \{l, a_1 a_2 \dots a_{n-1} \uparrow a_n\}$, где $l \in T^*$: $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ — содержимое МЦ; a_n — его вершушка; стрелка $\uparrow$ указывает, что a_n является текущей целью анализа. Процесс анализа изображается цепочкой переходов из одной конфигурации в другую.

Примеры. 1) $l = X'IA'$

$$\begin{aligned} (X'IA', \uparrow \langle \text{ТЕРМ} \rangle) &\Rightarrow (\uparrow IA', \langle \text{Ш. ЦИФРА} \rangle \uparrow \langle \text{АПОСТРОФ} \rangle) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (IA', \uparrow \langle \text{Ш. ЦИФРА} \rangle) \Rightarrow (A', \uparrow \langle \text{Ш. ЦИФРА} \rangle) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (', \uparrow \langle \text{Ш. ЦИФРА} \rangle) \Rightarrow (\lambda, \lambda), \end{aligned}$$

где λ — символ пустой цепочки. 2) $l = \text{ХОР}$

$$\begin{aligned} (\text{ХОР}, \uparrow \langle \text{ТЕРМ} \rangle) &\Rightarrow (\text{ОР}, \langle \text{Ш. ЦИФРА} \rangle \uparrow \langle \text{АПОСТРОФ} \rangle) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\text{ОР}, \uparrow \langle \text{БУКВА} \mid \text{ЦИФРА} \rangle) \Rightarrow (\text{Р}, \uparrow \langle \text{БУКВА} \mid \text{ЦИФРА} \rangle) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\lambda, \uparrow \langle \text{БУКВА} \mid \text{ЦИФРА} \rangle) \Rightarrow (\lambda, \lambda). \end{aligned}$$

В МУ-метаязыке символы ЧТ и ПА указывают, что нужно считать следующий символ или продолжать анализ без чтения соответственно. *DSIFRA*, *BUCVA*, *SSIFRA*, *BUST* — имена подпрограмм, определяющих типы символов (десятичная цифра, буква, ...). Подпрограммы PR_i , $i=0, 1, \dots, 6$ выполняют необходимые действия (подсчет количества символов, перевод символа из одной формы представления в другую, ...) после распознавания соответствующего символа анализируемой цепочки. В настоящее время реализованы программы перевода МУ-метапрограмм (на МУ-метаязыке) в машинную форму представления и программа синтаксического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М. и др. — В сб.: Обучение программированию с помощью цифровых вычислительных машин. — Киев, 1970, с. 3.
2. Белов В. Н. — В сб.: Вопросы реализации систем программирования. — Киев, 1976, с. 26.
3. Алгоритмический язык АЛГОЛ-60. Пересмотренное сообщение. — М., 1965.
4. Кузнецов С. И. Математическое обеспечение автоматизированных обучающих систем. — Казань, 1977.
5. Программирование на языке Ассемблер ЕС ЭВМ. — М., 1977.

Поступила в редакцию
21.03.78.

Кафедра общего программирования

УДК 517.392

И. Н. МЕЛЕШКО

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

1. Вычисление коэффициентов интерполяционных квадратурных формул, содержащих производные плотности, для простейших интегралов типа Коши и сингулярных интегралов по разомкнутому контуру.

Упомянутые квадратурные формулы рассматриваются в [1] для интегралов

$$\Phi(z) = \Phi(f|z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in [-1, 1], \quad (1)$$

$$I(x) = I(f|x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad x \in]-1, 1[\quad (2)$$

и имеют вид

$$\Phi(z) \approx -\frac{1}{\pi i} f(-1) \ln \frac{z+1}{z-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \dot{A}_k(z) f'(x_k), \quad (3)$$

$$I(x) \approx -\frac{2}{\pi} f(-1) \operatorname{Arth} x + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) f'(x_k). \quad (4)$$

Здесь коэффициенты $\dot{A}_k(z)$ и $A_k(x)$ представляют собой соответственно интегралы (1) и (2) от функций

$$B_k^n(x) = \frac{1}{\omega_k^n(x_k)} \int_{-1}^x \omega_k^n(t) dt.$$

Рассмотрим два метода вычисления коэффициентов $\dot{A}_k(z)$ и $A_k(x)$. Один из них состоит в том, что многочлен $B_k^n(x)$ разлагается по полиномам Лежандра:

$$B_k^n(x) = \sum_{v=0}^n c_v P_v(x), \quad c_v = \frac{2v+1}{2} \int_{-1}^1 B_k^n(x) P_v(x) dx,$$

а затем это разложение подставляется в интегралы, через которые выражаются коэффициенты. В результате, после применения известного соотношения [2] $\int_{-1}^1 \frac{P_v(t)}{t-z} dt = -2Q_v(z)$, где $Q_v(z)$ — функция Лежандра, получим формулы

$$\dot{A}_k(z) = -\frac{2}{\pi i} \sum_{v=0}^n c_v Q_v(z), \quad A_k(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{v=0}^n c_v \operatorname{Re} (Q_v(x)).$$

Другой метод вычисления коэффициентов основан на методе точного вычисления интегралов (1), (2), который изложен в [3]. Этот метод сводится к отысканию так называемой изображающей функции для интегралов, представляющих коэффициенты $\dot{A}_k(z)$, $A_k(x)$.

2. Об одном свойстве интерполяционных квадратурных формул для интегралов (1), (2). Под интерполяционными квадратурными формулами для интегралов (1), (2) понимаются следующие формулы [4]:

$$\Phi(z) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \dot{A}_k(z) f(x_k), \quad I(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) f(x_k), \quad (5)$$

где

$$\dot{A}_k(z) = \frac{1}{\pi i \omega_k^n(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{\omega_k^n(t)}{t-z} dt, \quad A_k(x) = \frac{1}{\pi \omega_k^n(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{\omega_k^n(t)}{t-x} dt. \quad (6)$$

Очевидно, что при заданных узлах x_k квадратурные формулы (5) точны для всевозможных полиномов степени меньшей или равной $n-1$. Рассмотрим задачу об увеличении алгебраической степени точности интерполяционных квадратур (5) за счет выбора узлов x_k . Предположим, что квадратурные формулы (5) точны и для полиномов степени n . Но тогда они точны для полинома $\omega_n(x)$ и

$$\Phi(\omega_n|z) = 0, \quad I(\omega_n|x) = 0. \quad (7)$$

Применяя к последним представлениям для коэффициентов $\bar{A}_k(z)$, $A_k(x)$ равенства (7), получаем $\bar{A}_k(z) = 0$, $A_k(x) = 0$.

Таким образом, поставленная выше задача не имеет смысла для интерполяционных квадратур (5) с коэффициентами (6).

3. К вычислению коэффициентов обычных интерполяционных квадратур. Имеются в виду интерполяционные квадратуры [5]

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} A_k f(x_k), \text{ где} \quad (8)$$

$$A_k = \frac{1}{\omega_k^n(x_k)} \int_a^b p(x) \frac{\omega_n(x)}{x - x_k} dx.$$

Для двух сингулярных интегралов по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси с плотностью $\omega_n(x)$ в [4] получены формулы

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega_n(t)}{t-x} dt = 2 [\omega_n(t) \operatorname{Arth} x + \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v b_v x^{n-v-1}], \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega_n(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v \bar{b}_v x^{n-v-1}, \quad x \in [-1, 1], \quad (10)$$

где числа b_v , $\bar{b}_v$ определяются через коэффициенты $\omega_n(x)$. Полагая в (8) $[a, b] = [-1, 1]$, $p(x) = 1$, а затем $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ и применяя равенства (9), (10), найдем

$$A_k = \frac{1}{\omega_k^n(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{\omega_n(x)}{x - x_k} dx = \frac{2}{\omega_k^n(x_k)} \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v b_v x_k^{n-v-1},$$

$$A_k = \frac{1}{\omega_k^n(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{\omega_n(x)}{x - x_k} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\omega_k^n(x_k)} \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v \bar{b}_v x_k^{n-v-1}.$$

Аналогично можно получить формулы для коэффициентов и в случае других весовых функций $p(x)$, как только будут вычислены интегралы

$$\int_{-1}^1 p(t) \frac{\omega_n(t)}{t-x} dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1973, № 1, с. 34.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1971, с. 1030.
3. Пыхтеев Г. Н. — *Apl. mat.*, 1965, v. 10, № 4, p. 351.
4. Пыхтеев Г. Н. — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1972, т. 12, № 3, с. 746.
5. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М., 1967, с. 79.

Поступила в редакцию
25.05.78.

Кафедра численных методов и программирования

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ *

УДК 621.378.33

Ю. П. Макаров, А. Ф. Чернявский. Частотная синхронизация двух ОКГ и флуктуации их разностного колебания. № 39-79. Деп. от 02.01.79.

Описана система, обеспечивающая получение устойчивого режима внешней синхронизации частоты ОКГ по частоте второго ОКГ с относительной среднеквадратичной ошибкой $\sim 10^{-11}$ без специальной температурной и механической стабилизации. Важной особенностью этой системы является двухканальный принцип компенсации уходов частоты, позволяющий осуществлять одновременную обработку долговременных и кратковременных флуктуаций разностной частоты двух ОКГ.

УДК 62-50

В. В. Альсевич, М. И. Даворн. Необходимые условия оптимальности для систем с переменным запаздыванием общего вида. № 40-79. Деп. от 02.01.79.

Доказаны необходимые условия оптимальности для задачи терминального управления и системы с переменным запаздыванием по входным координатам без традиционных предположений относительно функции запаздывания.

УДК 621.317.08

В. И. Емельяненко, В. В. Исох. О влиянии ширины импульсов на регистрацию совпадений в нонисусных преобразователях. № 883-79. Деп. от 13.03.79.

Исследуется влияние ширины импульсов сравниваемых последовательностей на условия регистрации совпадающих импульсов схемами отбора совпадений. Определены требования, обеспечивающие установление взаимнооднозначного соответствия между периодами следования импульсов и временным интервалом между совпадениями.

УДК 621.317.08

В. И. Емельяненко, В. В. Исох. Сравнительный анализ гетеродинных преобразователей частоты и схем совпадения импульсных последовательностей. № 884-79. Деп. от 13.03.79.

Анализируется зависимость периода разностной частоты и количества импульсов опорной последовательности между совпадениями как функции периодов сравниваемых импульсных последовательностей. Показано, что эти функции могут быть описаны одним уравнением в частных производных, решениями которого они являются.

УДК 519.3:62-50

Б. Ш. Мордухович, В. М. Ракецкий. Необходимые условия оптимальности типа принципа максимума в дискретных аппроксимациях невыпуклых задач оптимального управления с ограничениями на траекторию. № 793-79. Деп. от 05.03.79.

Исследуется вопрос о справедливости аналога принципа максимума Л. С. Понтрягина при дискретных (конечно-разностных) аппроксимациях непрерывных систем управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, с ограничениями на траекторию. Доказывается, что при наличии ограничений типа неравенств на правый

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

конец траектории (или в промежуточных точках) принцип максимума выполняется в конечно-разностных задачах с точностью $o(h)$ (h — шаг дискретизации процесса) без каких-либо условий выпуклости множества допустимых скоростей. Подобный результат не имеет места при наличии ограничений типа равенств. В таких случаях производится конструктивная аппроксимация ограничений на траекторию, согласованная с шагом дискретизации h , при которой обеспечивается выполнение принципа максимума в конечно-разностных задачах с малым шагом. Полученные результаты позволяют обосновать устойчивость принципа максимума Л. С. Понтрягина при расчете непрерывных систем управления с ограничениями на ЭЦВМ (при соответствующей аппроксимации ограничений) и возможность использования принципа максимума для решения задач оптимального управления дискретными системами с малым шагом дискретизации.

УДК 681.327

В. В. Данилевич, Е. В. Новиков, В. А. Чудовский. Устройство передачи данных в анализатор АИ-4096. № 1179-79. Деп. от 04.04.79.

Рассматривается устройство передачи данных, предназначенное для стыковки с анализатором импульсов АИ-4096 различного рода измерительных систем, выполненных на ТТЛ интегральных схемах и имеющих стандартную логику обмена типа «запрос — ответ».

УДК 519.95:519.2

В. В. Апанасович, В. В. Ревинский, О. М. Тихоненко. Распределение размера памяти ЦКС, предназначенной для оперативного хранения сообщений. № 1178-79. Деп. от 04.04.79.

Рассматривается задача о нахождении распределения суммарной длины сообщений, находящихся в памяти центра коммутации сообщений ЦКС. Для ее решения ЦКС представлен в виде многолинейной двухфазной системы массового обслуживания с простейшими потоками на входе и обслуживанием, пропорциональным длине обрабатываемого сообщения. На основании такого представления получено выражение для преобразования Лапласа — Стильбеса функции распределения суммарной длины сообщений.

УДК 681.32:621.391.28.019.3

В. В. Апанасович, В. В. Ревинский, О. М. Тихоненко. Системный подход к решению задач проектирования управляющей машины ЦКС. № 1177-79. Деп. от 04.04.79.

Проведен обобщенный анализ и разработано общее формализованное описание управляющей машины ЦКС, позволяющее строить на его основе математические модели для определения основных параметров и структуры системы.

УДК 519.95

В. В. Кацубо. Обслуживание детерминированного потока требований двумя последовательными приборами. № 2016-79. Деп. от 06.06.79.

Рассматривается классическая задача Джонсона $2 \times N$ (критерий — быстроедействие), в которой известные моменты поступления требований на обслуживание, различны. Предлагаются способы декомпозиции задачи. Оптимальное расписание строится в виде сегментов из упорядоченных по алгоритму Джонсона требований. Набор требований, входящих в каждый сегмент, определяется алгоритмом, построенным на основе схемы метода ветвей и границ. Получены условия элиминации, сужающие дерево вариантов задачи.

УДК 517.925

С. С. Белявский. Некоторые свойства систем дифференциальных уравнений с перестановочными решениями. № 2019-79. Деп. от 06.06.79.

Приводятся необходимые и достаточные условия перестановочности решений двух систем дифференциальных уравнений. Указан признак периодичности решений таких систем, а также выявлена связь между устойчивостью в целом решений одной из них и продолжимостью решений другой системы. Рассматриваются сложные системы, которые можно разбить на системы, обладающие свойством перестановочности решений. Для них построен признак существования замкнутых интегральных кривых и признак устойчивости нулевого решения.

УДК 681.3.06:51

То Туан. Вопросы обучения программированию с помощью ЭВМ. № 2017-79. Деп. от 06.06.79.

Дается обзор работ по вопросам обучения программированию с помощью ЭВМ. Рассматриваются принципы создания АОС, их классификация, а также методы анализа ответов обучаемых.



Наши юбиляры

АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ САРЖЕВСКИЙ (К 50-летию со дня рождения)

27 августа 1980 г. исполнилось 50 лет со дня рождения известного белорусского ученого и педагога, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки БССР, заведующего кафедрой общей физики БГУ имени В. И. Ленина Александра Михайловича Саржевского.

А. М. Саржевский начал трудовую деятельность после окончания БГУ имени В. И. Ленина в 1953 г. в Физико-техническом институте АН БССР. С момента организации Института физики АН БССР в 1955 г. Александр Михайлович — сотрудник лаборатории люминесценции, где под руководством академика АН БССР А. Н. Севченко им был выполнен ряд исследований по поляризационной люминесценции сложных молекул, получивших широкую известность и признание среди специалистов. В 1961 г. Александр Михайлович успешно защитил кандидатскую диссертацию.

С 1967 г. А. М. Саржевский возглавляет кафедру общей физики БГУ имени В. И. Ленина. На кафедре, а также в лаборатории спектроскопии НИИ ПФП при БГУ имени В. И. Ленина, научным руководителем которой является А. М. Саржевский, широкое развитие получили научные исследования по поляризованной люминесценции, взаимодействию лазерного излучения со сложными органическими молекулами, начатые Александром Михайловичем в Институте физики АН БССР. За последние годы в лаборатории и на кафедре выполнен ряд тем, имеющих большое научное и народно-хозяйственное значение.

По инициативе А. М. Саржевского в 1978 г. при кафедре создана отраслевая научно-исследовательская лаборатория электронных средств и методов обработки оптической информации.

Результаты большой и плодотворной научной деятельности А. М. Саржевского отражены в монографии «Анизотропия поглощения и испускания света молекулами» и более чем в 120 научных работах по актуальным вопросам спектроскопии, люминесценции, квантовой электроники и нелинейной спектроскопии, а также в статьях научно-методического характера. В 1973 г. А. М. Саржевский защитил докторскую диссертацию.

Александр Михайлович много внимания уделяет развитию научно-методических исследований по совершенствованию формы и методов преподавания физики в вузах.

Много сил и энергии отдает А. М. Саржевский преподаванию. Его яркие и глубокие по содержанию лекции привлекают студентов творческий подход к изучению проблем современной физики. Под руководством А. М. Саржевского подготовлено 11 кандидатов наук.

Александр Михайлович ведет большую общественную работу, являясь председателем научно-методического Совета по физике Прибалтийской зоны СССР, ученым секретарем специализированного Совета по защите диссертаций, ответственным редактором I серии журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина».

В свой юбилей Александр Михайлович полон сил и энергии, новых планов и творческих замыслов. Редколлегия журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина» и весь коллектив университета горячо поздравляют Александра Михайловича Саржевского и желают ему крепкого здоровья и больших творческих успехов.



УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в «Вестнике Белорусского университета.
Серия 1. физика, математика и механика» в 1980 году.

ФИЗИКА

	№	с.
Абрамчук Н. М., Ефимчик М. К., Шушкевич С. С. Фронтальный учебный практикум по радиоэлектронике для физиков (специальность 2016)	3	22
Агранов Г. А., Зайцева А. М., Коренная Л. Н., Соболев В. С. Распределение энергии в плоскости трансформанты	3	3
Андреев А. Д., Дитковский В. М., Ткач А. В. Выявление нарушений структуры окисла кремния при экспонировании его в газовой плазме	3	10
Арнаудов Б. Г., Доманевский Д. С. Влияние флуктуаций потенциала на энергию термической ионизации мелких примесей в арсениде галлия	2	9
Афанасенко В. Н., Данилов В. А., Земченко С. А. Акустооптический модулятор стоячей волны	3	13
Афанасьев Г. К., Лебедев В. И., Чернявский А. Ф., Черников Г. Н. Алгоритмы выделения контура двоничного изображения	1	3
Баринев В. Н., Некрашевич И. Г., Смирнов А. В. Электроэрозийные явления на электродах в импульсном разряде при различных скоростях нарастания тока	3	18
Васильев Н. Н., Зажогин А. П. Перестраиваемый струйный лазер на растворах красителей	3	15
Гайсенок В. А., Дударев И. А., Кадум М., Клищенко А. П. Некоторые особенности поляризованной люминесценции органических молекул из высоких электронных состояний при двухквантовом возбуждении	1	34
Гахович А. С., Коляда А. А., Чернявский А. Ф. Определение интенсивности стохастического потока, генетически связанного с некоторым потоком сигналов с помощью многоступенчатых МВА	1	12
Гулис И. М., Комяк А. И. Влияние неоднородного уширения уровней на временные характеристики люминесценции сложных молекул при переносе энергии	2	3
Данилевский Л. Н., Доманов Ю. А., Зеленко В. Н., Изох В. В., Коробко О. В. Оптимизация антенных решеток с аналого-цифровым преобразованием входных сигналов	2	19
Данилькевич М. И. Влияние закалки на магнитный момент и температуру Кюри никель-кобальтовых ферритов	3	8
Зеленкевич В. М., Ключников А. С., Тимофеев Л. М. Электродинамический расчет диаграммы направленности системы антенна — РПУ	2	11
Кириленко А. И., Хапалюк А. П. Особенности некомпланарного отражения неоднородных волн	1	17
Кириленко А. И., Хапалюк А. П. Баланс энергии в некоторых случаях некомпланарного отражения	1	21
Коляда А. А. Алгоритмы арифметики обобщенных СОК	1	6
Липницкий И. В., Хартоник И. А., Умрейко Д. С., Неокладнова Л. Н., Крот В. И. Колебательные спектры и структура некоторых хлорпиридиновых комплексов переходных металлов	1	25
Лопарева Н. В., Гурачевский В. Л. Поляризующие свойства мессбауэровских мишеней из естественного железа	2	15
Татаринев Б. А., Цвирко В. А., Черенкевич С. Н., Комяк А. И. Применение метода малоуглового светорассеяния для изучения клеток в процессе их структурных перестроек	1	30
Фам Чонг Хьен, Хапалюк А. П. О возможном улучшении условий генерации при введении в резонатор призм полного отражения	2	22
Яновский С. Ю., Колпацников В. Л. К определению функций релаксации внутренней энергии и теплового потока для сред с тепловой памятью	2	6

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Алейникова Э. М., Забелло Л. Е. К исследованию второй вариации функционалов вдоль траекторий дискретных систем	3	33
Беляевский В. В., Воробьев М. А., Дробушевич Г. А., Комаровский И. В. Алгоритмы подсчета итогов по группам и подгруппам	1	46
Буза М. К., Певзнер Л. В. Об одной интерпретирующей системе	3	37
Василевич Ю. В. Плоская смешанная задача термоупругости для плоскости с закрепленным отверстием	3	40
Журбенко И. Г., Зуев Н. М. Перемешивание случайных процессов	3	29
Забелло Л. Е., Мажила Ю. К управляемости линейной нестационарной системы	2	30
Калитик Б. С. Одна теорема о неустойчивости	3	49
Козел П. Т. Нормальная форма матрицы изометрии симплектического пространства над конечным полем	1	63

Козел П. Т. О вырожденных задачах линейного программирования	2	37
Ковалев М. М., Дронь С. П. О кусочно-линейной оптимизации на несвязных областях	2	27
Кравцов М. К., Кашинский Ю. И. Об одной задаче оптимального распределения топливных ресурсов	3	50
Кузичева Е. Г. О сходимости одного алгоритма Робертса—Шипмана	1	56
Леваков А. А. Корректность одного класса задач оптимального управления	2	33
Ле Тхи Зунг. Оптимальное сопряжение неособых участков экстремалей	1	38
Понтрагина Матвеев Г. В. Спинорная норма автоморфизма центральной простой алгебры	1	60
Мелешко А. Н. Интерполяционные квадратурные формулы для интегралов Шварца и Гильберта	3	26
Млынчик И. И., То Туан. Об одном методе обработки таблиц информации	1	41
Ракецкий В. М. Прямой метод решения задачи квадратичного программирования	1	54
Чумаков Ф. В., Васильев И. Л. Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре	2	40
Чупригин С. А. Лакуарное тригонометрическое интерполирование типа (0, 1, ..., p, q, r)	3	44

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Альсевич Л. А. Исследование поведения решений модельной СПС	2	50
Ароча Х. Л. Минимизация функции алгебры логики путем исследования нижних единиц и верхних нулей	2	47
Бобков В. В. О некоторых нелинейных методах численного решения дифференциальных уравнений	2	55
Борисов О. М., Литвинов В. В., Оджаев В. Б., Уренев В. И., Фейгенсон А. Л. Явление отрицательного отжига в имплантированных сурьмой слоях кремния	1	70
Борисозлебский Л. А., Лобко С. И. Частица со спином $1/2$ в поле одномерного осцилляторного потенциала	3	66
Гурачевский В. Л., Солнцев А. С. Мессбауэровский спектрометр с постоянным ускорением	3	60
Граков В. Е., Майга А. С. К вопросу о происхождении катодных плазменных струй	3	62
Дробушев Г. А., То Туан. Об одном методе синтаксического анализа языков программирования	3	67
Казакевич Л. А., Лугаков П. Ф. Образование радиационных дефектов в кремнии с дислокациями	3	56
Кульша А. М., Яржембицкий В. Б. Влияние электродов из SnO_2 на основные характеристики фотоэлементов	1	66
Курейчик К. П., Саржевский А. М. Импульсный корректор темнового тока в фоточувствительных устройствах	3	63
Лугаков П. Ф., Лукашевич Т. А. Кинетика отжига комплексов бор-дивакансия в кремнии р-типа	1	68
Ляховец С. Н. Достаточные условия разрешимости одной задачи управления систем нейтрального типа	2	45
Мазаник С. А. Об относительном повороте для трехмерной линейной дифференциальной системы	2	53
Мататов В. И., Солонская Г. А., Солонская К. А. Влияние закона включения фрикционной муфты на нагруженность ее элементов	1	72
Мелешко И. Н. О вычислении коэффициентов некоторых интерполяционных квадратурных формул	3	69
Ракецкий В. М. Об ограниченности множества допустимых траекторий при разностных аппроксимациях непрерывных систем управления	2	49
Савенков В. А. Смешанная задача теории упругости для анизотропной плоскости τ разрезами на вещественной оси	2	56
Яновский С. Ю. Цилиндрические и сферические волны температуры в материалах с тепловой памятью	3	58

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Александр Михайлович Саржевский (К пятидесятилетию со дня рождения)	3	74
Аннотации депонированных статей	1	75
Аннотации депонированных статей	2	60
Аннотации депонированных статей	3	72
Профессор А. Е. Левашев	1	77
Федор Дмитриевич Гахов	1	59

РЕФЕРАТЫ

УДК 621.391

Агранов Г. А., Зайцева А. М., Коренная Л. Н., Соболев В. С. Распределение энергии в плоскости трансформанты.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Получены аналитические выражения, описывающие распределение энергии элементов трансформанты при кодировании изображения с помощью преобразований Уолша — Адамара и Фурье. Проведено сравнение концентрации энергии в обоих случаях.

Библ. 5 назв., ил. 3.

УДК 538.245

Данилькевич М. И. Влияние закалки на магнитный момент и температуру Кюри никель-кобальтовых ферритов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Обнаружено и изучено влияние состава в системе $Ni_{1-x}Co_xFe_2O_4$ ($0 \leq x \leq 1$) на изменение спонтанного магнитного момента m_0 и температуры Кюри θ при закалке. Полученные изменения m_0 и θ объясняются различием в перераспределении катионов при изменении температуры в связи с различной величиной энергии предпочтения Ni^{2+} и Co^{2+} к октаэдрической координации.

Библ. 2 назв., ил. 2.

УДК 621.396.6.181.48

Андреев А. Д., Дитковский В. М., Ткач А. В. Выявление нарушений структуры оксида кремния при экспонировании его в газовой плазме.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Исследуется прохождение тока через контакт низкотемпературной газовой плазмы и слоя термического оксида кремния при подаче на промежуток зонд — поверхность слоя переменного напряжения с частотой 50 Гц в воздухе при давлении $13,33 \text{ Н/м}^2$. Проявление на обращенной к плазме поверхности оксида эрозийных пятен, служащих началом сквозных каналов, пронизывающих окисел, сопровождается возникновением световых вспышек вблизи этих пятен и неустойчивостей тока во внешней цепи. С увеличением толщины оксида пороговое напряжение возникновения неустойчивостей тока увеличивается, а число эрозийных пятен возрастает с увеличением времени экспонирования в плазме.

Библ. 2 назв., ил. 2.

УДК 535.5

Афанасенко В. Н., Данилова В. А., Зенченко С. А. Акустооптический модулятор стоячей волны.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Изложены результаты исследования стабильности работы акустооптического модулятора стоячей волны. Предлагается методика исследования модулятора в широком и узком диапазоне частот. Приводятся зависимости глубины модуляции и собственной частоты модулятора от температуры и подводимой радиочастотной мощности. Рассматривается вопрос применения такого модулятора для синхронизации мод лазеров.

Библ. 8 назв., ил. 4.

Васильев Н. Н., Зажогин А. П. **Перестраиваемый струйный лазер на растворах красителей.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Описан ОКГ на растворах роданина 6Ж и роданина С, выполненный в виде приставки к серийному лазеру ЛТИПЧ-5. Приставка обеспечивает генерацию излучения в области 553—610 нм с плавной перестройкой частоты генерации при работе накачки с частотой повторения импульсов до 50 Гц.

Библ. 5 назв., ил. 2.

УДК 621.064

Барнинов В. Н., Некрашевич И. Г., Смирнов А. В. **Электроэрозионные явления на электродах в импульсном разряде при различных скоростях нарастания тока.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Описана экспериментальная установка, позволяющая исследовать физические процессы на электродах в условиях сильноточных импульсных разрядов при различных скоростях нарастания тока. Исследованы зависимости коэффициента электропереноса материала молибденовых, медных, алюминиевых и цинковых электродов от скорости нарастания тока в разрядном импульсе и длины межэлектродного промежутка. Полученные результаты качественно объясняются на основе представлений о гидродинамическом механизме взаимодействия плазменных потоков, истекающих в процессе горения разряда с поверхности обоих электродов.

Библ. 10 назв., ил. 3.

УДК 53.05/08

Абрамчук Н. М., Ефимчик М. К., Шушкевич С. С. **Фронтальный учебный практикум по радиоэлектронике для физиков** (специальность 2016).— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Фронтальный учебный практикум по радиоэлектронике (специальность 2016), разработанный на физическом факультете БГУ имени В. И. Ленина, позволяет обеспечить синхронность лабораторных и лекционных занятий по курсу «Основы радиоэлектроники» в строгом соответствии с программой. Все лабораторные задания выполняются на одном и том же оборудовании. Предусмотрены экспериментальные задания различной степени трудности в плане факультативных и специальных курсов по радиоизмерениям, электронным методам в экспериментальной физике и в плане учебно-исследовательской работы студентов (УИРС).

Библ. 1 назв., ил. 1.

УДК 519.21

Журбенко И. Г., Зуев Н. М. **Перемешивание случайных процессов.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Приводятся результаты по случайным процессам с перемешиванием, а также уточненные оценки смешанных семинвариантов и старших спектральных плотностей с непрерывным и дискретным временем, показана существенная нелучшаемость оценки смешанных семинвариантов для ограниченных случайных процессов.

Библ. 15 назв.

УДК 62-50

Алейникова З. М., Забелло Л. Е. **К исследованию второй вариации функционалов вдоль траекторий дискретных систем.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Приводятся достаточные условия положительности, неотрицательности второй вариации функционалов для задачи типа Больца. Приведенные условия связаны с разрешимостью матричных уравнений Риккати.

Библ. 3 назв.

УДК 681.3.06

Буза М. К., Певзнер Л. В. **Об одной интерпретирующей системе.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Разработана интерпретирующая система для моделирования работы команд процессоров в безранговой системе в коде вычетов. Интерпретирующая система работает под управлением ДОС ЕС ЭВМ. Получены теоретические и экспериментальные оценки быстродействия моделируемых операций.

Библ. 4 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 539.3

Василевич Ю. В. **Плоская смешанная задача термоупругости для плоскости с подкрепленным отверстием.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

На основе метода аналитического продолжения комплексных потенциалов и метода конформного отображения дано эффективное решение смешанной задачи термоупругости для бесконечной анизотропной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием. Получены расчетные формулы для определения термоупругого состояния в указанной

области в зависимости от температурного поля, внешней нагрузки, термоупругих свойства пластины, типа подкрепления отверстия и других факторов. Результаты проведенных исследований могут найти применение в строительстве, горном деле, технике и других отраслях народного хозяйства.

Библ. 4 назв., ил. 1.

УДК 517.518.84

Чупринг О. А. Лакунарное тригонометрическое интерполирование типа $(0, 1, \dots, p, q, r)$. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Исследованы вопросы существования, единственности и дано представление лакунарного тригонометрического интерполяционного полинома типа $(0, 1, \dots, p, q, r)$ по равностоящим узлам отрезка $[0, 2\pi]$

Библ. 8 назв.

УДК 517.91

Калитин Б. С. Одна теорема о неустойчивости. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Доказана теорема о неустойчивости нулевого решения периодической системы в терминах функций Ляпунова. Теорема гарантирует существование решения, входящего в начало координат при неограниченном убывании аргумента времени.

Библ. 10 назв.

УДК 519.10

Кравцов М. К., Кашинский Ю. И. Об одной задаче оптимального распределения топливных ресурсов. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Рассматривается одна практическая задача оптимального распределения топливных ресурсов, приводящая к трехиндексной транспортной модели. Указан критерий разрешимости такой задачи. Показано, что в некоторых случаях ее решение может быть сведено к решению двух подзадач меньшего порядка.

Библ. 7 назв.

УДК 621.315.592

Казакевич Л. А., Лугаков П. Ф. Образование радиационных дефектов в кремнии с дислокациями. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Исследована скорость введения основных радиационных дефектов (РД) в пластически деформированном кремнии n - и p -типа с исходным удельным сопротивлением от 20 до 100 Ом·см. Экспериментальные результаты получены из анализа температурных зависимостей коэффициента Холла исходных, деформированных и облученных (при $T \leq 50^\circ\text{C}$) гамма-квантами Co^{60} кристаллов, выращенных по методу Чохральского и зонной плавкой в вакууме. Установлено, что независимо от метода выращивания кристаллов и концентрации легирующей примеси при увеличении плотности дислокаций наблюдается уменьшение начальной скорости удаления носителей тока и эффективности образования РД. Результаты эксперимента интерпретируются в предположении того, что вводимые при пластической деформации дислокации являются стоками для генерируемых облучением первичных РД (вакансий и междоузельных атомов).

Библ. 5 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 536.21+536.631

Яновский С. Ю. Цилиндрические и сферические волны температуры в материалах с тепловой памятью. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Методом интегрального преобразования Лапласа в приближении больших и малых времен получено решение уравнения теплопроводности для пространства из материала с тепловой памятью с цилиндрической и сферической полостью.

Библ. 6 назв.

УДК 539.107.5

Гурачевский В. Л., Солнцев А. С. Мессбауэровский спектрометр с постоянным ускорением. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Описана структурная схема мессбауэровского спектрометра с постоянным ускорением на основе многоканального анализатора импульсов ИТА-512.

Библ. 2 назв., ил. 2.

УДК 537.525.5

Граков В. Е., Майга А. С. К вопросу о происхождении катодных плазменных струй. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Из анализа имеющихся в литературе экспериментальных данных по катодным плазменным струям приводятся дополнительные аргументы в пользу их термического происхождения.

Библ. 5 назв., ил. 1.

УДК 681.142.621

Курейчик К. П., Саржевский А. М. Импульсный корректор темнового тока в фоточувствительных устройствах.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Предложена схема импульсного корректора аддитивных помех, возникающих на выходе фоточувствительных устройств. Коэффициент подавления не менее 70 дБ.

Библ. 2, ил. 2.

УДК 539.124

Борисоглебский Л. А., Лобко С. И. Частица со спином $1/2$ в поле одномерного осцилляторного потенциала.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Рассматривается поведение частицы со спином $1/2$ в поле одномерного осцилляторного потенциала на основе уравнения Дирака в нерелятивистском приближении. С помощью теории возмущений найдены поправки к уровням энергии, величина которых зависит как от колебательного квантового числа, так и от частоты колебаний осциллятора.

Библ. 2 назв.

УДК 681.3.06

Дробушевич Г. А., То Туан. Об одном методе синтаксического анализа языков программирования.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Предлагается один из методов синтаксического анализа языков программирования, в частности, языка Ассемблер ЕС ЭВМ, который является объектом обучения разрабатываемой АОС. Приводится пример использования МУ-метаязыка — модификации известного метаязыка управляющих грамматик.

Библ. 5 назв.

УДК 517.392

Мелешко И. Н. О вычислении коэффициентов некоторых интерполяционных квадратурных формул.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3.

Даются методы вычисления коэффициентов квадратурных формул, основанных на аппроксимации производной плотности интерполяционным полиномом Лагранжа, для интегралов

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt$$

Отмечается одно важное свойство интерполяционных квадратурных формул для этих же интегралов. Приводятся формулы для вычисления коэффициентов обычных интерполяционных квадратур.

Библ. 5 назв.

УДК 517.392

Мелешко А. Н. Интерполяционные квадратурные формулы для интегралов Шварца и Гильберта.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Рассматривается метод построения интерполяционных квадратурных формул для вычисления интегралов

$$S(z) = S(f; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma) \frac{t+z}{t-z} d\sigma; \quad t = e^{i\sigma}; \quad |z| > 1 \quad (1)$$

и

$$\Gamma(\Theta) = \Gamma(f; \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \Theta}{2} d\sigma; \quad -\pi \leq \Theta \leq \pi. \quad (2)$$

Приводятся оценки погрешности полученных приближенных формул в классе $C^{n+1}[-\pi, \pi]$.

Библ. 5 назв.