целей МЦ, верхушка которого является текущей целью анализа (МЦ состоит из нетерминалов). В зависимости от текущего символа анализируемой цепочки содержимое МЦ изменяется (В МУ-метаязыке действия по изменению МЦ указываются символами $\{+, -, =\}$, которые поясняются в комментариях). Пусть конфигурация К МУ-грамматики (т. е. грамматики, правила вывода которой задаются на МУ-метаязыке) есть кортеж $K=\{l, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\dagger\alpha_n\}$, где $l\in T^*$: $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n$ — содержимое МЦ; α_n — его верхушка; стрелка $\dagger$ указывает, что α_n является текущей целью анализа. Процесс анализа изображается цепочкой переходов из одной конфигурации в другую.

Примеры. 1) $l=X'1A'$

$$(X'1A',\ \uparrow<\text{ТЕРМ}>)\Rightarrow('1A',\ <\text{Ш. ЦИФРА}>\uparrow<\text{АПОСТРОФ}>)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(1A',\ \uparrow<\text{Ш. ЦИФРА}>)\Rightarrow(A',\ \uparrow<\text{Ш. ЦИФРА}>)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(',\ \uparrow<\text{Ш. ЦИФРА}>)\Rightarrow(\lambda,\ \lambda),$$

где λ — символ пустой цепочки. 2) l = ХОР

$$(\text{ХОР},\ \uparrow<\text{ТЕРМ}>)\Rightarrow(\text{ОР},\ <\text{Ш. ЦИФРА}>\uparrow<\text{АПОСТРОФ}>)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\text{ОР},\ \uparrow<\text{БУКВА}\mid\text{ЦИФРА}>)\Rightarrow(\text{Р},\ \uparrow<\text{БУКВА}\mid\text{ЦИФРА}>)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\lambda,\ \uparrow<\text{БУКВА}\mid\text{ЦИФРА}>)\Rightarrow(\lambda,\ \lambda).$$

В МУ-метаязыке символы ЧТ и ПА указывают, что нужно считать следующий символ или продолжать анализ без чтения соответственно. *DSIFRA, BUCVA, SSIFRA, BUST* — имена подпрограмм, определяющих типы символов (десятичная цифра, буква, ...). Подпрограммы PR_i, $i=0, 1, \ldots, 6$ выполняют необходимые действия (подсчет количества символов, перевод символа из одной формы представления в другую, ...) после распознавания соответствующего символа анализируемой цепочки. В настоящее время реализованы программы перевода МУ-метапрограмм (на МУ-метаязыке) в машинную форму представления и программа синтаксического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М. и др.— В сб.: Обучение программированию с помощью цифровых вычислительных машин.— Киев, 1970, с. 3.
2. Белов В. Н.— В сб.: Вопросы реализации систем программирования.— Киев, 1976, с. 26.
3. Алгоритмический язык АЛГОЛ-60. Пересмотренное сообщение.— М., 1965.
4. Кузнецов С. И. Математическое обеспечение автоматизированных обучающих систем.— Казань, 1977.
5. Программирование на языке Ассемблер ЕС ЭВМ.— М., 1977.

Поступила в редакцию
21.03.78.

Кафедра общего программирования

УДК 517.392

И. Н. МЕЛЕШКО

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

1. Вычисление коэффициентов интерполяционных квадратурных формул, содержащих производные плотности, для простейших интегралов типа Коши и сингулярных интегралов по разомкнутому контуру.

Упомянутые квадратурные формулы рассматриваются в [1] для интегралов

$$\Phi(z)=\Phi(f\mid z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-z}dt,\quad z\overline{\in}[-1,\ 1],\tag{1}$$

$$I(x) = I(f\,|\,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\,dt,\ x \in\ ]-1,\ 1[\tag{2}$$

и имеют вид

$$\Phi(z) \approx -\frac{1}{\pi i} f(-1)\ln\frac{z+1}{z-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\overset{\bullet}{A}_k(z)\, f'(x_k), \tag{3}$$

$$I(x) \approx -\frac{2}{\pi} f(-1)\,\mathrm{Arth}\, x + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\, f'(x_k). \tag{4}$$

Здесь коэффициенты $\overset{\bullet}{A}_k(z)$ и $A_k(x)$ представляют собой соответственно интегралы (1) и (2) от функций

$$B_k^n(x) = \frac{1}{\omega_k^n(x_k)}\int\limits_{-1}^{x}\omega_k^n(t)\,dt.$$

Рассмотрим два метода вычисления коэффициентов $\overset{\bullet}{A}_k(z)$ и $A_k(x)$. Один из них состоит в том, что многочлен $B_k^n(x)$ разлагается по полиномам Лежандра:

$$B_k^n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu P_\nu(x),\ \ c_\nu = \frac{2\nu+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} B_k^n(x)\, P_\nu(x)\,dx,$$

а затем это разложение подставляется в интегралы, через которые выражаются коэффициенты. В результате, после применения известного соотношения [2] $\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_\nu(t)}{t-z}\,dt = -2Q_\nu(z)$, где $Q_\nu(z)$ — функция Лежандра, получим формулы

$$\overset{\bullet}{A}_k(z) = -\frac{2}{\pi i}\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu Q_\nu(z),\ \ A_k(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\,\mathrm{Re}\,(Q_\nu(x)).$$

Другой метод вычисления коэффициентов основан на методе точного вычисления интегралов (1), (2), который изложен в [3]. Этот метод сводится к отысканию так называемой изображающей функции для интегралов, представляющих коэффициенты $\overset{\bullet}{A}_k(z)$, $A_k(x)$.

2. Об одном свойстве интерполяционных квадратурных формул для интегралов (1), (2). Под интерполяционными квадратурными формулами для интегралов (1), (2) понимаются следующие формулы [4]:

$$\Phi(z) \approx \sum_{k=0}^{n-1}\overset{*}{A}_k(z)\, f(x_k),\ \ I(x) \simeq \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\, f(x_k), \tag{5}$$

где

$$\overset{\bullet}{A}_k(z) = \frac{1}{\pi i\,\omega_k^n(x_k)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\omega_k^n(t)}{t-z}\,dt,\ \ A_k(x) = \frac{1}{\pi\,\omega_k^n(x_k)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\omega_k^n(t)}{t-x}\,dt. \tag{6}$$

Очевидно, что при заданных узлах x_k квадратурные формулы (5) точны для всевозможных полиномов степени меньшей или равной $n-1$. Рассмотрим задачу об увеличении алгебраической степени точности интерполяционных квадратур (5) за счет выбора узлов x_k. Предположим, что квадратурные формулы (5) точны и для полиномов степени n. Но тогда они точны для полинома $\omega_n(x)$ и

$$\Phi(\omega_n\,|\,z) = 0,\ \ I(\omega_n\,|\,x) = 0. \tag{7}$$

Применяя к последним представлениям для коэффициентов $\dot{A}_k(z)$, $A_k(x)$ равенства (7), получаем $\dot{A}_k(z) = 0$, $A_k(x) = 0$.

Таким образом, поставленная выше задача не имеет смысла для интерполяционных квадратур (5) с коэффициентами (6).

3. К вычислению коэффициентов обычных интерполяционных квадратур. Имеются в виду интерполяционные квадратуры [5]

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} A_k f(x_k), \text{ где}$$

$$A_k = \frac{1}{\omega_k^n(x_k)} \int_a^b p(x) \frac{\omega_n(x)}{x - x_k}\, dx. \tag{8}$$

Для двух сингулярных интегралов по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси с плотностью $\omega_n(x)$ в [4] получены формулы

$$\int_{-1}^{1} \frac{\omega_n(t)}{t - x} dt = 2\,[\omega_n(t) \operatorname{Arth} x + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu b_\nu x^{n-\nu-1}, \tag{9}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\omega_n(t)}{t - x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \dot{b}_\nu x^{n-\nu-1}, \quad x \in [-1, 1], \tag{10}$$

где числа b_ν, $\dot{b}_\nu$ определяются через коэффициенты $\omega_n(x)$. Полагая в (8) $[a, b] = [-1, 1]$, $p(x) = 1$, а затем $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ и применяя равенства (9), (10), найдем

$$A_k = \frac{1}{\omega_k^n(x_k)} \int_{-1}^{1} \frac{\omega_n(x)}{x - x_k} dx = \frac{2}{\omega_k^n(x_k)} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu b_\nu x_k^{n-\nu-1},$$

$$A_k = \frac{1}{\omega_k^n(x_k)} \int_{-1}^{1} \frac{\omega_n(x)}{x - x_k} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\omega_k^n(x_k)} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \dot{b}_\nu x_k^{n-\nu-1}.$$

Аналогично можно получить формулы для коэффициентов и в случае других весовых функций $p(x)$, как только будут вычислены интегралы $\int_{-1}^{1} p(t) \frac{\omega_n(t)}{t - x} dt$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1973, № 1, с. 34.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М., 1971, с. 1030.
3. Пыхтеев Г. Н.— Apl. mat., 1965, v. 10, № 4, p. 351.
4. Пыхтеев Г. Н.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 3, с. 746.
5. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.— М., 1967, с. 79.

Поступила в редакцию
25.05.78.

Кафедра численных методов и программирования