

сама последовательность, т. е. $t_n^* \rightarrow t^*$ при $n \rightarrow \infty$). Покажем, что траектория $x(P, t^*, t)$ и является искомой. Действительно, предположим сначала, что эта траектория покидает шар S_n при убывании времени t . Тогда найдется число $\Delta < 0$, для которого $\|x(P, t^*, t^* + \Delta)\| > h$. По теореме об интегральной непрерывности решений можно указать число N настолько большое, что из предыдущего неравенства будем иметь $\|x(P_n, t_n^*, t_n^* + \Delta)\| > h \forall n > N$. Но тогда с учетом свойств решений периодических систем сразу получаем неравенство $\|x(P_n, t_n, t_n + \Delta)\| > h \forall n > N$, противоречащее построению чисел $t_n > 0$ и $\Delta < 0$. Покажем это. Так как вектор-функция f непрерывна в D_N , а значит, и равномерно ограничена в D_N , то $t_n \rightarrow \infty$, как только $n \rightarrow \infty$. Поэтому с учетом равенства $x(p_n, t_n, t_n + \Delta) = x(q_n, 0, t_n + \Delta)$ и условия $t_n + \Delta > 0$ при $n > \bar{N} > N$ соотношение $\|x(q_n, 0, t_n + \Delta)\| > h$ невозможно. Теперь уже легко проверить, что $\|x(P, t^*, t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это можно сделать так же, как и при доказательстве теоремы 12.1 [6] с учетом равномерной ограниченности f в D_N .

Пример. Для системы третьего порядка $\dot{x} = yf(x, y, z, t)$, $\dot{y} = -xf(x, y, z, t)$, $\dot{z} = \psi(x, y, z, t)$, удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к системе (1), функция $V = z - x^2 - y^2$ имеет производную по времени $\dot{V} = \psi(x, y, z, t)$. Пусть $\forall \eta$, $0 < \eta < h$, существует число $\gamma > 0$ такое, что $\psi(x, y, z, t) > \gamma$ в области $\{(x, y, z, t): z \geq x^2 + y^2, \eta^2 < x^2 + y^2 + z^2 < h^2, t \in \mathbb{R}\}$. В этом случае будут, очевидно, выполнены все требования доказанной теоремы, а значит, в указанной области существует траектория, входящая в начало координат при неограниченном убывании времени t .

З а м е ч а н и е. Существование нетривиальной траектории, для которой начало координат является α -предельной точкой, есть достаточный признак неустойчивости нулевого решения автономных систем [4, 9, 10]. В [10] отмечено, что это условие не является необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М. — Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М., 1962.
3. Персидский К. П. — УМН, 1946, т. 1, вып. 5—6.
4. Еругин Н. П. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
5. Массера Х. Л. — Сб. переводов. Математика. — М., 1957, т. 1:4.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М., 1959.
7. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л., 1959.
8. Матросов В. М. — Труды III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 1. — М., 1965.
9. Зубов В. И. — Матем. сб., 1959, т. 48 (90), № 2.
10. Богданов Ю. С. — Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 1.

Поступила в редакцию
01.02.79.

Кафедра МОУ

УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ, Ю. И. КАШИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОПЛИВНЫХ РЕСУРСОВ

Проблема рационального использования топливных ресурсов республики связана с решением задач по оптимальному их распределению на коммунально-бытовые и производственно-эксплуатационные нужды.

В работах [1—4] рассмотрена задача распределения топливных ресурсов на коммунально-бытовые нужды БССР. Экономическая эффективность от результатов ее внедрения составит свыше миллиона рублей в год.

Цель исследования настоящей работы — построение экономико-математической модели задачи оптимального распределения топливных ресурсов на производственно-эксплуатационные нужды (ПЭН) республики для каждого временного интервала планирования и рассмотрение вопросов, связанных с ее анализом. В частности, указан критерий разрешимости этой задачи, а также показано, что в некоторых случаях решение ее может быть сведено к решению двух подзадач меньшего порядка.

1. Постановка задачи. Пусть рассмотрению подлежат m поставщиков и n потребителей, связанных с поставками и потреблением топливных ресурсов. Будем считать, что число видов топливных ресурсов равно s , а планируемый период разбит на r интервалов, которые назовем кварталами. Пусть j — индекс предприятия, выступающего в качестве потребителя; i — индекс поставщика; R — множество поставщиков, расположенных на территории республики; M_p — множество поставщиков p -го вида топлива, причем $\bigcup_{p=1}^s M_p = \{1, \overline{m}\}$, $M_h \cap M_g = \emptyset$ при $h \neq g$; N_q — множество предприятий, входящих в q -е министерство (ведомство), причем $\bigcup_{q=1}^l N_q = \{1, \overline{n}\}$, $N_h \cap N_g = \emptyset$ при $h \neq g$.

Заданы следующие величины: b_j — объем спроса в условном топливе j -го потребителя в планируемом периоде (этот показатель может быть рассчитан по алгоритму из [5]); d_{pq}^- , d_{pq}^+ — соответственно минимальный и максимальный объем топливных ресурсов p -го вида в условном выражении, потребляемый q -ым министерством (ведомством) в планируемом периоде; α_i — калорийный эквивалент единицы ресурса i -го поставщика; a_i' — максимально возможный объем топливных ресурсов i -го поставщика, выделенного к поставке на ПЭН республики в планируемом периоде; c_{ij}' — транспортные затраты (расходы), связанные с перевозкой единицы ресурса от поставщика i к потребителю j (предполагается, что транспортные затраты не зависят от времени доставки); a_{ik}' — объем топливных ресурсов i -го поставщика, планируемого к поставке на ПЭН республики в квартале k ; b_{jk} — объем спроса в условном топливе — j -го потребителя в квартале k ; u_{jk} — затраты (штраф) за недопоставку единицы условного топлива j -му потребителю в конце квартала k ($1 \leq k \leq r-1$); v_{ik} — затраты i -го поставщика на хранение единицы условного топлива в конце квартала k ($1 \leq k \leq r-1$).

Предполагается, что имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{i \in R} a_i < \sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i, \quad \sum_{k=1}^r a_{ik} = a_i \quad \forall i \in R,$$

$$\sum_{k=1}^r a_{ik} \leq a_i \quad \forall i \in \{1, \overline{m}\} \setminus R, \quad \sum_{k=1}^r b_{jk} = b_j, \quad j = 1, \overline{n},$$

где $a_i = a_i' \alpha_i$, $a_{ik} = a_{ik}' \alpha_i$.

Задача заключается в составлении такого плана перевозок по кварталам, при котором все топливные ресурсы поставщиков, расположенных на территории республики, вывозятся; потребности всех пунктов потребления в планируемом периоде удовлетворяются; ограничения, задаваемые минимальными и максимальными объемами топливных ресурсов по их видам для каждого министерства (ведомства) республики в планируемом периоде, учитываются. При этом требуется, чтобы суммарные затраты на транспортировку, на хранение поставщиками и за недопоставку потребителям топливных ресурсов в конце каждого квартала k ($1 \leq k \leq r-1$) достигали минимума.

Приведем математическую формулировку данной задачи. Пусть x_{ijk} — объем перевозок топливных ресурсов в условном выражении, доставляемых от i -го поставщика к j -му потребителю в квартале k . Тогда

математическая модель задачи сводится к вычислению переменных x_{ijk} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, r}$, которые обеспечивают минимум целевой функции

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \sum_{k=1}^r x_{ijk} + \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^{r-1} u_{jt} \sum_{k=1}^t \left(b_{jk} - \sum_{i=1}^m x_{ijk} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^{r-1} v_{it} \sum_{k=1}^t \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^n x_{ijk} \right) \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t b_{jk}, \quad t = \overline{1, r-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t a_{ik}, \quad t = \overline{1, r-1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r x_{ijk} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in R, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq a_i \quad \forall i \in \{\overline{1, m}\} \setminus R, \quad (6)$$

$$d_{pq}^- \leq \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq d_{pq}^+, \quad p = \overline{1, s}, \quad q = \overline{1, l}, \quad (7)$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, r}, \quad (8)$$

где $c_{ij} = \frac{c'_{ij}}{\alpha_i}$.

Заметим, что эта модель близка к предложенной в [6]. В ней, в отличие от рассматриваемой нами модели (1)–(8), вместо условий (5)–(7)

приводятся условия: $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{k=1}^{t-1} b_{jk} \sum_{i=1}^t x_{ijk} \geq \sum_{k=1}^t b_{jk} \times$
 $\times \sum_{k=1}^{t-1} x_{ijk}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $t = \overline{2, r}$.

В тех случаях, когда по тем или иным причинам представляется целесообразным учитывать ограничения, определенные минимальными и максимальными объемами топливных ресурсов по их видам для каждого предприятия, выступающего в качестве потребителя, следует заметить условия (7) неравенствами вида

$$d_{pj}^- \leq \sum_{i \in M_p} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq d_{pj}^+, \quad p = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где d_{pj}^- , d_{pj}^+ — соответственно, нижняя и верхняя границы возможной потребности топливных ресурсов p -го вида в условном выражении для j -го потребителя.

2. Разрешимость задачи. Легко видеть, что задача (1)–(6), (8) всегда будет разрешимой. Иначе обстоит дело с задачей (1)–(8). Здесь могут встретиться ситуации, когда ограничения (7) оказываются настолько жесткими, что в задаче вообще отсутствует допустимое реше-

ние. Поэтому возникает вопрос: при каких условиях задача (1)–(8) будет разрешимой? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1. Для разрешимости задачи (1)–(8) необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$B_q \geq 0, \quad q = \overline{1, l}, \quad (10)$$

$$A_p \geq 0, \quad p = \overline{1, s}, \quad (11)$$

$$\sum_{p=1}^s \min \left(A_p, \sum_{q \in L} (d_{pq}^+ - d_{pq}^-) \right) \geq \sum_{q \in L} B_q \quad \forall L \subseteq \{\overline{1, l}\}, \quad (12)$$

$$\text{где } B_q = \sum_{j \in N_q} b_j - \sum_{p=1}^s d_{pq}^-, \quad A_p = \sum_{i \in M_p} a_i - \sum_{q=1}^l d_{pq}^+.$$

Доказательство. Покажем, что система (2)–(8) совместна тогда и только тогда, когда совместна следующая система:

$$\sum_{p=1}^s y_{pq} = \sum_{j \in N_q} b_j, \quad q = \overline{1, l}, \quad (13)$$

$$\sum_{q=1}^l y_{pq} \leq \sum_{i \in M_p} a_i, \quad p = \overline{1, s}, \quad (14)$$

$$d_{pq}^- \leq y_{pq} \leq d_{pq}^+, \quad p = \overline{1, s}, \quad q = \overline{1, l}. \quad (15)$$

Действительно, если $\|x_{ijk}\|_{m \times n \times r}$ — некоторое решение системы (2)–(8), то $y_{pq}^* = \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk}$, $p = \overline{1, s}$, $q = \overline{1, l}$, является, очевидно, решением системы (13)–(15); так что совместность системы (13)–(15) следует из совместности системы (2)–(8).

Пусть теперь совместна система (13)–(15) и $\|y_{pq}^*\|_{s \times l}$ — ее некоторое решение. Тогда, как легко видеть, числа

$$x_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, r-1}, \\ x_{ij}^*, & \text{если } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = r \end{cases}$$

удовлетворяют условиям (2)–(8), где x_{ij}^* — некоторое решение системы:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \forall i \in R, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \in \{\overline{1, m}\} \setminus R, \\ \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} x_{ij} = y_{pq}^*, \quad p = \overline{1, s}, \quad q = \overline{1, l}, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{которая}$$

в силу условий (13) и (14) всегда будет разрешимой.

Так как множество допустимых решений задачи (1)–(8) ограничено и замкнуто, а любая непрерывная функция достигает на нем своей нижней границы, то для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой Гофмана [7], которая утверждает, что система (13)–(14) совместна тогда и только тогда, когда выполняются условия (10)–(12). Теорема 1 доказана.

Из теоремы непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $d_{pq}^- = d_{pq}^+$, $p = \overline{1, s}$, $q = \overline{1, l}$. Для разрешимости задачи (1)–(8) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\sum_{i \in M_p} a_i \geq \sum_{q=1}^l d_{pq}^-, \quad p = \overline{1, s}, \quad \sum_{j \in N_q} b_j = \sum_{p=1}^s d_{pq}^+, \quad q = \overline{1, l}.$$

Следствие 2. Для разрешимости задачи (1)–(6), (8), (9) необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$b_j \geq \sum_{p=1}^i d_{pj}^-, j = \overline{1, n}, \sum_{i \in M_p} a_i \geq \sum_{j=1}^n d_{pj}^-, p = \overline{1, s}.$$

$$\sum_{p=1}^i \min \left[\left(\sum_{i \in M_p} a_i - \sum_{j=1}^n d_{pj}^- \right), \sum_{j \in J} (d_{pj}^+ - d_{pj}^-) \right] \geq \sum_{j \in J} \left(b_j - \sum_{p=1}^i d_{pj}^- \right) \forall J \subseteq \{\overline{1, n}\}.$$

3. Декомпозиция задачи. Пусть существуют непустые множества $S \subsetneq \{\overline{1, s}\}$ и $L \subsetneq \{\overline{1, l}\}$ такие, что

$$\sum_{p \in S} \sum_{i \in M_p} a_i = \sum_{q \in L} \sum_{j \in N_q} b_j = \sum_{p \in S} \sum_{q \in L} d_{pq}^-. \quad (16)$$

Положим $E = \bigcup_{p \in S} M_p$, $F = \bigcup_{q \in L} N_q$, $\bar{E} = \{\overline{1, m}\} \setminus E$, $\bar{F} = \{\overline{1, n}\} \setminus F$, $Q = \bar{E} \cap R$, $\bar{Q} = \bar{E} \setminus Q$, $\bar{S} = \{\overline{1, s}\} \setminus S$, $\bar{L} = \{\overline{1, l}\} \setminus L$. Рассмотрим две подзадачи задачи (1)–(8):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E} \sum_{j \in F} c_{ij} \sum_{k=1}^r x_{ijk} + \sum_{j \in F} \sum_{t=1}^{r-1} u_{jt} \sum_{k=1}^t \left(b_{jk} - \sum_{i \in E} x_{ijk} \right) + \\ + \sum_{i \in E} \sum_{t=1}^{r-1} v_{it} \sum_{k=1}^t \left(a_{ik} - \sum_{j \in F} x_{ijk} \right) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sum_{i \in E} \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t b_{jk}, \quad t = \overline{1, r-1} \quad \forall j \in F, \quad (18)$$

$$\sum_{j \in F} \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t a_{ik}, \quad t = \overline{1, r-1} \quad \forall i \in E, \quad (19)$$

$$\sum_{i \in E} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = b_j \quad \forall j \in F, \quad (20)$$

$$\sum_{j \in F} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in E, \quad (21)$$

$$\sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = d_{pq}^- \quad \forall (p, q) \in S \times L, \quad (22)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i \in E, \quad \forall j \in F, \quad k = \overline{1, r}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \bar{E}} \sum_{j \in \bar{F}} c_{ij} \sum_{k=1}^r x_{ijk} + \sum_{j \in \bar{F}} \sum_{t=1}^{r-1} u_{jt} \sum_{k=1}^t \left(b_{jk} - \sum_{i \in \bar{E}} x_{ijk} \right) + \\ + \sum_{i \in \bar{E}} \sum_{t=1}^{r-1} v_{it} \sum_{k=1}^t \left(a_{ik} - \sum_{j \in \bar{F}} x_{ijk} \right) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sum_{i \in \bar{E}} \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t b_{jk}, \quad t = \overline{1, r-1} \quad \forall j \in \bar{F}, \quad (25)$$

$$\sum_{j \in \bar{F}} \sum_{k=1}^t x_{ijk} \leq \sum_{k=1}^t a_{ik}, \quad t = \overline{1, r-1} \quad \forall i \in \bar{E}, \quad (26)$$

$$\sum_{i \in \bar{E}} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = b_j \quad \forall j \in \bar{F}, \quad (27)$$

$$\sum_{j \in \bar{F}} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in Q, \quad (28)$$

$$\sum_{j \in \bar{F}} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq a_i \quad \forall i \in \bar{Q}, \quad (29)$$

$$d_{pq} \leq \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq d_{pq}^+ \quad \forall (p, q) \in \bar{S} \times \bar{L}, \quad (30)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i \in \bar{E}, \quad \forall j \in \bar{F}, \quad k = \bar{1}, \bar{r}. \quad (31)$$

Следующая теорема дает описание некоторого класса задач, решение которых сводится к решению двух подзадач меньшего порядка.

Теорема 2. Существование непустых множеств $S \subseteq \{\bar{1}, s\}$ и $L \subseteq \{\bar{1}, l\}$, для которых выполняются равенства (16), необходимо и достаточно для того, чтобы решение задачи (1)–(8) сводилось к решению подзадач (17)–(23) и (24)–(31).

Доказательство. Необходимость условий теоремы 2 очевидна. *Достаточность.* Из условий (10), (11), (16) вытекает, что для любого допустимого решения задачи (1)–(8) справедливы равенства: $x_{ijk} = 0 \quad \forall i \in E, \quad \forall j \in \bar{F}, \quad k = \bar{1}, \bar{r}, \quad x_{ijk} = 0 \quad \forall i \in \bar{E}, \quad \forall j \in F, \quad k = \bar{1}, \bar{r}$. Стало быть, решение задачи (1)–(8) сводится к решению подзадач (17)–(23) и (24)–(31).

Заметим, что аналог теоремы 2 справедлив и для задачи (1)–(8) в случае, когда существуют непустые множества $S \subseteq \{\bar{1}, s\}$ и $L \subseteq \{\bar{1}, l\}$, для которых выполняются равенства $d_{pq}^+ = 0 \quad \forall (p, q) \in (S \times \bar{L}) \cup (\bar{S} \times L)$, где, как и раньше, $\bar{S} = \{\bar{1}, s\} \setminus S$, $\bar{L} = \{\bar{1}, l\} \setminus L$. В этом случае одна из подзадач совпадает с подзадачей (24)–(31), а другая подзадача представляется

$$\begin{aligned} & \text{в виде (17)–(20), (23) и дополнительных условий: } \sum_{j \in F} \sum_{k=1}^r x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in \\ & \in R \cap E, \quad \sum_{j \in F} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq a_i \quad \forall i \in E \setminus (R \cap E), \quad d_{pq} \leq \sum_{i \in M_p} \sum_{j \in N_q} \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq \\ & \leq d_{pq}^+ \quad \forall (p, q) \in S \times L. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И., Корзников А. Д.—В сб.: Вопросы оптимизации планирования народного хозяйства союзной республики.—Минск, 1976, с. 31.
2. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И.—Промышленность Белоруссии, 1978, № 10, с. 82.
3. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И., Корзников А. Д., Шилкин В. Г.—В сб.: Автоматизированные системы плановых расчетов в республиканских плановых органах, вып. 13.—Минск, 1978, с. 6.
4. Голованчиков И. Я., Душук С. В.—Промышленность Белоруссии, 1980, № 1, с. 15.
5. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И.—В сб.: Планирование и прогнозирование экономического развития, вып. 6.—Минск, 1974, с. 157.
6. Беляева Л. В., Журбенко Н. Г., Шор Н. З.—Экономика и математические методы, 1978, т. 14, вып. 1, с. 137.
7. Берж К. Теория графов и ее приложения.—М., 1962.