

ОДНА ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Известные критерии А. М. Ляпунова о неустойчивости [1], основанные на методе вспомогательной функции (метод функций Ляпунова), неоднократно дополнялись и обобщались многими авторами. В первую очередь это работы Н. Г. Четаева [2] и К. П. Персидского [3]. Позднее теоремы о неустойчивости можно найти у Н. П. Еругина [4], Х. Л. Массера [5], Н. Н. Красовского [6], В. И. Зубова [7]. Варианты теорем о неустойчивости с использованием векторных функций Ляпунова выполнены В. М. Матросовым [8]. В этой же работе содержится и обширный список литературы по указанной теме.

Исходя из интересов настоящей статьи, выделим теорему 12.1 [6]. Здесь за счет выбора функции Ляпунова не только гарантируется отсутствие устойчивости положения равновесия, но и указано существование траектории, входящей в эту неустойчивую особую точку при неограниченном убывании времени t . Ниже приводится обобщение этого результата на случай периодических систем, при этом используются конструкции доказательств [6].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad f(0, t) = 0, \quad \forall t \in R, \quad (1)$$

где x — n -вектор; f — вектор-функция, определенная и непрерывная в цилиндре $D_H = \{(x, t) : \|x\| < H, t \in R\}$. Считаем, что f периодична по t с периодом $\Theta > 0$ и удовлетворяет в D_H некоторым условиям существования и единственности решений.

В дальнейшем воспользуемся следующими обозначениями: $x(x_0, t_0, t)$ — решение (траектория) системы (1) с начальными условиями x_0, t_0 ; $S_\alpha = \{x : \|x\| < \alpha\}$ — шар; S_α — замыкание шара S_α ; $V(x, t)$ — вещественная скалярная функция, определенная и непрерывно дифференцируемая в D_H ; $\dot{V}(x, t)$ — производная по времени, вычисленная от функции $V(x, t)$ в силу системы (1); D_h — замыкание D_h по x . Следуя [6], введем

Определение. Функция $V(x, t)$ называется определенно положительно определенной в области $G = \{(x, t) : V(x, t) \geq 0, (x, t) \in D_h, 0 < h < H, \text{ если } \forall \eta > 0, 0 < \eta < h, \exists \gamma > 0 \text{ такое, что } \dot{V}(x, t) > \gamma \forall (x, t) \in G \text{ и } \|x\| > \eta\}$.

Теорема. Пусть в $D_h, 0 < h < H$, существует функция $V(x, t)$, периодическая по t периода Θ , имеющая определенно положительную производную $V(x, t)$ в $G = \{(x, t) : V(x, t) \geq 0, (x, t) \in D_h\}$ и точка $x=0$ входит в замыкание области $V(x, t) > 0$ по $x \forall t \in R$. Тогда решение $x=0$ неустойчиво в смысле Ляпунова, и в области G существует полутраектория $x(x_0, t_0, t), t \leq t_0$, такая, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(x_0, t_0, t)\| = 0.$$

Доказательство. Выберем в фазовом пространстве последовательность точек $\{q_n\}$ таких, что $V(q_n, 0) = 0, 0 < \|q_n\| < h$, и $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу свойств функции V и ее производной $\dot{V}$ всякая траектория $x(q_n, 0, t)$ обладает тем свойством, что $\|x(q_n, 0, t), t\| > 0$ при тех значениях времени t , при которых она не покидает шар S_h . С учетом периодичности функция V допускает бесконечно малый высший предел при $x \rightarrow 0$ [1]. Поэтому аналогично [6] существуют числа $t_n > 0$, при которых $\|x(q_n, 0, t_n)\| = h$. Положим $p_n = x(q_n, 0, t_n)$ и пусть P — предельная точка последовательности $\{p_n\}$ (не усложняя обозначений считаем, что $p_n \rightarrow P$ при $n \rightarrow \infty$).

Далее, пусть $m(n)$ — целочисленная функция натурального аргумента такая, что $t_n = t'_n + m(n)\Theta$, где $t'_n \in [0, \Theta]$. Ограниченная последовательность $\{t'_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность (пусть это

сама последовательность, т. е. $t_n^* \rightarrow t^*$ при $n \rightarrow \infty$). Покажем, что траектория $x(P, t^*, t)$ и является искомой. Действительно, предположим сначала, что эта траектория покидает шар S_n при убывании времени t . Тогда найдется число $\Delta < 0$, для которого $\|x(P, t^*, t^* + \Delta)\| > h$. По теореме об интегральной непрерывности решений можно указать число N настолько большое, что из предыдущего неравенства будем иметь $\|x(P_n, t_n^*, t_n^* + \Delta)\| > h \forall n > N$. Но тогда с учетом свойств решений периодических систем сразу получаем неравенство $\|x(P_n, t_n, t_n + \Delta)\| > h \forall n > N$, противоречащее построению чисел $t_n > 0$ и $\Delta < 0$. Покажем это. Так как вектор-функция f непрерывна в D_N , а значит, и равномерно ограничена в D_N , то $t_n \rightarrow \infty$, как только $n \rightarrow \infty$. Поэтому с учетом равенства $x(P_n, t_n, t_n + \Delta) = x(q_n, 0, t_n + \Delta)$ и условия $t_n + \Delta > 0$ при $n > \bar{N} > N$ соотношение $\|x(q_n, 0, t_n + \Delta)\| > h$ невозможно. Теперь уже легко проверить, что $\|x(P, t^*, t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это можно сделать так же, как и при доказательстве теоремы 12.1 [6] с учетом равномерной ограниченности f в D_N .

Пример. Для системы третьего порядка $\dot{x} = yf(x, y, z, t)$, $\dot{y} = -xf(x, y, z, t)$, $\dot{z} = \psi(x, y, z, t)$, удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к системе (1), функция $V = z - x^2 - y^2$ имеет производную по времени $\dot{V} = \psi(x, y, z, t)$. Пусть $\forall \eta$, $0 < \eta < h$, существует число $\gamma > 0$ такое, что $\psi(x, y, z, t) > \gamma$ в области $\{(x, y, z, t): z \geq x^2 + y^2, \eta^2 < x^2 + y^2 + z^2 < h^2, t \in \mathbb{R}\}$. В этом случае будут, очевидно, выполнены все требования доказанной теоремы, а значит, в указанной области существует траектория, входящая в начало координат при неограниченном убывании времени t .

З а м е ч а н и е. Существование нетривиальной траектории, для которой начало координат является α -предельной точкой, есть достаточный признак неустойчивости нулевого решения автономных систем [4, 9, 10]. В [10] отмечено, что это условие не является необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М. — Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М., 1962.
3. Персидский К. П. — УМН, 1946, т. 1, вып. 5—6.
4. Еругин Н. П. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
5. Массера Х. Л. — Сб. переводов. Математика. — М., 1957, т. 1:4.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М., 1959.
7. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л., 1959.
8. Матросов В. М. — Труды III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 1. — М., 1965.
9. Зубов В. И. — Матем. сб., 1959, т. 48 (90), № 2.
10. Богданов Ю. С. — Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 1.

Поступила в редакцию
01.02.79.

Кафедра МОУ

УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ, Ю. И. КАШИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОПЛИВНЫХ РЕСУРСОВ

Проблема рационального использования топливных ресурсов республики связана с решением задач по оптимальному их распределению на коммунально-бытовые и производственно-эксплуатационные нужды.

В работах [1—4] рассмотрена задача распределения топливных ресурсов на коммунально-бытовые нужды БССР. Экономическая эффективность от результатов ее внедрения составит свыше миллиона рублей в год.