

$$= \frac{2d_2^2}{z_1 - \sqrt{z_2^2 - 4d_1^2 d_2^2}}, \quad \xi_3 = \frac{z_3 + \sqrt{z_3^2 - 4d_1^3 d_2^3}}{2d_1^3} = \frac{2d_2^3}{z_3 - \sqrt{z_3^2 - 4d_1^3 d_2^3}},$$

$$d_1^j = 0,5 R [1 - i\mu_j + m(1 + i\mu_j)], \quad d_2^j = 0,5 R [1 + i\mu_j + m(1 - i\mu_j)] \quad j = 1, 2, 3.$$

Соотношения (15) получены путем обращения формулы (6).

З а м е ч а н и е. Чтобы получить искомое решение при $D < 0$, надо учесть зависимость между коэффициентами полиномов функции $F(\xi)$, а также некоторые другие зависимости, приведенные в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем.— Львов, 1960.
2. Савин Г. Н., Тульчий В. И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками.— Киев, 1971.
3. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит.— Минск, 1975.
4. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости.— Минск, 1972, с. 171.

Поступила в редакцию
04.01.79.

НИИ ПФН

УДК 517.518.84

С. А. ЧУПРИГИН

ЛАКУНАРНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ТИПА $(0, 1, \dots, p, q, r)$

1. Пусть заданы n узлов

$$x_{kn} = \frac{2k\pi}{n} \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad (1)$$

натуральные числа $0 \leq p < q < r$ и произвольные действительные числа α_{ki} ($k = \overline{0, n-1}$; $i = \overline{0, p, q, r}$). Требуется исследовать проблему существования, единственности и дать представление тригонометрического $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционного полинома по узлам (1), т. е. полинома $T(x)$ порядка не выше $\frac{n}{2}(p+3)$, удовлетворяющего условиям

$$T^{(i)}(x_{kn}) = \alpha_{ki} \quad (k = \overline{0, n-1}; i = \overline{0, p, q, r}). \quad (2)$$

При этом, если число $j = \frac{n}{2}(p+3)$ является целым, то будем искать полином $T(x)$ в виде

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + a_j \cos jx \quad (3)$$

или

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + b_j \sin jx. \quad (4)$$

Если же $j = \frac{n}{2}(p+3)$ не является целым числом, то $T(x)$ ищем в виде

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-\frac{1}{2}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (5)$$

При $q=p+1$, $r=p+2$, т. е. в случае интерполирования Эрмита, указанные проблемы решаются положительно [1—3]. Если же $q-p > 1$ или $r-q > 1$, т. е. в случае лакунарного тригонометрического интерполирования, проблема существования и единственности полинома $T(x)$ не всегда решается положительно.

Известен ряд результатов, получающихся из $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования при определенном выборе параметров p, q, r . Так, случай $q=p+1$ рассмотрен в [4, 5], случай $p=0, p=1$ изучен Э. М. Зеелем [6, 7]. Другие частные случаи можно найти в обзорной статье [8].

2. Условия (2) можно записать в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $T(x)$. Эти коэффициенты, а следовательно, и единственный интерполяционный полином, можно найти при любых a_{ki} тогда и только тогда, когда главный определитель системы (2) отличен от нуля. В этом случае однородная система

$$T^{(i)}(x_{kn}) = 0 \quad (k = \overline{0, n-1}; i = \overline{0, p, q, r}) \quad (6)$$

имеет только нулевое решение. Если же однородная система (6) имеет ненулевое решение, то $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином, вообще говоря, не существует.

Теорема 1. Если $n=2m$ и $r-q$ четно, то при любом p тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином по узлам (1), вообще говоря, не существует.

Доказательство. Легко проверить, что если r и q одинаковой четности, то нетривиальным решением однородной системы (6) является тригонометрический полином $\sin^{p+1} mx$, если p одинаковой четности с q и r , и полином $\sin^{p+2} mx$, если p различной четности с q и r .

Теорема 2. Пусть $n=2m+1$, тогда тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ — интерполяционный полином, вообще говоря, не существует в следующих случаях: 1) при любом p и нечетных q, r ; 2) при четных p, q, r .

Доказательство. В первом случае нетривиальным решением однородной системы (6) является полином $\sin^{p+1} \frac{n}{2} x$ при p нечетном и

$\sin^{p+2} \frac{n}{2} x$ при четном p . Во втором случае будем искать ненулевое решение системы (6) в виде $Q(x) = \sin nx + A_1 \sin 2nx + \dots + A_{p/2} \sin (p/2 + 1)nx$. Очевидно, что полином $Q(x)$ и его четные производные обращаются в нуль в узлах (1) при любом выборе коэффициентов A_v ($v = \overline{1, p/2}$). Выберем A_v так, чтобы обращались в нуль в узлах (1) нечетные производные полинома $Q(x)$. Для этого A_v должны удовлетворять условиям $n^{2s-1} + (2n)^{2s-1} A_1 + (3n)^{2s-1} A_2 + \dots + [(p/2+1)n]^{2s-1} A_{p/2} = 0$, ($s = \overline{1, p/2}$). Полученная система разрешима относительно A_v , так как определитель ее отличен от нуля, ибо, как легко заметить, он равен $n^{p/4} (p/2+1)! W(2^2, 3^2, 4^2, \dots, (p/2+1)^2)$, где W — определитель Вандермонда.

3. **Теорема 3.** Если n четно, а $r-q$ нечетно, то при любом p существует единственный тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином по узлам (1) вида (3) при четном p и вида (4) при p нечетном.

Теорема 4. Пусть n нечетно, тогда

1. Если q и r — числа различной четности, то при любом p существует единственный тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином по узлам (1) вида (4) при нечетном p и вида (5) при p четном.

2. Если p нечетно, а q и r четны, существует единственный тригонометрический $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционный полином по узлам (1) вида (3).

Доказательство теорем 3, 4 во всех случаях проводится по единой схеме, поэтому мы ограничимся лишь одним случаем, например, нечетного n , четного p и q и r различной четности.

Заметим, что если нам удалось доказать существование тригонометрического полинома вида (5), удовлетворяющего условиям (2) при любых a_{ki} , то отсюда следует единственность такого полинома.

Введем, как обычно, фундаментальные полиномы $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования $U_{\alpha i}(x) = U_{\alpha i}(0, 1, \dots, p, q, r; x)$, т. е. полиномы вида (5), которые в узлах (1) удовлетворяют условиям

$$U_{\gamma i}^{(\mu)}(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i - \mu)^2 + (k - \gamma)^2 = 0 \\ 0, & \text{если } (i - \mu)^2 + (k - \gamma)^2 > 0 \end{cases} \quad (\gamma, k = \overline{0, n-1}; \mu, i = \overline{0, p, q, r}).$$

Тогда интерполяционный полином можно представить в виде

$$T(x) = \sum_{\gamma=0}^p \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ki} U_{ki}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{kq} U_{kq}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{kr} U_{kr}(x),$$

и, следовательно, исследование проблемы существования и единственности и представления интерполяционного полинома сводится к построению фундаментальных полиномов $U_{\gamma i}(x)$. В свою очередь, задача построения фундаментальных полиномов $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования сводится к построению полиномов $U_i(x) = U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ вида (5), удовлетворяющих условиям

$$U_i^{(\mu)}(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i - \mu)^2 + k^2 = 0 \\ 0, & \text{если } (i - \mu)^2 + k^2 > 0 \end{cases} \quad (k = \overline{0, n-1}; \mu, i = 0, p, q, r), \quad (7)$$

ибо, как легко заметить, $U_{ki}(x) = U_i(x - x_{kn})$ ($k = \overline{0, n-1}; i = 0, p, q, r$). Построением полиномов $U_i(x) = U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ мы и займемся. Построение $U_r(x) = U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ ведется по схеме, предложенной в [6, 7]. Будем искать $U_r(x)$ в виде

$$U_r(x) = (-1)^{r/2} 2^{p+1} \sin^{p+1} \frac{n}{2} x \sum_{v=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} b_v \sin\left(\frac{n}{2} + v\right) x \quad (8)$$

для четного r и в виде

$$U_r(x) = (-1)^{r/2} 2^{p+1} \sin^{p+1} \frac{n}{2} x \sum_{v=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} b_v \cos\left(\frac{n}{2} + v\right) x \quad (8')$$

для r нечетного.

Из (7) следует, что полином $U_r(x)$ должен удовлетворять следующим условиям:

$$U_r^{(\mu)}(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\mu - r)^2 + k^2 = 0 \\ 0, & \text{если } (\mu - r)^2 + k^2 > 0 \end{cases} \quad (k = \overline{0, n-1}; \mu = \overline{0, p, q, r}). \quad (9)$$

Благодаря наличию множителя $\sin^{p+1} \frac{n}{2} x$ для всех $k = \overline{0, n-1}$ и $\mu = \overline{0, p}$ условия (9) выполняются при любом выборе коэффициентов b_v . Осталось показать, что можно так подобрать коэффициенты b_v , чтобы выполнялись оставшиеся условия

$$U_r^{(q)}(x_{kn}) = 0 \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad U_r^{(r)}(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0 \\ 0, & \text{если } k = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Для четного r , исходя из (8), представив $\sin^{p+1} \frac{n}{2} x$ в виде $\sin^{p+1} \frac{n}{2} x = \frac{1}{2} p \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} \sin(2s+1) \frac{n}{2} x$, путем несложных выкладок можно получить:

$$U_r^{(r)}(x_{kn}) = b_0 n^r \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^{s+1} \binom{p+1}{p/2-s} [(s+1)^r - s^r] + \\ + \sum_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ b_v \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [(\nu - sn)^r - (\nu + (s+1)n)^r] + \right.$$

$$+ b_{-} \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [(v+sn)^r - ((s+1)n-v)^r] \cos v x_{kn}, \quad (11)$$

$$U_r^{(q)}(x_{kn}) = (-1)^{\frac{r+q+1}{2}} \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ b_{+} \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [v-sn]^q - \right. \\ \left. - (v+(s+1)n)^q \right\} - b_{-} \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [-(v+sn)^q - \\ - ((s+1)n-v)^q] \sin v x_{kn}. \quad (12)$$

Для выполнения условий (10), учитывая, что полином

$$l(x) = \frac{\sin \frac{n}{2} x}{n \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos v x \quad (13)$$

удовлетворяет условиям $l(x_{kn}) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0 \\ 0, & \text{если } k=1, \dots, n-1 \end{cases}$, достаточно выбрать коэффициенты при $\sin v x_{kn}$ в (12) равными нулю, а коэффициенты при $\cos v x_{kn}$ в (11) равными соответствующим коэффициентам полинома (13). Тогда получим для определения b_0 уравнение

$$b_0 n^r \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^{s+1} \binom{p+1}{p/2-s} [(s+1)^r - s^r] = \frac{1}{n},$$

а для определения коэффициентов b_{+} , b_{-} , $(v=1, \frac{n-1}{2})$ следующую систему

$$\begin{cases} b_{+} A(v, r) + b_{-} A(-v, r) = \frac{2}{n} \left(v=1, \frac{n-1}{2} \right), \\ b_{+} A(v, q) - b_{-} A(-v, q) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

где

$$A(y, z) = \sum_{s=0}^{p/2} (-1)^s \binom{p+1}{p/2-s} [(y-sn)^z - (y+(s+1)n)^z]. \quad (15)$$

Легко проверить, что при $v=0$ первое уравнение системы (14) совпадает с уравнением для определения b_0 , а второе тривиальное, поэтому мы можем в системе (14) считать v меняющимся от 0 до $\frac{n-1}{2}$.

Заметим, что для нечетного r , исходя из представления (8'), мы получим такую же систему, как и (14), только q и r нужно поменять местами.

Простыми, но довольно громоздкими выкладками можно показать, что коэффициент при b_0 и определитель системы (14)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A(v, r) & A(-v, r) \\ A(v, q) & A(-v, q) \end{vmatrix}$$

отличны от нуля; более того, $\text{sgn } \Delta = (-1)^{p/2+1}$ и, следовательно, система (14) разрешима. Найдя b_0 , b_{+} , b_{-} и подставив их в (8), получим представление для $U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x)$. Фундаментальные же полиномы $U_{kr}(0, 1, \dots, p, q, r; x)$, как было указано выше, равны соответственно $U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x-x_{kn})$.

Теперь легко проверить, что полиномы $U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ ($i=0, \dots, q$) могут быть представлены в следующей форме:

$$U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x) = U_i(0, 1, \dots, p, q; x) - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ji} U_{jr}(0, 1, \dots, p, q, r; x), \quad (16)$$

где $U_i(0, 1, \dots, p, q; x)$ — фундаментальные полиномы $(0, 1, \dots, p, q)$ -интерполирования, построенные нами в [4, 5], а $\beta_{ji} = U_i^{(r)}(0, 1, \dots, p, q; x_{jn})$. В самом деле, выполнение условий (7) при $\mu = 0, p, q$ следует из представления (16) и свойств фундаментальных полиномов $(0, 1, \dots, p, q)$ - и $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования, выполнение же условий (7) при $\mu = r$, т. е. равенство нулю производных порядка r в узлах (1), обеспечивается специальным выбором коэффициентов β_{ji} в (16).

Итак, для нечетного n имеет место

Теорема 5. В случае четных p, r и нечетного q для фундаментальных полиномов $U_{ki}(0, 1, \dots, p, q, r; x) = U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x - x_{kn})$ ($k = 0, n-1$) тригонометрического $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполирования по узлам (1) справедливо представление:

$$U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x) = (-1)^{r/2} 2^{p+2} \frac{1}{n} \sin^{p+1} \frac{\pi}{2} x \times \\ \times \sum_{v=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \frac{A(-v, q)}{A(v, r) A(-v, q) + A(v, q) A(-v, r)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + v\right) x,$$

где $A(y, z)$ определяется по формуле (15),

$$U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x) = U_i(0, 1, \dots, p, q; x) - \sum_{j=0}^{n-1} U_i^{(r)}(0, 1, \dots, p, q; x_{jn}) U_r(0, 1, \dots, p, q, r; x - x_{jn}) \quad (i = 0, p, q).$$

З а м е ч а н и е. Как видно из предыдущего, существование и представление интерполяционного полинома зависит от четности чисел p, q, r . Во всех случаях, указанных в теоремах 3, 4, построение фундаментальных полиномов проводится аналогично разобранным случаям четных p, r и нечетного q . Однако при реализации предложенной схемы могут возникнуть особенности. Например, при нечетных p, q и четном r предложенную схему построения фундаментальных полиномов следует изменить, так как входящие в (16) полиномы $U_i(0, 1, \dots, p, q; x)$, как доказано в [5], вообще говоря, не существуют. Поэтому сначала строятся полиномы $U_q(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ рассмотренным выше методом, а затем остальные фундаментальные полиномы $U_i(0, 1, \dots, p, q, r; x)$ ($i = 0, p, r$), причем они представляются по формуле, аналогичной (16), содержащей полиномы $U_i(0, 1, \dots, p, r; x)$, которые уже существуют, единственны и определены в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Турецкий А. Х. — Труды Витебского пед. ин-та имени С. М. Кирова, 1936, т. 1, с. 73.
2. Salzer H. E. — J. Math. and Phys., 1960, v. 39, № 1, p. 83.
3. Зеель Э. М. — Изв. вузов. Матем., 1974, № 3, с. 43.
4. Чупригин О. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. мат., физ., мех., 1971, № 3, с. 24.
5. Чупригин О. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1972, № 3, с. 17.
6. Зеель Э. М. — Изв. вузов. Матем., 1970, № 3, с. 27.
7. Зеель Э. М. — В сб.: Матем. анализ и теория функций, вып. 8. — М., 1970, с. 150, 191.
8. Sharma A. — SIAM Rev., 1972, v. 14, № 1, с. 129.