

Операция	Верхняя оценка числа тактов в БСКВ	Верхняя оценка числа тактов в СКВ	Экспериментальные оценки работы программы в миллисекундах
Преобразование чисел из позиционной системы счисления (ПСС) в БСКВ	$2 + \lceil \log_{2n} \rceil$		3 — 23
Преобразование чисел из БСКВ в ПСС	$\lceil \log_{2n} \rceil$	$n - 1$	0 — 3
Умножение	$3 + \lceil \log_{2n} \rceil$	$4n + 9$	20 — 47
Сложение (вычитание)	3	$n + 1$	3 — 10
Определение знака	$3 + \lceil \log_{2n} \rceil$	n	3 — 10
Сравнение	$3 + \lceil \log_{2n} \rceil$	$2(n + 1)$	3 — 13
Деление	$2\lceil \log_{2n} \rceil + 6$	$n^2 + 3n$	47 — 120

гональных базисов и их весов, выделение операнда в команде АП, подсчет допустимых сумм весов и формирования поля имени операнда.

ИС работает под управлением ДОС ЕС ЭВМ. Все программы данной ИС содержат 1119 операторов языка PL/I для ДОС ЕС ЭВМ.

Теоретические и экспериментальные оценки быстродействия моделируемых операций приведены в таблице. Здесь n — количество оснований в БСКВ, такт — совокупность элементарных операций, которые могут выполняться одновременно. Оценки сверху числа тактов в СКВ взяты из [1], а в БСКВ из [2, 3]. Экспериментальные оценки быстродействия операций в БСКВ получены для $n=6$, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=7$, $p_4=47$, $p_5=481$, $p_6=2203$.

Разработанная ИС позволяет успешно использовать в МВС с неоднородными процессорами кодирование информации в безранговой системе в коде вычетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Торгашев В. Н. Системы остаточных классов и надежность ЦВМ. — М., 1973.
2. Буза М. К. — Вычислительная техника в машиностроении, 1974, № 3, с. 96.
3. Буза М. К. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1975, № 2, с. 80.
4. Грис Д. Конструирование компиляторов для цифровых вычислительных машин. — М., 1975.

Поступила в редакцию
07.12.78.

Кафедра МО ЭВМ

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

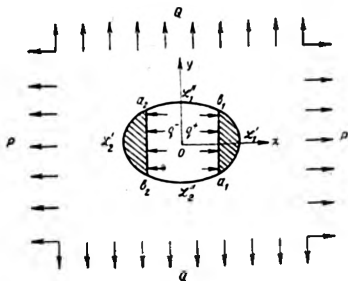
УДК 539.3

ПЛОСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Результаты исследований по концентрации напряжений в пластинках, подкрепленных абсолютно жесткими и упругими элементами, имеющие практическое приложение в инженерной деятельности, содержатся в ряде работ [1—4].

Основываясь на эффективном решении смешанной задачи термоупругости анизотропного тела для плоскости с эллиптическим отверстием [4], в настоящей работе решаем задачу об определении термонапряженного состояния в упомянутой области в зависимости от температурного поля, внешней нагрузки, термоупругих свойств пластинки, типа подкрепления отверстия и других факторов.

Пусть в эллиптическое отверстие бесконечной анизотропной плоскости, в каждой точке которой существуют два взаимно ортогональные главные направления упругости, вставлены два абсолютно жесткие ортотропные включения, ограниченные хордами и дугами контура отверстия $L'_1 = a_1 b_1$ и $L'_2 = a_2 b_2$. Оси координат x и y совпадают с главными направлениями упругости. После того, как материалы этих тел, находящихся при температуре $T = 0$, вдоль линии их контакта L'_1, L'_2 жестко сцеплены, температура включений и пластинки равномерно повышается до $T_0 = \text{const.}$ Предполагается, что пластинка на бесконечности равномерно растягивается приложенной внешней нагрузкой $\sigma_x^{\infty} = P$, $\sigma_y^{\infty} = Q$, $\tau_{xy}^{\infty} = 0$. К правому включению приложена равномерная нагрузка интенсивности q^+ , к левому — q^- . Будем считать, что на участках L'_1, L'_2 контура L внешняя нагрузка отсутствует, середины дуг L'_1 и L'_2 расположены на оси x (см. рисунок).



Термоупругое состояние анизотропного тела, обладающего прямолинейной упругой и тепловой анизотропией, определяется по формулам [4]:

$$\sigma_x = 2\text{Re} [\mu_1^2 \Phi_1(z_1) + \mu_2^2 \Psi_1(z_2)], \quad (1)$$

$$\sigma_y = 2\text{Re} [\Phi_1(z_1) + \Psi_1(z_2)], \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = -2\text{Re} [\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Psi_1(z_2)], \quad (3)$$

$$u = 2\text{Re} [\rho_1 \Phi_1(z_1) + \rho_2 \Psi_1(z_2) + \beta_1 \psi_0(z_3)], \quad (4)$$

$$v = 2\text{Re} [q_1 \Phi_1(z_1) + q_2 \Psi_1(z_2) + \beta_2 \psi_0(z_3)], \quad (5)$$

где $z_j = x + y\mu_j$ ($j = 1, 2$); $z_3 = x + y\lambda_0$; $\Phi_1(z) = \int \Phi_1(z) dz$; $\Psi_1(z) = \int \Psi_1(z) dz$; $\rho_j, q_j, \mu_j, \beta_j, \lambda_0$ — известные коэффициенты; $\psi_0(z_3)$ — комплексный потенциал температурного поля T ; $\psi_0(z_3) = \int \Psi_0(z_3) dz_3$.

Метод отображения в сочетании с методом аналитического продолжения широко применяется в решении основных краевых задач по определению температурного поля и напряженного состояния в односвязных областях, которые можно отобразить с помощью рациональных функций на круг. Указанное сочетание легло в основу решения смешанной задачи термоупругости для анизотропной плоскости, ослабленной эллиптическим отверстием.

Пусть $z = \omega(\xi) = R\left(\xi + \frac{m}{\xi}\right)$ ($\xi = \rho e^{i\theta}$) — функция, конформно отображающая внешность окружности γ (для точек которой $|\xi| = |\sigma| = 1$) на внешность контура L . Тогда, учитывая, что для всех точек $t(x, y)$ на L $x = 0,5 [\omega(\sigma) + \omega(\bar{\sigma})]$, $y = -0,5 i [\omega(\sigma) - \omega(\bar{\sigma})]$,

получаем

$$z_j = \omega_j(\xi) = 0,5 \left[(1 - i\mu_j) \omega(\xi) + (1 + i\mu_j) \omega\left(\frac{1}{\xi}\right) \right]. \quad (6)$$

Не воспроизводя рассуждений, приведенных в [6], напомним граничное условие на контуре γ :

$$F^-(\sigma) - F^+(\sigma) = 0 \text{ на } \gamma'', \quad (7)$$

$$x_j [\bar{F}(\sigma) + s_j F(\sigma)]^+ + [\bar{F}(\sigma) + s_j F(\sigma)]^- = \bar{g}(\sigma) + \lambda_j g(\sigma) \text{ на } \gamma'. \quad (8)$$

Здесь $F(\sigma) = \sigma \omega'_1(\sigma) \Phi(\sigma)$, $\Psi_*(\sigma) = \Psi_0[\omega_3(\sigma)]$, $g_1 = \sigma g'_0(\sigma) - q_0 \sigma \omega'_3(\sigma) \times$

$\times \Psi_*(\sigma) + q_7 \overline{\sigma \omega_3(\sigma)} \overline{\Psi_*(\sigma)}$, $g(\sigma) = \frac{2\mu_1 g_1}{(\mu_1 - \mu_2) q_8}$, $g_0(\sigma) = u q_2 - v p_2$; $p_j (j = 5, 6, 7)$, $\mu_j (j = 1, 2)$ — известные мнимые величины; $\lambda_j (j = 1, 2)$ — вещественные корни уравнения

$$\kappa k \lambda^2 + (\kappa^2 + k^2 - 1) \lambda + \kappa k = 0; \quad (9)$$

$\gamma' = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \beta_k$, $\gamma' = \gamma - \gamma'$; α_k, β_k — точки окружности γ , соответствующие точкам a_k, b_k контура L .

Решение граничной задачи (7), (8), имеющее в точках a_k и β_k особенности интегрируемого порядка, запишем в виде

$$\bar{F}(\xi) + s_j F(\xi) = \frac{-X_j(\xi)}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{g}(\tau) + \lambda_j g(\tau)}{X_j^-(\tau)(\tau - \xi)} d\tau + k_0 [X_{0j}(\xi) P_j(\xi) + d_j X_j(\xi)]. \quad (10)$$

Решая систему уравнений (10), находим

$$F(\xi) = \frac{1}{k_0} [F_1(\xi) - F_2(\xi)], \quad (11)$$

где $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ — правые части соотношения (10) при $j = 1, 2$; остальные обозначения приведены в [4].

Перемещения точек $t(x, y)$, принадлежащих дугам L_1' и L_2' с точностью до несущественных постоянных, определим соотношениями

$$u = 0,5 RT_0 (\alpha'_1 - \alpha_1) (1 + m) (\sigma + \bar{\sigma}), \quad v = -0,5 i RT_0 (\alpha'_2 - \alpha_2) (1 - m) (\sigma - \bar{\sigma}), \quad (12)$$

где $\alpha'_i, \alpha_i (i = 1, 2)$ — линейные коэффициенты температурного расширения включений и пластинки.

Воспользовавшись далее общим выражением для функции $g(\sigma)$ с учетом (12), будем иметь

$$g(\sigma) = M_0 \sigma + N_0 \bar{\sigma},$$

$$\text{где } M_0 = \frac{2\mu_2 M_3}{(\mu_1 - \mu_2) q_8}, \quad N_0 = \frac{2\mu_2 N_3}{(\mu_1 - \mu_2) q_8},$$

$$M_3 = M_2 - q_6 N_1 - q_7 N_2, \quad N_3 = -M_1 + q_6 N_2 + q_7 N_1,$$

$$M_j = 0,5 RT_0 [(1 + m) (\alpha'_1 - \alpha_1) q_2 + (-1)^j \cdot i (1 - m) (\alpha'_2 - \alpha_2) p_2] (j = 1, 2),$$

$$N_1 = 0,25 RT_0 [1 - i\lambda_0 + m(1 + i\lambda_0)],$$

$$N_2 = 0,25 RT_0 [1 + i\lambda_0 + m(1 - i\lambda_0)].$$

Полагая, что дискриминант квадратного уравнения (9) $D > 0$ на основании формул (11), получаем

$$F(\xi) = M_* \xi + \frac{N_*}{\xi} + X_{01}(\xi) t \left(\frac{c_0}{\xi} + c_1 + c_2 \xi + c_3 \xi^2 + c_4 \xi^3 \right) - X_{02}(\xi) v \left(c_0 \xi^3 + c_1 \xi^2 + c_2 \xi + c_3 + \frac{c_4}{\xi} \right), \quad (13)$$

где $M_* = \frac{M_0(1 + \kappa) - k N_0}{(1 + \kappa)^2 - k^2}$, $N_* = \frac{(1 + \kappa) N_0 - k M_0}{(1 + \kappa)^2 - k^2}$, $v = \frac{\kappa_1}{\lambda_1}$, $t = -\exp\left(\frac{\omega \ln \kappa_1}{\pi}\right)$, ω — центральный угол, соответствующий дуге γ'_1 , $X_{0j}(\xi) = (\xi^2 - \alpha_j^2)^{1/2} (\xi^2 - \beta_j^2)^{1/2}$, $\gamma_j = -\frac{1}{2} + \frac{\ln \kappa_j}{2\pi i}$, c_j — произвольные вещественные коэффициенты, $\bar{\gamma}_j = -\frac{1}{2} - \frac{\ln \kappa_j}{2\pi i}$.

Поднятия полученное решение условиям поведения функции $F(\xi)$ в окрестности нуля и бесконечно удаленной точки $F(\xi) = a_* + \frac{B_*}{\xi} + O(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$, $F(\xi) = a_0 + \xi A_* + O\left(\frac{1}{\xi}\right)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ и учитывая при этом, что

$X_{0j}(\xi) = \xi^{-2}$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, $X_{01}(0) = t^{-1}$, $X_{02}(0) = t$, получаем выражения, определяющие значения коэффициентов c_j :

$$c_1 = \frac{a_* + a_0 v}{1 - v^2}, \quad c_0 = \frac{B_* - N_* - v(M_* - A_*)}{1 - v^2},$$

$$c_3 = \frac{a_0 + a_* v}{t(1 - v^2)}, \quad c_4 = \frac{v(B_* - N_*) - M_* + A_*}{t(1 - v^2)},$$

где $a_* = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} a_0 + \frac{2\mu_2 b_0}{\mu_2 - \mu_1}$, $A_* = m_1 \Gamma$,

$$B_* = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \bar{m}_1 \Gamma + \frac{2\mu_2 \bar{m}_2 \Gamma'}{\mu_2 - \mu_1}, \quad m_j = 0,5 R [1 - i\mu_j + (1 + i\mu_j) m],$$

$$a_0 = \frac{iq_2 X}{4\pi(\mu_1 q_2 - \mu_2 q_1)}, \quad b_0 = \frac{iq_1 X}{4\pi(q_1 \mu_2 - \mu_1 q_2)}, \quad \Gamma = \frac{P - Q\mu_2^2}{2(\mu_1^2 - \mu_2^2)},$$

$$\Gamma' = \frac{P - Q\mu_1^2}{2(\mu_2^2 - \mu_1^2)}, \quad X = s(q^+ - q^-); \quad s - \text{длина хорды } a_1 b_1.$$

Для определения коэффициента c_2 воспользуемся соотношением

$$(\mu_2 - \mu_1) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{\sigma} [F^-(\sigma) - F^+(\sigma)] d\sigma = X_1 + \mu_2 Y_1, \quad (14)$$

где X_1, Y_1 — проекции главного вектора внешней нагрузки, действующей на дугу $\alpha_1 \beta_1$ со стороны области $D^+ (|\xi| < 1)$. В рассматриваемом случае $X_1 = q^+ s$, $Y_1 = 0$.

Поскольку $\kappa_j X_{0j}^+(\sigma) + X_{0j}^-(\sigma) = 0$ на γ' , выражение (14) с учетом (13) преобразуется к виду

$$(1 + \kappa_1^{-1}) t (c_0 I_{-2}^1 + c_1 I_{-1}^1 + c_2 I_0^1 + c_3 I_1^1 + c_4 I_2^1) e^{\beta_1(z-\omega)} - e^{\beta_2(z-\omega)} (1 + \kappa_2^{-1}) v (c_0 I_{-2}^2 + c_1 I_{-1}^2 + c_2 I_0^2 + c_3 I_1^2 + c_4 I_2^2) = \frac{i X_1}{\mu_1 - \mu_2},$$

$$\text{где } I_k^j = 2 \int_0^{\omega/2} \frac{\cos(A_j - k\theta) d\theta}{R(\theta)}, \quad A_j = \beta_j \ln \left| \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha - \theta)} \right|,$$

$$R(\theta) = V |\sin(\theta - \alpha) \sin(\theta + \alpha)|, \quad \beta_j = -\frac{\ln \kappa_j}{2\pi}, \quad j = 1, 2; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2.$$

Из последнего соотношения легко определяется постоянная c_2 .

Компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ на контуре $L(\gamma)$ найдем, воспользовавшись формулами:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \operatorname{Re} [(q_\theta - \kappa q_\theta) F^-(\sigma) + q_\theta (M_0 \sigma + N_0 \bar{\sigma} - k \bar{F}^-(\sigma))],$$

$$f(\sigma) = (1 + \kappa) F^-(\sigma) - M_0 \sigma - N_0 \bar{\sigma} + k \bar{F}^-(\sigma) \text{ на } L_1^*(\gamma_i);$$

$$f(\sigma) = \frac{i}{2(\mu_2 - \mu_1)} \{ \omega'(\sigma) [\sigma_r + \mu_2 \tau_{r\theta} + i(\tau_{r\theta} - \sigma_r \mu_2)] + \overline{\omega'(\sigma)} [\sigma_r + \mu_2 \tau_{r\theta} - i(\tau_{r\theta} - \sigma_r \mu_2)] \};$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \operatorname{Re} [(q_\theta + q_\theta) F^-(\sigma)], \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_1^*(\gamma_i);$$

значения величин q_θ, q_θ, k приведены в [4].

Для определения напряженно-деформированного состояния в других точках области D^- следует воспользоваться формулами (1) — (5), учитывая при этом, что

$$\Phi_1(z_1) = \Phi_1[\omega_1(\xi)] = \Phi(\xi_1), \quad \Psi_1(z_2) = \Psi_1[\omega_2(\xi)] = \Psi(\xi_2).$$

$$\Phi(\xi_1) = \frac{F(\xi_1)}{\xi_1 \omega_1'(\xi_1)}, \quad \Psi(\xi_2) = \frac{1}{2\mu_2 \xi_2 \omega_2'(\xi_2)} \left[(\mu_1 - \mu_2) \bar{F}\left(\frac{1}{\xi_1}\right) + (\mu_1 + \mu_2) F(\xi_1) \right],$$

$$\xi_1 = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 4d_1^1 d_1^1}}{2d_1^1} = \frac{2d_2^1}{z_1 - \sqrt{z_1^2 - 4d_1^1 d_2^1}}, \quad \xi_2 = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - 4d_1^2 d_2^2}}{2d_1^2} =$$

$$= \frac{2d_2^2}{z_1 - \sqrt{z_2^2 - 4d_1^2 d_2^2}}, \quad \xi_3 = \frac{z_3 + \sqrt{z_3^2 - 4d_1^3 d_2^3}}{2d_1^3} = \frac{2d_2^3}{z_3 - \sqrt{z_3^2 - 4d_1^3 d_2^3}},$$

$$d_1^j = 0,5 R [1 - i\mu_j + m(1 + i\mu_j)], \quad d_2^j = 0,5 R [1 + i\mu_j + m(1 - i\mu_j)] \quad j = 1, 2, 3.$$

Соотношения (15) получены путем обращения формулы (6).

З а м е ч а н и е. Чтобы получить искомое решение при $D < 0$, надо учесть зависимость между коэффициентами полиномов функции $F(\xi)$, а также некоторые другие зависимости, приведенные в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем.— Львов, 1960.
2. Савин Г. Н., Тульчий В. И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками.— Киев, 1971.
3. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит.— Минск, 1975.
4. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости.— Минск, 1972, с. 171.

Поступила в редакцию
04.01.79.

НИИ ПФН

УДК 517.518.84

С. А. ЧУПРИГИН

ЛАКУНАРНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ТИПА $(0, 1, \dots, p, q, r)$

1. Пусть заданы n узлов

$$x_{kn} = \frac{2k\pi}{n} \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad (1)$$

натуральные числа $0 \leq p < q < r$ и произвольные действительные числа α_{ki} ($k = \overline{0, n-1}$; $i = \overline{0, p, q, r}$). Требуется исследовать проблему существования, единственности и дать представление тригонометрического $(0, 1, \dots, p, q, r)$ -интерполяционного полинома по узлам (1), т. е. полинома $T(x)$ порядка не выше $\frac{n}{2}(p+3)$, удовлетворяющего условиям

$$T^{(i)}(x_{kn}) = \alpha_{ki} \quad (k = \overline{0, n-1}; i = \overline{0, p, q, r}). \quad (2)$$

При этом, если число $j = \frac{n}{2}(p+3)$ является целым, то будем искать полином $T(x)$ в виде

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + a_j \cos jx \quad (3)$$

или

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + b_j \sin jx. \quad (4)$$

Если же $j = \frac{n}{2}(p+3)$ не является целым числом, то $T(x)$ ищем в виде

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{j-\frac{1}{2}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (5)$$

При $q=p+1$, $r=p+2$, т. е. в случае интерполирования Эрмита, указанные проблемы решаются положительно [1—3]. Если же $q-p > 1$ или $r-q > 1$, т. е. в случае лакунарного тригонометрического интерполирования, проблема существования и единственности полинома $T(x)$ не всегда решается положительно.