

при некотором $\delta > 0$, и функция $\alpha(\tau)$, определенная равенством (1), удовлетворяет условию $1 + \sum_{m=1}^{\infty} m^n \alpha(m)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq K_1$.

Теорема 8. Для спектральных плотностей $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ стационарного процесса $x_t, t \in Z | t \in R$ справедлива оценка $|f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \leq C_4^n n^{2n} K_2$, где C_4 выбирается из условия $C_4^n \geq \frac{2C_2^{\frac{1}{p}}}{(2\pi)^{n-1}}$, $C_2 = \max_{k < n} M|x_k|^2$.

при некотором $p \geq 2$, и функция $\beta(\tau)$, определяемая равенством (2), удовлетворяет условию $1 + \sum_{m=1}^{\infty} m^n \beta(m)^{1-\frac{1}{p}} \leq K_2$.

Теорема 9. Если стационарный процесс $x_t, |x_t| \leq C$ удовлетворяет условию (9), то функция $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ аналитична в полосе $|f_n \omega_i| \leq \frac{b}{2n}$ и удовлетворяет в этой полосе оценке $|f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \leq n! C_5^n$, где постоянная C_5 зависит только от b, K, C .

Приведенные результаты допускают распространение на случайные поля, которые усиленно изучаются в последнее время ввиду их крайней важности в различных приложениях. Вся данная область приобрела в последнее время интерес в статистике стационарных процессов и полей ввиду ее разнообразных применений и возможности постановки дальнейших задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бериштейн С. Н.— Успехи математических наук, 1944, т. 10, с. 65.
2. Rosenblatt M.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, v. 42, p. 43.
3. Ибрагимов И. А.— Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4, с. 711.
4. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М., 1965.
5. Журбенко И. Г., Зуев Н. М.— Литовский математический сборник, 1975, т. 15, № 1, с. 111.
6. Булинский А. В., Журбенко И. Г.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, № 4, с. 707.
7. Сунклодас И.— Литовский математический сборник, 1977, т. 17, № 3, с. 41, 194.
8. Зуев Н. М.— Математические заметки, 1973, т. 13, № 4, с. 581.
9. Булинский А. В.— Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, № 4, с. 869.
10. Журбенко И. Г.— Сибирский математический журнал, 1972, т. 13, № 2, с. 293.
11. Statulevicius V.— Int. Congress of Mathemat., Vancouver, August, 1974, AMS Translations Series 2.
12. Журбенко И. Г.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, т. 15, № 3, с. 541.
13. Журбенко И. Г.— Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 5, с. 971.
14. Зуев Н. М.— Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 4, с. 773.
15. Журбенко И. Г., Зуев Н. М.— Украинский математический журнал, 1975, т. 27, № 4, с. 452.

Поступила в редакцию
07.12.78.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 62-50

З. М. АЛЕЯНИКОВА, Л. Е. ЗАБЕЛЛО

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

вдоль траекторий определим функционал

$$I[u(\cdot)] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} L(x(t), u(t), t) + \varphi(x(t_1)), \quad (2)$$

где x — n -вектор состояния; u — r -вектор управления; $A(t)$, $B(t)$ — матрицы соответствующих размеров; L — скалярная функция, имеющая вторые непрерывные производные по x и по u .

В данной статье для невырожденного случая исследуется вторая вариация функционала (2), играющая важную роль при изучении условий оптимальности высокого порядка [1, 2]. Получены достаточные условия положительности и неотрицательности второй вариации.

1. Вывод уравнения Риккати. На решениях системы (1) рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I_1[u(\cdot)] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\frac{1}{2} x' Q x + u' C x + \frac{1}{2} u' R u \right],$$

где $Q(t) \geq 0$, $R(t) > 0$ — симметричные матрицы. Обратное уравнение Беллмана [3] и соответствующее граничное условие в данном случае имеют вид:

$$B(\tau, y) = \min_v [y' Q(\tau) y + 2v' C(\tau) y + v' R(\tau) v + B(\tau+1, A(\tau) y + B(\tau) v)], \quad (3)$$

$$B(t_1, y) = K(t_1). \quad (4)$$

Функцию $B(\tau, y)$ будем искать в форме

$$B(\tau, y) = y' L(\tau) y \quad (5)$$

с неизвестной матрицей $L(\tau)$.

Из граничного условия (4) получим $y' L(t_1) y = y' K(t_1) y$; так как y — произвольный вектор, то $L(t_1) = K(t_1)$. Подставив функцию (5) в уравнение (3), получим:

$$y' L(\tau) y = \min_v [y' Q(\tau) y + 2v' C(\tau) y + v' R(\tau) v + [A(\tau) y + B(\tau) v]' L(\tau+1) [A(\tau) y + B(\tau) v]] = \min_v \psi(v, \tau). \quad (6)$$

Минимум в правой части выражения (6) достигается при $v = v_0$, для которого $\frac{\partial \psi(v, \tau)}{\partial v} = 0$. Имеем

$$C(\tau) y + R(\tau) v_0(y, \tau) + B'(\tau) L(\tau+1) B(\tau) v_0(y, \tau) + B'(\tau) L(\tau+1) A(\tau) y = 0. \quad (7)$$

Подставляя в (6) $v = v_0$ и объединяя (6), (7), получаем систему уравнений, которую назовем матричным уравнением типа Риккати в дискретной форме. Случай, когда $R_1(\tau) = R(\tau) + B'(\tau) L(\tau+1) B(\tau) > 0$ для $\tau = t_0, t_0+1, \dots, t_1-1$, назовем невырожденным. В противном случае, будем говорить о вырожденной задаче. В данной работе рассматривается только невырожденная задача.

2. Достаточные условия положительности и неотрицательности второй вариации.

Определение. Функционал $I_1[u(\cdot)]$ называется положительным, если $I_1[u(\cdot)] > 0$ для каждого $u(\cdot) \in U$, $u(\cdot) \neq 0$.

Вторая вариация функционала (2) вдоль траекторий системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta^2 I[u] &= \frac{d^2 I \left[u + \frac{1}{\epsilon} \delta u \right]}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} = I_2[u(\cdot)] = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\frac{1}{2} x'(t) Q(t) x(t) + u'(t) C(t) x(t) + \frac{1}{2} u'(t) R(t) u(t) \right] + \\ &\quad + x'(t_1) K(t_1) x(t_1), \end{aligned} \quad (8)$$

где $v(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, а $Q(t) = \frac{1}{2} [\bar{Q} + \bar{Q}']$, $\bar{Q} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L(x^0, w, t)}{\partial x}$, $R(t) = \frac{1}{2} [\bar{R} + \bar{R}']$, $\bar{R} = \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial L(x^0, w, t)}{\partial w}$, где через $x^0(t)$ обозначена исследуемая оптимальная траектория.

Теорема 1. Если матричная функция $L(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (6), (7), то функционал $I_2[u(\cdot)]$ положительно определен.

Доказательство. Обозначим $D_1(t) = B'(t)L(t+1)A(t) + C(t)$, тогда уравнение Риккати переписывается в виде

$$L(t) = Q(t) - 2[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'C(t) + [R_1^{-1}(t)D_1(t)]'R(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)] + \\ + [A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]'L(t+1)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]. \quad (9)$$

Тождество $\frac{1}{2} [x'(t_0)L(t_0)x(t_0) - x'(t_1)L(t_1)x(t_1) - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [x'(t)L(t)x(t) - x'(t+1)L(t+1)x(t+1)]] \equiv 0$, где $L(t_1) = K(t_1)$ в силу (8), (9) и (1) можно записать следующим образом:

$$- \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \{ x'(t)Q(t)x(t) - 2x'(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'C(t)x(t) + \\ + x'(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'R(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]x(t) + \\ + x'(t)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]'L(t+1)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]x(t) - \\ - x'(t)A'(t)L(t+1)A(t)x(t) - 2u'(t)B'(t)L(t+1)A(t)x(t) - \\ - u'(t)B'(t)L(t+1)B(t)u(t) \} \equiv 0. \quad (10)$$

Присоединив ко второй вариации (7) выражение (10), получим

$$\frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \{ x'(t)Q(t)x(t) + 2u'(t)C(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t) - x'(t)Q(t)x(t) + \\ + 2x'(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'C(t)x(t) - x'(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]'R(t)[R_1^{-1}(t)D_1(t)]x(t) - \\ - x'(t)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]'L(t+1)[A(t) - B(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)]x(t) + \\ + x'(t)A'(t)L(t+1)A(t)x(t) + 2u'(t)B'(t)L(t+1)A(t)x(t) + \\ + u'(t)B'(t)L(t+1)B(t)u(t) = \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [u'(t)R_1(t)u(t) + 2u'(t)D_1(t)x(t) + \\ + x'(t)D_1'(t)R_1^{-1}(t)D_1(t)x(t)] = \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [u'(t)R_1(t) + x'(t)D_1'(t)]R_1^{-1}(t) \times \\ \times [D_1(t)x(t) + R_1(t)x(t)]. \text{ Следовательно,}$$

$$I_2[u(\cdot)] = \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [u'(t)R_1(t) + x'(t)D_1'(t)]R_1^{-1}(t)[D_1(t)x(t) + \\ + R_1(t)x(t)]. \quad (11)$$

Из выражений (11) и (8) следует, что $I_2[u(\cdot)] \geq 0$ и $I_2[u(\cdot)]$ принимает свое минимальное значение, равное нулю, при $u(t) = -R_1^{-1}(t)D_1(t)x(t)$, $t \in T = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\}$. Но это возможно, в силу задания начальных данных и линейности системы (1), тогда и только тогда, когда $u(\cdot) \equiv 0$. Следовательно, $I_2[u(\cdot)]$ определено положительно.

Пример 1. Пусть вдоль некоторой оптимальной траектории системы (1) с параметрами $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ вторая вариация функционала (2) содержит следующие коэффициенты: $Q = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = (1, 1)$, $R = 2$. В этом случае решением уравнений Риккати, в чем

нетрудно убедиться прямой подстановкой, будет следующая последовательность матриц:

$$L(2) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad L(1) = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad L(0) = \begin{pmatrix} 6,3 & 0,9 \\ 2,1 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, $R_1(2) = 2 > 0$, $R_1(1) = 3/2 > 0$, $R_1(0) = 10/3 > 0$. Согласно теореме 1, исследуемая вторая вариация положительна.

Определение 2. Функционал $I_2 u(\cdot)$ называется неотрицательным, если для каждого $u(\cdot) \in U$ его значения неотрицательны.

Теорема 2. Если существует симметричная матричная функция $P(t)$, $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$, такая, что

$$D(t) = \{d_{ij}(t)\} = \begin{pmatrix} Q + PA - A'P & C' - PB \\ C + B'P & R \end{pmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

для всех $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$, то $I_2[u(\cdot)]$ неотрицательна.

Доказательство. Рассмотрим величину, тождественно равную нулю

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{1}{2} \{x'(t) P(t) [A(t)x(t) + B(t)u(t) - x(t+1)]\}.$$

Добавим эту тождественно равную нулю величину к $I_2[u(\cdot)]$, получим

$$I_2[u(\cdot)] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left\{ \frac{1}{2} x'Qx + u'Cx + \frac{1}{2} u'Ru + \frac{1}{2} P[Ax + Bu - x(t+1)] \right\}.$$

Используя, что $\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{1}{2} x'(t) P(t) x(t+1) = -\frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [A(t)x(t) + B(t)u(t)]' P(t) x(t)$, получим

$$\begin{aligned} I_2[u(\cdot)] &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\frac{1}{2} x'Qx + u'Cx + \frac{1}{2} u'Ru + \frac{1}{2} x'PAx + \frac{1}{2} x'PBu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (x'A' + u'B')Px \right] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\frac{1}{2} x'Qx + u'Cx + \frac{1}{2} u'Ru + \frac{1}{2} x'PAx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} x'PBu - \frac{1}{2} x'A'Px - \frac{1}{2} u'B'Px \right] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{1}{2} \{x' [Q + PA - A'P] x + \\ &\quad + u' (C + B'P) x + x' (C' + PB) u + u'Ru\} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q + PA - A'P & C' - PB \\ C + B'P & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) и (12) следует, что $I_2[u(\cdot)] \geq 0$. Теорема доказана.

Пример 2. Пусть система (1) имеет те же параметры, что и в примере 1, а вторая вариация задается теми же коэффициентами, за исключением $R(t): R(t) \equiv 1$. Положим $P(t) \equiv E$. Левая часть в выражении (12) для любого t после замены $P(t) \equiv E$ принимает вид: $d_{11}(t) = d_{22}(t) = d_{23}(t) = d_{32}(t) = d_{33}(t) = 1$, $d_{12}(t) = -2$, $d_{21}(t) = 2$, $d_{13}(t) = d_{31}(t) \equiv 0$. Нетрудно убедиться, что все восемь главных миноров матрицы неотрицательны. Согласно критерию Сильвестра и теореме 2, рассматриваемая вторая вариация $I_2[u(\cdot)]$ неотрицательна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М., 1973.
2. Bell D. J., Jacobson D. H. Singular Optimal Control Problems. — London, 1975.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования. — Минск, 1975.