

где $M_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f^{(n)}(\theta)|$, $M_{n+1} = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f^{(n+1)}(\theta)|$, $M = \max(M_n, M_{n+1})$,

$$\omega_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{\omega_n(\theta)}{n^2 - \theta^2} \right|, \quad \varphi_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |\varphi_n(\theta)|,$$

$$\varphi_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_n(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \theta}{2} d\sigma.$$

Обратимся теперь к остаточному члену приближенной формулы (13). Для его оценки воспользуемся неравенством (7). Из неравенств (7), (18) и известного [5] неравенства $|E_n(f; \bar{\theta})| \leq \frac{\omega_n}{n!} M_n$, $\omega_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |\omega_n(\theta)|$ найдем, что остаточный член $E_n(f; z)$ интерполяционной квадратурной формулы (13) оценивается по формуле

$$|E_n(f; z)| \leq \frac{1}{n!} \sqrt{\omega_n^2 + \left(\frac{16\pi\omega_n^*}{n+1} + \varphi_n \right)^2} \cdot M.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М., 1977.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М., 1968.
3. Пыхтеев Г. Н., Мелешко А. Н. — Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1978, № 5, с. 131.
4. Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления. — Минск, 1976.
5. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М., 1967.

Поступила в редакцию
21.11.78.

Вычислительный центр

УДК 519.21

И. Г. ЖУРБЕНКО, Н. М. ЗУЕВ

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Изучение различных асимптотических законов теории вероятностей для слабозависимых случайных величин представляет интерес как для самой теории вероятностей, так и для ее различных приложений. Первые идеи перенесения методов независимых случайных величин на случай слабых зависимостей принадлежат С. Н. Бернштейну [1]. Условие перемешивания, получившее впоследствии название перемешивание «по Розенблатту», введено в работе [2]. Более сильное условие перемешивания предложено И. А. Ибрагимовым в работе [3].

Будем рассматривать случайный процесс x_t , $t \in R$. Обозначим F_a^b — σ -алгебру, порожденную случайными величинами x_t , $t \in [a, b]$, F_{ξ}^{∞} — σ -алгебру, порожденную случайной величиной ξ .

Определение 1. Случайный процесс x_t называется удовлетворяющим условию перемешивания «по Розенблатту», если

$$\alpha(\tau) = \sup_{\substack{t, A \in F_{-\infty}^t \\ B \in F_{t+\tau}^{\infty}}} |P(AB) - P(A)P(B)| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (1)$$

Определение 2. Случайный процесс x_t называется удовлетворяющим условию перемешивания «по Ибрагимову», если

$$\beta(\tau) = \sup_{\substack{t, A \in F_{-\infty}^t \\ B \in F_{t+\tau}^{\infty}}} |P(B/A) - P(B)| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (2)$$

Определение 3. Случайная величина x_i называется удовлетворяющей условию Крамера $K(a, c)$, если при некоторых $a > 0$, $C > 1$ $M \exp\{a|x_i|\} \leq C$.

Исходя из условий перемешивания процесса «по Розенблатту» или «по Ибрагимову», получаем следующие оценки ковариаций случайных величин [4, 5].

Теорема 1. Пусть случайные величины ξ и η измеримы относительно σ -алгебр $F_{i-\infty}^t$, $F_{i+\infty}^t$ соответственно. Тогда справедливы оценки

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq 4C_1C_2\alpha(\tau), \quad (3)$$

если $|\xi| \leq C_1$, $|\eta| \leq C_2$;

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq 10(C_1C_2)^{\frac{1}{2+\delta}} \alpha(\tau)^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \quad (4)$$

если $M|\xi|^{2+\delta} \leq C_1$, $M|\eta|^{2+\delta} \leq C_2$;

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \frac{72}{a^2} \alpha(\tau) (\ln \alpha(\tau) - \ln c)^2, \quad (5)$$

если случайные величины ξ и η удовлетворяют условию $K(a, C)$. Функция $\alpha(\tau)$ определяется равенством (1). Оценки (3), (4), (5) в существенном неулучшаемы, так как справедлива

Теорема 2. Пусть $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$. Тогда на множестве случайных величин ξ, η , удовлетворяющих условию $\sup_{A \in F_\xi, B \in F_\eta} |P(AB) - P(A)P(B)| = \alpha$

1) существуют случайные величины ξ и η такие, что $|\xi| = C_1$, $|\eta| = C_2$ и $|\text{cov}(\xi, \eta)| = 4C_1C_2\alpha$;

2) существуют случайные величины ξ и η такие, что $M|\xi|^{2+\delta}C_1$, $M|\eta|^{2+\delta}C_2$ и $|\text{cov}(\xi, \eta)| \geq 0,5(C_1C_2)^{\frac{1}{2+\delta}}\alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}$;

3) существуют случайные величины ξ, η , удовлетворяющие условию $K(a, C)$ и $|\text{cov}(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{a^2} \alpha \left(\ln \alpha - \ln \frac{C-1}{2} \right)^2$ при $C \geq 3$.

Теорема 3. Пусть случайные величины ξ и η измеримы относительно σ -алгебр $F_{i+\infty}^t$, $F_{i-\infty}^t$ соответственно. Пусть, кроме того, $M|\xi|^p < \infty$,

$M|\eta|^q < \infty$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq 2M^{\frac{1}{p}}|\xi|^p \times$

$\times M^{\frac{1}{q}}|\eta|^q \beta(\tau)^{\frac{1}{p}}$, где функция $\beta(\tau)$ определяется равенством (2).

Условия перемешивания процесса «по Розенблатту» или «по Ибрагимову» позволяют получить центральную предельную теорему как для случайных процессов [4], так и для случайных полей [6], а также, используя условия на моменты случайных величин, оценить сходимости в центральной предельной теореме [7].

Условия перемешивания процесса x_i «по Розенблатту» или «по Ибрагимову» позволяют также получить оценки смешанных семинвариантов, зависящих от максимального расстояния между соседними координатами семинварианта [8].

Определение 4. Семинварианты $S_n(t_1, \dots, t_n)$ процесса x_i определяются как коэффициенты формального разложения

$$\ln \text{Me}^{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{t_i}} = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{t_1, \dots, t_n} S_n(t_1, \dots, t_n) \lambda_{t_1} \dots \lambda_{t_n},$$

где $S_n(t_1, \dots, t_n)$ предполагаются симметричными функциями аргументов $t_1, \dots, t_n$, суммирование производится по всем упорядоченным наборам целых чисел $t_1, \dots, t_n$, $t_j \in R$. Смешанные семинварианты можно непосредственно определить через смешанные моменты $M[x_{t_1} \dots x_{t_n}]$ (см. [8]).

Теорема 4. Для смешанных семинвариантов $S_n(t_1, \dots, t_n)$ случайного процесса x_i справедливы оценки

$$|S_n(t_1, \dots, t_n)| \leq 4C^n n^n \alpha(r), \quad (6)$$

если $|x_i| \leq C$;

$$|S_n(t_1, \dots, t_n)| \leq 10 C_1^{\frac{1}{2+\delta}} n^n [\alpha(r)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \\ |t_i|^k \leq C_1, \quad \delta > 0;$$

$$|S_n(t_1, \dots, t_n)| \leq 2C_{12}^{\frac{1}{p}} n^n [\beta(r)]^{1-\frac{1}{p}},$$

если $\max M |x_i|^k \leq C_2, \quad p \geq 2$;

$k \leq pn, \quad t$

$$|S_n(t_1, \dots, t_n)| \leq C(16+n) \frac{n^{2n}}{a^n} \alpha(r) [\ln \alpha(r)]^n,$$

если случайный процесс x_t удовлетворяет условию $K(a, C)$, функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ определяются равенствами (1) и (2) соответственно, $r = \max(t_{i+1} - t_i)$, считая $t_1 \leq \dots \leq t_n$.

Доказательство этих оценок в основном повторяет доказательство теорем, приведенных в работах [5, 8]. Оценка (6) в существенном не улучшаема, так как справедлива

Теорема 5. Для любых $r \geq n = 2k$ и $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ существует случайный процесс $x_t, t \in \mathbb{Z}, |x_t| \leq C$, с функцией перемешивания $\alpha(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, причем $\alpha(r) = \alpha$, и существует семинвариант $S_n(t_1, \dots, t_n)$ этого процесса, для которого выполняется неравенство $|S_n(t_1, \dots, t_n)| \geq 4 \sqrt{2\pi} \left(\frac{C}{\pi e}\right)^n n^n \alpha(r)$, где $r = \max(t_{i+1} - t_i)$, считая $t_1 \leq \dots \leq t_n$.

Приведем доказательство этой теоремы. Пусть $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$. Рассмотрим случайные величины ξ и η , имеющие распределение $P(\xi = C, \eta = C) = \frac{1}{4} + \alpha, P(\xi = -C, \eta = C) = \frac{1}{4} - \alpha, P(\xi = C, \eta = -C) = \frac{1}{4} - \alpha, P(\xi = -C, \eta = -C) = \frac{1}{4} + \alpha$. Для этих случайных величин ξ и η выполняется условие $\sup_{A \in F_\xi, B \in F_\eta} |P(AB) - P(A)P(B)| = \alpha$. Пусть $y_t, t \in \mathbb{Z}, |y_t| \leq C$, случайный процесс, независимый от случайных величин ξ и η , с функцией перемешивания $\alpha_1(\tau)$, удовлетворяющей условию $\alpha_1(r) = \alpha$. Рассмотрим случайный процесс

$$x_t = \begin{cases} \xi, & t = 1, 2, \dots, n-1, \\ \eta, & t = n-1+r \\ y_t & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Функция перемешивания $\alpha(\tau)$ случайного процесса x_t удовлетворяет условию

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \tau \leq n-2, \\ \alpha_1(\tau), & \tau > n-2. \end{cases}$$

Рассмотрим смешанный семинвариант процесса x_t , заданный в точках

$$t_k = \begin{cases} k, & k = 1, \dots, n-1, \\ n-1+r, & k = n. \end{cases}$$

Из определения смешанных семинвариантов следует

$$S_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln Me^{i \sum_{k=1}^n x_{t_k} \lambda_k} \Big|_{\lambda_1=0 \dots \lambda_n=0} =$$

$$= \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \left(\cos C \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cos C \lambda_n - 4 \alpha \sin C \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \times \right. \\ \left. \times \sin C \lambda_n \right) \Big|_{\lambda_1=0, \dots, \lambda_n=0} = 4 \alpha C^n \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \cos \sum_{k=1}^n \lambda_k \Big|_{\lambda_1=0, \dots, \lambda_n=0} \quad (7)$$

В работе [9] показано, что при четном n

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \cos \sum_{k=1}^n \lambda_k \right|_{\lambda_1=0, \dots, \lambda_n=0} \geq \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\pi e} \right)^n n^n. \quad (8)$$

Из (7), (8) следует доказательство теоремы.

В работе [10] приводится пример, показывающий невозможность получения в условиях перемешивания «по Розенблатту» или «по Ибрагимову» оценки смешанных семинвариантов случайных процессов, зависящих от максимальной длины этого семинварианта. Такие оценки оказываются возможными в условиях перемешивания почти марковского типа, которые изучаются в работах [10–12] и приведены ниже.

Определение 5. Случайный процесс x_t называется удовлетворяющим условию перемешивания почти марковского типа, если

$$|P(x_{t_m} \in B | x_{t_{m-1}} = y_{m-1}, \dots, x_{t_1} = y_1) - P(x_{t_m} \in B | x_{t_{m-1}} = y_{m-1}, \dots, x_{t_1} = y_2)| \leq K \exp \{-b(t_m - t_1)\} \quad (9)$$

для любого борелевского множества B , любых $y_1, \dots, y_{m-1}$, $t_1 < \dots < t_m$.

Теорема 6 [12]. Если процесс x_t удовлетворяет условию (9) и $|x_t| \leq C$, то справедливо неравенство

$$S_n(t_1, \dots, t_n) \leq C_1^n \exp \{-b \max_{i,j} |t_i - t_j|\},$$

где постоянная C_1 зависит только от b, K, C .

В условиях перемешивания почти марковского типа возможны представление характеристической функции суммы случайных величин, по своей структуре близкое к случаю независимых случайных величин [10], а также вывод теоремы о максимальном отклонении от предельного нормального закона, теоремы о больших отклонениях, асимптотическое разложение предельных законов [11].

Описанные условия перемешивания оказываются полезными в спектральной теории стационарных процессов [5] и полей [13], где с их помощью удается доказать ограниченность всех старших спектральных плотностей и их производных.

Спектральные плотности $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ стационарного процесса x_t , $t \in Z | t \in R$ определяются равенствами

$$f_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_n \\ \min t_i = 0}} S_n(t_1, \dots, t_n) \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^n t_k \omega_k \right\},$$

$$\left| f_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \int_{\substack{t_1, \dots, t_n \\ \min t_i = 0}} S_n(t_1, \dots, t_n) \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^n t_k \omega_k \right\} d\vec{t} \right|$$

Используя приведенные оценки смешанных семинвариантов, получаем следующие оценки старших спектральных плотностей и их производных [5, 14, 15].

Теорема 7. Для спектральных плотностей $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ стационарного процесса x_t , $t \in Z | t \in R$ справедлива оценка $|f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \leq$

$$\leq C_3^n n^{2n} K_1, \text{ где } C_3 \text{ выбирается из условия } C_3^n \geq \frac{10 C_1^{\frac{2+\delta}{2+\delta}}}{(2\pi)^{n-1}}, C_1 = \max_{k \leq (2+\delta)n} M|x_t|$$

при некотором $\delta > 0$, и функция $\alpha(\tau)$, определенная равенством (1), удовлетворяет условию $1 + \sum_{m=1}^{\infty} m^n \alpha(m)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq K_1$.

Теорема 8. Для спектральных плотностей $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ стационарного процесса x_t , $t \in Z | t \in R$ справедлива оценка $|f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \leq C_4^n n^{2n} K_2$, где C_4 выбирается из условия $C_4^n \geq \frac{2C_2^{\frac{1}{p}}}{(2\pi)^{n-1}}$, $C_2 = \max_{k < n} M|x_t|^k$

при некотором $p \geq 2$, и функция $\beta(\tau)$, определяемая равенством (2), удовлетворяет условию $1 + \sum_{m=1}^{\infty} m^n \beta(m)^{1-\frac{1}{p}} \leq K_2$.

Теорема 9. Если стационарный процесс x_t , $|x_t| \leq C$ удовлетворяет условию (9), то функция $f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ аналитична в полосе $|f_n \omega_i| \leq \frac{b}{2n}$ и удовлетворяет в этой полосе оценке $|f_n(\omega_1, \dots, \omega_n)| \leq n! C_5^n$, где постоянная C_5 зависит только от b, K, C .

Приведенные результаты допускают распространение на случайные поля, которые усиленно изучаются в последнее время ввиду их крайней важности в различных приложениях. Вся данная область приобрела в последнее время интерес в статистике стационарных процессов и полей ввиду ее разнообразных применений и возможности постановки дальнейших задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бериштейн С. Н.— Успехи математических наук, 1944, т. 10, с. 65.
2. Rosenblatt M.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, v. 42, p. 43.
3. Ибрагимов И. А.— Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4, с. 711.
4. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М., 1965.
5. Журбенко И. Г., Зуев Н. М.— Литовский математический сборник, 1975, т. 15, № 1, с. 111.
6. Булинский А. В., Журбенко И. Г.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, № 4, с. 707.
7. Сунклодас И.— Литовский математический сборник, 1977, т. 17, № 3, с. 41, 194.
8. Зуев Н. М.— Математические заметки, 1973, т. 13, № 4, с. 581.
9. Булинский А. В.— Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, № 4, с. 869.
10. Журбенко И. Г.— Сибирский математический журнал, 1972, т. 13, № 2, с. 293.
11. Statulevicius V.— Int. Congress of Mathemat., Vancouver, August, 1974, AMS Translations Series 2.
12. Журбенко И. Г.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, т. 15, № 3, с. 541.
13. Журбенко И. Г.— Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 5, с. 971.
14. Зуев Н. М.— Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 4, с. 773.
15. Журбенко И. Г., Зуев Н. М.— Украинский математический журнал, 1975, т. 27, № 4, с. 452.

Поступила в редакцию
07.12.78.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 62-50

З. М. АЛЕЯНИКОВА, Л. Е. ЗАБЕЛЛО

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

вдоль траекторий определим функционал