УДК 517.392

А. Н. МЕЛЕШКО

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ШВАРЦА И ГИЛЬБЕРТА

В работе рассматривается вопрос о приближенном вычислении интегралов

$$S(z) = S(f;\ z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)\,\frac{t+z}{t-z}\,d\sigma,\quad t=e^{i\sigma},\quad |z|<1, \tag{1}$$

$$\Gamma(\theta) = \Gamma(f;\ \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)\ \mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-\theta}{2}\,d\sigma,\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi. \tag{2}$$

Интегралы (1), (2) в теории краевых задач называют соответственно интегралом Шварца и интегралом Гильберта.

1. Приближенные формулы для интегралов (1), (2), основанные на аппроксимации плотности. Заменим плотность $f(Q)$ в интегралах Шварца и Гильберта некоторым ее приближением по формуле

$$f(\theta)\approx\tilde f(\theta) \tag{3}$$

с остаточным членом

$$E(f;\ \theta)=f(\theta)-\tilde f(\theta).$$

Тогда для интегралов (1), (2) получим приближенные формулы

$$S(z)\approx\tilde S(z)=S(\tilde f;\ z), \tag{4}$$

$$\Gamma(\theta)\approx\tilde\Gamma(\theta)=\Gamma(\tilde f;\ \theta) \tag{5}$$

с остаточными членами

$$E_s(f;\ z)=S(z)-\tilde S(z),\ E_\Gamma(f;\ \theta)=\Gamma(\theta)-\tilde\Gamma(\theta).$$

Установим зависимость между оценками погрешности приближенных формул (3)—(5).

Теорема. Пусть $E(f;\ \theta)$ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|z|=1$ и пусть для остаточных членов $E(f;\ \theta)$ и $E_\Gamma(f;\ \theta)$ приближенных формул (3), (5) имеют место равномерные оценки

$$|E(f;\ \theta)|\leqslant E_f,\ |E_\Gamma(f;\ \theta)|\leqslant E_\Gamma; \tag{6}$$

тогда всюду в круге $|z|\leqslant 1$ выполняется неравенство

$$|E_s(f;\ z)|\leqslant\sqrt{E_f^2+E_\Gamma^2}. \tag{7}$$

Доказательство. Остаточный член приближенной формулы (4)

$$E_s(f;\ z)=S(E;\ z) \tag{8}$$

является функцией, аналитической в круге $|z|<1$ и непрерывной на окружности $|z|=1$; поэтому в силу принципа максимального модуля для всех $|z|\leqslant 1$ будет выполняться неравенство

$$|S(E;\, z)| \leqslant \max_{-\pi\leqslant\theta<\pi} |S^{+}(E;\, e^{i\theta})|, \tag{9}$$

где $S^{+}(E;\, e^{i\theta})$ — предельное значение интеграла Шварца $S(E;\, z)$, когда z стремится к точке единичной окружности изнутри. Применяя к интегралу (8) аналоги формул Сохоцкого — Племеля́ [1, 2], найдем, что

$$|S^{+}(E;\, e^{i\theta})| = \sqrt{[E(\theta)]^2 + [E_\Gamma(\theta)]^2}.$$

Из последнего равенства и неравенств (6), (9) следует неравенство (7) теоремы.

2. Интерполяционные квадратурные формулы. В [3] вычислены интегралы Шварца и Гильберта от полинома

$$S(P_n;\, z) = A_0 + 2\left\{\sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_s L^{2s}(-z) + i\sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} B_s L^{2s-1}(-z)\right\}. \tag{10}$$

$$\Gamma(P_n;\, \theta) = 2\left\{\sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_s N^{2s}(\pi-\theta) - \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} B_s M^{2s-1}(\pi-\theta)\right\}, \tag{11}$$

где $L^s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} z^k$, $(s = 1, 2, \ldots)$, $|z| \leqslant 1$;

$$M^s(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\cos k\theta,\quad N^s(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\sin k\theta,\quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi;$$

$$A_0 = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2m+1} c_{2m},\quad A_s = \frac{(-1)^{s-1}}{\pi^{2s}} \sum_{m=s}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2m)!}{(2m-2s+1)!} c_{2m};$$

$$B_s = \frac{(-1)^{s-1}}{\pi^{2s}} \sum_{m=s}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(2m-1)!}{(2m-2s+1)!} c_{2m-1},$$

а c_m — коэффициенты полинома

$$P_n(\bar\theta) = \sum_{m=0}^{n} c_m \bar\theta^m,\quad \bar\theta = \frac{\theta}{\pi},\quad \bar\theta \in [-1,\, 1].$$

Полилогарифмы $L^s(z)$ и их значения на единичной окружности — функции $M^s(\theta)$ и $N^s(\theta)$ — достаточно хорошо изучены и разработаны эффективные методы их вычисления [4]. Составлены стандартные программы, позволяющие вычислять данные функции любого порядка с заданной степенью точности. Таким образом, источником получения приближенных формул для интегралов Шварца и Гильберта могут служить алгебраические интерполяционные полиномы.

Пусть $\tilde f(\theta)$ есть интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(\theta)$ по системе точек отрезка $[-1,\, 1]$, т. е.

$$\tilde f(\theta) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^n(\bar\theta)}{\omega_k^n(\bar\theta_k)} \cdot f_*(\bar\theta_k), \tag{12}$$

где $\omega_k^n(\bar\theta) = \frac{\omega_n(\bar\theta)}{\bar\theta-\bar\theta_k}$, $\omega_n(\bar\theta) = \prod_{k=0}^{n-1}(\bar\theta-\bar\theta_k)$,

$$\omega_k^n(\bar\theta_k) = \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{n-1} (\bar\theta_l-\bar\theta_k),\quad \bar\theta = \frac{\theta}{\pi},\quad f_*(\bar\theta) = f(\theta),\quad \bar\theta \in [-1,\, 1].$$

Тогда для интегралов (1), (2) получим следующие приближенные формулы:

$$S(z) \approx \widetilde{S}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(z) \cdot f_*(\overline{\theta}_k), \tag{13}$$

$$\Gamma(\theta) \approx \widetilde{\Gamma}(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(\theta) \cdot f_*(\overline{\theta}_k), \tag{14}$$

определяемые коэффициентами

$$A_k(z) = \frac{1}{\omega_k^n(\overline{\theta}_k)} S(\omega_k^n;\ z),\ A_k(\theta) = \frac{1}{\omega_k^n(\overline{\theta}_k)} \Gamma(\omega_k^n;\ \theta) \tag{15}$$

и узлами $\overline{\theta}_k \in [-1, 1]$, $k = 0, 1, \ldots n-1$.

Приближенные формулы (13), (14) с коэффициентами (15) будем называть **интерполяционными квадратурными формулами** для интегралов Шварца и Гильберта. Коэффициенты (15) легко вычисляются, если воспользоваться формулами (10), (11).

Оценим погрешности интерполяционных квадратурных формул (13), (14) в предположении, что точки $\theta = \pm\pi$ включаются в число узлов интерполяции. Пусть плотность $f(\theta)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, тогда остаточный член интерполирования по (12) может быть записан в виде

$$E_n(f_*\ \overline{\theta}) = \omega_n(\overline{\theta}) \cdot f(\overline{\theta}, \overline{\theta}_0, \ldots \overline{\theta}_{n-1}).$$

Остаточные члены приближенных формул (13), (14) представляют собой соответственно интегралы Шварца и Гильберта с плотностью $E_n(f;\ \theta)$, т. е.

$$E_s(f;\ z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_n(\sigma) \frac{t+z}{t-z} a\sigma,$$

$$E_\Gamma(f;\ \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_n(\sigma)\ \mathrm{ctg}\, \frac{\sigma - \theta}{2} d\sigma. \tag{16}$$

Займемся сначала оценкой погрешности приближенной формулы (14). Запишем интеграл (16) в виде

$$E_\Gamma(f;\ \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega_n(\sigma)}{\pi^2 - \sigma^2} \cdot f_1(\sigma, \theta, \theta_0, \ldots \theta_{n-1}) \cdot \left(\pi^2 - \left(\frac{\sigma - \theta}{2}\right)^2\right)(\sigma - \theta) \times$$

$$\times \frac{\pi^2 - \sigma^2}{\pi^2 - \left(\frac{\sigma - \theta}{2}\right)^2} \cdot \mathrm{ctg}\, \frac{\sigma - \theta}{2} d\sigma + \frac{1}{2\pi} f(\theta, \theta_0, \ldots \theta_{n-1}) \int_{-\pi}^{\pi} \omega_n(\sigma)\ \mathrm{ctg}\, \frac{\sigma - \theta}{2} d\sigma,$$

где $f_1(\sigma, \theta, \theta_0, \ldots \theta_{n-1}) = \dfrac{f(\sigma, \theta_0, \ldots \theta_{n-1}) - f(\theta, \theta_0, \ldots \theta_{n-1})}{\sigma - \theta}$.
Можно показать, что

$$\left|\left(\pi^2 - \left(\frac{\sigma - \theta}{2}\right)^2\right)(\sigma - \theta)\, \mathrm{ctg}\, \frac{\sigma - \theta}{2}\right| \leqslant 4\pi^2,\ \sigma \in [-\pi, \pi],\ \theta \in [-\pi, \pi]; \tag{17}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2 - \sigma^2}{\pi^2 - \left(\frac{\sigma - \theta}{2}\right)^2} d\sigma\right| \leqslant \frac{4}{\pi},\ \sigma \in [-\pi, \pi],\ \theta \in [-\pi, \pi].$$

Из (17) и известных [5] неравенств $|f_1(\sigma, \theta, \theta_0, \ldots \theta_{n-1})| \leqslant \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$, $|f(\theta, \theta_0, \ldots \theta_{n-1})| \leqslant \dfrac{M_n}{n!}$ следует оценка

$$|E_\Gamma(f;\ \theta)| \leqslant \frac{M}{n!}\left(\frac{16\pi\omega_n^*}{n+1} + \varphi_n\right). \tag{18}$$

где $M_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f^{(n)}(\theta)|$, $M_{n+1} = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f^{(n+1)}(\theta)|$, $M = \max(M_n, M_{n+1})$,

$$\omega_n^* = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{\omega_n(\theta)}{n^2 - \theta^2} \right|, \quad \varphi_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |\varphi_n(\theta)|,$$

$$\varphi_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_n(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \theta}{2} d\sigma.$$

Обратимся теперь к остаточному члену приближенной формулы (13). Для его оценки воспользуемся неравенством (7). Из неравенств (7), (18) и известного [5] неравенства $|E_n(f_*; \bar{\theta})| \leqslant \frac{\omega_n}{n!} M_n$, $\omega_n = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |\omega_n(\theta)|$ найдем, что остаточный член $E_s(f; z)$ интерполяционной квадратурной формулы (13) оценивается по формуле

$$|E_s(f; z)| \leqslant \frac{1}{n!} \sqrt{\omega_n^2 + \left(\frac{16\pi\omega_n^*}{n+1} + \varphi_n\right)^2} \cdot M.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М., 1968.
3. Пыхтеев Г. Н., Мелешко А. Н.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1978, № 5, с. 131.
4. Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления.— Минск, 1976.
5. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.— М., 1967.

Поступила в редакцию
21.11.78.

Вычислительный центр

УДК 519.21

И. Г. ЖУРБЕНКО, Н. М. ЗУЕВ

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Изучение различных асимптотических законов теории вероятностей для слабозависимых случайных величин представляет интерес как для самой теории вероятностей, так и для ее различных приложений. Первые идеи перенесения методов независимых случайных величин на случай слабых зависимостей принадлежат С. Н. Бернштейну [1]. Условие перемешивания, получившее впоследствии название перемешивание «по Розенблатту», введено в работе [2]. Более сильное условие перемешивания предложено И. А. Ибрагимовым в работе [3].

Будем рассматривать случайный процесс x_t, $t \in R$. Обозначим F_a^b — σ-алгебру, порожденную случайными величинами x_t, $t \in [a, b]$, $F\xi$ — σ-алгебру, порожденную случайной величиной ξ.

Определение 1. Случайный процесс x_t называется удовлетворяющим условию перемешивания «по Розенблатту», если

$$\alpha(\tau) = \sup_{\substack{t,\ A \in F_{-\infty}^t \\ B \in F_{t+\tau}^{\infty}}} |P(AB) - P(A)P(B)| \underset{\tau \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1}$$

Определение 2. Случайный процесс x_t называется удовлетворяющим условию перемешивания «по Ибрагимову», если

$$\beta(\tau) = \sup_{\substack{t,\ A \in F_{-\infty}^t \\ B \in F_{t+\tau}^{\infty}}} |P(B / A) - P(B)| \underset{\tau \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$