



ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

2

1980

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Гулис Н. М., Комяк А. И. Влияние неоднородного уширения уровней на временные характеристики люминесценции сложных молекул при переносе энергии	3
Яновский С. Ю., Колпащиков В. Л. К определению функций релаксации внутренней энергии и теплового потока для сред с тепловой памятью	6
Арnaudов Б. Г., Доманевский Д. С. Влияние флуктуаций потенциала на энергию термической ионизации мелких примесей в арсениде галлия	9
Зеленкевич В. М., Ключников А. С., Тимофеев Л. М. Электродинамический расчет диаграммы направленности системы антенна — РПУ	11
Лопарева Н. В., Гурачевский В. Л. Поляризующие свойства мессбауэровских мишеней из естественного железа	15
Данилевский Л. Н., Доманов Ю. А., Зеленко В. Н., Изох В. В., Коробко О. В. Оптимизация антенных решеток с аналого-цифровым преобразованием входных сигналов	19
Фам Чонг Хьен, Хапалюк А. П. О возможном улучшении условий генерации при введении в резонатор призмы полного отражения	22

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Ковалев М. М., Дронь С. П. О кусочно-линейной оптимизации на несвязных областях	27
Забелю Л. Е., Мамрилла Ю. К управляемости линейной нестационарной системы	30
Леваков А. А. Корректность одного класса задач оптимального управления	33
Козел П. Т. О вырожденных задачах линейного программирования	37
Чумаков Ф. В., Васильев И. Л. Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре	40

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ляховец С. Н. Достаточные условия разрешимости одной задачи управляемости систем нейтрального типа	45
Ароча Х. Л. Минимизация функции алгебры логики путем исследования нижних единиц и верхних нулей	47
Ракецкий В. М. Об ограниченности множества допустимых траекторий при разностных аппроксимациях непрерывных систем управления	49
Львович Л. А. Исследование поведения решений модельной СПС	50
Мазаник С. А. Об относительно повороте для трехмерной линейной дифференциальной системы	53
Бобков В. В. О некоторых нелинейных методах численного решения дифференциальных уравнений	55
Савенков В. А. Смешанная задача теории упругости для анизотропной плоскости с разрезами на вещественной оси	56
Федор Дмитриевич Гахов	59
Аннотации депонированных статей	60



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

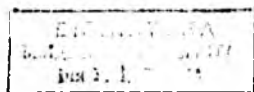
СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 2
МАП



Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО
(главный редактор),

П. Н. БАРАНОВСКИЙ (ответственный секретарь), **В. С. ГРИГОРЬЕВ**, **Г. П. ДАВИДЮК**, **В. Г. ИВАШИН**, **В. Г. РУДЬ** (зам. главного редактора), **А. М. САРЖЕВСКИЙ**, **А. Е. СУПРУН**, **И. Г. ТИЩЕНКО**

Редакционная коллегия серии:

А. М. САРЖЕВСКИЙ (ответственный редактор), **Ю. С. БОГДАНОВ** (зам. ответственного редактора), **Э. И. ЗВЕРОВИЧ**, **Е. А. ИВАНОВ**, **В. В. ИЗОХ**, **Л. И. КОМАРОВ**, **Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ**, **И. А. ПРУСОВ**, **В. Ф. СТЕЛЬМАХ**, **А. С. ФЕДЕНКО**, **Б. Ю. ХАНОХ** (ответственный секретарь), **М. П. ХАЛИМАНОВИЧ**, **А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ**, **С. С. ШУШКЕВИЧ**

**ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА**

Серия I, физ., мат. и мех., 1980, № 2

Редактор **И. П. Стрельченя**
Художественный редактор **Л. Г. Медведова**
Технический редактор и корректор **Г. И. Хмарун**

Сдано в набор 08.02.80. Подписано в печать 06.05.80. ЛТ 13570. Формат 70×108/16. Высокая печать. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 5,34. Тираж 1080 экз. Заказ 1080. Цена 80 коп.

Издательство Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. Минск. Парковая магистраль. 11. Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, к. 62, тел. 22-87-54.

И. М. ГУЛИС, А. И. КОМЯК

**ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УШИРЕНИЯ УРОВНЕЙ
НА ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ
СЛОЖНЫХ МОЛЕКУЛ ПРИ ПЕРЕНОСЕ ЭНЕРГИИ**

Ранее [1, 2] нами обнаружено, что при переносе энергии (ПЭ) между сложными молекулами, электронные уровни которых неоднородно уширены за счет флуктуаций межмолекулярных взаимодействий, имеет место ряд эффектов: длинноволновый сдвиг спектра люминесценции с повышением концентрации; рост степени поляризации при переходе к возбуждению на длинноволновом краю спектра поглощения; рост степени поляризации и уменьшение времени затухания на коротковолновом краю спектра люминесценции при возбуждении частотами полосы поглощения в области максимума и выше. Общей причиной наблюдаемых зависимостей является превышение вероятности ПЭ с молекул, обладающих более высокими частотами $O-O$ -перехода, над вероятностью обратного ПЭ, обусловленное различием в интегралах перекрытия «индивидуальных» спектров люминесценции и поглощения [1, 2].

Нами высказано предположение [1], что при ПЭ в условиях неоднородного уширения электронных уровней (НУЭУ) кинетика затухания должна иметь неэкспоненциальный характер. Целью настоящей работы является экспериментальное и теоретическое исследование спектральных зависимостей кинетики затухания и концентрационной деполаризации люминесценции, а также мгновенных спектров люминесценции при ПЭ в условиях НУЭУ.

Объектами исследования служили описанные в [1, 2] пленки поливинилового спирта (ПВС), содержащие 3-аминофталимид. Кинетика затухания измерялась на импульсном флуорометре, описанном в [3]. Возбуждение производилось в области максимума спектра поглощения.

На рис. 1, а показаны кривые затухания (1, 2) для 3-аминофталимида. Наблюдаются существенные различия в ходе кривых затухания при регистрации на коротковолновом (1) и длинноволновом (2) краях спектра люминесценции. Затухание при регистрации на краях спектра существенно неэкспоненциальное (при регистрации вблизи максимума — близко к экспоненциальному). Величина $k(t) = -\frac{dI}{dt} / I(t)$, не зависящая от времени в случае экспоненциального затухания и равная $1/\tau_{\text{фл}}$ ($\tau_{\text{фл}}$ — время жизни флуоресценции), при регистрации на коротковолновом краю спектра люминесценции уменьшается по мере затухания (см. рис. 1, а, кривая 1'), а при длинноволновой регистрации резко возрастает на начальных стадиях затухания (кривая 2'). На поздних стадиях затухания кривые 1' и 2' сближаются. Обнаружено, что различия в ходе кривых затухания постепенно исчезают по мере снижения концентрации.

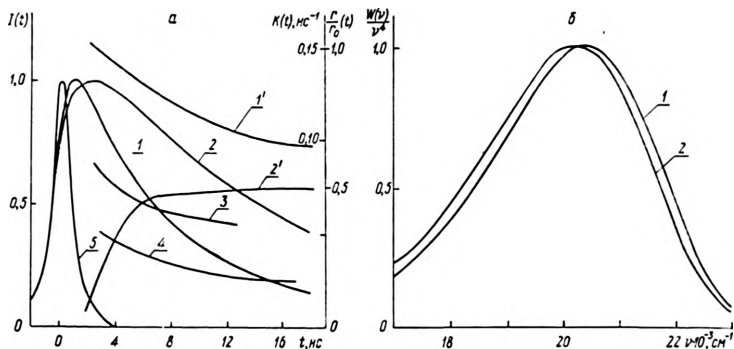


Рис. 1. Экспериментальные зависимости (3-аминофталимид в ПВС, $C = 10^{-2}$ М, $\nu_a \approx 27,7 \cdot 10^3$ см $^{-1}$). а — $I(t)$ (1, 2); $r/r_0(t)$ (3, 4); $k(t)$ (1', 2'), возбуждающий импульс (5). $\nu_p = 23,5 \cdot 10^3$ (1, 1', 3), $17,6 \cdot 10^3$ см $^{-1}$ (2, 2', 4). б — мгновенные спектры. $t_1 = 4$ (1), $t_2 = 17$ нс (2)

Для получения мгновенных спектров люминесценции регистрировались кривые затухания $I(t, \nu_i)$ для ряда частот ν_i в спектре испускания. Определялись численно площади под кривыми затухания: $I(\nu_i) =$

$$= \int_0^{t'} I(t, \nu_i) dt, \quad t' \gg \tau_{\text{фл.}}$$

Регистрировался стационарный спектр люминесценции $I_{\text{ст}}(\nu)$. Из полученных данных вычислялись мгновенные спектры люминесценции для ряда времен t_k .

Мгновенные спектры люминесценции изображены на рис. 1, б для $t = 4$ нс (1) и 17 нс (2). Спектр испускания на поздних стадиях затухания сдвинут в область низких частот относительно мгновенного спектра на ранних стадиях.

Для теоретического описания спектральных характеристик молекул при НУЭУ будем пользоваться схемой «элементарной ячейки» [4] и ограничимся рассмотрением случая $\tau_{\text{фл.}} \ll \tau_R$, где τ_R — время ориентационной релаксации. В рамках допущений, сделанных в [4], пусть $B_{12}(\nu)$ и $B_{21}(\nu)$ — спектральные коэффициенты Эйнштейна в поглощении и вынужденном испускании для переходов между уровнями, из которых исходный для поглощения является равновесным. Тогда для переходов, в которых исходный для поглощения уровень характеризуется энергией ориентационного взаимодействия W_{1j} , а конечный — W_{2j} , спектральные коэффициенты Эйнштейна запишутся в виде $B_{12}(\nu + \Theta_j)$ и $B_{21}(\nu + \Theta_j)$, где $\Theta_j = [W_{1j} + (\Delta W_2 - W_{2j})]/h$; ΔW_2 — величина энергетического зазора между равновесным и предельно высоким неравновесным уровнем для возбужденного состояния (ΔW_1 — то же для основного состояния).

Выделим объем V и заполним его N молекулами, координаты которых задаются случайными числами. Произвольным образом выберем первую молекулу, вокруг которой построим меньший объем v , но достаточно большой для того, чтобы вероятность выхода энергии за пределы v при ПЭ была незначительной. Опишем ПЭ между m молекулами, попавшими в v , с помощью системы дифференциальных уравнений [5]:

$$\dot{\omega}_j = -\omega_j(A + d) - \sum_{i=1}^m K_{ji}\omega_j + \sum_{i=1}^m k_{ij}\omega_i; \quad \omega_1(0) = 1, \quad \omega_j(0) = 0. \quad (1)$$

Здесь w_j — вероятность заселенности возбужденного состояния; A и d — вероятности переходов с испусканием и безызлучательных; $k_{ij} \neq k_{ji}$ — вероятности ПЭ; $k_{ij} = (A + d) (R_{0ij}^6 / R_{ij}^6)$; R_{ij} — расстояние между молекулами; $R_{0ij}^6 = R_0^6 \delta_{ij}$, где R_0 — критическое расстояние ПЭ для пары молекул со спектрами $B_{12}(\nu)$ и $B_{21}(\nu)$, а

$$\delta_{ij} = \left[\int_0^\infty B_{21}(\nu + \Theta_i) B_{12}(\nu + \Theta_j) d\nu \right] / \left[\int_0^\infty B_{21}(\nu) B_{12}(\nu) d\nu \right]$$

есть отношение интегралов перекрытия. Величины Θ_i , Θ_j задаются случайными числами, распределенными на интервале $(0, [\Delta W_1 + \Delta W_2]/h)$ с плотностью, пропорциональной плотности распределения молекул по W_{ij} .

После нахождения путем расчета на ЭВМ решения $w_{ik}(t)$ системы (1) для набора объемов типа v_k , содержащих по m_k молекул, можем вычислить

$$B_{21}(\nu_b, \nu_p, N/V, t) = \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} B_{21}(\nu_p + \Theta_{ik}) w_{ik}(t) B_{12}(\nu_b + \Theta_{ik}). \quad (2)$$

Здесь $\sum_k$ означает суммирование по большому числу объемов типа v_k (усреднение), ν_b и ν_p — частоты возбуждения и регистрации. Выражение (2) содержит как кинетики затухания для различных ν_b , ν_p и концентраций $C = N/V$, так и мгновенные спектры для различных ν_b , C и t .

Принимая, что первоначально возбужденная молекула дает в аннотропию испускания r вклад, равный предельному значению r_0 , а остальные молекулы — нулевой вклад, получаем

$$r(\nu_b, \nu_p, C, t)/r_0 = [\sum_k B_{21}(\nu_p + \Theta_{ik}) w_{ik}(t) B_{12}(\nu_b + \Theta_{ik})] / B_{21}(\nu_b, \nu_p, C, t).$$

Результаты расчета спектральных и временных характеристик люминесценции приведены на рис. 2. Для удобства сравнения теории с экспериментом (см. рис. 1) элементарные спектры задавались близкими к

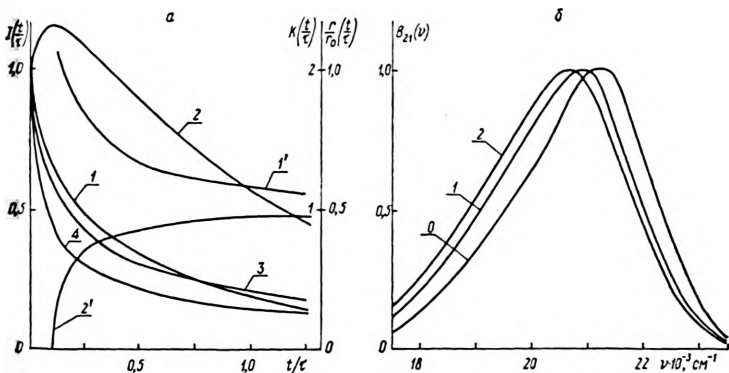


Рис. 2. Расчетные зависимости ($C/C_0 = 1,55$, $\nu_b = 26 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$). а — $I(t/tau)$ (1, 2); $r/r_0(t/tau)$ (3, 4); $K(t/tau)$ (1', 2'). $\nu_p = 22,5 \cdot 10^3$ (1, 1', 3), $18,5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ (2, 2', 4). б — мгновенные спектры. $t_0 = 0$ (0), $t_1 = 0,25$ (1), $t_2 = 1,375\tau$ (2)

спектрам 3-аминофталимида в ПВС; частоты возбуждения и регистрации, времена t_1 и t_2 для рис. 2 близки к экспериментальным (см. рис. 1). Функция распределения по W_{ij} в соответствии с моделью элементарной ячейки [4] использовалась, как и в [2], вида $\varphi(W_{ij}) = g_1 \exp[-W_{ij}/kT]$, в расчете полагалось $g_1 = \text{const}$. Несмотря на сделанные допущения, как видно из сравнения рис. 1 и 2, имеет место совпадение общего характера расчетных и полученных в эксперименте зависимостей. Следовательно, используемая модель в целом правильно описывает процессы, протекающие при ПЭ в условиях НУЭУ.

Кривые 3 и 4 рис. 2, а изображают рассчитанные зависимости относительной анизотропии испускания от времени для высокочастотной и низкочастотной регистрации соответственно. Более быстрое падение анизотропии испускания при низкочастотной регистрации объясняется тем, что молекулы с низкими частотами электронного перехода в значительной степени получают энергию за счет переноса. Была предпринята попытка получить экспериментальные зависимости анизотропии испускания от времени. Измерялись кривые затухания вертикальной и горизонтальной компонент. Необходимый для расчета анизотропии испускания коэффициент определялся из независимо измеренной стационарной анизотропии испускания и интегралов по времени от кинетик поляризованных компонент. Результаты измерений приведены на рис. 1, а (кривые 3 и 4); g_0 полагалось равным 0,3. Начальный этап падения анизотропии ускользает от регистрации в связи с тем, что возбуждающий импульс обладает конечной длительностью, а падение анизотропии испускания на начальных этапах происходит чрезвычайно быстро. Тем не менее, из сравнения кривых 3 и 4 рис. 1, а и 2, а можно сделать вывод о качественном соответствии хода экспериментальных и теоретических зависимостей анизотропии для различных частот регистрации.

Экспериментальные результаты, аналогичные описанным, получены для 1-анилино-8-нафталинсульфоната и эскулина в пленках ПВС и для 4-амино-N-метилфталимида в пленках полиметилметакрилата. Сопоставление экспериментальных данных с результатами расчета позволяет сделать заключение об универсальном характере обнаруженных спектральных зависимостей временных характеристик люминесценции.

Авторы выражают признательность С. К. Горбачеву за выполнение расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулис И. М., Комяк А. И. — ЖПС, 1977, т. 27, № 5, с. 841.
2. Гулис И. М., Комяк А. И. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1978, т. 42, № 2, с. 307.
3. Демчук М. И., Дмитриев С. М., Чернявский А. Ф. — ПТЭ, 1975, № 3, с. 100.
4. Томин В. И. — Опыт и спектр., 1975, т. 38, № 2, с. 274.
5. Förster Th. — Ann. Phys., 1948, v. 2, № 1—2, p. 55.

Поступила в редакцию
04.12.78.

Кафедра биофизики

УДК 53.07/08+53.001.5

С. Ю. ЯНОВСКИЙ, В. Л. КОЛПАШНИКОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ РЕЛАКСАЦИИ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ И ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ДЛЯ СРЕД С ТЕПЛОВОЙ ПАМЯТЬЮ

В последнее время интенсивное развитие получили исследования неклассических моделей переноса тепла. Много работ посвящено гиперболическому уравнению теплопроводности, основанному на гипотезе Максвелла — Каттанео, учитывающей время релаксации теплового потока τ , [1—3],

$$\tau_r \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \frac{\partial t}{\partial \tau} = \kappa \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где κ — коэффициент температуропроводности.

Обсуждается перенос тепла в средах, наделенных тепловой «памятью», распределение температуры в которых описывается интегро-дифференциальным линеаризованным уравнением [4]:

$$c_v \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \beta(0) \frac{\partial t}{\partial \tau} + \int_0^\infty \beta'(s) \frac{\partial t(x, \tau-s)}{\partial \tau} ds = \alpha(0) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \int_0^\infty \alpha'(s) \frac{\partial^2 t(x, \tau-s)}{\partial x^2} ds, \quad (2)$$

где c_v — объемная теплоемкость.

Представляет интерес экспериментальное определение материальных констант, входящих в уравнения (1), (2) (времени релаксации теплового потока τ_r , функций релаксации теплового потока $\alpha(\tau)$ и внутренней энергии $\beta(\tau)$). Такой эксперимент может быть поставлен на установке, предназначенной для определения коэффициента температуропроводности металлов методом плоских температурных волн [5].

Рассмотрим распространение плоских температурных волн в теплоизолированном полубесконечном стержне. Температура его торца изменяется по гармоническому закону $t = \Theta_0 \cos \omega \tau$ около некоторого среднего значения, которое положим равным нулю. Ось x направим по длине образца. Распределение температуры в стержне опишем уравнениями (1), (2). Решение уравнения теплопроводности ищем в виде

$$t = \Theta(x) \exp(i\omega\tau). \quad (3)$$

Подставив (3) в (1), (2), получим

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - \left(\frac{i\omega}{\kappa} - \frac{\omega^2}{c_q^2} \right) \Theta = 0; \quad c_q = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau_r}}; \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - \frac{i\omega [\beta(0) + \bar{\beta}'(\omega)] - c_v \omega^2}{\alpha(0) + \bar{\alpha}'(\omega)} \Theta = 0, \quad (5)$$

где $\bar{\alpha}'(\omega)$ и $\bar{\beta}'(\omega)$ — Фурье-образы функций релаксаций

$$\bar{\alpha}'(\omega) = \int_0^\infty \alpha'(s) e^{-i\omega s} ds; \quad \bar{\beta}'(\omega) = \int_0^\infty \beta'(s) e^{-i\omega s} ds.$$

Решение уравнений (4), (5) при граничных условиях

$$\Theta|_{x=0} = \Theta_0; \quad \Theta|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

имеют соответственно вид

$$\Theta(x) = \Theta_0 \exp \left[-x \sqrt{\frac{i\omega}{\kappa} - \frac{\omega^2}{c_q^2}} \right]; \quad (6)$$

$$\Theta(x) = \Theta_0 \exp \left[-x \sqrt{\frac{i\omega [\beta(0) + \bar{\beta}'(\omega)] - c_v \omega^2}{\alpha(0) + \bar{\alpha}'(\omega)}} \right]. \quad (7)$$

Общее решение уравнений (1), (2) получим, умножив (6), (7) на $\exp(i\omega\tau)$ и взяв действительную часть

$$t(x, \tau) = \Theta_0 \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \sqrt{V\omega^2 \tau_r^2 + 1 - \omega \tau_r} \right\} \times \\ \times \cos \left\{ \omega \tau - x \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \sqrt{V\omega^2 \tau_r^2 + 1 + \omega \tau_r} \right\};$$

$$t(x, \tau) = \Theta_0 \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{2[\alpha(0) + \bar{\alpha}'(\omega)]}} \sqrt{V c_v^2 \omega^2 + [\beta(0) + \bar{\beta}'(\omega)]^2 - c_v \omega} \right\} \times \\ \times \cos \left\{ \omega \tau - x \sqrt{\frac{\omega}{2[\alpha(0) + \bar{\alpha}'(\omega)]}} \sqrt{V c_v^2 \omega^2 + [\beta(0) + \bar{\beta}'(\omega)]^2 - c_v \omega} \right\}.$$

Зная разность амплитуд и фаз колебаний температуры в двух различных точках образца с известными теплофизическими характеристиками (теплоемкость, температуропроводность), можно определить: 1) время релаксации теплового потока для гиперболического уравнения теплопроводности (1)

$$\tau_r = \frac{(\Delta \varphi)^2 - (\ln \alpha)^2}{(x_2 - x_1)^2 \omega^2} \times;$$

2) скорость распространения тепла

$$c_g = \frac{(x_2 - x_1) \omega}{V (\Delta \varphi)^2 - (\ln \alpha)^2},$$

где $\alpha = \Theta(x_1)/\Theta(x_2)$ — определенное в эксперименте отношение амплитуд; $\Delta \varphi$ — измеренная в опыте разность фаз в двух различных точках образца;

3) функцию релаксации теплового потока

$$\alpha(0) + \bar{\alpha}'(\omega) = \frac{c_v \omega^2 (x_2 - x_1)^2}{(\Delta \varphi)^2 - (\ln \alpha)^2}; \quad (8)$$

4) функцию релаксации внутренней энергии

$$\beta(0) + \bar{\beta}'(\omega) = \frac{2c_v \omega (\ln \alpha) (\Delta \varphi)}{(\Delta \varphi)^2 - (\ln \alpha)^2}. \quad (9)$$

Измерив амплитуды и фазы для различных частот возмущающей температуры на торце, получим частотную зависимость Фурье-образов функций релаксации. Проведя обратный переход, можем получить временную зависимость этих функций.

Заметим, что для малых частот $\lim_{\omega \rightarrow 0} \bar{\alpha}'(\omega) = \alpha(\infty) - \alpha(0)$; $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \bar{\alpha}'(\omega) = 0$; $\lim_{\omega \rightarrow 0} \bar{\beta}'(\omega) = \beta(\infty) - \beta(0)$; $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \bar{\beta}'(\omega) = 0$, т. е. при малых частотах по формулам (8), (9) будем измерять равновесные значения коэффициентов теплопроводности $\alpha(\infty)$ и теплоемкости $\beta(\infty)$.

Для больших частот $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\alpha}'(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\beta}'(\omega) = 0$; $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \bar{\alpha}'(\omega) = -i\alpha'(0)$; $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \bar{\beta}'(\omega) = -i\beta'(0)$. Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ по формулам (8), (9) можно определить мгновенные значения коэффициентов теплопроводности $\alpha(0)$ и теплоемкости $\beta(0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cattaneo C. — Atti del Seminario matematico e fisico della universita Modena, 1948, 3, 3.
2. Лыков А. В. — ИФЖ, 1965, т. 9, с. 287.
3. Kaliski S. — Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 1965, v. 13, № 5, p. 409.
4. Gurtin M. E., Pipkin A. C. — Arch. Rational Mech. Anal., 1968, v. 31, № 2, p. 113.
5. Жолнерович И. И., Ткаченко В. М., Саржевский А. М. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1978, № 2, с. 78.

Поступила в редакцию
29.01.79.

Кафедра теплофизики

Б. Г. АРНАУДОВ, Д. С. ДОМАНЕВСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИИ ПОТЕНЦИАЛА НА ЭНЕРГИЮ ТЕРМИЧЕСКОЙ ИОНИЗАЦИИ МЕЛКИХ ПРИМЕСЕЙ В АРСЕНИДЕ ГАЛЛИЯ

Анализ экспериментальных данных показывает, что энергия термической ионизации E_0^T мелких доноров и акцепторов в арсениде галлия, определенная из наклона температурных зависимостей холловской концентрации носителей тока n_H , уменьшается с ростом уровня легирования [1—6]. В ранних работах [1] эти изменения связывались с перекрытием волновых функций примесных состояний и образованием примесной зоны. Обычно считают, что этот эффект становится существенным, когда не выполняется условие слабого легирования $Na^3 \ll 1$ (N — концентрация основных примесей, a — боровский радиус) [7]. Между тем, экспериментальные данные показывают, что и в области слабого легирования ($Na^3 \approx 10^{-2}$) энергия термической ионизации мелких доноров и акцепторов достигает нулевого значения [1, 3]. В то же время энергия связи электрона на доноре E_0 , рассчитываемая из энергии перехода между основным и возбужденным состоянием ($1s-2p$), не зависит от концентрации мелких доноров [2].

Это различие можно понять, если учесть уширение примесного уровня, обусловливаемое кулоновским взаимодействием неоднородно распределенных примесных ионов [7]. Такое «флуктуационное» уширение, очевидно, вызовет уменьшение энергии термической ионизации, а энергия перехода между основным и возбужденным состояниями останется неизменной.

При наличии «флуктуационного» уширения уровня энергия термической ионизации, по-видимому, должна определяться разницей между энергией Ферми E_F и энергией уровня протекания свободной зоны E_p [7]:

$$E_0^T = E_F - E_p = E_F - \alpha\gamma, \quad (1)$$

где $\alpha \approx 0,3$ [8, 9]. Для определения величины среднеквадратичной флуктуации примесного потенциала γ можно воспользоваться известным соотношением [10]:

$$\gamma = 2E_0a(1+K)^{1/2}(NR_s)^{1/2}, \quad (2)$$

где K — степень компенсации, а радиус экранирования R_s определяется соотношением [7]:

$$R_s \approx R_c = N^{-1/3}(1-K)^{-2/3}. \quad (3)$$

Использование нелинейного радиуса экранирования (3) обусловлено тем, что, хотя для обсуждаемых нами экспериментальных результатов характерна промежуточная степень компенсации ($K=0,1 \div 0,9$), однако, в области чисто экспоненциального участка зависимости $n_H = f(1/T)$ концентрация свободных носителей тока мала ($n \ll N$) [11]. Отсюда также следует, что заполнение флуктуационной зоны велико и уровень Ферми должен располагаться вблизи ее верхней границы:

$$E_F = E_0 - \gamma(R_c). \quad (4)$$

Следует отметить, что соотношение (4) при $K=0$ практически совпадает с положением уровня Ферми в некомпенсированном полупроводнике [12]:

$$E_F = E_0 - 0,99 \cdot 2E_0aN^{1/3}. \quad (5)$$

Относительное изменение энергии термической ионизации мелкого состояния можно получить из (2) — (4) в виде

$$\frac{E_0 - E_0^T}{E_0} = 1,3 \frac{\gamma(R_c)}{E_0} = 1,3 \cdot 2 \frac{(1+K)^{1/2}}{(1-K)^{1/3}} (Na^3)^{1/3}. \quad (6)$$

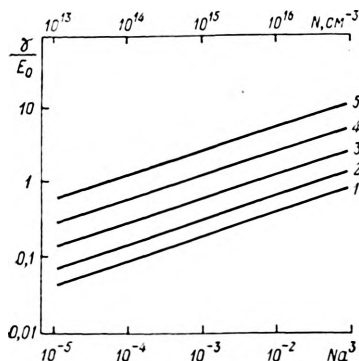
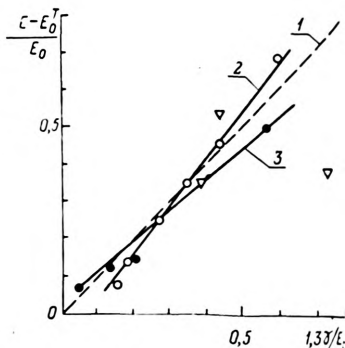


Рис. 1. Расчетная зависимость величины уширения примесного уровня (γ/E_0) от степени легирования (Na^3):

1 — $K=0$; 2 — $K=0.5$; 3 — $K=0.9$; 4 — $K=0.99$; 5 — $K=0.999$

Рис. 2. Относительное изменение E_0^T в зависимости от величины флуктуации примесного потенциала:

1 — теоретическая кривая, рассчитанная в соответствии с (6); 2, 3 — экспериментальные зависимости для арсенида галлия n - и p -типа соответственно: $\circ$ — [3], $\bullet$ — [4], ∇ — [6]



Из уравнения (6) видно, что и при слабом легировании ($Na^3 < 1$) флуктуационное уширение примесного уровня γ сильно возрастает с увеличением степени компенсации. На рис. 1 приведены рассчитанные по (6) зависимости $\gamma/E_0 = f(Na^3)$ при различных значениях степени компенсации¹. Видно, что нулевое значение энергии термической ионизации ($\gamma/E_0 \approx 1$) может быть достигнуто при концентрациях примесей, существенно меньших, чем это требуется для образования примесной зоны. Кроме того, эффект флуктуационного уширения примесного уровня в случае арсенида галлия должен быть весьма существенным даже для материала самой высокой чистоты ($N < 10^{13} \text{ см}^{-3}$).

На рис. 2 видно, что ход теоретической зависимости (кривая 1) достаточно близок к экспериментально наблюдаемым энергиям термической ионизации мелких доноров и акцепторов в арсениде галлия. Некоторое несоответствие, по-видимому, связано с недостаточной точностью значений степени компенсации, используемых при расчете γ на рис. 2. Эти неточности могут быть следствием того, что величины K определялись из уравнения электронейтральности, в котором не учитывался эффект флуктуационного уширения примесного уровня.

В дополнение отметим, что неравенство $\gamma/E_0 \ll 1$, которое можно определить из экспериментальных значений E_0 и E_0^T , по-видимому, является более строгим (по сравнению с $Na^3 \ll 1$) критерием слабого легирования и применимости обычного уравнения электронейтральности.

В заключение авторы выражают благодарность М. А. Молдовановой и В. Д. Ткачеву за неизменный интерес и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельяненко О. В., Лагунова Т. С., Наследов Д. Н., Талалакин Г. Н. — ФТТ, 1961, т. 3, № 1, с. 198; 1965, т. 7, № 5, с. 1316.

¹ При $F=0$ радиус экранирования не может быть задан уравнением (4) [11], и кривая 1, рассчитанная по уравнению (6), приведена только для сравнения.

2. Wolfe C. M., Stillman G. E. Proc. of the 3th Intern. Symp. on Gallium Arsenide.— Aachen, 1970, p. 3.
3. Stillman G. E., Wolfe C. M.— Thin Sol. Films, 1976, v. 31, № 1, p. 69.
4. Stillman G. E., Wolfe C. M., Dimmock J. O.— J. Phys. Chem. Sol., 1970, v. 31, № 6, p. 1199.
5. Hill D. E.— J. Appl. Phys., 1970, v. 41, № 7, p. 1815.
6. Whitaker J., Bolger D. E.— Sol. St. Com., 1966, v. 4, № 3, p. 181.
7. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.— ЖЭТФ, 1970, т. 60, № 2, с. 867.
8. Леванюк А. П., Осипов В. В.— ФТП, 1973, т. 7, № 8, с. 1575.
9. Арнаудов Б. Г., Быковский В. А., Домаевский Д. С.— ФТП, 1975, т. 9, № 12, с. 2338.
10. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.— ФТП, 1970, т. 4, № 2, с. 305.
11. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 2(8), с. 816.
12. Efros A. L., Shklovskii B. I., Yanchev I. Y.— Phys. Stat. Sol., 1972, v. 50, № 1, p. 45.

Поступила в редакцию
19.03.79.

Кафедра физики полупроводников

УДК 621.396.672

В. М. ЗЕЛЕНКЕВИЧ, А. С. КЛЮЧНИКОВ, Л. М. ТИМОФЕЕВ

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ СИСТЕМЫ АНТЕННА — РПУ

Необходимость защиты радиотехнических систем от различных внешних воздействий, в том числе и от атмосферных, делает незаменимым использование радиопрозрачных укрытий (РПУ). Необходимость оценки влияния РПУ на характеристики антенн требует разработки наиболее оптимальных электродинамических методов расчета.

Целью данной работы является сравнительный анализ существующих методов расчета диаграммы направленности (ДН) системы антенна — РПУ и разработка более эффективного метода расчета с точки зрения точности и простоты алгоритмизации.

Основу метода прослеживания хода лучей составляет интегральное представление зависимости распределения поля в дальней зоне от распределения токов по произвольному раскрытию в виде скалярного интеграла Кирхгофа [1, 2]. Для этого метода характерны ограничения:

- а) рассматриваются остронаправленные антенны и РПУ с достаточно большим радиусом кривизны;
- б) для падающего и прошедшего полей используется аппроксимация плоской волны и плоскопараллельного слоя.

Практические расчеты реальных трехмерных конструкций антенна — РПУ с помощью этого метода показали, что он малоприменим для расчета антенн с размером раскрытия $a \geq 25\lambda$, так как с увеличением размеров раскрытия затраты машинного времени растут пропорционально $\sim ka^2$ при условии сохранения заданной точности расчета. Для раскрытия $a \approx 25\lambda$ погрешность меньше 21% (в области главного лепестка) и не превосходит 26% (в области первых боковых лепестков).

Одним из известных методов электродинамического расчета систем антенна — РПУ является метод, использующий для расчета ближних полей укрываемой антенны векторизованные формулы Кирхгофа [3]. В рассматриваемом методе принимаются следующие упрощения:

- а) модули векторов H , E или величины токов на некоторой части поверхности пренебрежимо малы;
- б) излучение происходит по внешним нормальным к поверхности излучающей апертуры;
- в) векторы E и H связаны линейной зависимостью (как в случае плоской волны).

Для вычисления ближних полей применялись специально разработанные методы с автоматическим выбором шага интегрирования в зависимости от угла наблюдения, так как интегральные выражения, используемые для расчетов, содержат быстроосциллирующие функции,

и для точного вычисления интегралов необходимо выдержать шаг интегрирования не меньше двух отсчетов на период изменения функции.

Расчет переданных полей основан на традиционной схеме разложения падающего поля на две составляющие, перпендикулярную и параллельную плоскости падения и соединения их на внешней поверхности РПУ в тангенциальную составляющую переданного поля [3].

В связи с большими затратами машинного времени практическая реализация данного метода в настоящее время весьма затруднена для раскрывов размером $a \geq 10\lambda$. Для раскрывов размером $a \approx 8\lambda$ время счета составило 18—20 ч, причем с увеличением размеров раскрыва затраты машинного времени растут $\sim 4ka^2$. Таким образом, даже сравнительно невысокая точность расчета характеристик излучения системы антенна — РПУ с помощью данного метода достигается за счет больших затрат машинного времени (см. таблицу).

Метод	Число точек интегрирования	Время счета	Максимальное среднеквадратичное отклонение, дБ		Погрешность, %	
			главный лепесток	боковой лепесток	главный лепесток	боковой лепесток
Скалярный:						
без переотражений	250	2,3 ч	1,3	2,65	12—19	15—23
с переотражением	250	3,8 ч	1,05	2,02	11—16	12—20
Векторный	250	15 ч	1,1	2,98	8—16	14—22
БПФ:						
без переотражений	64 × 64	22 мин	0,95	1,95	9—12	11—16
с переотражением	64 × 64	36 мин	0,62	1,27	5—9	9—12

Рассмотренные методы можно отнести к методам прямого интегрирования апертурных полей. Общим недостатком этих методов при практической реализации является большой объем машинного времени, даже при использовании быстродействующих ЦВМ. Кроме того, для расчета ДН системы антенна — РПУ эти методы используют уже известное распределение поля по раскрыву, которое в каждом конкретном случае будет зависеть от типа антенны, погрешностей ее изготовления и т. д., а рассчитанные характеристики могут значительно отличаться от истинных.

Для увеличения точности расчетов и уменьшения их трудоемкости целесообразнее использовать не распределение поля по раскрыву, а саму ДН укрываемой антенны. Нами предлагается метод расчета характеристик излучения системы антенна — РПУ, отличительной особенностью которого является представление системы антенна — РПУ двумерной линейной системой и использование для ее описания функции Грина, которую часто называют откликом линейной системы [4]. Это позволяет определить поле на внешней поверхности укрытия в виде [4]:

$$f_2(\bar{r}_2) = \iint_{S_a} f_1(\bar{r}_a) h(\bar{r}_2 - \bar{r}_a) dS_a, \quad (1)$$

где $f_1(\bar{r}_a)$ — распределение поля на раскрыве; $f_2(\bar{r}_a)$ — распределение поля на внешней поверхности РПУ; $\bar{r}_a$ — радиус-вектор произвольной точки раскрыва; $\bar{r}_2$ — радиус-вектор точки на поверхности РПУ; $h(\bar{r}_2 - \bar{r}_a)$ — отклик системы антенна — РПУ на выходе (внешней поверхности РПУ) при подаче на вход (излучающий раскрыв) элементарного сигнала в виде δ -функции Дирака.

Поле в раскрыве и диаграмма направленности антенны связаны преобразованием Фурье [5], поэтому, применяя преобразования Фурье к

правой и левой частям уравнения (1) и учитывая теорему свертки, получаем следующее выражение для ДН системы антенна — РПУ [6]:

$$F_{(A-Y)}(p, q) = F_{(A)}(p, q) \Pi^+[h], \quad (2)$$

где $F_{(A)}$ — диаграмма направленности антенны; $F_{(A-Y)}$ — диаграмма направленности системы антенна — РПУ; p, q — пространственные частоты; $\Pi^+[h]$ — обозначение прямого преобразования Фурье.

Таким образом, математические операции, определяющие ДН системы антенна — РПУ, весьма просты, а использование процедуры быстрого преобразования Фурье (БПФ) существенно упрощает расчет передаточной функции $H = \Pi^+[h]$ системы антенна — РПУ.

Для нахождения отклика h используем известное решение Рэлея — Зомерфельда [4]:

$$E(\bar{r}_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_a} E(\bar{r}_a) \frac{\partial G}{\partial n} dS_a, \quad (3)$$

где S_a — поверхность раскрыва; $\bar{n}$ — единичная нормаль; G — скалярная функция Грина.

При подаче на вход системы возмущения в виде δ -функции мы получим следующее выражение для отклика [6]:

$$h(\bar{r}_2 - \bar{r}_a) = \frac{1}{2\pi} T(\bar{r}_2 - \bar{r}_a) \frac{\partial G(\bar{r}_2 - \bar{r}_a)}{\partial n}, \quad (4)$$

где $T(\bar{r}_2 - \bar{r}_a)$ — функция, определяющая радиопрозрачность стенки укрытия в точке $\bar{r}_2$ при помещении возмущения в точку $\bar{r}_a$; $G = \frac{e^{-ikR}}{R}$, здесь $R = [(x_2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2 + (z_2 - z_a)^2]^{1/2}$.

Следует отметить, что решение (4) не является точным решением какой-то конкретной задачи для реальных физических источников, так как исходное распределение предполагалось идеализированным в виде δ -функции.

Предлагаемая методика обеспечивает точность расчета выше точности рассмотренных методов, повышение точности расчета которых весьма трудоемко. Для предлагаемого метода затраты машинного времени растут $\sim \frac{a}{2\lambda} \log_2 a/\lambda$ с увеличением размеров раскрыва.

Известные методы расчета используют для расчета ДН системы антенна — РПУ заданные распределения поля по раскрыву, которые для каждой конкретной антенны одного типа различны, поэтому рассчитанные ДН могут существенно отличаться от экспериментально измеренных. В нашем методе используется ДН антенны, измеренная экспериментально, что позволило устранить трудоемкий процесс пересчета амплитудно-фазового распределения (АФР) поля на раскрыве антенны в поле дальней зоны; это и предопределяет в большей степени более высокую точность метода и его эффективность.

В предлагаемом методе учитываются эффекты переотражения, что позволяет существенно повысить точность расчета ДН в области боковых лепестков. Возможность использования процедуры цифровой фильтрации отклика позволяет также снизить ошибки расчета ДН в дальних боковых лепестках, так как это эквивалентно сглаживанию высокочастотной части спектра [7].

Использование процедур БПФ позволило преодолеть многие математические трудности, не вводя упрощающих предположений, что также повысило точность данного метода. Существенным достоинством предлагаемого метода является то, что с помощью отклика и передаточной характеристики $\Pi^+[h]$ можно оптимизировать отдельные параметры РПУ, например, его форму или радиопрозрачность, а также выработать некоторые критерии оптимальных РПУ.

При сравнении расчетных и экспериментальных данных основная трудность заключалась в точном моделировании распределения поля по

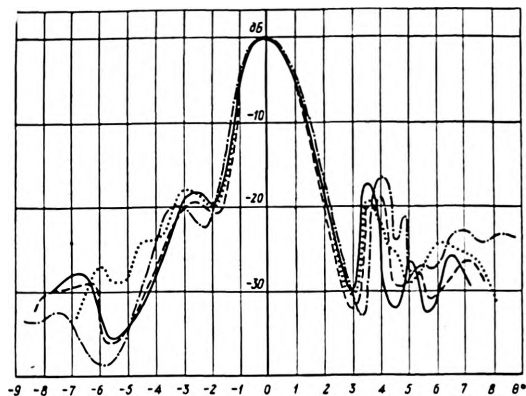


Рис. 1. Диаграмма направленности антенны с укрытием в главной плоскости E :

— экспериментальная ДН; — скалярный; . . . векторный; — — метод БПФ

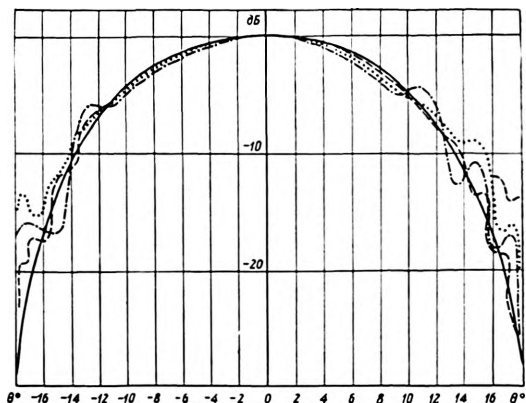


Рис. 2. Диаграмма направленности антенны с укрытием в главной плоскости H . Обозначения те же, что и на рис. 1

раскрытию для известных методов расчета. Так как в настоящее время не существует строгого решения рассматриваемой задачи, рассчитанные ДН сравнивались с экспериментально измеренными.

На рис. 1, 2 представлены полученные результаты расчета ДН антенны с прямоугольным раскрытием, помещенной внутри укрытия в виде эллипсоида вращения.

В таблице приводятся некоторые качественные оценки результатов расчетов для сравниваемых методик. Сравнительный анализ рассматриваемых методов позволил сделать следующие выводы.

Все рассматриваемые методы с достаточной для практических целей точностью отображают изменение ДН антенны при наличии укрытия в области главного лепестка. Погрешность метода скалярной формулы

Кирхгофа не превышает 21%, векторизованной формулы Кирхгофа $\leq 16\%$, метода БПФ $\leq 12\%$.

В области боковых лепестков погрешность метода скалярной формулы Кирхгофа 26%, метода векторизованной формулы Кирхгофа $\leq 20\%$, метода БПФ $\leq 16\%$.

Анализ полученных данных позволяет сделать некоторые рекомендации по разработке оптимального метода расчета систем антенна — РПУ.

При разумных ограничениях и упрощениях метод должен давать хорошее совпадение со строгой теорией или с экспериментальными данными. Процесс вычисления ближних и дальних полей не должен быть трудоемким, т. е. метод практически реализуется на современных ЦВМ средней мощности. При современном положении развития отечественных ЦВМ этому требованию отвечают методы, основанные на операциях интегральных преобразований Фурье или Френеля.

В настоящее время важно знать, как можно точнее, распределение поля в области боковых лепестков. В методе должны быть отражены процессы переотражения и деполяризации, которые существенно влияют на уровень боковых лепестков.

Разработка конструкций антенных РПУ ставит задачу оптимального соотношения формы и размеров РПУ с размерами и местоположением излучающего раскрыва. Простота и экономичность метода должна позволять проводить оптимизацию расчета и проектирования реальных конструкций РПУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tricoles G.— J. Opt. Amer., 1964, v. 54, № 9, p. 1094.
2. Абрамов В. В., Каплун В. А.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехн., 1971, вып. 23, с. 14.
3. Peric D. C.— IEEE Transaction, 1970, v. 18, № 1, p. 7.
4. Ключников А. С. Теория волновых процессов.— Минск, 1977.
5. Балклав А.— Изв. АН Латвийской ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1962, вып. 9, с. 73.
6. Зеленкевич В. М., Ключников А. С.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1978, № 2, с. 68.
7. Joy E. B.— IEEE Transaction, 1972, v. 20, № 3, p. 253.

Поступила в редакцию
29.03.79.

НИИ ПФП

УДК 539.172.3

Н. В. ЛОПАРЕВА, В. Л. ГУРАЧЕВСКИЙ

ПОЛЯРИЗУЮЩИЕ СВОЙСТВА МЕССБАУЭРОВСКИХ МИШЕНЕЙ ИЗ ЕСТЕСТВЕННОГО ЖЕЛЕЗА

Мессбауэровские мишени, помещенные в магнитное поле, обладают ярко выраженными свойствами «оптической» анизотропии в γ -диапазоне [1, 2]. Например, для них возможны аналоги эффектов Фарадея и двойного лучепреломления. Обычно в экспериментах с поляризованными γ -лучами используют высокообогащенные мишени. Представляет значительный интерес получение поляризованных пучков и их анализ в случае применения железной фольги, содержащей естественную примесь изотопа Fe^{57} . С этой целью рассмотрим выражения для показателей преломления γ -квантов, падающих на намагниченную мишень перпендикулярно к направлению магнитного поля.

Используя теорию, развитую в [1, 2], можно получить следующие явные выражения для показателей преломления γ -квантов, поляризованных перпендикулярно (n_1) и параллельно (n_2) направлению магнитного поля:

$$n_1 = 1 - \frac{\omega_n^2}{2\omega^2} + i \frac{\sigma_n Na}{2k} + \frac{aN/\gamma}{\omega - \omega_2 + \frac{i\gamma}{2}} + \frac{aN/\gamma}{\omega - \omega_3 + \frac{i\gamma}{2}};$$

$$n_2 = 1 - \frac{\omega_n^2}{2\omega^2} + i \frac{\sigma_n Na}{2k} + \frac{3}{4} \cdot \frac{aN/\gamma}{\omega - \omega_1 + \frac{i\gamma}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{aN/\gamma}{\omega - \omega_3 + \frac{i\gamma}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{aN/\gamma}{\omega - \omega_4 + \frac{i\gamma}{2}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{aN/\gamma}{\omega - \omega_5 + \frac{i\gamma}{2}}, \quad (1)$$

где $a = -\frac{\pi c^3}{\omega_0^3} \frac{\gamma_e}{\gamma}$; ω — частота падающих γ -квантов; ω_0 — частота нерасщепленного перехода; ω_i — резонансные значения частот, соответствующие переходам на рис. 1; ω_n — электронная ленгмюровская частота; γ_e — ширина упругого канала; γ — полная ширина линии; f — фактор Лэмба — Мессбауэра; N — число ядер Fe^{57} в единице объема; σ_n — сечение поглощения.

Рассмотрим вначале прохождение через мишень линейно поляризованного γ -излучения. Пусть поверхность мишени лежит в плоскости xu , магнитное поле направлено вдоль оси y , пучок падает вдоль оси z (рис. 2). Разложим вектор поляризации пучка $\vec{e}$ на составляющие вдоль осей x и y :

$$\vec{e} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2. \quad (2)$$

Так как в веществе каждое состояние поляризации распространяется со своим показателем преломления, то после прохождения мишени вектор поляризации имеет вид:

$$\vec{e}(l_n) = \alpha \vec{e}_1 e^{ikn_1 l_n} + \beta \vec{e}_2 e^{ikn_2 l_n}, \quad (3)$$

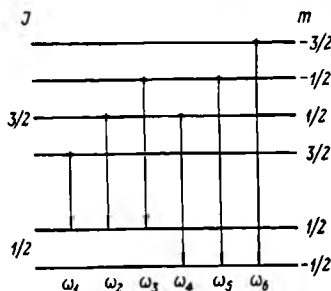


Рис. 1. Сверхтонкое магнитное расщепление уровней основного и 1-го возбужденного состояний ядер Fe^{57} и разрешенные переходы (J — спин ядра; m — магнитное квантовое число; ω_1 — ω_6 — частоты переходов)

где n_1 и n_2 — показатели преломления для волн, поляризованных соответственно вдоль осей x и y ; l_n — толщина мишени (поляризатора); k — волновое число.

Из выражения (3) видно, что если $\text{Im } n_1 \neq \text{Im } n_2$, то по мере прохождения через мишень вектор поляризации ориентируется вдоль оси x или y , т. е. мишень обладает способностью поляризовать пучок.

Предположим теперь, что вышедший из мишени пучок падает на вторую мишень, магнитное поле которой также расположено в плоскости xu , под углом Θ к полю в первой мишени. Для простоты далее первую мишень будем называть поляризатором, а вторую анализатором. Так как

$$\vec{e}_1 = \vec{e}'_1 \cos \Theta - \vec{e}'_2 \sin \Theta, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}'_1 \sin \Theta + \vec{e}'_2 \cos \Theta,$$

то выражение (3) примет вид

$$\vec{e}(l_n) = (\alpha e^{ikn_1 l_n} \cos \Theta + \beta e^{ikn_2 l_n} \sin \Theta) \vec{e}'_1 + (-\alpha e^{ikn_1 l_n} \sin \Theta + \beta e^{ikn_2 l_n} \cos \Theta) \vec{e}'_2.$$

После прохождения поляризатора и анализатора:

$$\vec{e}(l_n + l_a) = (\alpha e^{ikn_1 l_n} \cos \Theta + \beta e^{ikn_2 l_n} \sin \Theta) e^{ikn_1 l_a} \vec{e}_1 + \\ + (-\alpha e^{ikn_1 l_n} \sin \Theta + \beta e^{ikn_2 l_n} \cos \Theta) e^{ikn_2 l_a} \vec{e}_2. \quad (4)$$

Обозначив $\tilde{\alpha}_1 = \alpha e^{-kn_1(l_n + l_a)} \cos \Theta$ и $\tilde{\beta}_1 = \beta e^{-k(n_2 l_n + n_1 l_a)} \sin \Theta$,

где $n' = \operatorname{Re} n$, $n'' = \operatorname{Im} n$, для амплитуды волны с поляризацией $\vec{e}_1'$ можно получить выражение:

$$E_{e_1'} = \tilde{\alpha}_1 [\cos kn_1' (l_n + l_a) + i \sin kn_1' (l_n + l_a)] + \\ + \tilde{\beta}_1 [\cos k(n_2' l_n + n_1' l_a) + i \sin k(n_2' l_n + n_1' l_a)].$$

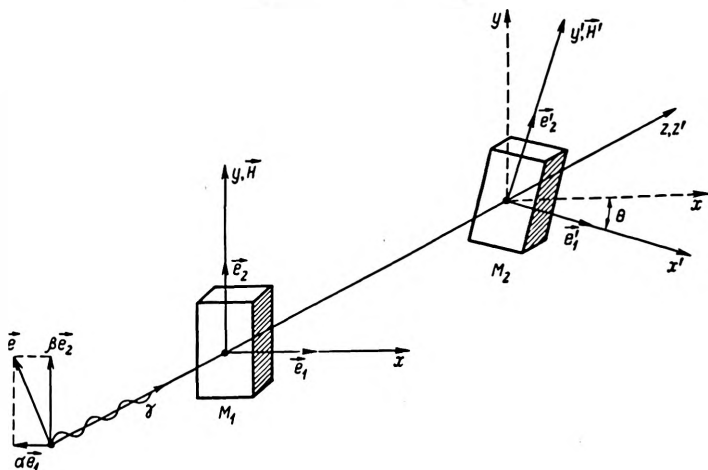


Рис. 2. Прохождение линейно-поляризованного излучения через систему двух мишеней (M_1 — поляризатор; M_2 — анализатор; H — напряженность магнитного поля)

Аналогично получается выражение для амплитуды волны с поляризацией: $\vec{e}_2'$:

$$E_{e_2'} = -\tilde{\alpha}_2 [\cos k(n_1' l_n + n_2' l_a) + i \sin k(n_1' l_n + n_2' l_a)] + \\ + \tilde{\beta}_2 [\cos kn_2' (l_n + l_a) + i \sin kn_2' (l_n + l_a)].$$

Для интенсивностей $I = |E|^2$ волн с поляризациями $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ после преобразований можно получить:

$$I_{e_1'} = \alpha^2 e^{-2kn_1'(l_n + l_a)} \cos^2 \Theta + \beta^2 e^{-2k(n_2' l_n + n_1' l_a)} \sin^2 \Theta + \\ + 2\alpha\beta \sin \Theta \cos \Theta e^{-k(n_1' l_n + 2n_1' l_a + n_2' l_n)} \cos k(n_1' - n_2') l_n, \quad (5) \\ I_{e_2'} = \alpha^2 e^{-2k(n_1' l_n + n_2' l_n)} \sin^2 \Theta + \beta^2 e^{-2kn_2'(l_n + l_a)} \cos^2 \Theta - \\ - 2\alpha\beta \sin \Theta \cos \Theta e^{-k(n_1' l_n + 2n_2' l_a + n_2' l_n)} \cos k(n_1' - n_2') l_n.$$

Полная интенсивность волны с поляризацией $\vec{e}$: $I_{\vec{e}} = I_{\vec{e}_1} + I_{\vec{e}_2}$. Учтем теперь, что неполяризованный пучок можно рассматривать как некогерентную смесь двух взаимно ортогональных плоских поляризаций. Интенсивность излучения с начальной поляризацией $\vec{e}' \perp \vec{e}$ легко найти, если учесть, что $\vec{e}' = \beta \vec{e}_1 + (-\alpha) \vec{e}_2$, т. е. для γ -квантов с поляризацией $\vec{e}'$ все предыдущие выкладки останутся в силе, если везде сделать замену α на β и β на $-\alpha$. Следовательно, выражения для интенсивностей $I_{\vec{e}_1}$ и $I_{\vec{e}_2}$ должны иметь вид:

$$\begin{aligned} I_{\vec{e}_1} &= \beta^2 \cos^2 \Theta e^{-2k n_1'' (l_n + l_a)} + \alpha^2 \sin^2 \Theta e^{-2k (n_2'' l_n + n_1'' l_a)} - \\ &- 2\alpha\beta \sin \Theta \cos \Theta e^{-k (n_1'' l_n + 2n_1'' l_a + n_2'' l_n)} \cos k (n_1' - n_2') l_n, \\ I_{\vec{e}_2} &= \beta^2 \sin^2 \Theta e^{-2k (n_1'' l_n + n_2'' l_a)} + \alpha^2 \cos^2 \Theta e^{-2k n_2'' (l_n + l_a)} + \\ &+ 2\alpha\beta \sin \Theta \cos \Theta e^{-k (n_1'' l_n + 2n_2'' l_a + n_2'' l_n)} \cos k (n_1' - n_2') l_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение для полной интенсивности волны после поляризатора и анализатора: $I = I_{\vec{e}_1} + I_{\vec{e}_2} + I_{\vec{e}_1} + I_{\vec{e}_2}$ после упрощения примет вид:

$$\begin{aligned} I &= \cos^2 \Theta e^{-2k n_1'' (l_n + l_a)} + \sin^2 \Theta e^{-2k (n_2'' l_n + n_1'' l_a)} + \\ &+ \sin^2 \Theta e^{-2k (n_1'' l_n + n_2'' l_a)} + \cos^2 \Theta e^{-2k n_2'' (l_n + l_a)}. \end{aligned} \quad (7)$$

В выражениях (1) обозначим: $z = a N \gamma^2 k f$,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(\omega - \omega_2)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} + \frac{1}{(\omega - \omega_3)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}, \\ v &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_3)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} + \\ &+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_4)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_5)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Тогда после подстановки (1) в (7) последнее примет вид:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{I}{\gamma^2 n N a (l_n + l_a)}} &= \cos^2 \Theta e^{zu(l_n + l_a)} + \sin^2 \Theta e^{zu l_n + zu l_a} + \\ &+ \sin^2 \Theta e^{zu l_n + zu l_a} + \cos^2 \Theta e^{zu(l_n + l_a)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выше сделан вывод о том, что намагниченная мишень обладает поляризующими свойствами. Рассмотрим предельный случай, когда показатели преломления для γ -квантов, поляризованных перпендикулярно и параллельно магнитному полю, сильно отличаются ($n_1' \gg n_2'$ или $n_1'' \ll n_2''$). Тогда после упрощения получим:

$$e^{-\frac{I}{\gamma^2 n N a (l_n + l_a)}} = \cos^2 \Theta, \quad (9)$$

что аналогично известному закону Малюса.

Итак, интенсивность излучения, прошедшего через систему поляризатор — анализатор, зависит от угла между осями поляризатора и анализатора.

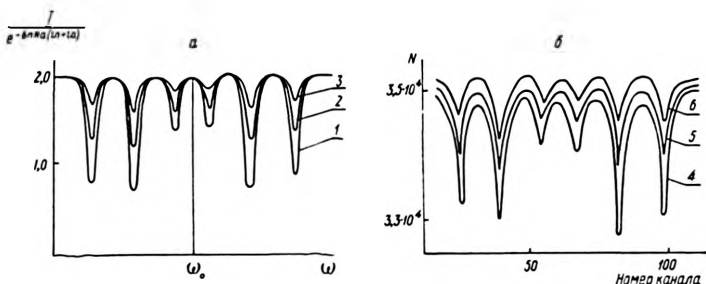


Рис. 3. Частотные зависимости интенсивности γ -излучения, прошедшего через систему поляризатор — анализатор для углов $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (а — теоретические, б — экспериментальные)

На кривых 1, 2, 3 рис. 3 показана рассчитанная по формуле (8) частотная зависимость интенсивности γ -излучения для углов $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Толщина использованной фольги 10^{-3} см. Эксперимент проводился на мессбауэровском спектрометре, созданном на кафедре ядерной физики. Фольга намагничивалась постоянными магнитами. Системой коллиматоров устанавливалась геометрия опыта, не зависящая от вращения мишеней. Полученные результаты приведены на рис. 3 (кривые 4, 5, 6). Видно, что теоретический расчет согласуется с экспериментальными данными. Небольшое расхождение объясняется, по-видимому, тем обстоятельством, что в эксперименте величина намагничивающего поля составляла около 0,15 тл, что недостаточно для ориентации всех доменов. В расчетах же предполагалось, что вещество полностью магнитоупорядочено.

Авторы выражают глубокую благодарность В. Г. Барышевскому за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред. — Минск, 1977.
2. Беляков В. А. — УФН, 1975, т. 115, с. 553.

Поступила в редакцию
16.04.79.

Кафедра ядерной физики и мирного
использования атомной энергии

УДК 621.396.677.7

Л. Н. ДАНИЛЕВСКИЙ, Ю. А. ДОМАНОВ, В. Н. ЗЕЛЕНКО,
В. В. ИЗОХ, О. В. КОРОБКО

ОПТИМИЗАЦИЯ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК С АНАЛОГО-ЦИФРОВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Вопросы синтеза антенных решеток (АР) с низким уровнем боковых лепестков диаграммы направленности (ДН) путем расчета амплитудных весовых коэффициентов на элементах решетки и межэлементных расстояний нашли достаточно широкое освещение в литературе [1—3].

В данной работе рассматривается синтез оптимальной в смысле [4] АР с цифровой обработкой сигналов путем оптимизации межэлементных расстояний, а также влияющие параметры АЦП на ряд характеристик ДН, в первую очередь, на уровень боковых лепестков.

Критерий оптимальности, предложенный в [4], заключается в минимизации мощности, принятой вне некоторого сектора $\pm \delta$ возле направ-

ления на главный максимум. Для линейной антенной решетки это сводится к минимизации функционала:

$$Q = \int_0^{\pi} P(\alpha) \sin \alpha d\alpha - \int_{\alpha_0-\beta}^{\alpha_0+\beta} P(\alpha) \sin \alpha d\alpha, \quad (1)$$

где $P(\alpha)$ — мощность, принимаемая антенной решеткой с направления α ; α_0 — направление фазирования АР.

В отличие от [4], где минимизация функционала Q проводилась вычислением соответствующих весовых коэффициентов, в данной работе минимум функционала достигается вариацией положения элементов АР.

Предположим, что на входы приемников линейной антенной решетки поступают узкополосные гауссовы сигналы, смешанные с однородным некоррелированным гауссовым шумом. Сигналы и шумы статистически независимы. На выходе каждого приемника находится АЦП с равномерной нечетной характеристикой.

Используя результаты работ [5, 6], можно показать, что зависимость мощности, принимаемой антенной решеткой, от угла α можно представить в виде:

$$P(\alpha) = \frac{q^2}{8\pi^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m^2}{(2m+1)!} \rho_{ij}^{2m+1}(\alpha), \quad (2)$$

где N — число элементов в АР; a_i — весовые коэффициенты на элементах;

$$h_m = 2^{-m} \sum_{l=-(L-1)}^{L-1} H_{2m} \left(\frac{l\eta}{\sqrt{2}} \right) \exp \left[- \left(\frac{l\eta}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]; \quad \eta = \frac{b_3}{\sqrt{1+\beta^2}}; \quad b_3 = \frac{q}{\sigma_n};$$

$\beta = \frac{\sigma_s}{\sigma_n}$; σ_s^2 , σ_n^2 — дисперсии сигнала и шума соответственно; q — величина ступеньки квантования; $2L$ — число уровней квантования; $H_{2m}(x)$ — полином Эрмита степени $2m$;

$$\rho_{ij}(\alpha) = \frac{\sigma_s \sigma_{sj} \rho_{sij}(\alpha) + \sigma_n \sigma_{nj} \rho_{nij}(\alpha)}{\sqrt{(\sigma_s^2 + \sigma_n^2)(\sigma_{sj}^2 + \sigma_{nj}^2)}}; \quad (3)$$

$\rho_{sij}(\alpha)$, $\rho_{nij}(\alpha)$ — нормированные функции корреляции сигнала и шума соответственно. При сделанных предположениях о свойствах сигналов и шумов их можно представить в виде:

$$\rho_{sij}(\alpha) = \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (y_i - y_j) (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right]; \quad (4)$$

$$\rho_{nij}(\alpha) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \quad y_i — координаты элементов в АР.$$

С учетом (2) минимизируемый функционал (1) перепишется в виде:

$$Q(y_1, \dots, y_N) = \frac{q^2}{8\pi^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m^2}{(2m+1)!} \times \\ \times \left[\int_0^{\pi} \rho_{ij}^{2m+1}(\alpha) \sin \alpha d\alpha - \int_{\alpha_0-\beta}^{\alpha_0+\beta} \rho_{ij}^{2m+1}(\alpha) \sin \alpha d\alpha \right]. \quad (5)$$

Подставим в (5) выражения (3) — (4) для $\rho_{ij}(\alpha)$ и, проведя интегрирование, получим для минимизируемой функции следующее выражение:

$$Q(y_1, \dots, y_N) = \frac{q^2}{8\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m^2}{(2m+1)!} F_m(y_1, \dots, y_N), \quad (6)$$

где

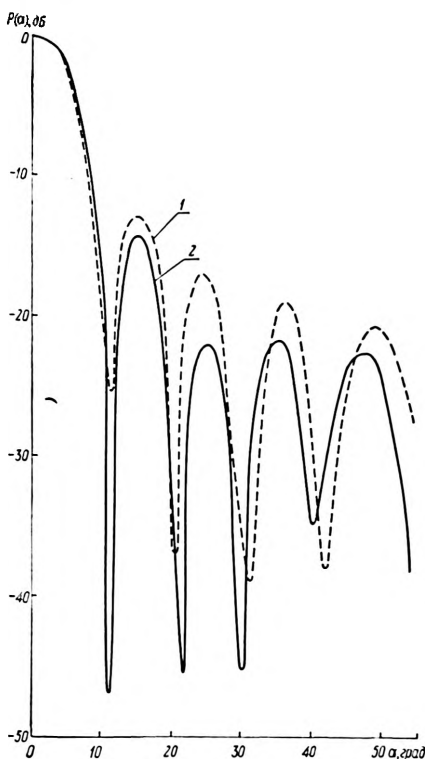
$$F_m(y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N a_i^2 [2 + \cos(\alpha_0 - \delta) - \cos(\alpha_0 + \delta)] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\beta_2}{1 + \beta^2} \right)^{2m+1} 2^{-2m} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{a_i a_j}{y_i - y_j} \times \\
& \times \sum_{k=0}^m \frac{C_{2m+1}^k (\sin x_2 - \sin x_1 - \sin x_4 + \sin x_3)}{2m - 2k + 1}, \\
& x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (y_i - y_j) (2m - 2k + 1) (1 - \cos \alpha_0); \\
& x_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (y_i - y_j) (2m - 2k + 1) (1 + \cos \alpha_0); \\
& x_3 = \frac{2\pi}{\lambda} (y_i - y_j) (2m - 2k + 1) [\cos(\alpha_0 - \delta) - \cos \alpha_0]; \\
& x_4 = \frac{2\pi}{\lambda} (y_i - y_j) (2m - 2k + 1) [\cos(\alpha_0 + \delta) - \cos \alpha_0].
\end{aligned}$$

Поскольку y_i нелинейно входят в минимизируемую функцию, для их вычисления использовались градиентные методы оптимизации функций многих переменных [7]. Положения координат y_i вычислялись для различного числа уровней квантования при сохранении неизменного динамического диапазона. Вычисления проводились для 12-элементной антенной решетки с начальным равномерным расположением элементов. Размеры (апертура) АР — фиксированы. Результаты вычислений приведены в таблице.

Легко видеть что для более подробного квантования, оптимальные значения координат элементов АР сдвигаются от первоначального положения значительно сильнее. Построенные нормированные диаграммы направленности по мощности: $P(\alpha) = 10 \lg [P_1(\alpha)/P_1(\alpha_0)]$, где

$$\begin{aligned}
P_1(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \sum_{m=0}^{\infty} \times \\
&\times \frac{h_m^2}{(2m+1)!} \cos^{2m+1} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (y_i - y_j) (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \right],
\end{aligned}$$



ДН линейной антенной решетки при $L=16$, $N=12$, $b_2=6$, $\delta=0,286$, $\beta=30$:

1 — эквидистантная решетка; 2 — решетка с оптимальным расположением элементов

с конкретными значениями вычисленных координат позволяют судить о возможных выигрышах в уровне боковых лепестков.

Так, в частности, на рисунке представлены ДН линейной эквидистантной антенной решетки и АР с вычисленными координатами положений элементов. При этом выбраны следующие параметры АЦП: $L=16$, $b_3=6$. Вычисленные координаты элементов приведены в таблице. Во втором случае имеется существенный (от 1,5 до 5 дБ) выигрыш в уровне боковых лепестков.

$$\delta = 0.286, N = 12, \beta = 30$$

L	$\#$	$2y_1/\lambda$	$2y_2/\lambda$	$2y_3/\lambda$	$2y_4/\lambda$	$2y_5/\lambda$	$2y_6/\lambda$	$2y_7/\lambda$	$2y_8/\lambda$	$2y_9/\lambda$	$2y_{10}/\lambda$	$2y_{11}/\lambda$	$2y_{12}/\lambda$
1	1	1	2,13	2,96	4,04	4,94	6,03	6,97	8,06	8,96	10,04	10,87	12
4	24	1	2,22	3,14	4,11	4,98	6,01	6,98	8,01	8,86	9,86	10,78	12
8	12	1	2,22	3,15	4,12	4,93	6,03	6,97	8,06	8,88	9,86	10,78	12
16	6	1	2,23	3,17	4,15	5,01	6,04	6,95	7,99	8,84	9,83	10,75	12
32	3	1	2,24	3,19	4,18	5,03	6,05	6,95	7,97	8,82	9,80	10,75	12

Координаты элементов АР при жестком ограничителе ($L=1$) практически не изменяют своего положения. Это говорит о том, что для жесткого ограничителя линейная эквидистантная АР является практически оптимальной по используемому критерию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Murthy P. K., Kumara A.—IEEE Trans. Antennas and Propag., 1976, v. 24, № 6.
2. David K., Cheng D. K.—Proceeding of the IEEE, 1975, v. 59, № 12.
3. Tseng F. I., Cheng D. K.—Radio Sci., 1968, v. 3, № 5.
4. Wang H. S. C.—J. Acoustic. Soc. Amer., 1975, v. 57, № 5.
5. Батурицкий М. А., Данилевский Л. Н., Доманов Ю. А., Коробко О. В.—Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 2.
6. Vural A. M.—J. Acoustic. Soc. Amer., 1969, v. 46, № 2.
7. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.— М., 1975.

Поступила в редакцию
16.04.79.

Кафедра радиофизики
и электроники СВЧ

УДК 621.375

ФАМ ЧОНГ ХЬЕН, А. П. ХАПАЛЮК

О ВОЗМОЖНОМ УЛУЧШЕНИИ УСЛОВИЯ ГЕНЕРАЦИИ ПРИ ВВЕДЕНИИ В РЕЗОНАТОР ПРИЗМ ПОЛНОГО ОТРАЖЕНИЯ

Особенности генератора из двух последовательно включенных активных стержней изучались в работах [1, 2], где, в частности, показано, что порог генерации в симметричном случае, когда стержни и коэффициенты отражения на свободных концах одинаковы, не изменяется по сравнению с простым одноступенчатым генератором, но сильно изменяется спектр генерации. Одним из вариантов генератора с последовательным включением активных стержней является генератор с прямоугольной призмой. В таком генераторе при определенных условиях для некоторых типов колебаний может заметно снижаться порог генерации [3]. С введением в резонатор большего числа призм полного отражения открываются новые возможности управления параметрами генерации, в первую очередь — порогом и спектром генерации. В данной работе исследуется возможность снижения порога генерации в сложном резонаторе с несколькими призмами полного отражения.

Схема и необходимые обозначения составного резонатора показаны

на рис. 1. Условия стационарной генерации в таком резонаторе могут быть получены в обычно используемом приближении плоских волн [4]. Плоские электромагнитные волны, распространяющиеся в отдельных элементах резонатора, могут быть записаны в виде (временной множитель $\exp(i\omega t)$ опускается) :

$$\begin{aligned} E_j^a &= A_j e^{-ikN_j z}, \quad H_j^a = N_j E_j^a; \\ E_j^b &= B_j e^{ikN_j z}, \quad H_j^b = -N_j E_j^b \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (1)$$

где E_j^a и H_j^a — электрический и магнитный векторы волн, распространяющихся вдоль положительного, а E_j^b , H_j^b — отрицательного направления координатной оси z ; A_j и B_j — соответственно их амплитуды; N_j — показатель преломления среды, в которой распространяется волна; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны в вакууме; ω — круговая частота. Нумерация волн и их параметров определяется в соответствии с рис. 1.

Очевидно, что волны (1) удовлетворяют уравнениям Максвелла при любых значениях амплитуд. Однако следует дополнительно потребовать, чтобы они удовлетворяли и граничным условиям. При $z=0$ для этого необходимо выполнение равенств:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2' + B_2', \quad N_1(A_1 - B_1) = N_2(A_2' - B_2'); \\ A_2 + B_2 &= A_3' + B_3', \quad N_2(A_2 - B_2) = N_3(A_3' - B_3'); \\ A_3 + B_3 &= A_4' + B_4', \quad N_3(A_3 - B_3) = N_4(A_4' - B_4'); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогичные уравнения получаются на границе $z=l$:

$$\begin{aligned} A_0 e^{-ikN_0 l} &= A_1 e^{-ikN_1 l} + B_1 e^{ikN_1 l}, \quad N_0 A_0 e^{-ikN_0 l} = N_1(A_1 e^{-ikN_1 l} - \\ &- B_1 e^{ikN_1 l}), \quad A_2 e^{-ikN_2 l} + B_2 e^{ikN_2 l} = A_3' e^{-ikN_3 l} + B_3' e^{ikN_3 l}; \\ N_2(A_2 e^{-ikN_2 l} - B_2 e^{ikN_2 l}) &= N_3(A_3' e^{-ikN_3 l} - B_3' e^{ikN_3 l}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3)$$

К системе (2), (3) следует добавить уравнения, определяющие связь волн, распространяющихся в призмах. В нашем предположении, когда на каждой боковой грани прямоугольной призмы выполняется условие полного отражения и призма не поглощает света, уравнения связи между амплитудами входящих и выходящих из призмы волн, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} A_2' &= B_2' e^{i\Delta_1}, \quad A_2'' = B_2' e^{i\Delta_1}, \quad B_4' e^{ikN_4 l} = A_4' e^{-ikN_4 l + i\Delta_4}; \\ B_4' e^{ikN_4 l} &= A_4' e^{-ikN_4 l + i\Delta_4}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4)$$

где Δ_j определяет набег фазы волны при прохождении ее через призму. Характерной особенностью такого резонатора является зависимость величины этого набег фазы от поляризации волн. Собственными поляризациями такого резонатора будут p -волны (электрический вектор колеблется в плоскости падения) и s -волны (электрический вектор колеблется перпендикулярно к плоскости падения). Набег фазы Δ_j в каждой отдельной призме можно представить в виде суммы двух слагаемых. Одно слагаемое определяет набег фазы при распространении волны в призме, оно одинаково для обеих поляризаций: $\delta_j = kN_j d_j$, где d_j — длина пути света в призме, которая равна удвоенной высоте призмы и, следовательно, зависит от ее размеров. Второе слагаемое определяется сдвигом фазы при полном отражении на боковых гранях призмы, оно различно для p - и s -волн и может быть вычислено из формул Френеля. Будем считать, что волны падают на боковые поверхности призмы под углом 45° . При этом сдвиг фазы при отражении p -волны оказывается в два раза больше

чем s -волны. Если, сдвиг фазы при одном таком отражении для s -волны обозначить через χ_j , то суммарный сдвиг фазы для p -волны (Δp) и s -волны (Δ_s) запишется в виде

$$\Delta_{pj} = 4\chi_j - kN_j d_j, \quad \Delta_{sj} = 2\chi_j - kN_j d_j, \quad \operatorname{tg} \chi_j = N_j \sqrt{N_j^2 - 2}. \quad (5)$$

При этом сделано предположение, что показатель преломления среды, граничащей с боковыми гранями призмы, равен единице (воздух).

Систему уравнений (2), (4) можно решить методом исключения отдельных амплитуд. В этом случае ее легко свести к одному матричному уравнению относительно амплитуд выходящих из резонатора волн:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R_{1,0} \end{pmatrix} A_0 = D \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_1} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_{1,2} \\ R_{1,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\Delta_1} \\ e^{-i\Delta_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_{2,3} \\ R_{2,3} & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_{3,4} \\ R_{3,4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\Delta_2} \\ e^{i\Delta_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_{4,5} \\ R_{4,5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\Delta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_3} \end{pmatrix} \dots \\ \dots \begin{pmatrix} 1 & R_{2m, 2m+1} \\ R_{2m, 2m+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(-1)^m k N_{2m+1} l} & 0 \\ 0 & e^{i(-1)^m k N_{2m+1} l} \end{pmatrix} \times \\ \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^m & 1 - (-1)^m \\ 1 - (-1)^m & 1 + (-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2m+1, 2m+2} \\ 1 \end{pmatrix} A_{2m+2}, \quad (6)$$

где

$$R_{j,s} = \frac{N_j - N_s}{N_j + N_s}, \quad D = \frac{N_{2m+1} + N_{2m+2}}{N_0 + N_1} \frac{(N_1 + N_2)(N_2 + N_3) \dots (N_{2m} + N_{2m+1})}{(2N_1)(2N_2) \dots (2N_{2m})} \times \\ \times e^{i(N_{2m+1} l - \frac{1}{2} [1 - (-1)^m] N_{2m+2} k l)}, \quad \gamma_j = k N_j l; \quad (7)$$

целое число m определяет число призм в резонаторе.

В уравнении (6) каждый характеристический элемент резонатора определяется своей матрицей, поэтому само уравнение легко поддается физической интерпретации и удобно для исследования условий генерации. В частности, условием генерации будет условие разрешимости уравнения (6).

В частном случае двух ($m=2$) одинаковых призм и совершенно одинаковых стержней условием разрешимости уравнения (6) (условием генерации) будет уравнение третьей степени относительно $y = \exp(-2ikNl)$:

$$b^2 R^2 y^3 + aR(2b - aR)y^2 + a(a + 2Rc)y - c^2 = 0, \quad (8)$$

где $R_0 = \frac{N - n_0}{N + n_0}$; $R = \frac{N - n}{N + n}$;

$$a = R_0(e^{-i\Delta} - e^{i\Delta}), \quad b = e^{i\Delta} - R_0^2 e^{-i\Delta}, \quad c = e^{-i\Delta} - R_0^2 e^{i\Delta}; \quad (9)$$

$N = n' + ix$ — показатель преломления активного стержня (комплексное число); n_0 — показатель преломления призмы; n — показатель преломления сред, граничащих с свободными концами стержня.

Как обычно, модуль величины y определяет порог генерации, а фаза — спектр.

Как видно из равенства (6), влияние призм полного отражения сказывается через сдвиг фазы. При отсутствии сдвига фазы или при сдвиге, кратном π , уравнение (8) переходит в обычное уравнение генерации простого резонатора с длиной, равной суммарной длине всех активных стержней [4]:

$$R^2 y^3 = R^2 e^{-6ikNl} = 1. \quad (10)$$

Сравнение решения уравнений (8) и (10) дает нам возможность выявить роль призм на условия генерации.

Детальное аналитическое исследование уравнения (8) затруднительно, практически требуются численные расчеты.

По-видимому наибольший интерес представляет исследование возможностей понижения порога генерации за счет выбора параметров призм. Для этого можно поступить следующим образом. Известно, что порог генерации определяется величиной суммарных потерь резонатора $\eta = \sqrt{r} \exp(3kx/l)$. Для простого резонатора, как это следует из выражения (10), эта величина равна единице. Для усложненного призмами резонатора ее нужно определять из уравнения (8). Если окажется, что эта величина будет больше единицы, порог генерации повышается по сравнению с порогом в простом резонаторе, в противном случае — понижается.

Некоторые конкретные результаты таких численных расчетов представлены на рис. 2. Результаты расчетов сводятся к следующему. Порог генерации существенно зависит от набег фазы волн внутри призм Δ . Для каждого значения Δ кубическое уравнение (8) имеет три корня и, следовательно, получается три различных порога генерации. Конкретные проведенные расчеты показали, что два из трех решений близки между собой и они больше единицы (штриховые линии на рис. 2). Для этих собственных типов колебаний наличие призм приводит к увеличению порога генерации. Одно из трех решений меньше единицы (сплошные кривые на рис. 2). Для этих типов колебаний порог генерации уменьшается и уменьшается довольно существенно. В реальных условиях в стационарном режиме следует ожидать генерации только этих типов, те типы колебаний, для которых порог повышается, генерировать не будут. Следовательно, резонатор с двумя призмами, как и резонатор с одной призмой, является селектором типов колебаний. В таком резонаторе должно быть примерно в три раза меньше устойчивых типов колебаний, чем в простом резонаторе. Наиболее существенно это свойство проявляется при малых значениях l и больших значениях g_0 .

В этом, в первую очередь, состоит преимущество составного резонатора с призмами. Его, в частности, выгодно применять когда усиление активной среды мало и коэффициенты отражения на свободных концах невелики. При этом коэффициенты отражения на границе активных стержень — призма должны быть велики, их, в частности, можно увеличить за счет обычного нанесения тонкослойных пленок. Выбирая соответствующим образом параметры призм, можно довольно существенно понизить порог генерации и одновременно изменить спектр собственных типов колебаний.

Отметим, что аналогичным образом рассчитывается порог генерации генератора с двумя призмами, но различными коэффициентами отражения на свободных торцах активных стержней R_1 и R_2 . В этом случае

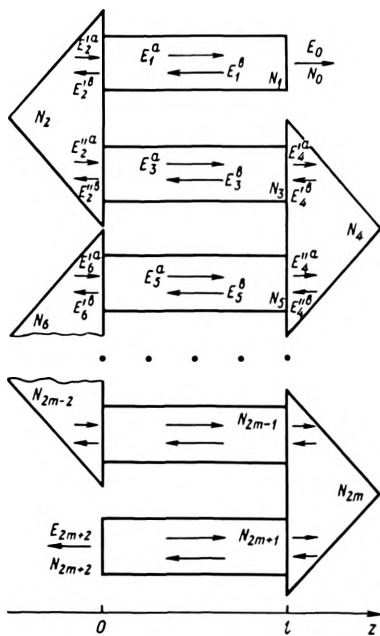


Рис. 1. Схема усложненного резонатора с m призмами полного отражения

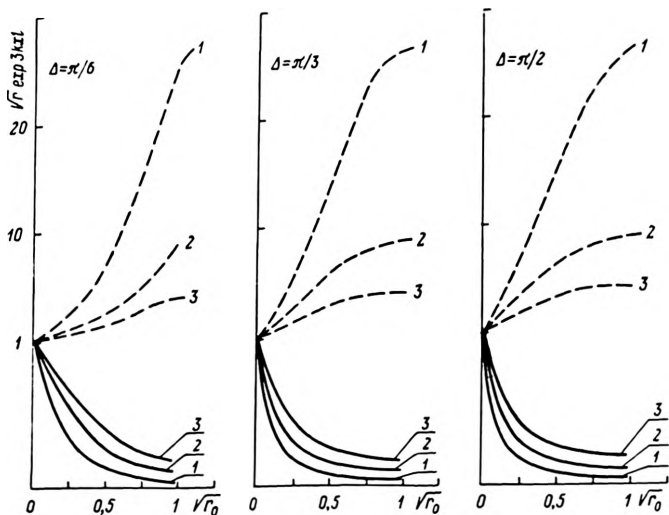


Рис. 2. Зависимость величины $\sqrt{r} \exp 3kx l$ от $\sqrt{r_0}$ для различных значений Δ ($\Delta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$) и $\sqrt{r}$:

— $\sqrt{r} = 0,037$; 2 — $\sqrt{r} = 0,114$ и $\sqrt{r} = 0,203$. Сплошные кривые соответствуют колебаниям, для которых порог уменьшается, штриховые — увеличивается

условие генерации вместо (8) записывается в виде

$$b^2 R_1 R_2 y^3 + [ab(R_1 + R_2) - a^2 R_1 R_2] y^2 + [ac(R_1 + R_2) + a^2] y - c^2 = 0. \quad (11)$$

Результаты численных расчетов в общих чертах аналогичны прежним и различаются только в деталях.

Условие генерации для сложного симметричного резонатора с тремя призмами и четырьмя активными стержнями записывается в виде уравнения четвертого порядка относительно y

$$b^3 R^2 y^4 + 2abR(b - aR) y^3 + [2R(bc - a^2) + a(b - cR^2)] ay^2 + 2ac(a + cR) y - c^3 = 0. \quad (12)$$

Расчет показывает, что и в этом случае результаты качественно не отличаются от предыдущих. Следовательно, вводя большее число призм в резонатор и подбирая соответствующим образом их параметры, можно в довольно широких пределах изменять условия генерации, в том числе понижать его порог.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Б. И., Чекалинская Ю. И. — ЖПС, 1965, т. 3, с. 325.
2. Чекалинская Ю. И., Кацева И. Р. — ЖПС, 1968, т. 9.
3. Фам Чонг Хьен, Хапалюк А. П. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1979, № 3, с. 27.
4. Методы расчета оптических квантовых генераторов, т. 1. Под ред. Б. И. Степанова. — Минск, 1966.

М. М. КОВАЛЕВ, С. П. ДРОНЬ

О КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА НЕСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Сформулируем общую задачу кусочно-линейной оптимизации на несвязной области

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f^j(x_j) \Rightarrow \min \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$x_j \in \bigcup_{t=1}^{s_j} [\underline{x}_j^t, \bar{x}_j^t], \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где

$$f^j(x_j) = c_j^t x_j + d_j^t, \quad x_j \in [\underline{x}_j^t, \bar{x}_j^t]. \quad (4)$$

Предполагается, что функции $f^j(x_j)$ однозначны, т. е., если $\bar{x}_j^{t-1} = \underline{x}_j^t$ для некоторых j и t , считаем, что в (4) $x_j \in (x_j^t, \bar{x}_j^t]$, причем в этом случае

$$c_j^{t-1} \bar{x}_j^{t-1} + d_j^{t-1} \leq c_j^t \underline{x}_j^t + d_j^t. \quad (5)$$

При $s_j = 2$, $\underline{x}_j^1 = \bar{x}_j^2 = \underline{x}_j^2 = 0$, $\bar{x}_j^1 = +\infty$ для всех j задача (1)–(4) превращается в известную задачу линейного программирования с фиксированными доплатами в целевой функции [1].

Если $c_j^1 = c_j^2 = \dots = c_j^{s_j} = c_j$, $d_j^1 = d_j^2 = \dots = d_j^{s_j} = 0$, то задача (1)–(4) превращается в почти дискретную задачу линейной оптимизации [2]. В работе [2] изучалась задача линейного программирования с разрывной целевой функцией, которая есть частный случай задачи (1), (2), (4) при

$$d_j^t = 0 \text{ для некоторых } t \text{ и } d_j^t = d_j \text{ для остальных } t \quad (6)$$

и $c_j^1 = c_j^2 = \dots = c_j^{s_j} = c_j$; в [2] автор сохраняет только предположение (6).

В работе В. Рунге и М. Шоха [3] задача (1)–(4) изучалась в предположении (5) и $c_j^t \geq 0$, $\bar{x}_j^{t-1} = \underline{x}_j^t$ для всех t, j .

Здесь мы покажем, что задача (1)–(4) эквивалентна некоторой экстремальной задаче на выборках и для ее решения применимы эффективные алгоритмы упорядочения, предложенные в [4, 5], причем из одного из них вытекает алгоритм В. Рунге и М. Шоха [3]. В качестве приложения рассмотрим алгоритмы решения задачи размещения произ-

водства и задачи стандартизации с кусочно-линейными целевыми функциями.

Рассмотрим множество выборок: $D = \{\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \pi_j \in \{1, \dots, s_j\}, j = 1, \dots, n\}$. Для $\pi \in D$ положим $H(\pi) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, x_j^{\pi_j} \leq x_j \leq \bar{x}_j^{\pi_j}\}$ и определим на $H(\pi)$ функцию $f_\pi(x) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, x_j^{\pi_j} \leq x_j \leq \bar{x}_j^{\pi_j}\}$.

Обозначим через x_π оптимальное решение в следующей задаче линейного программирования с двусторонними ограничениями:

$$\min \{f_\pi(x) \mid x \in H(\pi)\}. \quad (7)$$

и введем на D функцию $r(\pi) = f_\pi(x_\pi)$.

Теорема. Если π^* — оптимальное решение в экстремальной задаче на выборках:

$$\min \{r(\pi) \mid \pi \in D\}, \quad (8)$$

то x_{π^*} — оптимальное решение задачи (1) — (4).

Доказательство. Предположим противное, что x_{π^*} — не оптимальное решение задачи (1) — (4), т. е. существует допустимое решение x^0 такое, что

$$f(x^0) < f(x_{\pi^*}). \quad (9)$$

В силу предположения (5) для $x \in H(\pi^*)$

$$f(x_{\pi^*}) \leq f_{\pi^*}(x_{\pi^*}). \quad (10)$$

С другой стороны, так как допустимая область задачи (1) — (4) совпадает с множеством $\bigcup_{\pi \in D} H(\pi)$, существует такая выборка π^0 , что

$$f_{\pi^0}(x^0) = f(x^0). \quad (11)$$

Объединяя (9), (10) и (11) имеем $f_{\pi^0}(x_{\pi^0}) \leq f_{\pi^0}(x^0) < f_{\pi^0}(x_{\pi^0})$, что противоречит предположению об оптимальности выборки π^* в задаче (8). Теорема доказана.

Для решения задачи (8) применим алгоритм упорядочения выборок [1], основанный на методе построения последовательности планов

В. А. Емеличева [6]. Пусть $g(\pi) = \sum_{j=1}^n c_{\pi_j} x_j$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} c_j^i x_j^i + d_j^i, & \text{если } c_j^i \geq 0, \\ c_j^i x_j^i + d_j^i, & \text{если } c_j^i < 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $g(\pi)$ — линейная аппроксимация снизу на D функции $r(\pi)$, т. е. $g(\pi) \leq r(\pi)$ для всех $\pi \in D$.

Решение задачи (8) заключается в построении последовательности выборок $\{\pi^k\}$ по возрастанию миноранты $g(\pi)$ до выполнения следующего критерия оптимальности:

$$r(\pi^*) = \min_{1 \leq k \leq K} r(\pi^k) \leq g(\pi^k). \quad (12)$$

Если для некоторого k имеет место (12), то π^* — оптимальное решение задачи (8). Для вычисления значений $r(\pi^k)$ необходимо решать задачи линейного программирования (7).

Алгоритм упорядочения выборок по возрастанию миноранты изложен в [1, с. 110].

Пример. Пусть целевая функция имеет вид $\min f^1(x) + f^2(y)$, где

$$f^1(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \in [1, 2], \\ x + 2, & x \in [3, 4], \\ 2x + 1, & x \in [5, 7], \end{cases} \quad f^2(y) = \begin{cases} 0, & y \in [0, 1], \\ y + 1, & y \in [3/2, 3], \\ -2y + 5, & y \in [7/2, 5]. \end{cases}$$

Ограничения задаются следующей системой неравенств: $-x+2y \leq 3$, $x-y \leq 1$; $1 \leq x \leq 2$, или $3 \leq x \leq 4$, или $5 \leq x \leq 7$; $0 \leq y \leq 1$, или $3/2 \leq y \leq 3$, или $7/2 \leq y \leq 5$. Строим матрицу для определения миноранты

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2,5 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}.$$

1 шаг. $\pi_1 = (1, 3)$, $g(\pi_1) = -6$, $H(\pi_1) = \emptyset$.

2 шаг. $\pi_2 = (1, 1)$, $g(\pi_2) = -1$, $r(\pi_2) = -1$. Согласно критерию оптимальности (12), $(x^*, y^*) = (2, 0)$ — оптимальное решение.

В качестве приложения изложенного метода рассмотрим две задачи: задачу размещения производства и задачу стандартизации:

Задача размещения производства [1] заключается в следующем: минимизировать

$$\sum_{j=1}^n f^j(x_j) + T(x_1, \dots, x_n) \text{ при условиях } \sum_{j=1}^n x_j \geq b, x_j \in$$

$$\in \bigcup_{i=1}^{s_j} [x_j^i, \bar{x}_j^i], j = 1, \dots, n. \text{ Здесь инвестиционные затраты, связанные}$$

с размещением в пункте j предприятия мощностью x_j стандартного типа t имеют вид (4), причем можно считать, что $c_j^i \geq 0$, $d_j^i \geq 0$ и выполняются условия (5), а транспортные издержки вычисляются по правилу $T(x_1, \dots,$

$$x_n) = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \text{ при условиях } x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, b_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, x_{ij} > 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

В рассматриваемой задаче для функции $r(\pi)$ имеем следующее представление: $r(\pi) = \min \sum_{j=1}^n (c_j^{\pi j} + d_j^{\pi j}) + T(x_1, \dots, x_n)$ при условиях $\sum_{j=1}^n x_j \geq b$,

$$x_j \in [x_j^{\pi j}, \bar{x}_j^{\pi j}], j = 1, \dots, n, \text{ или, учитывая, что } x_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} \text{ получаем}$$

$$r(\pi) = \sum_{j=1}^n d_j^{\pi j} + \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_j^{\pi j} + t_{ij}) x_{ij}; \quad (13)$$

$$x_j^{\pi j} \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \bar{x}_j^{\pi j}, \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i, x_{ij} \geq 0, \quad (14)$$

т. е. для вычисления $r(\pi)$ на элементах последовательности решаем открытые транспортные задачи (13) — (14).

Слагаемые миноранты можно определить по правилу $c_{ij} = c_j^i x_j^i + d_j^i + T_{ij}$, где оценки T_{ij} транспортных слагаемых вычисляются по одному из следующих правил (см. [1], с. 100)

$$T_{ij} = \begin{cases} T(b, \dots, b, \bar{x}_j^i, b, \dots, b) - T(b, \dots, b) \\ T(x_1^+, \dots, x_{j-1}^+, \bar{x}_j^i, x_{j+1}^+, \dots, x_n^+) - T(x_1^+, \dots, x_n^+). \end{cases}$$

В задаче стандартизации [1] с кусочно-линейным критерием необходимо:

$$\min \sum_{j=1}^n f^j(x_j) \quad (15)$$

при условиях

$$x_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}, j = 1, \dots, n, \quad (16)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_{ij}, i = 1, \dots, m, \quad (17)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (18)$$

$$\delta_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где $\|\delta_{ij}\|$ — заданная матрица заменяемости изделий, функции затрат $f'(x')$ имеют вид (4).

В задаче (15)–(18) функция $r(\pi)$ имеет вид:

$$r(\pi) = \min \sum_{j=1}^n \left(c_j^{\pi j} \sum_{i=1}^m x_{ij} + d_j^{\pi j} \right)$$

при условиях (17)–(19) и

$$\underline{x}_j^{\pi j} \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \bar{x}_j^{\pi j}, j = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Следовательно, для вычисления $r(\pi')$ решаем открытые транспортные задачи со специальной функцией и запрещенными клетками:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j^{\pi j} x_{ij}$$

при условиях (17)–(19), (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. — Минск, 1977, с. 191.
2. Лейтен А. К. — Труды ВЦ Тартусского университета, вып. 22, 1974, с. 47; вып. 29, с. 37; вып. 31, с. 36.
3. Рунге В., Шох М. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1978, № 2, с. 7.
4. Емеличев В. А., Ковалев М. М. — Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1972, № 1, с. 65.
5. Kovalev M., Girlich E. — Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization, 1977, B. 8, № 1, S. 89.
6. Емеличев В. А. — Кибернетика, 1971, тт. I, II, № 6, с. 50; 1972, № 2, с. 17.

Поступила в редакцию
16.03.78.

Кафедра математического
обеспечения АСУ

УДК 62-50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, Ю. МАМРИЛЛА

К УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть имеется система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

где x — n -вектор; u — r -вектор; $t \in T = [t_0, t_1]$.

Одним из важных вопросов теории управляемости является нахождение необходимых условий управляемости, выраженных через параметры системы [1–3].

Хорошо известный критерий управляемости [2, 4] состоит в том, чтобы для каждого g , $\|g\| \neq 0$, имело место соотношение

$$g'F(t, t)B(t) \neq 0, t \in T. \quad (2)$$

Цель настоящей статьи: получить необходимое и достаточное условие управляемости системы (1) через параметры $A(t)$, $B(t)$.

1. Пусть матричная функция $A(t)$ интегрируема на T , причем $\|A(t)\| < a$, функция $B(t)$ непрерывна на T : выполнено условие Лаппо-Данилевского (матрица $A(t)$ коммутирует со своим интегралом). Тогда имеет место

Теорема. Система (1) управляема тогда и только тогда, когда существует

вуют числа $h_i \leq 0$ ($h_i \neq h_s$, $s \neq i$), $t_1 - h_i \in T$, $i = \overline{1, n}$, для которых выполняется условие

$$\text{rank} \left[\left[\beta_1^i E + \beta_2^i \int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \beta_n^i \left(\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] \times \right. \\ \left. \times B(t_1 - h_i), i = \overline{1, n} \right] = n, \quad (3)$$

где β_j^i , $j = \overline{1, n}$ — суммы определенных сходящихся численных рядов, члены которых выражаются через определенные интегралы от элементов матрицы $A(t)$, t_1 , h_i .

Доказательство. Достаточность. Допустим противное: условие (3) выполняется, но система (1) неуправляема. Значит, для $t = t_1$ и некоторых x_0, x_1 не найдется управления $u(t)$, $t \in T$ такого, что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. На языке неявного критерия (2) это означает, что существует вектор $\bar{g}$, $\bar{g} \neq 0$, такой, что

$$\bar{g}' F(t_1, t) B(t) \equiv 0, t \in T, \quad (4)$$

где матричная функция $F(t_1, t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial F(t_1, t)}{\partial t} = -F(t_1, t) A(t), F(t_1, t_1) = E. \quad (5)$$

Решением задачи (5) является функция $F(t_1, t) = \exp \int_t^{t_1} A(\tau) d\tau$. Следовательно, условие (4) можно записать

$$\bar{g}' \exp \int_t^{t_1} A(\tau) d\tau B(t) \equiv 0, t \in T,$$

или в виде

$$\bar{g}' \left[E + \int_t^{t_1} A(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_t^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^2 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_t^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} + \dots \right] B(t) \equiv 0, t \in T. \quad (6)$$

Так как $\|A(t)\| \leq a$, $t \in T$ то, очевидно, матричный ряд (6) сходится абсолютно и равномерно на каждом $[t_1 - h_i, t_1]$. Подставим в (6) на место t поочередно числа $t_1 - h_1, \dots, t_1 - h_n$, которые выбраны произвольно из отрезка T . При $t = t_1 - h_i$ из (6) следует

$$\bar{g}' \left[E + \int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} + \dots \right] B(t_1 - h_i) = 0. \quad (7)$$

Используя теорему Кэли—Гамильтона, из (7) получаем

$$\bar{g}' \left[\gamma_1^i E + \gamma_2^i \int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \gamma_n^i \left(\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] B(t_1 - h_i) = 0, \quad (8)$$

где через γ_j^i обозначены сходящиеся численные ряды, зависящие от t_1, h_i и определенных интегралов элементов $A(t)$. Обозначим суммы этих рядов через β_j^i , $j = \overline{1, n}$. На основе последнего можно (8) записать в виде

$$\bar{g}' \left[\beta_1^i E + \beta_2^i \int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \beta_n^i \left(\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] B(t_1 - h_i) = 0. \quad (8')$$

Проводя такой же процесс при $t = t_1 - h_2, \dots, t = t_1 - h_n$, получаем вместе с (8') уравнения

$$\bar{g}' \left[\beta_1 E + \beta_2 \int_{t_1-h_1}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \beta_n \left(\int_{t_1-h_n}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] B(t_1-h_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Из предположения $\bar{g} \neq 0$ вытекает, что ранг матрицы в (3) меньше n . Полученное противоречие доказывает достаточность условия (3) для управляемости системы (1).

Необходимость. Предположим, что (2) выполняется, но ранг матрицы (3) меньше n . Последнее означает, что существует такой ненулевой n -вектор $\bar{g}$, что

$$\bar{g}' \left[\beta_1 E + \beta_2 \int_{t_1-h_1}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \beta_n \left(\int_{t_1-h_n}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] B(t_1-h_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Так как числа t_1-h_i выбраны произвольно из $\{t_0, t_1\}$, то равенства (9) имеют место лишь в случае, если $\bar{g}' F(t_1, t) B(t) = 0, t \in T$. Итак, получено противоречие с предположением (2). Необходимость условия (3) доказана.

2. Для эффективной проверки критерия (3) воспользуемся формулой [5]:

$$f(A) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{C(\lambda)}{\psi^k(\lambda)} f(\lambda) \right]_{\lambda=\lambda_k}^{m_k-1},$$

$$\text{где } \psi^k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} = \frac{(\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\lambda-\lambda_s)^{m_s}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} = \frac{|\lambda E - A|}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}},$$

$(m_1+m_2+\dots+m_s=n)$; $C(\lambda)$ — приведенная присоединенная матрица для $\lambda E - A$, определяемая соотношением $B(\lambda) = D_{n-1}(\lambda) C(\lambda)$, где $B(\lambda)$ — присоединенная матрица к матрице A , т. е. удовлетворяющая равенствам: $(\lambda E - A) B(\lambda) = \Delta(\lambda) E$; $B(\lambda) (\lambda E - A) = \Delta(\lambda) E$; $\Delta(\lambda) = |\lambda E - A|$ и $D_{n-1}(\lambda)$ — наибольший общий делитель всех миноров $(n-1)$ -го порядка характеристической матрицы $\lambda E - A$.

Обозначив $\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau = \Phi_i$, получаем

$$e^{\Phi_i} = \sum_{k=1}^{s_i} \frac{1}{(m_k^i-1)!} \left[\frac{C_i(\lambda)}{\psi_i^k(\lambda)} e^{\lambda} \right]_{\lambda=\lambda_k^i}^{(m_k^i-1)}, \quad (10)$$

где λ_k^i — собственные значения матрицы Φ_i , $i = \overline{1, n}$. Формулу (10) можно использовать для проверки условия (3) теоремы, которое принимает вид

$$\text{ранг} \{e^{\Phi_i} B(t-h_i), i = \overline{1, n}\} = n.$$

3. В случае, когда матрица $A(t) \equiv A$ постоянная, условие (3) теоремы можно заменить следующим:

$$\text{ранг} \{[a_0(t_1-h_i) E + a_1(t_1-h_i) h_i A + \dots + a_{n-1}(t_1-h_i) h_i^{n-1} A^{n-1}] B(t_1-h_i), i = \overline{1, n}\} = n,$$

где функции $a_0(\tau), \dots, a_{n-1}(\tau)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(\tau) &= a_0 a_{n-1}(\tau); \quad \dot{a}_1(\tau) = a_0(\tau) + a_1 a_{n-1}(\tau); \quad \dots; \\ \dot{a}_{n-1}(\tau) &= a_{n-2}(\tau) + a_{n-1} a_{n-1}(\tau) \end{aligned} \quad (11)$$

с начальными условиями

$$a_0(0) = 1, a_1(0) = 0, \dots, a_{n-1}(0) = 0. \quad (12)$$

Действительно, сделав замену независимой переменной $t_1-t=\tau$, имеем $e^{At} = a_0(\tau) E + a_1(\tau) A + \dots + a_{n-1}(\tau) A^{n-1}$. Так как выполняется условие Лапун-Данилевского, то

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(\tau) E + \dot{a}_1(\tau) A + \dot{a}_2(\tau) A^2 + \dots + \dot{a}_{n-1}(\tau) A^{n-1} &= a_0(\tau) A + a_1(\tau) A^2 + \dots + \\ &+ a_{n-1}(\tau) A^n = a_0(\tau) A + a_1(\tau) A^2 + \dots + a_{n-1}(\tau) [a_0 E + a_1 A + \dots + \end{aligned}$$

$$+a_{n-1}A^{n-1}] = a_0 a_{n-1}(\tau)E + [a_0(\tau) + a_1 a_{n-1}(\tau)]A + \dots + [a_{n-3}(\tau) + a_{n-2} a_{n-1}(\tau)]A^{n-2} + [a_{n-2}(\tau) + a_{n-1} a_{n-1}(\tau)]A^{n-1},$$

откуда, сравнивая коэффициенты при равных степенях матрицы A , получаем линейную дифференциальную систему (11) с начальными условиями (12). Постоянные $a_i, i=0, n-1$, суть коэффициенты характеристического полинома $\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_0$ матрицы A .

4. В качестве приложения рассмотрим систему (1), у которой одномерная часть приводима. Пусть $L(t)$ — преобразование Ляпунова. В этом случае исследование управляемости системы (1) эквивалентно исследованию управляемости системы

$$\dot{y} = A_1 y + L^{-1}(t) B(t) u,$$

где $A_1 = L^{-1}(t) A(t) L(t) - L^{-1}(t) \dot{L}(t)$ есть постоянная матрица.

В заключение авторы выражают благодарность Р. Ф. Габасову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Е.—Труды I Международного конгресса ИФАК по автомат. управл.—М., 1961.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением.—М., 1967.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М.—Автоматика и телемеханика, 1972, № 9.
4. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем.—Минск, 1973.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М., 1967.
6. Забелло Л. Е.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1971, № 3.
7. Забелло Л. Е.—Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 12.

Поступила в редакцию
23.03.78.

Кафедры МОУ БГУ имени В. И. Ленина и математического анализа естественного факультета университета имени Я. А. Коменского (Братислава, ЧССР)

А. А. ЛЕВАНОВ

УДК 517.966

КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследованием корректности задач оптимального управления, начиная с работы [1], занимались многие авторы (см., например, [2, 3]). В отличие от этих работ в предлагаемой заметке исследуется корректность задачи оптимального управления со свободным правым концом.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — норма в R^n ; $\rho(x, G) = \inf_{y \in G} \|x - y\|$ — расстояние от точки x до множества G ; $\alpha(F, G) = \max_{x \in F} (\sup_{y \in G} \rho(x, G), \sup_{y \in G} \rho(y, F))$ — отклонение множеств F и G ; $C_n(T)$ — банахово пространство непрерывных отображений $x(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x(\cdot)\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|$; $L_n^1(T)$ — банахово пространство измеримых отображений $x(\cdot): T \rightarrow R^n$ таких, что $\int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\| dt < \infty$

с нормой $\|x(\cdot)\| = \int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\| dt$. Везде в заметке измеримость и суммируемость понимаются в смысле Лебега.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{X} \in F(t, x). \quad (1)$$

В соотношении (1) $x \in R^n, t \in T, F$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $(t, x) \in T \times R^n$ некоторое множество $F(t, x) \in R^n$. Будем предполагать, что отображение F удовлетворяет условиям:

- i) $F(t, x)$ — непустое замкнутое множество при всех $(t, x) \in T \times R^n$;
- ii) F измеримо по t при каждом $x \in R^n$ [4];
- iii) для любого $N > 0$ существует функция $k(\cdot) \in L^1_+(T)$ такая, что

$$\alpha(F(t, x'), F(t, x'')) \leq k(t) \|x' - x''\|$$

при всех $t \in T$, $x', x'', \|x'\| \leq N, \|x''\| \leq N$.

Решением дифференциального включения (1) считаем всякую абсолютно непрерывную функцию $t \rightarrow x(t)$, определенную на некотором отрезке $[t^*, t^{**}] \subset T$ и удовлетворяющую соотношению $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ почти при всех $t \in [t^*, t^{**}]$.

Решение задачи

$$\dot{x} \in F(t, x), x(t_0) \in G_0, G_0 \subset R^n, \quad (2)$$

назовем допустимым, если оно определено на T . Пусть D — множество допустимых решений.

Пусть $\varphi: C_n(T) \times L_n^1(T) \rightarrow R$ — непрерывный функционал, удовлетворяющий условию: для любой постоянной $A > 0$ и любой функции $h(\cdot) \in L_1^1(T)$, $h(t) \geq 0$ существует постоянная $B > 0$ такая, что $|\varphi(x(\cdot), y(\cdot))| \leq B$ для всех $(x(\cdot), y(\cdot))$, $\|x(\cdot)\| \leq A$, $\|y(\cdot)\| \leq h(t)$, $t \in T$. Будем рассматривать следующую задачу оптимального управления: Найти

$$M = \inf_{x(\cdot) \in D} \varphi(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)).$$

M назовем значением задачи $P = \{\varphi, F, G_0\}$. Наряду с задачей P рассмотрим задачу $\hat{P} = \{\hat{\varphi}, \hat{F}, \hat{G}_0\}$, параметры которой удовлетворяют тем же условиям, что и параметры задачи P . Ее значение будем обозначать $\hat{M}$. Будем говорить, что задача $\hat{P}$ лежит в δ -окрестности задачи P (писать $\hat{P} \in V_\delta(P)$), если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq \delta$; $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq \delta$ для всех $(t, x) \in T \times R^n$; $|\varphi(x(\cdot), y(\cdot)) - \hat{\varphi}(x(\cdot), y(\cdot))| \leq \delta$ для всех $(x(\cdot), y(\cdot)) \in C_n(T) \times L_n^1(T)$.

Задачу P назовем корректной, если $-\infty < M < +\infty$ и для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|M - \hat{M}| \leq \epsilon$ для всех задач $\hat{P} \in V_\delta(P)$.

Лемма 1. Пусть многозначное отображение F удовлетворяет условиям $i)$, $ii)$ и, кроме того, оно непрерывно по x почти при каждом фиксированном $t \in T$; $x(\cdot) \in C_n(T)$. Тогда отображение $t \rightarrow F(t, x(t))$ измеримо и замкнуто.

Доказательство. Замкнутость отображения $t \rightarrow F(t, x(t))$ очевидна. Докажем его измеримость. Разобьем отрезок $[t_0, t_1]$ на m равных частей точками $t^k, k=0, \dots, m$ ($t_0=t^0, t_1=t^m$). Пусть $x_k=x(t^k)$. Рассмотрим многозначное отображение

$$t \rightarrow \Phi_m(t) = \begin{cases} F(t, x_0), & t \in [t^0, t^1], \\ . & . & . & . & . & . \\ F(t, x_{m-1}), & t \in [t^{m-1}, t^m]. \end{cases}$$

Согласно теореме 2 [4, с. 342], функция $t \rightarrow \rho(y, \Phi_m(t))$ измерима при любых $y \in \mathbb{R}^n$ и $m=1, 2, \dots$. Легко видеть, что почти при всех $t \in T$ $\rho(y, \Phi_m(t)) \rightarrow \rho(y, \Phi(t, x(t)))$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому функция $t \rightarrow \rho(y, \Phi(t, x(t)))$ измерима при любом $y \in \mathbb{R}^n$. Теперь из теоремы 2 [4] следует требуемое утверждение.

В работе [6] лемма 1 доказана при несколько более жестких условиях.

Лемма 2. Пусть многозначное отображение F удовлетворяет условиям леммы 1; $f(\cdot): T \rightarrow R^n$ — измеримая функция; $x(\cdot) \in C_n(T)$; $\Phi(t) = \{x \in F(t, x(t)) \mid \rho(x, f(t)) = \rho(f(t), F(t, x(t)))\}$. Тогда существует измеримая функция $u(\cdot): T \rightarrow R^n$ такая, что $u(t) \in F(t, x(t))$ и $\rho(f(t), u(t)) = \rho(f(t), F(t, x(t)))$, $t \in T$.

Доказательство. В силу теоремы 2 [4] и леммы 1 при любом

$y \in R^n$ функции $t \rightarrow \rho(y, f(t))$, $t \rightarrow \rho(y, F(t, x(t)))$ измеримы на T . Функция $(t, y) = \rho(F(t, x(t)), y)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Согласно следствию к предложению 8 [4, с. 345], функция $t \rightarrow \rho(f(t), F(t, x(t)))$ измерима. Из следствия 2 к теореме 3 [4, с. 347] следует измеримость отображения $t \rightarrow \Phi(t)$. Теперь существование требуемой функции $u(\cdot)$ следует из теоремы 1 [4, с. 341].

Пусть $\bar{x}(\cdot) : [t^*, t^{**}] \rightarrow R^n$ — решение задачи

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t^*) = x_0, \quad (3)$$

$h = \|\bar{x}(\cdot)\|$, и пусть функция $k(\cdot)$, участвующая в формулировке условия iii), соответствует числу $h+1$.

Предложение 1. Пусть отображение $\hat{F}$ удовлетворяет условиям i) — iii); $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r$ при всех $(t, x) \in [t^*, t^{**}] \times R^n$, $\|x_0 - x_0^*\| = v < 1$. Тогда существует решение $x^*(\cdot)$ задачи $\dot{x} \in \hat{F}(t, x)$, $x(t^*) = x_0^*$, такое, что $\|\bar{x}(t) - x^*(t)\| \leq \xi(t)$, $\|\bar{x}(t) - \hat{x}^*(t)\| \leq k(t)\xi(t) + r$

почти при всех $t \in [t^*, t^{**}]$ таких, что $\xi(t) \leq 1$, здесь $\xi(t) = v \cdot e^{\int_{t^*}^t k(s) ds} +$
 $+ r \int_{t^*}^t e^{\int_{t^*}^s k(s) ds} d\tau.$

Доказательство. Так как $\bar{x}(\cdot)$ — решение дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$, то $\rho(\bar{x}(t), \hat{F}(t, \bar{x}(t))) \leq r$ почти при всех $t \in [t^*, t^{**}]$.

Построим последовательность $x_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots$,

$$x_0(t) = \bar{x}(t), \quad x_{i+1}(t) = x_0^* + \int_{t^*}^t u_i(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1, \dots,$$

где $u_i(\cdot)$ такая измеримая функция, что почти при всех t

$$u_i(t) \in \hat{F}(t, x_i(t)), \quad \|u_i(t) - \dot{x}_i(t)\| = \rho(\dot{x}_i(t), \hat{F}(t, x_i(t))).$$

В силу леммы 2 такая функция $u_i(\cdot)$ существует.

Дальнейшее доказательство предложения 1 является повторением доказательства теоремы 1 из работы [5].

Следствие. Пусть многозначное отображение F удовлетворяет условиям i) — iii); существует функция $m(\cdot) \in L_1[t^*, t^{**}]$ такая, что $\rho(0, F(t, x_0)) \leq m(t)$, $t \in [t^*, t^{**}]$. Тогда существует решение задачи (3) на отрезке $[t^*, t^{**}]$ или на его части.

Это утверждение устанавливается так же, как предложение 1 и следствие к теореме 1 [5].

Пусть $[L]_\epsilon$ — замкнутая ϵ -окрестность множества L ; Ω — множество решений задачи (2), а $\hat{\Omega}$ — множество решений задачи

$$\dot{x} \in \hat{F}(t, x), \quad x(t_0) \in \hat{G}_0; \quad (4)$$

$$P_t = \{x \in R^n \mid x = x(t), x(\cdot) \in \Omega\}, \quad \hat{P}_t = \{x \in R^n \mid x = x(t), x(\cdot) \in \hat{\Omega}\}.$$

Предложение 2. Пусть отображения $F, \hat{F}$ удовлетворяют условиям i) — iii); все решения задачи (2) продолжимы до точки t_1 ; G_0 — компакт в R^n . Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что

$$\alpha(\Omega, \hat{\Omega}) \leq \epsilon, \quad (5)$$

если

$$\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq r, \quad \alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r \text{ при всех } (t, x) \in T \times R^n. \quad (6)$$

Доказательство. Существует компакт Π в R^n такой, что

$$\Pi_t \subset \Pi \text{ при всех } t \in T. \quad (7)$$

В противном случае существовало бы решение задачи (2), не продолжимое до точки t_1 .

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любого решения $x(\cdot): T \rightarrow R^n$ задачи (2), согласно предложению 1, найдется решение $\hat{x}(\cdot): T \rightarrow R^n$ задачи (4), удовлетворяющее условию

$$\|\hat{x}(\cdot) - x(\cdot)\| \leq \varepsilon, \quad (8)$$

если выполнено условие (6) с достаточно малой постоянной $r = r_1 > 0$, поэтому

$$\{\hat{\Omega}\}_\varepsilon \supset \Omega, \quad (9)$$

если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq r_1$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r_1$ при всех $(t, x) \in T \times R^n$.

Пусть σ — некоторая положительная постоянная. Существует число r_2 , $0 < r_2 \leq r_1$ такое, что

$$\hat{\Pi}_t \subset [\Pi]_\sigma, \quad (10)$$

если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq r_2$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r_2$, $(t, x) \in T \times R^n$. Предположим, что включение (10) не имеет места, т. е. для любого $\omega > 0$ существует решение $x_\omega(\cdot)$ задачи (4), удовлетворяющее условиям $x_\omega(t) \in [\Pi]_\sigma$, $t \in [t_0, t_\omega]$, $x(t_\omega) \in \partial[\Pi]_\sigma$ ($\partial[\Pi]_\sigma$ — граница компакта $[\Pi]_\sigma$), хотя $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq \omega$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq \omega$, $(t, x) \in T \times R^n$. Тогда, согласно предложению 1, для некоторого $\bar{\omega} > 0$ найдется решение задачи (2) $x(\cdot): [t_0, t_-] \rightarrow R^n$ такое, что $\|x_\omega(t_-) - x(t_-)\| \leq \frac{\sigma}{2}$. Отсюда следует $x(t_-) \notin \Pi$, что противоречит выбору компакта Π .

Согласно предложению 1, для любого решения $\hat{x}(\cdot): T \rightarrow R^n$ задачи (4) существует решение задачи (2) $x(\cdot): T \rightarrow R^n$, удовлетворяющее неравенству (8), если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq r$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r$, где r достаточно малая положительная постоянная. Значит, при выполнении условия (6),

$$\{\Omega\}_r \supset \hat{\Omega}. \quad (11)$$

Из соотношений (9), (11) следует (5).

Если условие iii) не выполнено, то, как показывает пример $\dot{x} \in F(x)$, $x(0) = 0$, $T = [0, 1]$, где множество $F(x)$ при каждом $x \in R$ состоит из одной точки $x^{\frac{2}{3}}$, предложение 2 может не иметь места.

Будем говорить, что выполнено условие а), если для любого $\eta > 0$ существует функция $h(\cdot) \in L_1^+(T)$ такая, что $\sup_{\|x\| < \eta} \sup_{y \in F(t, x)} \rho(0, y) \leq h(t)$ при всех $t \in T$.

Теорема. Пусть многозначное отображение F удовлетворяет условиям i) — iii), а); G_0 — компакт; каждое решение задачи (2) продолжимо до точки t_1 . Тогда задача P корректна.

Доказательство. При сделанных предположениях допустимые решения существуют, и множество Π_t при всех $t \in T$ принадлежит некоторому компактному. Отсюда и из условия а) следует, что $-\infty < M < +\infty$. Из предложения 2 имеем $-\infty < \hat{M} < +\infty$ для всех задач P из некоторой δ -окрестности задачи P .

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $(x_{\hat{P}}, \hat{p}(\cdot))$ — минимизирующая последовательность в задаче $\hat{P} \in V_\delta(P)$. Существует номер $i(\hat{P})$ (вообще говоря, зависящий от $\hat{P}$) такой, что

$$|\hat{M} - \Phi(x_{i(\hat{P})}(\cdot), \hat{x}_{i(\hat{P})}(\cdot))| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Если задача $\hat{P}$ лежит в некоторой достаточно малой δ_1 -окрестности ($0 < \delta_1 \leq \delta$) задачи P , то

$$|\varphi(y(\cdot), z(\cdot)) - \hat{\varphi}(x_{i(\hat{P})}(\cdot), \dot{x}_{i(\hat{P})}(\cdot))| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (13)$$

для всех $(y(\cdot), z(\cdot)) \in C_n(T) \times L_n^1(T)$, $\|y(\cdot) - x_{i(\hat{P})}(\cdot)\| \leq \gamma$, $\|z(\cdot) - \dot{x}_{i(\hat{P})}(\cdot)\| \leq \gamma$, где γ — достаточно малая положительная постоянная. Согласно предложению 1, существует δ_2 , $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, такое, что для каждого решения $x_{i(\hat{P})}(\cdot)$ можно найти решение $\bar{x}_i(\cdot): T \rightarrow R^n$ задачи (2), удовлетворяющее условиям

$$\|x_{i(\hat{P})}(\cdot) - \bar{x}_i(\cdot)\| \leq \gamma, \|\dot{x}_{i(\hat{P})}(\cdot) - \dot{\bar{x}}_i(\cdot)\| \leq \gamma. \quad (14)$$

если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq \delta_2$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq \delta_2$ при всех $(t, x) \in T \times R^n$. Из (12) — (14) получаем

$$M - \hat{M} \leq \varepsilon \quad (15)$$

для любой задачи $\hat{P} \in V_{\delta_2}(P)$.

Аналогично доказывается, что

$$\hat{M} - M \leq \varepsilon \quad (16)$$

для любой задачи $\hat{P}$, лежащей в некоторой достаточно малой δ_3 -окрестности ($0 < \delta_3 \leq \delta_2$) задачи P . Из неравенств (15), (16) следует, что $|\hat{M} - M| \leq \varepsilon$ для всех задач $\hat{P} \in V_{\delta_3}(P)$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Найти нижнюю грань x функционала $\varphi(x(\cdot)) = g(x(t_1))$ на множестве абсолютно непрерывных функций $x(\cdot): T \rightarrow R^n$, удовлетворяющих условиям $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ почти при всех $t \in T$, $x(t_0) \in G_0$, G_0 — компакт в R^n , $u(t) \in Q(t, x(t))$, $u(\cdot)$ — измеримая на T функция.

Предположим, что функция $f: T \times R^n \times R^r \rightarrow R^n$ измерима по t при каждом (x, u) и непрерывна по (x, u) при каждом t ; многозначное отображение $Q: T \times R^n \rightarrow R^r$ измеримо по t при каждом x и непрерывно по x при каждом t ; множество $Q(t, x)$ непусто и замкнуто при всех (t, x) ; $g: R^n \rightarrow R$ — непрерывная функция; $(t, x) \rightarrow F_1(t, x) = \{y \in R^n | y = f(t, x, u), u \in Q(t, x)\}$. Значение M задачи $P = \{\varphi, F_1, G_0\}$ равно x .

Таким образом, рассматриваемая в замечании задача оптимального управления будет корректной, если многозначное отображение F_1 удовлетворяет условиям теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Ф. М. — Изв. вузов СССР. Математика, 1958, № 4, с. 113.
2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М., 1972.
3. Петров Н. Н. — Вестн. ЛГУ, 1974, № 7, с. 60.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М., 1974.
5. Филиппов А. Ф. — Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1967, № 3, с. 16.
6. Antosiewicz H. A., Cellina A. — J. Different. Equat., 1975, v. 19, № 2.
7. Pianigiani Giulio — J. Different. Equat., 1977, v. 25, № 1.

Поступила в редакцию
07.06.78.

Кафедра высшей математики ФМП

П. Т. КОЗЕЛ

УДК 512.25

О ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При решении симплекс-методом вырожденных задач линейного программирования возможно закливание; способы устранения его впервые получены Данцигом и Чарнсом [1]. Большое внимание вопросам вырожденности уделяется в монографиях [2 (1961), 3 (1963)]. Ссылки на эти работы в связи с вопросами вырожденности содержатся в различных пособиях по математическому программированию [2 (1964), 3 (1969), 4—6].

В данной заметке показывается, что в [2, 3] вырожденные задачи рассмотрены недостаточно строго, дается также простое обоснование метода Чарнса для устранения заикливания.

1. Рассмотрим вырожденную задачу

$$z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min \quad (1)$$

при условиях

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = \overline{1, n}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $\text{ранг}(A_1 \dots A_n) = m < n$. Пусть

$$B(\epsilon) = B + \epsilon A_1 + \dots + \epsilon^n A_n, \quad \epsilon > 0, \quad (3)$$

либо

$$B(\epsilon) = B + \epsilon R_1 + \dots + \epsilon^m R_m, \quad \epsilon > 0, \quad (4)$$

где $R_1, \dots, R_m$ — произвольная линейно-независимая система m -мерных векторов.

Для обоснования конечности симплекс-метода для вырожденной задачи (1), (2) в [2] рассматривается ϵ -задача

$$z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min \quad (5)$$

при условиях

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B(\epsilon), \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где в [2] $B(\epsilon)$ вида (3), а в [3] вида (4). Для ϵ -задачи в [2 (1961), с. 208], а в [3 (1963), с. 259] формулируется утверждение: «существует такое $\epsilon_1 > 0$, что ϵ -задача (5), (6) при $0 < \epsilon < \epsilon_1$ является невырожденной». Для ϵ -задачи с $B(\epsilon)$ вида (4), рассматриваемой в [3], такое утверждение не имеет места. Как видно из примеров, векторы $R_1, \dots, R_m$ не могут быть произвольными. Действительно, система $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, 3}$ совместна и обладает вырожденными планами, например, $(0, 1, 0)$.

Однако соответствующая ϵ -система с $B(\epsilon)$ вида (4), где $R_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon \\ 1 + \epsilon^2 \end{pmatrix}$, $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, 3}$, несовместна при любом $\epsilon > 0$. Если задача (1), (2) с двусторонними ограничениями на переменные, то векторы $R_1, \dots, R_m$ также не могут быть произвольными. Это видно, если в приведенном примере вместо $x_j \geq 0$ положим $0 \leq x_j \leq 1$, $j = \overline{1, 3}$. В [2], где рассматривается ϵ -задача с $B(\epsilon)$ вида (3), доказательство утверждения также является неполным, нет обоснования совместности ϵ -системы. Здесь этот пробел легко устраним, если задача (1), (2) обладает опорным планом, базис которого составляют векторы $A_1, \dots, A_m$. Но в [2] такого предположения не делается.

2. Приведем обоснование метода Чарнса для устранения заикливания. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$ — опорный план задачи (1), (2). Предположим (это не является ограничением общности), что базис плана X состоит из первых m векторов $A_1, \dots, A_m$. Тогда справедливо равенство

$$x_1 A_1 + \dots + x_m A_m = B(x_i \geq 0, i = \overline{1, m}). \quad (7)$$

Рассмотрим ϵ -задачу (5), (6), где $B(\epsilon)$ вида (3).

Лемма 1. Существует $\epsilon_1 > 0$ такое, что базис плана X является базисом невырожденного плана $X(\epsilon) = (x_1(\epsilon), \dots, x_m(\epsilon), 0, \dots, 0)$ ϵ -задачи при любом $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$.

Доказательство. Из $x_1(\epsilon) A_1 + \dots + x_m(\epsilon) A_m = B(\epsilon)$ имеем

$$x_i(\epsilon) = x_i + \epsilon^i + \epsilon^{m+1} x_{i+m+1} + \dots + \epsilon^n x_{i+n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где x_i — коэффициенты равенства (7), x_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ — коэффициенты равенств $x_{1j} A_1 + \dots + x_{mj} A_m = A_j$. Пусть $0 < \epsilon < 1$, $\alpha = \max |x_{ij}|$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{m+1, n}$, тогда $x_i(\epsilon) \geq x_i + \epsilon^i - \alpha \epsilon^{m+1} \frac{1 - \epsilon^{n-m}}{1 - \epsilon} > x_i + \epsilon^i - \frac{\alpha \epsilon^{i+1}}{1 - \epsilon} =$

$= x_i + e^i \left(1 - \frac{ae}{1-e}\right)$. Если $e_1 < \frac{1}{1+a}$, то $x_i(e) > 0$, $i = \overline{1, m}$, при любом $0 < e \leq e_1$.

Лемма 2. Пусть решение ϵ -задачи симплекс-методом начинается с построенного в лемме 1 плана $X(e)$. Существует $e_2 > 0$ ($e_2 \leq e_1$), что при любом $0 < e \leq e_2$ за конечное число арифметических действий найдем оптимальный план ϵ -задачи, либо установим, что оптимального плана не существует.

Доказательство. Покажем, что при достаточно малых $e > 0$ в процессе решения будут получаться невырожденные планы, а невырожденных планов при любом e не больше, чем C_n^m . Предположим, что уже получен план $Y(e)$ с базисом $A_{s_1}, \dots, A_{s_m}$, невырожденный при $0 < e \leq e'$. Базисные координаты его будут выражаться формулами вида (8)

$$y_i(e) = y_i + e x_{i1} + \dots + e^n x_{in}, \quad i \in I = \{s_1, \dots, s_m\}, \quad (9)$$

где y_i, x_{ij} — коэффициенты равенств

$$\sum_{i \in I} y_i A_i = B, \quad \sum_{i \in I} x_{ij} A_i = A_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Если относительная оценка плана $Y(e)$ $z_k - c_k > 0$ и не все $x_{ik} \leq 0$, то переходим к новому опорному плану $Y'(e)$, координаты которого равны $y'_i(e) = y_i(e) - \frac{y_i(e)}{x_{ik}} x_{ik}$, $i \neq k$, $y'_k(e) = \frac{y_k(e)}{x_{ik}}$, где $\frac{y_i(e)}{x_{ik}} = \min_{x_{ik} > 0} \frac{y_i(e)}{x_{ik}}$ [7, гл. 4, теорема 1]. Покажем, что при достаточно малых $e > 0$ минимум отношений $\frac{y_i(e)}{x_{ik}}$, $x_{ik} > 0$, будет достигаться только для одного индекса, откуда будет следовать невырожденность плана $Y'(e)$. Достаточно показать, что эти отношения попарно различны. Из (9) легко видеть, что если $\frac{y_i}{x_{ik}} < \frac{y_s}{x_{sk}}$ или $\frac{y_i}{x_{ik}} = \frac{y_s}{x_{sk}}$, $\frac{x_{ij}}{x_{ik}} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}}$, $j = \overline{1, t-1}, t \leq n$, но $\frac{x_{ij}}{x_{ik}} < \frac{x_{sj}}{x_{sk}}$, то $\frac{y_i(e)}{x_{ik}} < \frac{y_s(e)}{x_{sk}}$ при достаточно малых $e > 0$. Осталось показать, что равенство $\frac{x_{ij}}{x_{ik}} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}}$, $j = \overline{1, n}$, невозможно. Из этого равенства следует, что координаты x_{ij} и x_{sj}

векторов $X_j = \begin{pmatrix} x_{s1j} \\ \vdots \\ x_{smj} \end{pmatrix}$, $j = \overline{1, n}$, пропорциональны, однако, из (10) ранг

$(X_1 \dots X_n) = \text{ранг}(A_1 \dots A_n) = m$. Таким образом, существует $e'' \leq e'$, что $Y'(e)$ — невырожденный план для $0 < e \leq e''$. При доказательстве леммы 2 получено правило определения индекса k , для которого достигается минимум отношений $\frac{y_i(e)}{x_{ik}}$, $x_{ik} > 0$, для достаточно малых $e > 0$. В последовательности $\min_{x_{ik} > 0} \frac{y_i}{x_{ik}}$, $\min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{ij}}{x_{ik}}$, $j = \overline{1, n}$, где каждое отношение рассматривается для индексов i , дающих минимум предыдущему отношению, по меньшей мере, один из минимумов достигается только для одного индекса; k -индекс, при котором достигается первый из таких минимумов.

Отметим, что вектор с индексом k удаляется из базиса при переходе от плана $Y(e)$ к плану $Y'(e)$.

Последовательности планов, получаемых при решении ϵ -задачи соответствует последовательность опорных планов исходной задачи: из (9) и (10) следует, что если $Y(e)$ — невырожденный план для $0 < e \leq e''$, то $y_i \geq 0$, $i \in I$, являются базисными координатами плана Y задачи (1), (2). Оптимальному плану ϵ -задачи будет соответствовать оптимальный план задачи (1), (2), так как их относительные оценки будут совпадать. Если ϵ -задача не обладает оптимальным планом, то для некоторого невырожденного плана $Y(e)$ $z_k - c_k > 0$ и все $x_{ik} \leq 0$. Это будет иметь место и для соответствующего плана Y задачи (1), (2). Следовательно, она также не обладает оптимальным планом. Ясно, что последовательность планов,

которая дает решение исходной задачи, можно получить независимо от ε -задачи. Достаточно при решении задачи (1), (2) индекс l удаляемого из базиса вектора при переходе от одного опорного плана к другому определять с помощью правила, полученного для ε -задачи при доказательстве леммы 2. Такой выбор индекса l устраняет возможность заклинивания.

В заключение отметим, что нуждается также в исправлении в [8, с. 24] доказательство предложения 2 о вырожденных задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данциг Дж. Линейное программирование.— М., 1966, с. 228.
2. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования.— М., 1961, 1964.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование.— М., 1963, 1969.
4. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М., 1975, с. 101.
5. Абрамов Л. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование.— Л., 1976, с. 118.
6. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование.— М., 1964, с. 71.
7. Гасс С. Линейное программирование.— М., 1964.
8. Козал П. Т. Симплекс-метод.— Минск, 1968.

Поступила в редакцию
03.07.78.

Кафедра высшей алгебры

УДК 517.968

Ф. В. ЧУМАКОВ, И. Л. ВАСИЛЬЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ НА ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

В последние два десятилетия решено большое число интегральных уравнений, являющихся обобщением в различных направлениях хорошо известного классического уравнения Абеля [1—6]. Во всех случаях, кроме [5], контуром интегрирования является разомкнутая дуга. В работе [5] рассматриваются некоторые уравнения со степенным ядром на замкнутом контуре. В частности, дается решение в замкнутой форме уравнения первого рода

$$\int_{\varepsilon}^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^2} + k \int_t^{\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^2} = f(t) \quad (1)$$

в случае $k \neq 1$, $e^{-2\pi ai}$. В настоящей работе дается в квадратурах решение уравнения (1) при $k = 1$, $e^{-2\pi ai}$.

1. Вспомогательные утверждения. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения, легко получаемые путем небольшого изменения теоремы об аналитичности интеграла по параметру [7, с. 62], [1, с. 17].

Теорема А. Пусть однозначная функция $\varphi^+(z, s)$ аналитична по z в области D^+ , ограниченной простым замкнутым контуром, и непрерывна по s на некоторой спрямляемой кривой Γ . Если функция $f(s)$ непрерывна на Γ за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка, то функция $F^+(z) = \int_{\Gamma} \varphi^+(z, s) f(s) ds$ является аналитической в области D^+ .

Теорема Б. Пусть однозначная функция $\varphi^-(z, s)$ аналитична по z в области D^- , представляющей собой плоскость $\mathbb{C}$ с выброшенной областью, ограниченной простым замкнутым контуром, и непрерывна по s на некоторой спрямляемой кривой Γ . Если функция $f(s)$ непрерывна на Γ , за исключением, быть может, конечного числа точек, где она может

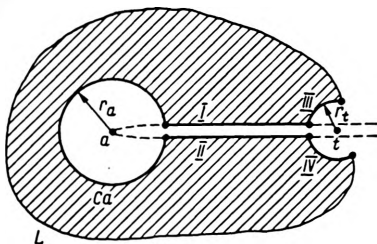
обращаться в бесконечность интегрируемого порядка, то функция $F^-(z) = \int \varphi^-(z, s) f(s) ds$ является аналитической в области D^- . Причем, если $\varphi^-(z, s)$ при $z \rightarrow \infty$ обращается в нуль некоторого порядка, то $F^-(z)$ на бесконечности имеет нуль того же порядка.

2. Уравнение Абеля с внутренним весом. Пусть замкнутый гладкий контур L разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на две области D^+ и D^- . Будем считать, что точка $z=0$ находится в D^+ .

Рассмотрим уравнение

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = f(t), \quad (2)$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $a \in D^+$, $f(t)$ — заданная функция, интегрирование ведется по контуру L в положительном направлении, начиная с точки t . Будем искать решение $\varphi(t)$ уравнения (2) в классе функций, удовлетворяющих на контуре L условию Гельдера, в виде разности $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$ предельных значений функций $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ ($\varphi^-(\infty) = 0$) аналитических соответственно в областях D^+ и D^- .



Выведем вспомогательные соотношения, связывающие интегралы по замкнутому контуру с интегралами по разомкнутому контуру (см. рисунок).

Выделим регулярную в заштрихованной области ветвь функции $(z-a)^{-\beta}(t-z)^{-\alpha}$, проводя в плоскости разрез, соединяющий точки a , t и задавая значение этой функции в некоторой точке плоскости, отличной от a , t . Вырежем точки a , t дугами окружностей соответственно радиусов r_a , r_t . Рассмотрим в заштрихованной области аналитическую функцию $F(z) = (z-a)^{-\beta}(t-z)^{-\alpha}\varphi^+(z)$. По теореме Коши

$$\int_{\Gamma_a} F(z) dz + \int_I F(z) dz + \int_{III} F(z) dz + \int_{L'} F(z) dz + \int_{IV} F(z) dz + \int_{II} F(z) dz = 0.$$

Здесь L' — часть контура L , входящая в границу заштрихованной области. Функция $F(z)$ в точках a , t может обращаться в ∞ интегрируемого порядка. Учитывая это и то, что $\int_{II} F(z) dz = -e^{-2\pi\beta i} \int_I F(z) dz$ (здесь $F(z)$ — значение F на 1), при $r_a \rightarrow 0$, $r_t \rightarrow 0$ получим

$$\int_L \frac{\varphi^+(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = -2ie^{-\beta\pi i} \sin \beta\pi \int_a^t \frac{\varphi^+(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}. \quad (3)$$

Рассуждая аналогичным образом относительно области D^- , получаем

$$\int_L \frac{\varphi^-(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = -2ie^{-(\alpha+\beta)\pi i} \sin(\alpha+\beta)\pi \int_a^t \frac{\varphi^-(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}. \quad (4)$$

Пусть теперь $\tau = a + s(t-a)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{\varphi^+(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} &= (t-a)^{1-\beta-\alpha} \int_0^1 \frac{\varphi^+(a+s(t-a))}{s^\beta(1-s)^\alpha} ds = \\ &= (t-a)^{1-\beta-\alpha} \Phi^+(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\int_a^t \frac{\Phi^-(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} = (t-a)^{1-\beta-\alpha} \int_a^1 \frac{\Phi^-(a+s(t-a))}{s^\beta (1-s)^2} ds = \\ = (t-a)^{1-\beta-\alpha} \Phi^-(t), \quad (\Phi^-(\infty) = 0), \quad (6)$$

$\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ — предельные значения некоторых функций, аналитических соответственно в D^+ и D^- . Здесь мы воспользовались теоремой А (в случае (5) и теоремой Б (в случае (6)). Перепишем теперь уравнение (2) в виде

$$\int_a^t \frac{\Phi^+(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} - \int_a^t \frac{\Phi^-(\tau)}{(\tau-a)^\beta} \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} = f(t). \quad (2')$$

Учитывая (3), (4) и подставляя в (2') выражения интегралов через предельные значения аналитических функций (5), (6), придем к краевой задаче Римана

$$\mu \Phi^+(t) - \nu \Phi^-(t) = (t-a)^{\alpha+\beta-1} f(t), \quad (7) \\ \mu = -2ie^{-\beta\pi i} \sin \beta\pi, \quad \nu = -2ie^{-(\alpha+\beta)\pi i} \sin(\alpha+\beta)\pi.$$

Решение последней выписывается в виде $\Phi^+(z) = \frac{1}{\mu} \Psi^+(z)$, $\Phi^-(z) = \frac{1}{\nu} \Psi^-(z)$, где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^t \frac{(\tau-a)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau}{\tau-z}. \quad (8)$$

Подставляя в (5), (6) предельные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$, путем обращения интегралов Абеля найдем искомое решение $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$. Легко видеть, что формула для нахождения решения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} (t-a)^\beta \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mu} \int_a^t \frac{\Psi^+(\tau) (\tau-a)^{1-\beta-\alpha} d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\nu} \int_a^t \frac{\Psi^-(\tau) (\tau-a)^{1-\beta-\alpha} d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right), \quad (9)$$

где $\Psi^+(t)$, $\Psi^-(t)$ — предельные значения интеграла типа Коши (8). По каждому решению $\varphi(t)$ уравнения (2) можно построить (формулы (5), (6)) решение задачи Римана (7), и обратно. В этом смысле задача (7) эквивалентна уравнению (2).

3. Вырожденные случаи уравнения типа Абеля с внутренним весом. Уравнение (2) при $\beta=0$ представляет собой заданное на замкнутом контуре уравнение Абеля

$$\int_a^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^2} = f(t), \quad (10)$$

которое можно получить из (1) при $k=1$. Петерс его не рассматривал в силу того, что (10) сводится к вырожденному случаю краевой задачи Римана, решение которой было дано в работе [2] в 1966 г. и не вошло в английский перевод монографии [1]. В силу общей теории вырожденной задачи Римана [1, 2] $\Phi^+(t)$ в (7) можно брать произвольно. Решение (10) получается из (9) и имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_a^t \frac{\Phi^+(\tau) (\tau-a)^{1-\alpha} d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\nu} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right). \quad (11')$$

Первый интеграл в (11') есть предельное значение аналитической в D^- функции (по теореме А). В силу произвольности $\Phi^+(t)$ формулу (11') можно записать в виде

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) + \frac{e^{\alpha\pi i}}{2\pi i} \cdot \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \quad (11)$$

Здесь $\varphi^+(t)$ — предельное значение произвольной аналитической в D^+ функции. Из (11) вытекает, что для разрешимости (10) в искомом классе функций необходимо и достаточно, чтобы свободный член уравнения $f(t) = (t-a)^{1-\alpha} F^-(t)$, где $F^-(t)$ — предельное значение функции, аналитической в D^- ($F^-(\infty) = 0$).

Если $\beta = 1 - \alpha$, то коэффициент ν задачи Римана (7) равен 0, и способ, предложенный Петерсом, здесь не применим. Рассуждая аналогично, получим следующую формулу для решения (2):

$$\varphi(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mu} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^-(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right). \quad (12')$$

Из (12') вытекает, что уравнение (2) разрешимо в этом случае тогда и только тогда, когда $f(t)$ является предельным значением аналитической в D^+ функции. Применяя к второму интегралу в (12') теорему Б. получим

$$\varphi(t) = \frac{e^{2\pi i}}{2\pi i} (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - \varphi^-(t), \quad (12)$$

где $\varphi^-(t)$ — предельное значение произвольной аналитической в D^- функции ($\varphi^-(\infty) = 0$).

Пример. $\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = t^{-\alpha-n}$, L — замкнутый контур, содержащий внутри начало координат. В силу (3), (4) ($\beta = 0$) имеем $2i \sin \alpha \pi \cdot e^{-2\pi i} \int_{-\infty}^t \frac{\varphi^-(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = t^{-\alpha-n}$. Отсюда

$$\varphi^-(t) = \frac{e^{2\pi i}}{2\pi i} \cdot \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{\tau^{-\alpha-n} d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{ne^{2\pi i}}{2\pi i} t^{-n-1} \int_0^1 \frac{s^{n-1} ds}{(s-1)^{1-\alpha}} = - \frac{n! t^{-n-1}}{2\pi i \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha+j)}.$$

Общее решение приведенного уравнения будет

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) + t^{-n-1} \frac{n!}{2\pi i \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha+j)},$$

$\varphi^+(t)$ — предельное значение произвольной аналитической в D^+ функции.

4. Уравнение

$$\int_{\tilde{L}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + e^{-2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = f(t) \quad (13)$$

(c — некоторая фиксированная точка на контуре L ; $f(t)$ — заданная функция), так же как и предыдущее, сводится к вырожденному случаю задачи Римана и не может быть решено способом Петерса. Дадим решение его в замкнутой форме, опираясь на изложенный выше прием. Запишем уравнение (13) в виде

$$\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - (1 - e^{-2\pi i}) \int_L^c \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = f(t). \quad (14)$$

Искать гильдеровское решение будем в виде разности $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$. Так как

$$\int_L \frac{\varphi^+(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = 0, \quad \int_L \frac{\varphi^-(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = -2i \sin \alpha \pi \cdot e^{-2\pi i} \int_{-\infty}^t \frac{\varphi^-(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}},$$

то из (14) получим

$$\int_{\infty}^c \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - \int_t^c \frac{\varphi^{+}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = -\frac{ie^{\alpha\pi i} f(t)}{2 \sin \alpha\pi}. \quad (15)$$

$$\int_t^c \frac{\varphi^{+}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = (c-t)^{1-\alpha} \Phi^{+}(t) \text{ (по теореме А)}, \quad (16)$$

$$\int_{\infty}^c \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = (c-t)^{1-\alpha} \Phi^{-}(t), \quad \Phi^{-}(\infty) = 0 \text{ (по теореме Б)}.$$

От (15) приходим к задаче о скачке:

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = -\frac{e^{\alpha\pi i} f(t)}{2i \sin \alpha\pi} (c-t)^{\alpha-1}. \quad (17)$$

Для того чтобы решение этой задачи принадлежало искомому классу, необходимо и достаточно, чтобы f имела вид $f(t) = (c-t)^{1-\alpha} f^{*}(t)$, $f^{*}(t) \in H(L)$. Подставляя в (16) $\Phi^{+}(t)$ и обращая интеграл Абеля, найдем

$$\varphi^{+}(t) = -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{d}{dt} \int_t^c \frac{\Phi^{+}(\tau) (c-\tau)^{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad (18)$$

$\varphi^{-}(t)$ найдем из (17). Пусть $X(z) = (z-c)^{\alpha-1} \int_{\infty}^c \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{(z-\tau)^{\alpha}}$, $X(\infty) = 0$.

Тогда на дуге (c, ∞)

$$X^{+}(t) = (t-c)^{\alpha-1} \left(\int_t^c \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + \int_{\infty}^t \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \right),$$

$$X^{-}(t) = (t-c)^{\alpha-1} \left(\int_t^c \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + e^{2\pi i \alpha} \int_{\infty}^t \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \right).$$

Выражение (17) примет вид

$$X^{+}(t) = \Phi^{-}(t), \quad (19)$$

где $\Phi^{-}(t)$ уже известная функция. $X^{-}(t)$ выбираем произвольно [2]. Из представления

$$\int_{\infty}^t \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = -\frac{(t-c)^{1-\alpha}}{2i \sin \alpha\pi} e^{-\alpha\pi i} (X^{+}(t) - X^{-}(t))$$

в силу произвольного выбора $X^{-}(t)$ и теоремы Б следует, что $\varphi^{-}(t)$ есть предельное значение произвольной аналитической в D^{-} функции, исчезающей на бесконечности. Таким образом, решение приведенного здесь уравнения дается формулой

$$\varphi(t) = \varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{d}{dt} \int_t^c \frac{\Phi^{+}(\tau) (c-\tau)^{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau - \varphi^{-}(t). \quad (20)$$

Авторы выражают глубокую благодарность академику Ф. Д. Гахову за ценное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1963.
2. Гахов Ф. Д.— Дифференц. уравнения, 1966, т. 2, № 4.
3. Самко С. Г.— Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, № 2.
4. Karleman T.— Mat. Z., 1922, v. 15.
5. Peters A. C.— Comm. Pure and Appl. Math., 1969, v. XXII.
6. Wolfersdorf L.— Math. Zeit., 1965, B. 90, № 1.
7. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М., 1973.

Краткие сообщения

УДК 517.62.60

С. Н. ЛЯХОВЕЦ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Пусть объект управления описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^m A_i(t) x(t-h_i) + \sum_{j=1}^m C_j(t) \frac{dx(t-h_j)}{dt} + B(t) u(t), \\ t \in T = [0, t_1], t_1 > nh_m, x(t) \equiv 0, t \in [-h_m, 0], \end{cases}$$

где $x' = \{x_1, \dots, x_n\}$, $u' = \{u_1, \dots, u_r\}$, $u(t) \in U$, $t \in T$, U — множество кусочно-непрерывных функций (или любое другое плотное в $L_2[0, t_1]$ множество), $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$, $m \geq 0$, $A_i(t)$, $i = \overline{0, m}$, $C_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, $B(t)$ — матрицы с элементами из $L_2[0, t_1]$ соответствующих размерностей.

Определение [1]. Систему (1) назовем управляемой в пространстве $M = L_2[t_1 - h_m, t_1] \times H$, $H \subset R^n$, если наблюдение $\{x(t), t \in [t_1 - h_m, t_1], x(t_1)\}$ замещает аффинное подпространство плотное в M , когда u пробегает все множество U .

Аналогично дается определение управляемости в пространстве $L_2[t_1 - h_m, t_1]$ (под наблюдением понимаем $\{x(t), t \in [t_1 - h_m, t_1]\}$).

Управляемость в L_2 и $L_2 \times R^n$ стационарных систем с запаздыванием рассматривалась в работах [2–4]. Проверка результатов указанных работ представляет определенные трудности. В данной статье получены параметрические условия управляемости стационарной системы (1) в пространствах M и $L_2[t_1 - h_m, t_1]$.

Рассмотрим функционал $J(u) = g'x(t_1) + \int_{t_1-h_m}^{t_1} p'(t)x(t)dt$, где $g \in H$.

$H = \{g \in R^n : g' C_k(t_1) = 0, k = \overline{1, m}\}$, $p(t) \in L_2[t_1 - h_m, t_1]$. Потребуем, чтобы абсолютно непрерывная n -вектор функция $\psi(t)$, $t \in T$, удовлетворяла системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}'(t) + \sum_{i=0}^k \psi'(t+h_i) A_i(t+h_i) - \sum_{j=1}^k \frac{d}{dt} [\psi'(t+h_j) C_j(t+h_j)] + p(t) = 0, \\ t \in [t_1 - h_{k+1}, t_1 - h_k], k = 0, 1, \dots, m-1, \\ \psi'(t) = \sum_{i=0}^m \psi'(t+h_i) A_i(t+h_i) - \sum_{j=1}^m \frac{d}{dt} [\psi'(t+h_j) C_j(t+h_j)] = 0, \\ t \in [0, t_1 - h_m], \psi(t_1) = g. \end{cases} \quad (2)$$

С учетом $g \in H$ и (2) $J(u)$ примет вид

$$J(u) = \int_0^{t_1} \psi'(t) B(t) u(t) dt. \quad (3)$$

Из теоремы Хана-Банаха и (3) следует, что объект (1) управляем в M тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} \text{система (2),} \\ \psi'(t) B(t) = 0, \quad t \in T, \end{cases} \quad (4)$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть $A_i(t) = A_i$, $i = \overline{0, m}$, $C_j(t) = C_j$, $j = \overline{1, m}$, $B(t) = B$.

Теорема. Для управляемости стационарной системы (1) в пространствах M и $L_2[t_1 - h_m, t_1]$ достаточно, чтобы

1) $\text{rank} \left[\lambda E + \sum_{i=0}^m \exp(\lambda h_i) A_i - \lambda \sum_{j=1}^m \exp(\lambda h_j) C_j, B \right] = n$ при всех комплексных λ ;

2) $\text{rank} [A_m - \lambda C_m, B] = n$ хотя бы при одном комплексном λ .

Доказательство. В силу первого условия заключаем, что решение системы (4) обладает свойством $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, t_1 - nh_m]$ [5]. Покажем, что $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, t_1]$. Уравнение $\dot{\psi}'(t) + \sum_{i=0}^m \psi'(t + h_i) A_i -$

$-\sum_{j=1}^m \dot{\psi}'(t + h_j) C_j = 0$ при $t \in [\bar{t} - h_m, \bar{t} - h_{m-1}]$ дает $\psi'(t + h_m) A_m - \dot{\psi}'(t + h_m) C_m = 0$. Имеем $\psi'(t) A_m - \dot{\psi}'(t) C_m = 0$, $\psi'(t) B = 0$, $t \in [\bar{t}, \bar{t} + h_m - h_{m-1}]$. Выполнение условия 2) означает, что последним соотношениям не могут удовлетворять произвольные функции [6], и, следовательно, $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, \bar{t} + h_m - h_{m-1}]$, так как $\dot{\psi}(t) = 0$. Аналогично устанавливаем, что $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t} + h_m - h_{m-1}, \bar{t} - 2h_{m-1}]$. Через конечное число шагов получаем требуемый результат: $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, t_1]$.

Доказательство в случае пространства $L_2[t_1 - h_m, t_1]$ не меняется, достаточно лишь рассуждения, предшествующие теореме, провести с $g=0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что второе условие теоремы является и необходимым для управляемости в $L_2[t_1 - h_m, t_1]$ и M . Для обоих пространств первое условие в общем случае необходимым не будет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М., 1972, с. 214.
2. Минюк С. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1972, № 1, с. 8.
3. Manitius A. and Triggiani R.—SIAM J. Control and Optim., 1978, v. 16, № 4.
4. Куперман Л. М.—Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 10.
5. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения.— М., 1967, с. 205.
6. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А. Теория матриц и ее приложения.— М., 1950.

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ПУТЕМ ИССЛЕДОВАНИЯ НИЖНИХ ЕДИНИЦ И ВЕРХНИХ НУЛЕЙ

В настоящей работе доказываются некоторые утверждения, раскрывающие связь между нижними единицами, верхними нулями, минимальными (МДНФ) и кратчайшими дизъюнктивными нормальными формами (КДНФ) функции алгебры логики (ФАЛ). Полученные результаты могут быть использованы для решения задачи минимизации монотонных ФАЛ и для понижения перебора в случае минимизации произвольной ФАЛ.

Введем необходимые определения. Пусть F некоторая ФАЛ от n аргументов задана множествами M_0 и M_1 вершин n -мерного единичного куба B^n , где F принимает значение 0 и 1 соответственно. Заметим, что мы оперируем в общем случае частичными ФАЛ, а всюду определенные рассматриваются как частный случай, когда $M_0 \cup M_1 = B^n$. Поэтому в тех утверждениях, которые справедливы только для всюду определенных ФАЛ, будем обозначать функцию символом f . В тех же утверждениях, которые справедливы для любой частичной ФАЛ, будет использоваться символ F .

Обозначим $M_F = M_0 \cup M_1$. Понятия «нижняя единица» и «верхний нуль», примененные в [1, 2] при исследовании монотонных функций, предлагается использовать для исследования произвольных функций.

Вершина $\tilde{\alpha}$ называется нижней единицей (верхним нулем) функции F , если $F(\tilde{\alpha}) = 1$ ($F(\tilde{\alpha}) = 0$) и для любой $\tilde{\beta} \in M_F$ из того, что $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ ($\tilde{\beta} > \tilde{\alpha}$) следует, что $F(\tilde{\beta}) = 0$ ($F(\tilde{\beta}) = 1$). Обозначим через B_F (A_F) множество всех нижних единиц (верхних нулей) функции F .

Функция F называется монотонной, если для любых вершин $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, принадлежащих M_F , из того, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, следует, что $F(\tilde{\alpha}) \leq F(\tilde{\beta})$.

Легко проверить, что функция монотонна, тогда и только тогда, когда любая ее нижняя единица не меньше любого ее верхнего нуля.

Будем говорить, что элементарная конъюнкция $K_{\tilde{\beta}}$ соответствует вершине $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, если $\beta_i = 1$ тогда и только тогда, когда x_i входит в $K_{\tilde{\beta}}$.

Лемма. Если $\tilde{\beta} \in B_F$ и для любого $\tilde{\alpha} \in A_F$, $\tilde{\beta}$ не меньше, чем $\tilde{\alpha}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ импликанта функции F .

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $\tilde{\gamma}$, для которой $K_{\tilde{\beta}}(\tilde{\gamma}) = 1$, тогда $\tilde{\gamma} \geq \tilde{\beta}$. Предположим $F(\tilde{\gamma}) = 0$, тогда существует $\tilde{\alpha} \in A_F$, что $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\gamma}$ и, следовательно, $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\beta}$, что противоречит условиям леммы.

Теорема. Если $\tilde{\beta} \in B_F$ и для любого $\tilde{\alpha} \in A_F$, $\tilde{\beta}$ не меньше, чем $\tilde{\alpha}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ входит в любую МДНФ и хотя бы в одну КДНФ всюду определенной функции f .

Доказательство. По лемме $K_{\tilde{\beta}}$ — импликанта f и, следовательно, чтобы доказать теорему, достаточно (см. [3], с. 72), что нет таких слагаемых в сокращенной дизъюнктивной нормальной форме (S_K ДНФ) функции f , отличных от $K_{\tilde{\beta}}$ таких, что

$$\bigvee_{i=1}^R K_i \rightarrow K_{\beta}, R \geq 1.$$

Предположим противное, т. е. такие слагаемые существуют. Тогда, если удалить все буквы, входящие в K_{β} , по критерию поглощения ([3], с. 78) должно выполняться условие

$$\bigvee_{i=1}^R K_i^* \equiv 1$$

и поэтому существует индекс $j \in \{1, 2, \dots, R\}$, что $K_j^*(0) = 1$. Заметим, что в K_j^* не могут содержаться переменные без отрицания и, следовательно, если x_i входит в K_j , то она должна входить и в K_{β} .

Рассмотрим вершину $\tilde{\alpha}$ такую, что $K_{\tilde{\alpha}} = K_j^* (K_j = K_j^* \wedge K_j^*)$. Очевидно, $K_j(\tilde{\alpha}) = 1$ и, следовательно, $f(\tilde{\alpha}) = 1$. С другой стороны, в силу свойств K_j , $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$. Кроме того, $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\beta}$, ибо, если бы $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ являлся бы частью K_j и, следовательно, K_j не было бы простым импликантом. Мы доказали, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а это противоречит тому, что $\tilde{\beta}$ нижняя единица. Теорема доказана.

Следствие. Если всюду определенная функция f монотонна, то формула

$$\bigvee_{\tilde{\beta} \in B_j} K_{\tilde{\beta}}$$

является МДНФ и КДНФ функции f .

Справедливость этого утверждения следует из теоремы и из факта, что для всюду определенных монотонных ФАЛ, МДНФ, КДНФ, СКДНФ единственны и совпадают.

Пример 1. Рассмотрим функцию f_1 , заданную множествами $M_1 = \{111, 011, 101, 110\}$ и $M_0 = B^n \setminus M_1$. Функция f_1 всюду определена, монотонна и $B_{f_1} = \{011, 101, 110\}$. Тогда в силу следствия

$$x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3$$

является МДНФ и КДНФ функции f_1 .

Пример 2. Рассмотрим функцию f_2 , заданную множествами $M_1 = \{010, 101, 110, 111\}$ и $M_0 = M_1 \setminus B^n$. Соответствующие множества нижних единиц и верхних нулей следующие: $B_{f_2} = \{010, 101\}$ $A_{f_2} = \{011, 100\}$. Видно, что 101 не меньше, чем 011 и 100. Следовательно, в силу теоремы $x_1 x_3$ входит в ядро функции f_2 .

Таким образом, исследуя верхние нули и нижние единицы, можно получить:

- 1) некоторые импликанты произвольной частичной ФАЛ (лемма);
- 2) часть ядра произвольной всюду определенной ФАЛ (теорема);
- 3) МДНФ и КДНФ произвольной монотонной всюду определенной ФАЛ (следствие).

Заметим, что обобщить теорему и следствие на случай частичных функций невозможно, так как существуют частичные монотонные функции, МДНФ и КДНФ которых содержат переменные с отрицанием. Например, функция, заданная множествами $M_0 = \{0101\}$ и $M_1 = \{0011, 1001\}$ монотонна, а ее единственная МДНФ и КДНФ равна $\bar{x}_2$.

В связи с этим представляет интерес задача определения класса частичных функций, МДНФ и КДНФ которых не содержат отрицаний над переменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробков В. К.—В сб.: Проблемы кибернетики, вып. 13.—М., 1965, с. 5.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющим параметром:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (A)$$

где $f(x, u, t)$ — n -мерная функция; $x \in R^n$; $U \subset R^r$. Абсолютно непрерывную траекторию $x(t)$ будем называть A -допустимой, если существует такое управление (измеримое) $u(t)$, что пара $\{x(t), u(t)\}$ является решением системы (A). Пусть X — множество A -допустимых траекторий.

Аппроксимируем систему (A) последовательностью систем разностных уравнений:

$$x_N(t+h_N) = x_N(t) + h_N f(x_N, u_N, t), \\
x_N(t_0) = x_0, \quad u_N(t) \in U, \quad t \in T_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (A_N)$$

которые получаются из (A) при сеточном разбиении $T_N = \{t_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}\}$, $\tau_i = t_0 + ih_N$, $h_N = (t_1 - t_0)/h_N$, отрезка T и эйлеровой замены производной $\dot{x}(t) \approx [x(t+h) - x(t)]/h$. Траекторию $x_N(t)$ будем называть A_N -допустимой, если найдется такое управление $u_N(t)$, что пара $\{x_N(t), u_N(t)\}$ является решением системы (A_N). Обозначим через $\bar{X}_N$ множество всех A_N -допустимых траекторий, $\bar{X} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bar{X}_N$.

Теорема. Пусть функция $f(x, u, t)$ непрерывна по (x, u, t) , удовлетворяет условию Липшица по x с константой L , а множество U — компакт. Для того, чтобы множество X было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы было ограничено множество $\bar{X}$.

Доказательство. *Достаточность.* Так как множество X ограничено, то

$$\exists K: \forall x(\cdot) \in X \Rightarrow \|x(t)\| \leq K, \quad t \in T. \quad (1)$$

Пусть $u_N(t)$, $t \in T_N$, — последовательность управлений в системах (A_N), $N = 1, 2, \dots$. Положим

$$u^N(t) = u_N(\tau_k), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2)$$

определив тем самым последовательность управлений $u^N(t)$, $t \in T$, для системы (A). Каждому из управлений $u^N(t)$ будет соответствовать A -допустимая траектория $x^N(t)$, $\|x^N(t)\| \leq K$, $t \in T$. В силу (1), (2), непрерывности $f(x, u, t)$ и компактности U , T следует:

$$\exists c_N = o(h_N): \left\| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x^N(t), u^N(t), t) dt - \right. \\
\left. - h_N f(x^N(\tau_k), u_N(\tau_k), \tau_k) \right\| \leq c_N. \quad (3)$$

Так как $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x , то

$$\|x_N(\tau_{k+1}) - x^N(\tau_{k+1})\| \leq \|x_N(\tau_k) - x^N(\tau_k)\| + \\
+ \left\| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x^N(t), u^N(t), t) dt - h_N f(x_N, u_N, \tau_k) \right\| \leq$$

$$\leq \|x_N(\tau_k) - x^N(\tau_k)\| + h_N \|f(x^N, u_N, \tau_k) - f(x_N, u_N, \tau_k)\| + c_N \leq (1 + h_N L) \|x_N(\tau_k) - x^N(\tau_k)\| + c_N, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\|x_N(\tau_{k+1}) - x^N(\tau_{k+1})\| \leq c_N \sum_{l=0}^k (1 + h_N L)^l, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

но

$$\sum_{l=0}^k (1 + h_N L)^l = [(1 + h_N L)^{k+1} - 1] / h_N L < < [1 + L(t_1 - t_0)/N]^N / h_N L < e^{L(t_1 - t_0)} / h_N L,$$

поэтому

$$\|x_N(\tau_{k+1}) - x_N(\tau_{k+1})\| \leq \frac{c_N}{h_N} \cdot \frac{e^{L(t_1 - t_0)}}{L}, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (4)$$

Из (1), (3), (4) следует ограниченность множества X .

Необходимость. Множество $\tilde{X}$ ограничено, т. е.

$$\exists K: \forall N, x_N(\cdot) \in \tilde{X}_N \Rightarrow \|x_N(t)\| \leq K, \quad t \in T_N. \quad (5)$$

Пусть множество X не ограничено. Тогда существует такое измеримое управление $u(t) \in U, t \in T$, что для некоторого

$$\bar{t} \in T \Rightarrow \|x(\bar{t})\| > K + \alpha, \quad \alpha > 0. \quad (6)$$

Согласно [1], найдется подпоследовательность A_N -допустимых траекторий $x_N(t), N \rightarrow \infty, N \in \Lambda$, что

$$\max_{t \in T_N} \|x_N(t) - x(t)\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad N \in \Lambda. \quad (7)$$

Обозначим через τ^N такое $t \in T_N$, что $\bar{t} \in [t, t + h_N)$. В силу непрерывности $x(t)$

$$\|x(\tau^N) - x(\bar{t})\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad N \in \Lambda. \quad (8)$$

Из (6)–(8) нетрудно получить противоречие с (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мордухович Б. Ш. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 431.

Поступила в редакцию
28.02.78.

Кафедра МОУ

УДК 517.926.4

Л. А. АЛЬСЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ СПС

В R^2 рассмотрим СПС, заданную линейными системами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 \end{cases} \quad (2)$$

в линиями переключения

$$x_1 > 0, \quad x_2 = 0, \quad (3)$$

$$x_2 = -\frac{\cos t}{|\sin t|} x_1, \quad x_1 \leq 0, \quad (4)$$

где $0 < \alpha < 1 < \beta$.

При каждом обороте изображающей точки могут быть переключения на подвижной линии (4) один или два раза. В отличие от ранее изученных случаев [1, 2] в данной заметке рассматриваются переключения траекторий одной системы на другую при каждой встрече с линиями переключения. Ситуация, в которой изображающая точка попадает два раза подряд на подвижную линию переключения (4), возможна лишь один раз в течение всего времени.

1°. Обозначим через $\tau_i^{(j)}$ момент переключения на подвижной линии (4), где индекс i указывает номер оборота изображающей точки, а индекс j — номер переключения на каждом обороте ($j = 1, 2$): t_1, t_3 — начальные моменты времени, при которых момент переключения $\tau_1^{(1)}$ равен $(2l+1)\pi$ и $2(l+1)\pi$ соответственно, t_2 — начальный момент времени, при котором $\tau_1^{(2)} = (2l+3)\pi$. Через коэффициенты системы моменты t_1, t_2, t_3 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\pi}{2\beta} (2\beta - 3) + 2l\pi, \\ t_2 &= \frac{\pi}{2\beta} \cdot \frac{2\beta + \alpha + 6\alpha\beta - 3}{1 + \alpha} + 2l\pi, \\ t_3 &= \frac{\pi}{2\beta} (4\beta - 1) + 2l\pi, \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отметим, что траектория СПС (1)–(4) при $t_0 \in [2l\pi, t_1] \cup [t_2, 2(l+1)\pi]$, $l = 0, 1, 2, \dots$ на первом обороте испытывает два переключения на линии (4), а при $t_0 \in [t_1, t_2]$ — одно. И, следовательно,

$$\omega_1(t_0) = \frac{2\pi + (\beta - \alpha)(\tau_1^{(2)} - \tau_1^{(1)})}{\beta} \quad \text{для } t_0 \in [2l\pi, t_1] \cup [t_2, 2(l+1)\pi];$$

$$\omega_1(t_0) = \frac{2\pi - (\beta - \alpha)(\tau_1^{(1)} - t_0)}{\alpha} \quad \text{для } t_0 \in [t_1, t_2],$$

где $\omega_1(t_0)$ — время обращения за один оборот изображающей точки, исходящей в момент t_0 с линии (3) по системе (2).

Через коэффициенты системы α и β $\omega_1(t_0)$ выражается следующим образом:

$$\omega_1(t_0) = \begin{cases} 2n\pi - \pi \frac{2n\alpha\beta^2 + 2\beta^2(n-1) - 2n\alpha\beta - (2n-1)\beta - \alpha + 2}{\beta(1+\alpha)(\beta-1)} - \\ - \frac{2(\beta-\alpha)}{(1+\alpha)(\beta-1)}(t_0 - 2l\pi), & 2l\pi \leq t_0 < t_1, \\ 2n\pi - \pi \frac{4n\alpha\beta + (4n-5)\alpha + \beta - 4}{2\alpha(\beta+1)} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha(\beta+1)}(t_0 - 2l\pi), & t_1 \leq t_0 < t_2, \\ 2n\pi + \pi \frac{2n\alpha\beta^2 + 2(2-n)\beta^2 + 2(n-3)\alpha\beta - (2n-1)\beta - \alpha + 2}{\beta(1-\alpha)(\beta+1)} - \\ - \frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(\beta+1)}(t_0 - 2l\pi), & t_2 \leq t_0 < t_3, \\ 2n\pi - \pi \frac{2(n-3)\beta^2 + 2n\alpha\beta^2 - 2(n-2)\alpha\beta - (2n-1)\beta - \alpha + 2}{\beta(1+\alpha)(\beta-1)} - \\ - \frac{2(\beta-\alpha)}{(1+\alpha)(\beta-1)}(t_0 - 2l\pi), & t_3 \leq t_0 < 2(l+1)\pi, \end{cases} \quad (5)$$

$n = 1, 2, \dots, l = 0, 1, 2, \dots$

В дальнейшем для простоты выкладок считаем $n=1$. Отметим, что как и в случае, рассмотренном в [1], здесь $\omega_1(t_0)$ — разрывная функция в отличие от [2].

2°. Пусть $\omega_m(t_0)$ — время обращения изображающей точки, исходящей в момент t_0 с линии (3) по системе (2), за m -ый оборот. Из сказанного выше ясно, что до тех пор, пока не произошло двойное переключе-

ние на линии (4), выполняются условия случая [2], а после двойного переключения — условия случая [1].

Укажем способ подсчета $\omega_m(t_0)$, например, для случая, когда в [2] $t_1 + 2i\pi \leq T_i < t_2 + 2i\pi$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, где T_i — соответствующие моменты переключения на линии (3).

Пусть на k -ом обороте произошли два переключения на линии (4), T_k — время встречи изображающей точки с линией (3) после k -ого оборота. Так как до k -ого оборота изображающая точка движется по закону [2], имеем

$$T_k = \omega_1(T_{k-1}) + T_{k-1}.$$

где $\omega_1(T_{k-1})$ определяется по формуле (5), а $T_{k-1} = \omega_{k-1}(t_0) + \dots + \omega_1(t_0) + t_0$, где $\omega_i(t_0)$ определяется из [2], $i = 1, 2, \dots, k-1$.

После этих подсчетов исследуем, какому временному интервалу принадлежит найденное T_k , и затем применяем соответствующую формулу для последовательности $(\omega_m(t_0))$ из [1]. Отметим, что

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m > k}} \omega_m(T_k) = 2\pi.$$

3°. Обозначим через $t_1^{(m)}$ — начальный момент времени, при котором $\tau_m^{(1)} = (2m-1)\pi + 2\pi$, $t_2^{(m)}$ — начальный момент времени, при котором $\tau_m^{(2)} = (2m+1)\pi + 2\pi$, где m — номер оборота, $m = 1, 2, \dots$.

Подсчеты показывают, что

$$t_1^{(m)} = \pi \frac{\beta + 4\alpha\beta - \alpha - 4}{2(\beta - \alpha)} + \pi \frac{\beta^2 - 4\alpha\beta^2 - \alpha\beta - 3\beta + 3\alpha}{2\beta(\beta - \alpha)} \gamma^{m-1} + 2\pi,$$

$$t_2^{(m)} = \pi \frac{\beta + 4\alpha\beta - \alpha - 4}{2(\beta - \alpha)} +$$

$$+ \pi \frac{\beta^2(1 + \alpha) - 5\alpha^2\beta - 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta - \alpha^2 + \beta + 3\alpha}{2\beta(1 + \alpha)(\beta - \alpha)} \gamma^{m-1} + 2\pi,$$

где $\gamma = \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta(\alpha+1)}$, $0 < \gamma < 1$, $m = 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$.

Изображающие точки, исходящие с линии (4) в момент $t_0 \in [t_1^{(m-1)}, t_1^{(m)}] \cup [t_2^{(m)}, t_2^{(m-1)}]$, встретятся дважды с линией (4) на m -ом обороте. (Считаем $t_1^{(0)} = 0$, $t_2^{(0)} = 2\pi$). Заметим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_1^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} t_2^{(m)} = \pi \frac{\beta + 4\alpha\beta - \alpha - 4}{2(\beta - \alpha)} + 2\pi.$$

Следовательно (см. [2]), только одна траектория с начальным моментом $t_n = \pi \frac{\beta + 4\alpha\beta - \alpha - 4}{2(\beta - \alpha)} + 2\pi$ нигде не будет претерпевать двойного переключения на линии (4).

Не существует периодических решений среди тех траекторий, которые на каком-либо из оборотов дважды встречаются с подвижной линией (4).

4°. Примеры.

1. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$; $t_0 = \frac{5}{4}\pi$; $\omega_1(t_0) = 2\pi$, а $\omega_m(t_0) \neq 2\pi$ при $m > 1$.

2. $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = 3$; $t_0 = \frac{29}{18}\pi$; $\omega_m(t_0) = 2\pi$, $m = 1, 2, \dots$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич Л. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1976, № 2, с. 54.
2. Альсевич Л. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1976, № 2, с. 70.

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ПОВОРОТЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим две линейные дифференциальные системы:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t), \quad (1)$$

$$\dot{\bar{y}}(t) = B\bar{y}(t), \quad (2)$$

с начальными условиями $\bar{x}(t)|_{t=0} = \bar{x}^0$, $\bar{y}(t)|_{t=0} = \bar{y}^0$; A и B — действительные постоянные матрицы 3-го порядка, $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ — векторы (столбцы) размерности 3.

В каждой точке траекторий систем (1) и (2) строим соответствующий сопровождающий трехгранник. Исследуем ограниченность относительного поворота [1] касательных векторов $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$, а также векторов нормали $\bar{\nu}_A(t)$ и $\bar{\nu}_B(t)$ построенных трехгранников, где $\bar{\tau}_A(t)$ — касательный орт, а $\bar{\nu}_A(t)$ — орт нормали сопровождающего трехгранника некоторой траектории системы (1), $\bar{\tau}_B(t)$ и $\bar{\nu}_B(t)$ — соответствующие орты для траектории системы (2).

Известно [2], что об ограниченности некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$ можно судить по поведению функции $\cos \varphi(t)$. Относительный поворот векторов $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$, $\bar{\nu}_A(t)$ и $\bar{\nu}_B(t)$ будем оценивать, исследуя функции

$$\cos [\bar{\tau}_A(t) \wedge \bar{\tau}_B(t)] \text{ и } \cos [\bar{\nu}_A(t) \wedge \bar{\nu}_B(t)].$$

Матрицы A и B можно [3] представить в виде:

$$A = T \dot{J}_A T^{-1}, \quad B = S \dot{J}_B S^{-1}, \quad (3)$$

где T и S — некоторые невырожденные матрицы, а матрицы $\dot{J}_A$ и $\dot{J}_B$ имеют специальный вид в зависимости от собственных чисел матриц A и B . Обозначим собственные числа матриц A и B соответственно λ_1 , λ_2 , λ_3 и $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_3$;

$$\bar{x} = \exp(At) \bar{x}^0, \quad \bar{y} = \exp(Bt) \bar{y}^0;$$

$$T^{-1} \bar{x}^0 = [x_1, x_2, x_3]', \quad S^{-1} \bar{y}^0 = [y_1, y_2, y_3]';$$

$$S' A \bar{x} = [F_1(t), F_2(t), F_3(t)]', \quad k_1 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, \quad \hat{k}_1 = \sqrt{y_2^2 + y_3^2};$$

$$S' [(A\bar{x}, A\bar{x}) A^2 \bar{x} - (A\bar{x}, A^2 \bar{x}) A \bar{x}] = [\hat{F}_1(t), \hat{F}_2(t), \hat{F}_3(t)]',$$

$$S' T = C = \{c_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Если матрицы A и B имеют только действительные собственные числа, то для любого решения $\bar{x}(t)$ системы (1) и для любого решения $\bar{y}(t)$ системы (2) относительный поворот касательных векторов $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$, а также векторов нормали $\bar{\nu}_A(t)$ и $\bar{\nu}_B(t)$ ограничен на всем промежутке $[0; +\infty[$.

Теорема 2. Пусть B — нормальная матрица [3]. Когда $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_1$ — действительные, а $\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа, относительный поворот $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $F_1(t) \neq 0$ либо $F_1(t) \equiv 0$, но $\hat{\lambda}_1 y_1 \neq 0$, и неограничен, если $F_1(t) \equiv 0$,

$\hat{\lambda}_1 y_1 = 0$. Относительный поворот $\bar{v}_A(t)$ и $\bar{v}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $\hat{F}_1(t) \neq 0$ либо $\hat{F}_1(t) \equiv 0$, но $\hat{\lambda}_1(\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 y_1 \neq 0$ и неограничен, если $\hat{F}_1(t) \equiv 0$, $\hat{\lambda}_1(\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 y_1 = 0$, где $\hat{\mu} = \text{Re } \hat{\lambda}_2$.

Последующие теоремы формулируются в предположении, что обе матрицы A и B — нормальные.

Теорема 3. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа, причем $k_1 = 0$, относительный поворот $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $\hat{\lambda}_1 y_1 \neq 0$ либо $\hat{\lambda}_1 y_1 = 0$, но $c_{11} \neq 0$, и неограничен, если $\hat{\lambda}_1 y_1 = 0$ и $c_{11} = 0$.

Теорема 4. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа, причем $\hat{k}_1 = 0$, относительный поворот $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $\lambda_1 x_1 \neq 0$ либо $\lambda_1 x_1 = 0$, но $c_{11} \neq 0$, и неограничен, если $\lambda_1 x_1 = 0$ и $c_{11} = 0$.

Теорема 5. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа и $k_1 \hat{k}_1 \neq 0$, относительный поворот $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $x_1 y_1 c_{11} \lambda_1 \hat{\lambda}_1 \neq 0$ и $\lambda_1 > \hat{\mu}$, $\hat{\lambda}_1 > \hat{\mu}$, где $\hat{\mu} = \text{Re } \hat{\lambda}_2$, $\hat{\mu} = \text{Re } \hat{\lambda}_2$.

Теорема 6. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа ($\lambda_2 = \mu + i\nu$; $\hat{\lambda}_2 = \hat{\mu} + i\hat{\nu}$) и $k_1 \hat{k}_1 \neq 0$, для ограниченности относительного поворота касательных векторов $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ достаточно выполнение одного из следующих условий:

1. $\lambda_1 x_1 = 0, |c_{11}| = 1, \hat{\lambda}_1 y_1 \neq 0$; 2. $\lambda_1 x_1 \neq 0, |c_{11}| = 1, \hat{\lambda}_1 y_1 = 0$;

3. $\lambda_1 x_1 = 0, |c_{11}| = 1, \hat{\lambda}_1 y_1 = 0, \nu = \hat{\nu} \text{sgn}(c_{11} \det C)$.

Относительный поворот этих векторов на промежутке $[0; +\infty[$ неограничен, если $\lambda_1 x_1 = 0, \hat{\lambda}_1 y_1 = 0, |c_{11}| = 1, \nu \neq \pm \hat{\nu}$.

Теорема 7. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа, относительный поворот векторов нормали $\bar{v}_A(t)$ и $\bar{v}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если выполнено хотя бы одно из условий:

1. $|c_{11}| = 1, k_1(\lambda_1 - \mu)\lambda_1 x_1 = 0, (\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 \hat{\lambda}_1 y_1 \neq 0$;

2. $|c_{11}| = 1, k_1(\lambda_1 - \mu)\lambda_1 x_1 \neq 0, (\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 \hat{\lambda}_1 y_1 = 0$;

3. $|c_{11}| = 1, k_1(\lambda_1 - \mu)\lambda_1 x_1 = 0, (\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 \hat{\lambda}_1 y_1 = 0, \nu = \hat{\nu} \text{sgn}(c_{11} \det C)$.

Относительный поворот этих векторов на промежутке $[0; +\infty[$ неограничен, если $k_1(\lambda_1 - \mu)\lambda_1 x_1 = 0, (\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 \hat{\lambda}_1 y_1 = 0, |c_{11}| = 1, \nu \neq \pm \hat{\nu}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазаник С. А. — Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., № 2, 1977, с. 74.
2. Красносельский М. А. Векторные поля на плоскости. — М., 1963.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М., 1967.

Поступила в редакцию
25.05.78.

Кафедра высшей математики

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При численном нахождении решений дифференциального уравнения

$$\dot{u} = f(u, t) \quad (1)$$

приходится предварительно заменять это уравнение разностным. Конкретный способ подобной дискретизации должен учитывать, по крайней мере, основные свойства исходного уравнения. Многие важные прикладные задачи приводят, например, к необходимости решать дифференциальные уравнения, обладающие свойством асимптотической устойчивости решений. Естественно потребовать, чтобы подобное свойство было сохранено и в разностном варианте. Ниже будут рассмотрены новые вычислительные алгоритмы, построенные с учетом подобных требований.

В развитие [1, 2] построим численные методы вида

$$\hat{y}_{n+1} = y + \tau f(y, t + \alpha\tau) \frac{f_y}{f_n + p(f(y, t + \tau) - f(y + \tau f(y, t + \tau), t + \tau))}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2)$$

где $\hat{y}_0 = y \approx u(t)$, $\hat{y}_{N+1} = \hat{y} \approx u(t + \tau)$, $\tau > 0$, $f_n = f(\hat{y}_n, t + \tau)$, α, p — численные параметры. Расчетные формулы (2) можно рассматривать как процесс простых итераций для уравнения

$$\hat{y} = y + \tau f(y, t + \alpha\tau) \frac{f(y, t + \tau)}{f(\hat{y}, t + \tau) + p(f(y, t + \tau) - f(y + \tau f(\hat{y}, t + \tau), t + \tau))}. \quad (3)$$

Заметим, что решение уравнения

$$\hat{g} = y + \tau f(\hat{g}, t + \tau) \quad (4)$$

удовлетворяет также и уравнению (3), если $\alpha = p = 1$. Это позволяет трактовать (2) при $\alpha = p = 1$ как специальный итерационный процесс для неявного метода Эйлера (4), обладающего свойством A -устойчивости [3] при любых шагах $\tau > 0$, в том числе и в случае систем уравнений вида (1).

Для погрешности r формулы (3) на решении u уравнения (1), подобно [1], можно дать представление

$$r = \tau_2 \left(f f_u \left(\frac{1}{2} - p \right) + f_t \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \right) + O(\tau^3), \quad (5)$$

где $f = f(u, t)$, $f_u = f_u(u, t)$, $f_t = f_t(u, t)$. При $\alpha = p = 1$ главная часть погрешности (5) совпадает с точностью до членов порядка τ^3 с локальной ошибкой (см. [4]) метода (4). При $\alpha = p = 1/2$ порядок точности метода (3), очевидно, возрастает на единицу.

Отметим также, что процесс простых итераций, примененный к (4), приводит к последовательности приближений для $\hat{g}$, изменяющейся почти по закону геометрической прогрессии со знаменателем $q = O(\tau)$. Непосредственным дифференцированием по $\hat{g}$ правой части (3) при $\alpha = p = 1$ легко убедиться, что в случае итерационного процесса (2) $q = O(\tau^3)$.

Отмеченные выше свойства методов (2), (3) носят локальный характер. Важно, однако, не только добиться локальной точности на каждом шаге дискретизации, но и обеспечить согласованность в поведении решений дифференциального и разностного уравнений с изменением времени t .

Достаточно удобной моделью для вещественного уравнения общего вида (1), обладающего свойством асимптотической устойчивости решений, является линейное уравнение $\dot{u} = -\lambda u + b$ с постоянными коэффициентами $\lambda > 0$, b . Все решения этого уравнения асимптотически при $t \rightarrow \infty$ выходят на устойчивое положение равновесия $u = b/\lambda$. Неявный метод Эйлера при точном решении разностного уравнения (4) сохраняет

это свойство, как при любом конечном $\tau > 0$, так и в пределе при $\tau \rightarrow \infty$. Однако явный вычислительный алгоритм

$$\hat{y}_{n+1} = y + \tau f_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

основанный на процессе простых итераций для (4), при $\tau \geq \frac{1}{\lambda}$ таким свойством уже не обладает. Метод же (2) при $\alpha = \rho = 1$ подобных характеристик не нарушает ни при каком N .

Наряду с (6) и (2) можно рассматривать и другие методы решения уравнения (4). Часто для этих целей используют, например, итерационный процесс Ньютона [5]. Однако в случае систем уравнений вида (1) применение этого метода на каждом шаге сопряжено с необходимостью формирования и обращения матрицы Якоби. Можно решать (4) и итерационным методом Стеффенсена [5]. Тогда придем к вычислительному алгоритму

$$\hat{y}_{n+1} = y + \tau \frac{(\hat{y}_n - y) f(y + \tau f_n, t + \tau) - \tau f_n^2}{\hat{y}_n - y - 2\tau f_n + \tau f(y + \tau f_n, t + \tau)}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (7)$$

в качестве простейшего варианта которого при $N=0$ был получен один из явных методов из [1]. Заметим, что при $\hat{y}_n \rightarrow \hat{y}$ знаменатель дроби в (7) стремится к нулю. Это может быть причиной больших вычислительных ошибок. Для методов же вида (2) при $\alpha = \rho = 1$ величина знаменателя стремится в этом случае к $f(y, t + \tau)$. Заменой регуляризатора $f_n / (f_n + f(y, t + \tau) - f(y + \tau f_n, t + \tau))$ на $|f_n| / (|f_n| + |f(y, t + \tau) - f(y + \tau f_n, t + \tau)|)$ можно исключить возможность образования нуля в знаменателе и для значений $\hat{y}_n$, далеких от $\hat{y}$. Отмеченные свойства асимптотики при этом сохраняются.

Подобно [2] предлагаемые методы могут быть использованы при построении нелинейных разностных схем в случае дифференциальных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков В. В.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1977, № 3, с. 69.
2. Бобков В. В.—Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11, с. 2076.
3. Dahlquist G.—BIT, 1963, т. 3, с. 27.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М., 1977.
5. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы, т. I.—М., 1976.

Поступила в редакцию
03.07.78.

Кафедра вычислительной
математики

УДК 539.3

В. А. САВЕНКОВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Пусть упругое однородное анизотропное тело занимает бесконечную область S , представляющую собой всю плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ за вычетом точек $z = t$ на отрезках L_k^+ и L_k^- вещественной оси. При этом будем предполагать, что компоненты напряжений и проекции смещений на оси x и y в области S определяются по формулам [1]:

$$\sigma_x = 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j \mu_j^2 \Phi(z_j) + p_j \bar{\mu}_j^2 \Omega(\bar{z}_j)],$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j \Phi(z_j) + n_j \Omega(\bar{z}_j)], \\
\tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j \mu_j \Phi(z_j) + n_j \bar{\mu}_j \Omega(\bar{z}_j)], \\
u &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j p_j \varphi(z_j) + n_j \bar{p}_j \omega(\bar{z}_j)], \\
v &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j q_j \varphi(z_j) + n_j \bar{q}_j \omega(\bar{z}_j)],
\end{aligned} \quad (1)$$

где $\Phi(z_j)$, $\Omega(z_j)$ — произвольные аналитические в разрезанной плоскости функции комплексной переменной $z_j = x + \mu_j y$, μ_j — корни характеристического уравнения; $\varphi'(z_j) = \Phi(z_j)$; $\omega'(z_j) = \Omega(z_j)$; $p_j = c_{11}\mu_j^2 + c_{12} - c_{10}\mu_j$; $q_j = c_{12}\mu_j^2 + c_{22} - c_{20}\mu_j$; s_j , n_j — произвольные постоянные.

Рассмотрим смешанную краевую задачу, полагая, что на части отрезков заданы смещения, а на остальной части компоненты внешних напряжений. Объединение отрезков, на которых заданы компоненты нормальных и касательных напряжений обозначим $L' = L'_1 + L'_2 + \dots + L'_n$, $L'_k = a'_k b'_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а объединение отрезков, на которых заданы смещения, обозначим $L'' = L''_1 + L''_2 + \dots + L''_n$, $L''_k = a''_k b''_k$.

Коэффициенты s_j и n_j можно подобрать таким образом, чтобы для $\Phi(z_j)$ и $\Omega(z_j)$ при $z_j = t$ получить следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
\Phi^+(t) - \Omega^-(t) &= f^+(t), \quad \Phi^-(t) - \Omega^+(t) = f^-(t), \quad t \in L'; \\
\kappa \bar{\Phi}^+(t) + \Omega^-(t) &= g^+(t), \quad \kappa \bar{\Phi}^-(t) + \Omega^+(t) = g^-(t), \quad t \in L'',
\end{aligned} \quad (2)$$

где $f(t) = \sigma_y + \eta \tau_{xy}$, $g(t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} (u - \eta v)$, κ и μ_0 — вещественные постоянные, определенным образом связанные с s_j , n_j ; η — определенная комплексная постоянная [1].

Будем считать, что компоненты напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} на бесконечности области S принимают значения σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ . Следовательно, в точках, достаточно удаленных от разрезов, комплексные потенциалы имеют вид

$$\Phi(z_j) = \Gamma + \frac{a_\infty}{z_j} + O(1/z_j^2), \quad \Omega(z_j) = \Gamma_1 + \frac{b_\infty}{z_j} + O(1/z_j^2), \quad (3)$$

где Γ , Γ_1 и b_∞ , a_∞ — комплексные постоянные, зависящие от напряжений на бесконечности и от проекций главного вектора внешней нагрузки на края разрезов соответственно.

Функции $\Phi(z_j)$ и $\Omega(z_j)$ будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi(z_j) &= \frac{X_0(z_j)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{[f_1(\tau) + f_1^*(\tau)] d\tau}{X_0^+(\tau)(\tau - z_j)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_2(\tau) d\tau}{\tau - z_j} + \\
&+ \frac{Y_0(z_j)}{\kappa 2\pi i} \int_{L''} \frac{[p_1(\tau) + p_1^*(\tau)] d\tau}{Y_0^+(\tau)(\tau - z_j)} + \frac{1}{\kappa 2\pi i} \int_{L''} \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - z_j} + \\
&+ P'_n(z_j) X(z_j) + D_0^* + \frac{Y(z_j)}{\kappa} P_n^*(z_j) + \frac{D_0^*}{\kappa},
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\Omega(z_j) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_2(\tau) d\tau}{\tau - z_j} - \frac{X_0(z_j)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{[f_1(\tau) + f_1^*(\tau)] d\tau}{X_0^+(\tau)(\tau - z_j)} + \\
&+ \frac{Y_0(z_j)}{2\pi i} \int_{L''} \frac{[p_1(\tau) + p_1^*(\tau)] d\tau}{Y_0^+(\tau)(\tau - z_j)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - z_j} + \\
&+ D_0 - P'_n(z_j) X(z_j) + Y(z_j) P_n^*(z_j) - D_0^*,
\end{aligned}$$

где

$$2f_1(t) = f^+(t) + f^-(t), \quad 2f_2(t) = f^+(t) - f^-(t), \quad 2p_1(t) = g^+(t) + g^-(t),$$

$$2p_2(t) = g^+(t) - g^-(t), \quad X(z_j) = \prod_{k=1}^n [(z_j - a_k^+) (z_j - b_k^+)]^{-1/2},$$

$$X_0(z_j) = \frac{1}{2} [X_1(z_j) - X_2(z_j)], \quad X_1(z_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z_j - a_k^+}{z_j - b_k^+} \right)^{1/2},$$

$$X_2(z_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z_j - b_k^+}{z_j - a_k^+} \right)^{1/2}, \quad Y(z_j) = \prod_{k=1}^n [(z_j - a_k^-) (z_j - b_k^-)]^{-1/2},$$

$$Y_0(z_j) = \frac{1}{2} [Y_1(z_j) - Y_2(z_j)], \quad Y_1(z_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z_j - a_k^-}{z_j - b_k^-} \right)^{1/2},$$

$$Y_2(z_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z_j - b_k^-}{z_j - a_k^-} \right)^{1/2};$$

$$P_n^+(z_j) = c_0^+ z_j^n + c_1^+ z_j^{n-1} + \dots + c_n^+, \quad P_n^-(z_j) = c_0^- z_j^n + c_1^- z_j^{n-1} + \dots + c_n^-,$$

D_0^+ , D_0^- и c_k^+ , c_k^- — произвольные коэффициенты, подлежащие определению из условий на бесконечности (3) и условий однозначности смещений u и v при обходе каждого из отрезков L_k^+ и L_k^- .

Поскольку $X(z)$, $Y(z)$, $X_0(z)$ и $Y_0(z)$ — многозначные функции, зафиксируем те их ветви, для которых $z^n X(z) = X_1(z) = 1$ и $z^n Y(z) = Y_1(z) = 1$ при $|z| \rightarrow \infty$. Низвестные плотности, входящие в соотношения (4), найдем, удовлетворяя условиям (2). Воспользовавшись формулами Сохоцкого — Племеля, получим систему регулярных интегральных уравнений относительно плотностей $f_1^+(t)$, $p_1^+(t)$:

$$\begin{aligned} f_2(t) + \frac{f_1(t) + f_1^*(t)}{2 X_0^+(t)} [X_0^+(t) - X_0^-(t)] + \frac{\kappa + 1}{\kappa 2\pi i} \int_{L^+} \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{D_0^-(\kappa + 1)}{\kappa} + \\ + \frac{Y_0^+(t) - \kappa Y_0^-(t)}{\kappa 2\pi i} \int_{L^+} \frac{[p_1(\tau) + p_1^*(\tau)] d\tau}{Y_0^+(\tau) (\tau - t)} + P_n^-(t) \frac{Y^+(t) - \kappa Y^-(t)}{\kappa} = \\ = f^+(t), \quad (t \in L^+) - p_2(t) - \frac{p_1(t) + p_1^*(t)}{2 Y_0^-(t)} [Y_0^-(t) - Y_0^+(t)] + \\ + \frac{\kappa + 1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f_2(\tau) d\tau}{\tau - t} + D_0^-(\kappa + 1) + \frac{\kappa X_0^-(t) - X_0^+(t)}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{[f_1(\tau) + f_1^*(\tau)] d\tau}{X_0^+(\tau) (\tau - t)} + \\ + P_n^-(t) [\kappa X^-(t) - X^+(t)] = g^+(t), \quad (t \in L^+). \end{aligned}$$

Для решения системы интегральных уравнений можно применить метод коллокации. Интегральные уравнения сводятся к системе алгебраических уравнений с помощью представления плотностей в виде суммы рациональных функций вида [2]:

$$p_1^*(t) = \sum_{i=1}^m \frac{c_i d_i}{d_i^2 + (t - t_i)^2}, \quad f_1^*(t) = \sum_{i=1}^m \frac{l_i r_i}{r_i^2 + (t - t_i)^2},$$

где c_i , l_i — неизвестные линейные параметры; d_i , r_i — наперед заданные нелинейные параметры; t_i — точки на L' и L'' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки. — Минск, 1978.
2. Валько Б. В., Прусов И. А., Романов Л. Е. — Вестн. Львовского ун-та. Сер. мех.-мат., 1965, № 2, с. 41.

ФЕДОР ДМИТРИЕВИЧ ГАХОВ

Советская наука и высшая школа понесли огромную утрату. 30 марта 1980 г. на 75 году жизни после тяжелой болезни скончался известный советский математик, академик АН БССР, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций БГУ имени В. И. Ленина Федор Дмитриевич Гахов.

Ф. Д. Гахов родился 19 февраля 1906 г. в станице Баталпашинской Ставропольского края в семье ремесленника. В 1930 г. Федор Дмитриевич окончил физико-математический факультет Казанского университета. С этого времени его трудовая деятельность связана с высшей школой. Он работал в вузах Свердловска, в Северо-Осетинском пединституте, Казанском и Ростовском университетах.

С 1961 по 1975 г. Ф. Д. Гахов возглавлял кафедру математического анализа, а затем кафедру теории функций и функционального анализа БГУ имени В. И. Ленина. В 1966 г. Ф. Д. Гахов избирается академиком АН БССР. С 1975 г. Федор Дмитриевич — профессор-консультант кафедры теории функций БГУ имени В. И. Ленина.

Научные интересы Ф. Д. Гахова относятся к области краевых задач аналитических функций и особым интегральным уравнениям. С его именем связано создание белорусской школы по краевым задачам и особым интегральным уравнениям. Уже первые научные результаты Ф. Д. Гахова фундаментальными: впервые было дано полное и эффективное решение краевой задачи Римана. Примененный в них метод был использован при решении различных обобщений задачи Римана и других краевых задач. Эти работы сыграли решающую роль в построении теории одномерных сингулярных уравнений.

Основополагающими являются исследования Ф. Д. Гаховым задачи Римана с одной и многими неизвестными функциями с разрывными коэффициентами и на разомкнутом контуре, в исключительном и вырожденном случаях; решение задачи Гильберта с помощью регуляризирующего множителя; применение функционально-коммутативных матриц и автоморфных функций для решения в квадратурах краевых задач и особым интегральным уравнениям; исследования по нелинейной задаче типа задачи Римана. Федор Дмитриевич был одним из первых математиков, обративших внимание на необходимость изучения краевых задач для функций многих комплексных переменных и связанных с ними интегральных уравнений. Ему принадлежит инициатива в постановке вопроса об исследовании краевых задач с бесконечными индексами, теория которых в настоящее время бурно развивается.

Результаты научных исследований Ф. Д. Гахова и его учеников подытожены в ряде монографий. Его книга «Краевые задачи», ставшая классической, выдержала в нашей стране три издания, переведена на английский и испанский языки.

С научным творчеством Ф. Д. Гахова тесно связана его педагогическая деятельность. Большой вклад внес Ф. Д. Гахов в подготовку научных кадров высшей квалификации. Среди его учеников свыше 50 кандидатов и 10 докторов наук.

Ф. Д. Гахов принимал активное участие в организационной работе и в общественной жизни страны. Он был членом Президиума научно-методического Совета Минвуза СССР, председателем секции математики и механики научно-методического Совета Минвуза БССР, членом редколлегии журналов «Известия АН БССР» и «Вестник БГУ имени В. И. Ленина», неоднократно представлял советскую науку на международных съездах и конференциях.

Коммунистическая партия и Советское правительство высоко оценили заслуги Ф. Д. Гахова перед Родиной. Он был награжден орденом Трудового Красного Знамени, медалями, Почетными грамотами Верховного Совета БССР и Верховного Совета Северо-Осетинской АССР.

Светлая память о Федоре Дмитриевиче Гахове, коммунисте, видном ученом-математике, человеке большой души навсегда останется в сердцах тех, кто работал и общался с ним.



АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ*

УДК 621.327.535

Ю. П. Макаров, А. Ф. Чернявский. Полихроматор импульсно-непрерывного спектро радиометра на $\lambda=400-1100$ нм, ч. I. Расчет. № 1179-79. Деп. от 04.04.79.

Обоснован выбор вертикально-симметричной схемы полихроматора со скрещенной дисперсией, проведен расчет оптических элементов схемы и на основе абберационного расчета указаны меры по минимизации основных погрешностей полихроматора. Сформулированы требования к передающей телевизионной трубке фотоприемного устройства. Приведена оптическая схема полихроматора.

УДК 517.948.32

Г. В. Кухарчук. Однородная краевая задача Римана на счетном множестве параллельных прямых. № 1758-79. Деп. от 17.04.79.

Доказана равносильность однородной краевой задачи Римана на счетном множестве параллельных прямых и однородной краевой задачи Римана для полуплоскости с коэффициентом специального вида, а также получены формулы общего решения в исключительном случае.

УДК 538.245

М. Н. Данилькович. Связь диэлектрической проницаемости с магнитным состоянием в кислородных шпинелях. № 1762-79. Деп. от 17.04.79.

Приведены данные о связи диэлектрической проницаемости и спонтанной намагниченности ряда систем ферритов, хромитов и галлатов, являющихся окисными шпинелями. На основе эмпирически установленной прямой пропорциональности между электронной поляризуемостью и суммой доли магнитных ионов, величины произведения некомпенсированных спинов подрешеток и величины относительного спонтанного магнитного момента, изменяющихся в функции концентрации, вычислены электронная и ионная составляющие диэлектрической проницаемости шести бинарных систем кислородных шпинелей. Расчет удовлетворительно согласуется с экспериментальными значениями как для электронной составляющей, так и для суммы электронной и ионной составляющих проницаемости.

УДК 517.949.2

Н. Г. Булгаков, Б. С. Калитин, А. В. Покатаев. К устойчивости дискретных автономных систем. № 1543-79. Деп. от 26.04.79.

Установлены неявные критерии асимптотической устойчивости нулевого решения дискретных автономных систем, позволившие применять для исследования вопроса об асимптотической устойчивости знакопостоянные функции Ляпунова.

УДК 541.141

И. Г. Быкова, О. В. Бутримович, Л. А. Исаченкова, А. М. Саржевский. Изучение фотохимической реакции 1, 3, 5-трифенилпиразолина в присутствии галондзамещенных метана. № 1759-79. Деп. от 17.05.79.

По измерениям в спектрах поглощения и флуоресценции растворов трифенилпиразолинов, содержащих галогенметаны, рассчитаны квантовые выходы реакции и флуоресценции, изучены специфические донорно-акцепторные взаимодействия галогенметан — трифенилпиразолин, измерена длительность возбужденного состояния молекул трифенилпиразолина. На основании полученных экспериментальных данных установлена природа продукта фотохимической реакции — пиразол, предложен механизм фотохимической реакции трифенилпиразолина в присутствии галогенметанов и сделан вывод о том, что фотохимическая реакция протекает через синглетное возбужденное состояние.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140 010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

Л. В. Командина. Адаптивный метод решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями. № 2021-79. Деп. от 06.06.79.

Рассматривается транспортная задача с дополнительными ограничениями в сетевой и матричной постановках. Описывается опорный метод решения, основанный на адаптивной нормировке неопорных компонент подходящего направления, которая учитывает особенности текущего плана. Кроме того, вводится экстремальное правило замены опоры с целью уточнения оценки субоптимальности.

Л. Н. Данилевский, Ю. А. Доманов, О. В. Коробко. Цифровая обработка сигналов в многолучевых антенных решетках. № 2386-79. Деп. от 28.06.79.

Показана возможность уменьшения уровня боковых лепестков диаграммы направленности многолучевой антенной решетки соответствующим амплитудным взвешиванием ее парциальных лучей.

М. М. Чепинога, Б. С. Белозеров. К задаче Коши-Пуассона. № 2480-79. Деп. от 09.07.79.

Рассматривается плоская линейная задача о неустановившихся гравитационных волнах в несжимаемой вязкой жидкости бесконечной глубины при наличии ледяного покрова с учетом его веса, толщины и жесткости под действием начального отклонения от равновесного горизонтального положения при условии частичного скольжения. Получена асимптотическая формула для определения вида границы лед — жидкость для достаточно больших времен на достаточно большом расстоянии от очага возмущения. Случаи «свободная поверхность» и «жидкость — идеальный лед» (идеально гибкая невесомая пленка) получаются как частные случаи результатов настоящей статьи.

А. П. Далимаев. Перечисление путей в орграфах с разноцветными дугами. № 1762-79. Деп. от 09.07.79.

Предлагается метод, который позволяет перечислять пути заданной конфигурации (простые, элементарные) и типа относительно сочетания цветов (L_k — цветные, L_k — насыщенные, L_k — критические) в орграфах с разноцветными дугами. Метод основывается на процедуре построения одного вида орграфа пересечений, так называемого дугового графа.

Фам Тхе Лонг. К методам решения задач геометрического программирования. № 2658-79. Деп. от 18.07.79.

Предлагаются три метода решения задач геометрического программирования (ГП). В первой части работы излагаются метод отскакивающей гиперплоскости, его модификация и доказательство их сходимости для общей задачи ГП. Во второй части для задачи ГП без позиционных ограничений исследуется метод Ньютона с регулировкой шага, доказываемая его сходимость и оценивается скорость сходимости.

Л. И. Буров, А. М. Саржевский, Фам Ву Тхунь. Самодифракция стационарного поляризованного излучения в изотропных средах с двухфотонным поглощением. № 3456-79. Деп. от 03.10.79.

Теоретически исследован процесс самодифракции поляризованного излучения на слое изотропной среды с двухфотонным поглощением. Показано, что в данном случае, помимо основной фазово-амплитудной решетки, возникает дополнительная, с периодом в два раза меньшим, что приводит к более сложной картине распределения интенсивности по дифракционным потокам. Получены выражения, описывающие зависимость поляризации дифракционных потоков от поляризации основных и структуры поглощающих центров. Показано, что исследование поляризации позволяет, в частности, найти соотношение компонент тензора восприимчивости.

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.37

Гулис П. М., Комяк А. И. Влияние неоднородного уширения уровней на временные характеристики люминесценции сложных молекул при переносе энергии.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Экспериментально и теоретически исследованы особенности временных характеристик флуоресценции при переносе энергии в условиях неоднородного уширения энергетических уровней сложных молекул. Обнаружены значительные различия временных зависимостей интенсивности и степени поляризации флуоресценции при регистрации на длинноволновом и коротковолновом краях спектра люминесценции, сдвиги мгновенных спектров испускания в область низких частот с увеличением времени, прошедшего после импульса возбуждения.

Библ. 5 назв., ил. 2.

УДК 53.07/08+53.001.5

Яновский С. Ю., Колпашиков В. Л. К определению функций релаксации внутренней энергии и теплового потока для сред с тепловой памятью.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

На основе методики, разработанной Н. И. Жолнеровичем, В. М. Ткаченко и А. М. Саржевским, предлагается способ определения времени релаксации теплового потока, а также функций релаксации и внутренней энергии теплового потока для сред с тепловой памятью.

Библ. 5 назв.

УДК 621.315.592

Арnaudов Б. Г., Доманевский Д. С. Влияние флуктуаций потенциала на энергию термической ионизации мелких примесей в арсениде галлия.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Экспериментально наблюдаемое в арсениде галлия уменьшение энергии термической ионизации мелких доноров и акцепторов при увеличении уровня легирования объясняется эффектом «флуктуационного» уширения примесного уровня, который обусловлен кулоновским взаимодействием неоднородно распределенных примесей. Найдено выражение, связывающее величину относительного уширения примесного уровня со степенью легирования и компенсации полупроводника. Получено хорошее соответствие между расчетом и экспериментальными данными.

Библ. 12 назв., ил. 2.

УДК 621.396.672

Зеленкевич В. М., Ключников А. С., Тимофеев Л. М. Электродинамический расчет диаграммы направленности системы антенна — РПУ.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Проведено сравнение результатов расчета диаграммы направленности системы антенна — РПУ тремя методами: по скалярной формуле Кирхгофа; по векторизованной формуле Кирхгофа; методом свертки с откликом системы антенна — РПУ. Даны рекомендации по разработке оптимальных методов расчета систем антенна — РПУ.

Библ. 7 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 539.172.3

Лопарева Н. В., Гурачевский В. Л. Поляризующие свойства мессбауэровских мишеней из естественного железа.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Проведены теоретические и экспериментальные исследования состояния поляризации пучка мессбауэровских γ -квантов, прошедшего через две намагниченные железные фольги, содержащие естественную примесь изотопа Fe^{57} .

Библ. 2 назв., ил. 3.

УДК 621.396.677.7

Данилевский Л. Н., Доманов Ю. А., Зеленко В. Н., Изох В. В., Коробко О. В. Оптимизация антенных решеток с аналого-цифровым преобразованием входных сигналов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Приведены результаты исследования метода оптимизации диаграммы направленности линейной антенной решетки с аналого-цифровым преобразованием входных сигналов вариацией положений элементов. Показано, что для случая однобитового квантования эквидистантное расположение элементов является оптимальным.

Библ. 7 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 621.375

Фам Чонг Хьен, Хапалюк А. П. О возможном улучшении условий генерации при введении в резонатор призм полного отражения.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

В приближении плоских волн теоретически изучены условия стационарной генерации в усложненном прямоугольными призмами полного отражения резонаторе Фабри—Перо. Полученные результаты (в основном по порогу и спектру генерации) сравниваются с известными результатами по изучению генерации в простом резонаторе Фабри—Перо. Выявлены и исследованы условия, которые приводят к понижению порога генерации и селекции собственных типов колебаний.

Библ. 4 назв., ил. 2.

УДК 519.10

Ковалев М. М., Дронь С. П. О кусочно-линейной оптимизации на несвязных областях.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Предлагается метод решения задачи с кусочно-линейной функцией на семействе выпуклых многогранников. Доказывается эквивалентность этой задачи и экстремальной задачи на выборах. Рассматриваются частные случаи общей задачи: задача стандартизации и задача размещения производства.

Библ. 6 назв.

УДК 62-50

Забелло Л. Е., Мамрилла Ю. К управляемости линейной нестационарной системы.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Исследуется управляемость линейной нестационарной системы с интегрируемым параметром $A(t)$ и непрерывным параметром $B(t)$. Полученные критерии представлены в форме рекуррентных или интегральных соотношений.

Библ. 7 назв.

УДК 517.966

Леваков А. А. Корректность одного класса задач оптимального управления.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Получены условия, при которых задача оптимального управления со свободным правым концом является корректной. Исследованы некоторые свойства решений дифференциальных включений.

Библ. 7 назв.

УДК 512.25

Козел П. Т. О вырожденных задачах линейного программирования.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Указаны недостатки в изложении теории вырожденных задач линейного программирования, содержащиеся в некоторых монографиях по линейному программированию; дается обоснование метода Чарнса для устранения заикливания симплекс-метода.

Библ. 8 назв.

УДК 517.968

Чумаков Ф. В., Васильев И. Л. Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Рассматриваются интегральные уравнения первого рода со степенным ядром на замкнутом контуре. Решение выписывается в квадратурах.

Библ. 7 назв., ил. 1.

УДК 517.62.60

Ляховец С. Н. Достаточные условия разрешимости одной задачи управляемости систем нейтрального типа.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Приводятся параметрические условия управляемости в пространствах $L_2[t_1 - h_m, t_1]$ и $L_2[t_1 - h_m, t_1] \times H$, $H \subset R^n$ систем нейтрального типа.

Библ. 6 назв.

УДК 621-501

Ароча Х. Л. Минимизация функции алгебры логики путем исследования нижних единиц и верхних нулей.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Предлагаются результаты, раскрывающие связь между нижними единицами, верхними нулями, минимальными и кратчайшими дизъюнктивными нормальными формами функции алгебры логики (ФАЛ). Полученные результаты могут быть использованы для решения задачи минимизации монотонных ФАЛ и для понижения перебора в случае минимизации произвольной ФАЛ.

Библ. 3 назв.

УДК 62-50

Ракецкий В. М. Об ограниченности множества допустимых траекторий при разностных аппроксимациях непрерывных систем управления.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Исследуется вопрос ограниченности множества допустимых траекторий дискретных систем управления, являющихся разностными аппроксимациями непрерывных аналогов.

Библ. 1 назв.

УДК 517.926.4

Альсевич Л. А. Исследование поведения решений модельной СПС.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Продолжается исследование (Альсевич Л. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1976, № 2, с. 54; 1978, № 2, с. 70) модельной СПС для случая, когда переключения траекторий одной системы на другую происходят при каждой встрече с линией переключения. Установлено отсутствие периодических решений среди траекторий, которые дважды встречаются на одном из оборотов с подвижной линией переключения.

Библ. 2 назв.

УДК 517.5

Мазаник С. А. Об относительном повороте для трехмерной линейной дифференциальной системы.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Получены некоторые эффективные признаки ограниченности функции относительного поворота для линейных дифференциальных систем третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Библ. 3 назв.

УДК 518.32:33

Бобков В. В. О некоторых нелинейных методах численного решения дифференциальных уравнений.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Предлагаются новые нелинейные методы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и итерационные процессы их реализации, обладающие свойством А-устойчивости и обеспечивающие достаточно хорошее согласование в поведении решений дифференциального и разностного уравнений. Указывается на возможность использования предлагаемых методов при построении нелинейных разностных схем в случае граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Библ. 5 назв.

УДК 539.3

Савенков В. А. Смешанная задача теории упругости для анизотропной плоскости с разрезами на вещественной оси.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2.

Дано преобразование смешанной задачи теории упругости для анизотропной плоскости с разрезами на вещественной оси к системе регулярных интегральных уравнений. Принято, что на части разрезов как на верхних, так и на нижних сторонах, заданы смещения, а на остальной части разрезов — компоненты внешних напряжений. Для решения системы интегральных уравнений применяется метод коллокаций.

Библ. 4 назв.