

это свойство, как при любом конечном $\tau > 0$, так и в пределе при $\tau \rightarrow \infty$. Однако явный вычислительный алгоритм

$$\hat{y}_{n+1} = y + \tau f_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

основанный на процессе простых итераций для (4), при $\tau \geq \frac{1}{\lambda}$ таким свойством уже не обладает. Метод же (2) при $\alpha = \rho = 1$ подобных характеристик не нарушает ни при каком N .

Наряду с (6) и (2) можно рассматривать и другие методы решения уравнения (4). Часто для этих целей используют, например, итерационный процесс Ньютона [5]. Однако в случае систем уравнений вида (1) применение этого метода на каждом шаге сопряжено с необходимостью формирования и обращения матрицы Якоби. Можно решать (4) и итерационным методом Стеффенсена [5]. Тогда придем к вычислительному алгоритму

$$\hat{y}_{n+1} = y + \tau \frac{(\hat{y}_n - y) f(y + \tau f_n, t + \tau) - \tau f_n^2}{\hat{y}_n - y - 2\tau f_n + \tau f(y + \tau f_n, t + \tau)}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (7)$$

в качестве простейшего варианта которого при $N=0$ был получен один из явных методов из [1]. Заметим, что при $\hat{y}_n \rightarrow \hat{y}$ знаменатель дроби в (7) стремится к нулю. Это может быть причиной больших вычислительных ошибок. Для методов же вида (2) при $\alpha = \rho = 1$ величина знаменателя стремится в этом случае к $f(y, t + \tau)$. Заменой регуляризатора $f_n/(f_n + f(y, t + \tau) - f(y + \tau f_n, t + \tau))$ на $|f_n|/(|f_n| + |f(y, t + \tau) - f(y + \tau f_n, t + \tau)|)$ можно исключить возможность образования нуля в знаменателе и для значений $\hat{y}_n$, далеких от $\hat{y}$. Отмеченные свойства асимптотики при этом сохраняются.

Подобно [2] предлагаемые методы могут быть использованы при построении нелинейных разностных схем в случае дифференциальных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков В. В.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1977, № 3, с. 69.
2. Бобков В. В.—Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11, с. 2076.
3. Dahlquist G.—BIT, 1963, т. 3, с. 27.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М., 1977.
5. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы, т. I.—М., 1976.

Поступила в редакцию
03.07.78.

Кафедра вычислительной
математики

УДК 539.3

В. А. САВЕНКОВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Пусть упругое однородное анизотропное тело занимает бесконечную область S , представляющую собой всю плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ за вычетом точек $z = t$ на отрезках L_k^+ и L_k^- вещественной оси. При этом будем предполагать, что компоненты напряжений и проекции смещений на оси x и y в области S определяются по формулам [1]:

$$\sigma_x = 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j \mu_j^2 \Phi(z_j) + \mu_j \bar{\mu}_j^2 \Omega(\bar{z}_j)],$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j \Phi(z_j) + n_j \Omega(\bar{z}_j)], \\
\tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j \mu_j \Phi(z_j) + n_j \bar{\mu}_j \Omega(\bar{z}_j)], \\
u &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j p_j \varphi(z_j) + n_j \bar{p}_j \omega(\bar{z}_j)], \\
v &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j q_j \varphi(z_j) + n_j \bar{q}_j \omega(\bar{z}_j)],
\end{aligned} \quad (1)$$

где $\Phi(z_j)$, $\Omega(z_j)$ — произвольные аналитические в разрезанной плоскости функции комплексной переменной $z_j = x + \mu_j y$, μ_j — корни характеристического уравнения; $\varphi'(z_j) = \Phi(z_j)$; $\omega'(z_j) = \Omega(z_j)$; $p_j = c_{11}\mu_j^2 + c_{12} - c_{10}\mu_j$; $q_j = c_{12}\mu_j^2 + c_{22} - c_{20}\mu_j$; s_j , n_j — произвольные постоянные.

Рассмотрим смешанную краевую задачу, полагая, что на части отрезков заданы смещения, а на остальной части компоненты внешних напряжений. Объединение отрезков, на которых заданы компоненты нормальных и касательных напряжений обозначим $L' = L'_1 + L'_2 + \dots + L'_n$, $L'_k = a'_k b'_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а объединение отрезков, на которых заданы смещения, обозначим $L'' = L''_1 + L''_2 + \dots + L''_n$, $L''_k = a''_k b''_k$.

Коэффициенты s_j и n_j можно подобрать таким образом, чтобы для $\Phi(z_j)$ и $\Omega(z_j)$ при $z_j = t$ получить следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
\Phi^+(t) - \Omega^-(t) &= f^+(t), \quad \Phi^-(t) - \Omega^+(t) = f^-(t), \quad t \in L'; \\
\kappa \bar{\Phi}^+(t) + \Omega^-(t) &= g^+(t), \quad \kappa \bar{\Phi}^-(t) + \Omega^+(t) = g^-(t), \quad t \in L'',
\end{aligned} \quad (2)$$

где $f(t) = \sigma_y + \eta \tau_{xy}$, $g(t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} (u - \eta v)$, κ и μ_0 — вещественные постоянные, определенным образом связанные с s_j , n_j ; η — определенная комплексная постоянная [1].

Будем считать, что компоненты напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} на бесконечности области S принимают значения σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ . Следовательно, в точках, достаточно удаленных от разрезов, комплексные потенциалы имеют вид

$$\Phi(z_j) = \Gamma + \frac{a_\infty}{z_j} + O(1/z_j^2), \quad \Omega(z_j) = \Gamma_1 + \frac{b_\infty}{z_j} + O(1/z_j^2), \quad (3)$$

где Γ , Γ_1 и b_∞ , a_∞ — комплексные постоянные, зависящие от напряжений на бесконечности и от проекций главного вектора внешней нагрузки на края разрезов соответственно.

Функции $\Phi(z_j)$ и $\Omega(z_j)$ будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi(z_j) &= \frac{X_0(z_j)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{[f_1(\tau) + f_1^*(\tau)] d\tau}{X_0^+(\tau)(\tau - z_j)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_2(\tau) d\tau}{\tau - z_j} + \\
&+ \frac{Y_0(z_j)}{\kappa 2\pi i} \int_{L''} \frac{[p_1(\tau) + p_1^*(\tau)] d\tau}{Y_0^+(\tau)(\tau - z_j)} + \frac{1}{\kappa 2\pi i} \int_{L''} \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - z_j} + \\
&+ P'_n(z_j) X(z_j) + D_0^* + \frac{Y(z_j)}{\kappa} P_n^*(z_j) + \frac{D_0^*}{\kappa},
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\Omega(z_j) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_2(\tau) d\tau}{\tau - z_j} - \frac{X_0(z_j)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{[f_1(\tau) + f_1^*(\tau)] d\tau}{X_0^+(\tau)(\tau - z_j)} + \\
&+ \frac{Y_0(z_j)}{2\pi i} \int_{L''} \frac{[p_1(\tau) + p_1^*(\tau)] d\tau}{Y_0^+(\tau)(\tau - z_j)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - z_j} + \\
&+ D_0 - P'_n(z_j) X(z_j) + Y(z_j) P_n^*(z_j) - D_0^*,
\end{aligned}$$

где

$$2f_1(t) = f^+(t) + f^-(t), \quad 2f_2(t) = f^+(t) - f^-(t), \quad 2p_1(t) = g^+(t) + g^-(t),$$

$$2p_2(t) = g^+(t) - g^-(t), \quad X(z_j) = \prod_{k=1}^n [(z_j - a_k^+) (z_j - b_k^-)]^{-1/2},$$

$$X_0(z_j) = \frac{1}{2} [X_1(z_j) - X_2(z_j)], \quad X_1(z_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z_j - a_k^+}{z_j - b_k^-} \right)^{1/2},$$

$$X_2(z_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z_j - b_k^-}{z_j - a_k^+} \right)^{1/2}, \quad Y(z_j) = \prod_{k=1}^n [(z_j - a_k^+) (z_j - b_k^-)]^{-1/2},$$

$$Y_0(z_j) = \frac{1}{2} [Y_1(z_j) - Y_2(z_j)], \quad Y_1(z_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z_j - a_k^+}{z_j - b_k^-} \right)^{1/2},$$

$$Y_2(z_j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z_j - b_k^-}{z_j - a_k^+} \right)^{1/2};$$

$$P_n^+(z_j) = c_0^+ z_j^n + c_1^+ z_j^{n-1} + \dots + c_n^+, \quad P_n^-(z_j) = c_0^- z_j^n + c_1^- z_j^{n-1} + \dots + c_n^-,$$

D_0^+ , D_0^- и c_k^+ , c_k^- — произвольные коэффициенты, подлежащие определению из условий на бесконечности (3) и условий однозначности смещений u и v при обходе каждого из отрезков L_k^+ и L_k^- .

Поскольку $X(z)$, $Y(z)$, $X_0(z)$ и $Y_0(z)$ — многозначные функции, зафиксируем те их ветви, для которых $z^n X(z) = X_1(z) = 1$ и $z^n Y(z) = Y_1(z) = 1$ при $|z| \rightarrow \infty$. Низвестные плотности, входящие в соотношения (4), найдем, удовлетворяя условиям (2). Воспользовавшись формулами Сохоцкого — Племеля, получим систему регулярных интегральных уравнений относительно плотностей $f_1^+(t)$, $p_1^+(t)$:

$$\begin{aligned} f_2(t) + \frac{f_1(t) + f_1^*(t)}{2 X_0^+(t)} [X_0^+(t) - X_0^-(t)] + \frac{\kappa + 1}{\kappa 2\pi i} \int_{L^+} \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{D_0^-(\kappa + 1)}{\kappa} + \\ + \frac{Y_0^+(t) - \kappa Y_0^-(t)}{\kappa 2\pi i} \int_{L^+} \frac{[p_1(\tau) + p_1^*(\tau)] d\tau}{Y_0^+(\tau) (\tau - t)} + P_n^-(t) \frac{Y^+(t) - \kappa Y^-(t)}{\kappa} = \\ = f^+(t), \quad (t \in L^+) - p_2(t) - \frac{p_1(t) + p_1^*(t)}{2 Y_0^-(t)} [Y_0^-(t) - Y_0^+(t)] + \\ + \frac{\kappa + 1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f_2(\tau) d\tau}{\tau - t} + D_0^-(\kappa + 1) + \frac{\kappa X_0^-(t) - X_0^+(t)}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{[f_1(\tau) + f_1^*(\tau)] d\tau}{X_0^+(\tau) (\tau - t)} + \\ + P_n^-(t) [\kappa X^-(t) - X^+(t)] = g^+(t), \quad (t \in L^+). \end{aligned}$$

Для решения системы интегральных уравнений можно применить метод коллокации. Интегральные уравнения сводятся к системе алгебраических уравнений с помощью представления плотностей в виде суммы рациональных функций вида [2]:

$$p_1^*(t) = \sum_{i=1}^m \frac{c_i d_i}{d_i^2 + (t - t_i)^2}, \quad f_1^*(t) = \sum_{i=1}^m \frac{l_i r_i}{r_i^2 + (t - t_i)^2},$$

где c_i , l_i — неизвестные линейные параметры; d_i , r_i — наперед заданные нелинейные параметры; t_i — точки на L' и L'' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки. — Минск, 1978.
2. Валько Б. В., Прусов И. А., Романов Л. Е. — Вестн. Львовского ун-та. Сер. мех.-мат., 1965, № 2, с. 41.