

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При численном нахождении решений дифференциального уравнения

$$\dot{u} = f(u, t) \quad (1)$$

приходится предварительно заменять это уравнение разностным. Конкретный способ подобной дискретизации должен учитывать, по крайней мере, основные свойства исходного уравнения. Многие важные прикладные задачи приводят, например, к необходимости решать дифференциальные уравнения, обладающие свойством асимптотической устойчивости решений. Естественно потребовать, чтобы подобное свойство было сохранено и в разностном варианте. Ниже будут рассмотрены новые вычислительные алгоритмы, построенные с учетом подобных требований.

В развитие [1, 2] построим численные методы вида

$$\hat{y}_{n+1} = y + \tau f(y, t + \alpha\tau) \frac{f_y}{f_n + p(f(y, t + \tau) - f(y + \tau f_n, t + \tau))}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2)$$

где $\hat{y}_0 = y \approx u(t)$, $\hat{y}_{N+1} = \hat{y} \approx u(t + \tau)$, $\tau > 0$, $f_n = f(\hat{y}_n, t + \tau)$, α, p — численные параметры. Расчетные формулы (2) можно рассматривать как процесс простых итераций для уравнения

$$\hat{y} = y + \tau f(y, t + \alpha\tau) \frac{f(y, t + \tau)}{f(\hat{y}, t + \tau) + p(f(y, t + \tau) - f(y + \tau f(\hat{y}, t + \tau), t + \tau))}. \quad (3)$$

Заметим, что решение уравнения

$$\hat{y} = y + \tau f(\hat{y}, t + \tau) \quad (4)$$

удовлетворяет также и уравнению (3), если $\alpha = p = 1$. Это позволяет трактовать (2) при $\alpha = p = 1$ как специальный итерационный процесс для неявного метода Эйлера (4), обладающего свойством A -устойчивости [3] при любых шагах $\tau > 0$, в том числе и в случае систем уравнений вида (1).

Для погрешности r формулы (3) на решении u уравнения (1), подобно [1], можно дать представление

$$r = \tau_2 \left(f f_u \left(\frac{1}{2} - p \right) + f_t \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \right) + O(\tau^3), \quad (5)$$

где $f = f(u, t)$, $f_u = f_u(u, t)$, $f_t = f_t(u, t)$. При $\alpha = p = 1$ главная часть погрешности (5) совпадает с точностью до членов порядка τ^3 с локальной ошибкой (см. [4]) метода (4). При $\alpha = p = 1/2$ порядок точности метода (3), очевидно, возрастает на единицу.

Отметим также, что процесс простых итераций, примененный к (4), приводит к последовательности приближений для $\hat{y}$, изменяющейся почти по закону геометрической прогрессии со знаменателем $q = O(\tau)$. Непосредственным дифференцированием по $\hat{y}$ правой части (3) при $\alpha = p = 1$ легко убедиться, что в случае итерационного процесса (2) $q = O(\tau^3)$.

Отмеченные выше свойства методов (2), (3) носят локальный характер. Важно, однако, не только добиться локальной точности на каждом шаге дискретизации, но и обеспечить согласованность в поведении решений дифференциального и разностного уравнений с изменением времени t .

Достаточно удобной моделью для вещественного уравнения общего вида (1), обладающего свойством асимптотической устойчивости решений, является линейное уравнение $\dot{u} = -\lambda u + b$ с постоянными коэффициентами $\lambda > 0$, b . Все решения этого уравнения асимптотически при $t \rightarrow \infty$ выходят на устойчивое положение равновесия $u = b/\lambda$. Неявный метод Эйлера при точном решении разностного уравнения (4) сохраняет

это свойство, как при любом конечном $\tau > 0$, так и в пределе при $\tau \rightarrow \infty$. Однако явный вычислительный алгоритм

$$\hat{y}_{n+1} = y + \tau f_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

основанный на процессе простых итераций для (4), при $\tau \geq \frac{1}{\lambda}$ таким свойством уже не обладает. Метод же (2) при $\alpha = \rho = 1$ подобных характеристик не нарушает ни при каком N .

Наряду с (6) и (2) можно рассматривать и другие методы решения уравнения (4). Часто для этих целей используют, например, итерационный процесс Ньютона [5]. Однако в случае систем уравнений вида (1) применение этого метода на каждом шаге сопряжено с необходимостью формирования и обращения матрицы Якоби. Можно решать (4) и итерационным методом Стеффенсена [5]. Тогда придем к вычислительному алгоритму

$$\hat{y}_{n+1} = y + \tau \frac{(\hat{y}_n - y) f(y + \tau f_n, t + \tau) - \tau f_n^2}{\hat{y}_n - y - 2\tau f_n + \tau f(y + \tau f_n, t + \tau)}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (7)$$

в качестве простейшего варианта которого при $N=0$ был получен один из явных методов из [1]. Заметим, что при $\hat{y}_n \rightarrow \hat{y}$ знаменатель дроби в (7) стремится к нулю. Это может быть причиной больших вычислительных ошибок. Для методов же вида (2) при $\alpha = \rho = 1$ величина знаменателя стремится в этом случае к $f(y, t + \tau)$. Заменой регуляризатора $f_n/(f_n + f(y, t + \tau) - f(y + \tau f_n, t + \tau))$ на $|f_n|/(|f_n| + |f(y, t + \tau) - f(y + \tau f_n, t + \tau)|)$ можно исключить возможность образования нуля в знаменателе и для значений $\hat{y}_n$, далеких от $\hat{y}$. Отмеченные свойства асимптотики при этом сохраняются.

Подобно [2] предлагаемые методы могут быть использованы при построении нелинейных разностных схем в случае дифференциальных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков В. В.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1977, № 3, с. 69.
2. Бобков В. В.—Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11, с. 2076.
3. Dahlquist G.—BIT, 1963, т. 3, с. 27.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М., 1977.
5. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы, т. I.—М., 1976.

Поступила в редакцию
03.07.78.

Кафедра вычислительной
математики

УДК 539.3

В. А. САВЕНКОВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Пусть упругое однородное анизотропное тело занимает бесконечную область S , представляющую собой всю плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ за вычетом точек $z = t$ на отрезках L_k^+ и L_k^- вещественной оси. При этом будем предполагать, что компоненты напряжений и проекции смещений на оси x и y в области S определяются по формулам [1]:

$$\sigma_x = 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [s_j \mu_j^2 \Phi(z_j) + \mu_j \bar{\mu}_j^2 \Omega(\bar{z}_j)],$$