

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ПОВОРОТЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим две линейные дифференциальные системы:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t), \quad (1)$$

$$\dot{\bar{y}}(t) = B\bar{y}(t), \quad (2)$$

с начальными условиями $\bar{x}(t)|_{t=0} = \bar{x}^0$, $\bar{y}(t)|_{t=0} = \bar{y}^0$; A и B — действительные постоянные матрицы 3-го порядка, $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ — векторы (столбцы) размерности 3.

В каждой точке траекторий систем (1) и (2) строим соответствующий сопровождающий трехгранник. Исследуем ограниченность относительного поворота [1] касательных векторов $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$, а также векторов нормали $\bar{\nu}_A(t)$ и $\bar{\nu}_B(t)$ построенных трехгранников, где $\bar{\tau}_A(t)$ — касательный орт, а $\bar{\nu}_A(t)$ — орт нормали сопровождающего трехгранника некоторой траектории системы (1), $\bar{\tau}_B(t)$ и $\bar{\nu}_B(t)$ — соответствующие орты для траектории системы (2).

Известно [2], что об ограниченности некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$ можно судить по поведению функции $\cos \varphi(t)$. Относительный поворот векторов $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$, $\bar{\nu}_A(t)$ и $\bar{\nu}_B(t)$ будем оценивать, исследуя функции

$$\cos [\bar{\tau}_A(t) \wedge \bar{\tau}_B(t)] \text{ и } \cos [\bar{\nu}_A(t) \wedge \bar{\nu}_B(t)].$$

Матрицы A и B можно [3] представить в виде:

$$A = TJ_A T^{-1}, \quad B = SJ_B S^{-1}, \quad (3)$$

где T и S — некоторые невырожденные матрицы, а матрицы J_A и J_B имеют специальный вид в зависимости от собственных чисел матриц A и B . Обозначим собственные числа матриц A и B соответственно λ_1 , λ_2 , λ_3 и $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_3$;

$$\bar{x} = \exp(At) \bar{x}^0, \quad \bar{y} = \exp(Bt) \bar{y}^0;$$

$$T^{-1} \bar{x}^0 = [x_1, x_2, x_3]', \quad S^{-1} \bar{y}^0 = [y_1, y_2, y_3]';$$

$$S' A \bar{x} = [F_1(t), F_2(t), F_3(t)]', \quad k_1 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, \quad \hat{k}_1 = \sqrt{y_2^2 + y_3^2};$$

$$S' [(A\bar{x}, A\bar{x}) A^2 \bar{x} - (A\bar{x}, A^2 \bar{x}) A\bar{x}] = [\hat{F}_1(t), \hat{F}_2(t), \hat{F}_3(t)]',$$

$$S' T = C = \{c_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Если матрицы A и B имеют только действительные собственные числа, то для любого решения $\bar{x}(t)$ системы (1) и для любого решения $\bar{y}(t)$ системы (2) относительный поворот касательных векторов $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$, а также векторов нормали $\bar{\nu}_A(t)$ и $\bar{\nu}_B(t)$ ограничен на всем промежутке $[0; +\infty[$.

Теорема 2. Пусть B — нормальная матрица [3]. Когда $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_1$ — действительные, а $\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа, относительный поворот $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $F_1(t) \neq 0$ либо $F_1(t) \equiv 0$, но $\hat{\lambda}_1 y_1 \neq 0$, и неограничен, если $F_1(t) \equiv 0$,

$\hat{\lambda}_1 y_1 = 0$. Относительный поворот $\bar{v}_A(t)$ и $\bar{v}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $\hat{F}_1(t) \neq 0$ либо $\hat{F}_1(t) \equiv 0$, но $\hat{\lambda}_1(\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 y_1 \neq 0$ и неограничен, если $\hat{F}_1(t) \equiv 0$, $\hat{\lambda}_1(\hat{\lambda}_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 y_1 = 0$, где $\hat{\mu} = \text{Re } \hat{\lambda}_2$.

Последующие теоремы формулируются в предположении, что обе матрицы A и B — нормальные.

Теорема 3. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа, причем $k_1 = 0$, относительный поворот $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $\hat{\lambda}_1 y_1 \neq 0$ либо $\hat{\lambda}_1 y_1 = 0$, но $c_{11} \neq 0$, и неограничен, если $\hat{\lambda}_1 y_1 = 0$ и $c_{11} = 0$.

Теорема 4. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа, причем $\hat{k}_1 = 0$, относительный поворот $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $\lambda_1 x_1 \neq 0$ либо $\lambda_1 x_1 = 0$, но $c_{11} \neq 0$, и неограничен, если $\lambda_1 x_1 = 0$ и $c_{11} = 0$.

Теорема 5. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа и $k_1 \hat{k}_1 \neq 0$, относительный поворот $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если $x_1 y_1 c_{11} \lambda_1 \hat{\lambda}_1 \neq 0$ и $\lambda_1 > \hat{\mu}$, $\hat{\lambda}_1 > \hat{\mu}$, где $\hat{\mu} = \text{Re } \hat{\lambda}_2$, $\hat{\mu} = \text{Re } \hat{\lambda}_2$.

Теорема 6. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа ($\lambda_2 = \mu + i\nu$; $\hat{\lambda}_2 = \hat{\mu} + i\hat{\nu}$) и $k_1 \hat{k}_1 \neq 0$, для ограниченности относительного поворота касательных векторов $\bar{\tau}_A(t)$ и $\bar{\tau}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ достаточно выполнение одного из следующих условий:

$$1. \lambda_1 x_1 = 0, |c_{11}| = 1, \hat{\lambda}_1 y_1 \neq 0; 2. \lambda_1 x_1 \neq 0, |c_{11}| = 1, \hat{\lambda}_1 y_1 = 0;$$

$$3. \lambda_1 x_1 = 0, |c_{11}| = 1, \hat{\lambda}_1 y_1 = 0, \nu = \hat{\nu} \text{sgn}(c_{11} \det C).$$

Относительный поворот этих векторов на промежутке $[0; +\infty[$ неограничен, если $\lambda_1 x_1 = 0, \hat{\lambda}_1 y_1 = 0, |c_{11}| = 1, \nu \neq \pm \hat{\nu}$.

Теорема 7. Когда $\lambda_2, \lambda_3, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ — мнимые собственные числа, относительный поворот векторов нормали $\bar{v}_A(t)$ и $\bar{v}_B(t)$ на промежутке $[0; +\infty[$ ограничен, если выполнено хотя бы одно из условий:

$$1. |c_{11}| = 1, k_1(\lambda_1 - \mu)\lambda_1 x_1 = 0, (\lambda_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 \hat{\lambda}_1 y_1 \neq 0;$$

$$2. |c_{11}| = 1, k_1(\lambda_1 - \mu)\lambda_1 x_1 \neq 0, (\lambda_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 \hat{\lambda}_1 y_1 = 0;$$

$$3. |c_{11}| = 1, k_1(\lambda_1 - \mu)\lambda_1 x_1 = 0, (\lambda_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 \hat{\lambda}_1 y_1 = 0, \nu = \hat{\nu} \text{sgn}(c_{11} \det C).$$

Относительный поворот этих векторов на промежутке $[0; +\infty[$ неограничен, если $k_1(\lambda_1 - \mu)\lambda_1 x_1 = 0, (\lambda_1 - \hat{\mu})\hat{k}_1 \hat{\lambda}_1 y_1 = 0, |c_{11}| = 1, \nu \neq \pm \hat{\nu}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазаник С. А. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., № 2, 1977, с. 74.
2. Красносельский М. А. Векторные поля на плоскости. — М., 1963.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М., 1967.

Поступила в редакцию
25.05.78.

Кафедра высшей математики