$$\leqslant \| x_N(\tau_k) - x^N(\tau_k) \| + h_N \| f(x^N, u_N, \tau_k) - f(x_N, u_N, \tau_k) \| + $$
$$+ c_N \leqslant (1 + h_N L) \| x_N(\tau_k) - x^N(\tau_k) \| + c_N, \ 0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\| x_N(\tau_{k+1}) - x^N(\tau_{k+1}) \| \leqslant c_N \sum_{l=0}^{k} (1 + h_N L)^l, \ 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$

но

$$\sum_{l=0}^{k} (1 + h_N L)^l = [(1 + h_N L)^{k+1} - 1]/h_N L <$$
$$< [1 + L(t_1 - t_0)/N]^N / h_N L < e^{L(t_1 - t_0)}/h_N L,$$

поэтому

$$\| x_N(\tau_{k+1}) - x_N(\tau_{k+1}) \| \leqslant \frac{c_N}{h_N} \cdot \frac{e^{L(t_1 - t_0)}}{L}, \ 0 \leqslant k \leqslant N-1. \quad (4)$$

Из (1), (3), (4) следует ограниченность множества X.

Необходимость. Множество $\tilde{X}$ ограничено, т. е.

$$\exists K : \forall N, \ x_N(\cdot) \in \tilde{X}_N \Rightarrow \| x_N(t) \| \leqslant K, \ t \in T_N. \quad (5)$$

Пусть множество X не ограничено. Тогда существует такое измеримое управление $u(t) \in U$, $t \in T$, что для некоторого

$$\bar{t} \in T \Rightarrow \| x(\bar{t}) \| > K + \alpha, \ \alpha > 0. \quad (6)$$

Согласно [1], найдется подпоследовательность A_N-допустимых траекторий $x_N(t)$, $N \to \infty$, $N \in \Lambda$, что

$$\max_{t \in T_N} \| x_N(t) - x(t) \| \to 0, \ N \to \infty, \ N \in \Lambda. \quad (7)$$

Обозначим через τ^N такое $t \in T_N$, что $\bar{t} \in [t, t + h_N)$. В силу непрерывности $x(t)$

$$\| x(\tau^N) - x(\bar{t}) \| \to 0, \ N \to \infty, \ N \in \Lambda. \quad (8)$$

Из (6)—(8) нетрудно получить противоречие с (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мордухович Б. Ш.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 431.

Поступила в редакцию
28.02.78.

Кафедра МОУ

УДК 517.926.4

Л. А. АЛЬСЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОЙ СПС

В R^2 рассмотрим СПС, заданную линейными системами

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 \end{array}\right| \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 \end{array}\right| \quad (2)$$

и линиями переключения

$$x_1 > 0, \quad x_2 = 0, \quad (3)$$

$$x_2 = -\frac{\cos t}{|\sin t|} x_1, \ x_1 \leqslant 0, \quad (4)$$

где $0<\alpha<1<\beta$.

При каждом обороте изображающей точки могут быть переключения на подвижной линии (4) один или два раза. В отличие от ранее изученных случаев [1, 2] в данной заметке рассматриваются переключения траекторий одной системы на другую при каждой встрече с линиями переключения. Ситуация, в которой изображающая точка попадает два раза подряд на подвижную линию переключения (4), возможна лишь один раз в течение всего времени.

1°. Обозначим через $\tau_i^{(j)}$ момент переключения на подвижной линии (4), где индекс i указывает номер оборота изображающей точки, а индекс j — номер переключения на каждом обороте ($j=1, 2$): t_1, t_3 — начальные моменты времени, при которых момент переключения $\tau_1^{(1)}$ равен $(2l+1)\pi$ и $2(l+1)\pi$ соответственно, t_2 — начальный момент времени, при котором $\tau_1^{(2)}=(2l+3)\pi$. Через коэффициенты системы моменты t_1, t_2, t_3 определяются следующим образом:

$$t_1=\frac{\pi}{2\beta}(2\beta-3)+2l\pi,$$

$$t_2=\frac{\pi}{2\beta}\cdot\frac{2\beta+\alpha+6\alpha\beta-3}{1+\alpha}+2l\pi,$$

$$t_3=\frac{\pi}{2\beta}(4\beta-1)+2l\pi,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Отметим, что траектория СПС (1)—(4) при $t_0\in[2l\pi,\ t_1[\cup[t_2,\ 2(l+1)\pi[$, $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ на первом обороте испытывает два переключения на линии (4), а при $t_0\in[t_1,\ t_2[$ — одно. И, следовательно,

$$\omega_1(t_0)=\frac{2\pi+(\beta-\alpha)(\tau_1^{(2)}-\tau_1^{(1)})}{\beta}\ \text{для}\ t_0\in[2l\pi,\ t_1[\cup[t_2,\ 2(l+1)\pi[;$$

$$\omega_1(t_0)=\frac{2\pi-(\beta-\alpha)(\tau_1^{(1)}-t_0)}{\alpha}\ \text{для}\ t_0\in[t_1,\ t_2[,$$

где $\omega_1(t_0)$ — время обращения за один оборот изображающей точки, исходящей в момент t_0 с линии (3) по системе (2).

Через коэффициенты системы α и β $\omega_1(t_0)$ выражается следующим образом:

$$\omega_1(t_0)=\begin{cases}2n\pi-\pi\dfrac{2n\alpha\beta^2+2\beta^2(n-1)-2n\alpha\beta-(2n-1)\beta-\alpha+2}{\beta(1+\alpha)(\beta-1)}-\\ \quad-\dfrac{2(\beta-\alpha)}{(1+\alpha)(\beta-1)}(t_0-2l\pi),\ 2l\pi\leqslant t_0<t_1,\\ 2n\pi-\pi\dfrac{4n\alpha\beta+(4n-5)\alpha+\beta-4}{2\alpha(\beta+1)}+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha(\beta+1)}(t_0-2l\pi),\ t_1\leqslant t_0<t_2,\\ 2n\pi+\pi\dfrac{2n\alpha\beta^2+2(2-n)\beta^2+2(n-3)\alpha\beta-(2n-1)\beta-\alpha+2}{\beta(1-\alpha)(\beta+1)}-\\ \quad-\dfrac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(\beta+1)}(t_0-2l\pi),\ t_2\leqslant t_0<t_3,\\ 2n\pi-\pi\dfrac{2(n-3)\beta^2+2n\alpha\beta^2-2(n-2)\alpha\beta-(2n-1)\beta-\alpha+2}{\beta(1+\alpha)(\beta-1)}-\\ \quad-\dfrac{2(\beta-\alpha)}{(1+\alpha)(\beta-1)}(t_0-2l\pi),\ t_3\leqslant t_0<2(l+1)\pi,\\ \quad n=1,\ 2,\ \ldots,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .\end{cases}\qquad(5)$$

В дальнейшем для простоты выкладок считаем $n=1$. Отметим, что как и в случае, рассмотренном в [1], здесь $\omega_1(t_0)$ — разрывная функция в отличие от [2].

2°. Пусть $\omega_m(t_0)$ — время обращения изображающей точки, исходящей в момент t_0 с линии (3) по системе (2), за m-ый оборот. Из сказанного выше ясно, что до тех пор, пока не произошло двойное переключение на линии (4), выполняются условия случая [2], а после двойного переключения — условия случая [1].

Укажем способ подсчета $\omega_m(t_0)$, например, для случая, когда в [2] $t_1+2i\pi\leqslant T_i<t_2+2i\pi$, $i=1, 2, \ldots, k-1$, где T_i — соответствующие моменты переключения на линии (3).

Пусть на k-ом обороте произошли два переключения на линии (4), T_k — время встречи изображающей точки с линией (3) после k-ого оборота. Так как до k-ого оборота изображающая точка движется по закону [2], имеем

$$T_k=\omega_1(T_{k-1})+T_{k-1},$$

где $\omega_1(T_{k-1})$ определяется по формуле (5), а $T_{k-1}=\omega_{k-1}(t_0)+\ldots+\omega_1(t_0)+t_0$, где $\omega_i(t_0)$ определяется из [2], $i=1, 2, \ldots, k-1$.

После этих подсчетов исследуем, какому временному интервалу принадлежит найденное T_k, и затем применяем соответствующую формулу для последовательности $(\omega_m(t_0))$ из [1]. Отметим, что

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ m>k}}\omega_m(T_k)=2\pi.$$

3°. Обозначим через $t_1^{(m)}$ — начальный момент времени, при котором $\tau_m^{(1)}=(2m-1)\pi+2l\pi$, $t_2^{(m)}$ — начальный момент времени, при котором $\tau_m^{(2)}=(2m+1)\pi+2l\pi$, где m — номер оборота, $m=1, 2, \ldots$.

Подсчеты показывают, что

$$t_1^{(m)}=\pi\frac{\beta+4\alpha\beta-\alpha-4}{2(\beta-\alpha)}+\pi\frac{\beta^2-4\alpha\beta^2-\alpha\beta-3\beta+3\alpha}{2\beta(\beta-\alpha)}\gamma^{m-1}+2l\pi,$$

$$t_2^{(m)}=\pi\frac{\beta+4\alpha\beta-\alpha-4}{2(\beta-\alpha)}+$$

$$+\pi\frac{\beta^2(1+\alpha)-5\alpha^2\beta-4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta-\alpha^2+\beta+3\alpha}{2\beta(1+\alpha)(\beta-\alpha)}\gamma^{m-1}+2l\pi,$$

где $\gamma=\frac{\alpha(\beta+1)}{\beta(\alpha+1)}$, $0<\gamma<1$, $m=1, 2, \ldots, l=0, 1, 2, \ldots,$

Изображающие точки, исходящие с линии (4) в момент $t_0\in[t_1^{(m-1)}, t_1^{(m)}[\cup]t_2^{(m)}, t_2^{(m-1)}]$, встретятся дважды с линией (4) на m-ом обороте. (Считаем $t_1^{(0)}=0$, $t_2^{(0)}=2\pi$). Заметим, что

$$\lim_{m\to\infty}t_1^{(m)}=\lim_{m\to\infty}t_2^{(m)}=\pi\frac{\beta+4\alpha\beta-\alpha-4}{2(\beta-\alpha)}+2l\pi.$$

Следовательно (см. [2]), только одна траектория с начальным моментом $t_n=\pi\frac{\beta+4\alpha\beta-\alpha-4}{2(\beta-\alpha)}+2l\pi$ нигде не будет претерпевать двойного переключения на линии (4).

Не существует периодических решений среди тех траекторий, которые на каком-либо из оборотов дважды встречаются с подвижной линией (4).

4°. Примеры.

1. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$; $t_0=\frac{5}{4}\pi$; $\omega_1(t_0)=2\pi$, а $\omega_m(t_0)\neq 2\pi$ при $m>1$.

2. $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=3$; $t_0=\frac{29}{18}\pi$; $\omega_m(t_0)=2\pi$, $m=1, 2, \ldots$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич Л. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 2, с. 54.
2. Альсевич Л. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1978, № 2, с. 70.

Поступила в редакцию
12.05.78.

Кафедра высшей математики