2. Катерниночкина Н. Н.— Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 3, с. 557.
3. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1. Под общей ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М., 1974.

Поступила в редакцию
11.01.79.

Кафедра МО ЭВМ

УДК 62—50

В. М. РАКЕЦКИЙ

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющим параметром:

$$\dot{x}=f(x, u, t),\ x(t_0)=x_0,\ u(t)\in U,\ t\in T=[t_0, t_1], \qquad (A)$$

где $f(x, u, t)$ — n-мерная функция; $x\in R^n$; $U\subset R^r$. Абсолютно непрерывную траекторию $x(t)$ будем называть A-допустимой, если существует такое управление (измеримое) $u(t)$, что пара $\{x(t), u(t)\}$ является решением системы (A). Пусть X — множество A-допустимых траекторий.

Аппроксимируем систему (A) последовательностью систем разностных уравнений:

$$x_N(t+h_N)=x_N(t)+h_Nf(x_N, u_N, t),$$
$$x_N(t_0)=x_0,\ u_N(t)\in U,\ t\in T_N,\ N=1, 2, \ldots, \qquad (A_N)$$

которые получаются из (A) при сеточном разбиении $T_N=\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N-1}\}$, $\tau_i=t_0+ih_N$, $h_N=(t_1-t_0)/h_N$, отрезка T и эйлеровой замене производной $\dot{x}(t)\approx[x(t+h)-x(t)]/h$. Траекторию $x_N(t)$ будем называть A_N-допустимой, если найдется такое управление $u_N(t)$, что пара $\{x_N(t), u_N(t)\}$ является решением системы (A_N). Обозначим через $\tilde{X}_N$ множество всех A_N-допустимых траекторий, $\tilde{X}=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\tilde{X}_N$.

Теорема. Пусть функция $f(x, u, t)$ непрерывна по (x, u, t), удовлетворяет условию Липшица по x с константой L, а множество U — компакт. Для того, чтобы множество $\tilde{X}$ было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы было ограничено множество X.

Доказательство. *Достаточность*. Так как множество X ограничено, то

$$\exists K: \forall x(\cdot)\in X \Rightarrow \| x(t) \| \leqslant K,\ t\in T. \qquad (1)$$

Пусть $u_N(t)$, $t\in T_N$,— последовательность управлений в системах (A_N), $N=1, 2, \ldots$ Положим

$$u^N(t)=u_N(\tau_k),\ t\in[\tau_k, \tau_{k+1}),\ k=\overline{0, N-1}, \qquad (2)$$

определив тем самым последовательность управлений $u^N(t)$, $t\in T$, для системы (A). Каждому из управлений $u^N(t)$ будет соответствовать A-допустимая траектория $x^N(t)$, $\| x^N(t) \| \leqslant K$, $t\in T$. В силу (1), (2), непрерывности $f(x, u, t)$ и компактности U, T следует:

$$\exists c_N=o(h_N): \| \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x^N(t), u^N(t), t)\,dt -$$
$$- h_Nf(x^N(\tau_k), u_N(\tau_k), \tau_k) \| \leqslant c_N. \qquad (3)$$

Так как $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x, то

$$\| x_N(\tau_{k+1})-x^N(\tau_{k+1}) \| \leqslant \| x_N(\tau_k)-x^N(\tau_k) \| +$$
$$+ \| \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x^N(t), u^N(t), t)\,dt - h_Nf(x_N, u_N, \tau_k) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| x_N(\tau_k) - x^N(\tau_k) \| + h_N \| f(x^N, u_N, \tau_k) - f(x_N, u_N, \tau_k) \| +$$
$$+ c_N \leqslant (1 + h_N L) \| x_N(\tau_k) - x^N(\tau_k) \| + c_N, \ 0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\| x_N(\tau_{k+1}) - x^N(\tau_{k+1}) \| \leqslant c_N \sum_{l=0}^{k} (1 + h_N L)^l, \ 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$

но

$$\sum_{l=0}^{k} (1 + h_N L)^l = [(1 + h_N L)^{k+1} - 1]/h_N L <$$
$$< [1 + L(t_1 - t_0)/N]^N / h_N L < e^{L(t_1 - t_0)}/h_N L,$$

поэтому

$$\| x_N(\tau_{k+1}) - x_N(\tau_{k+1}) \| \leqslant \frac{c_N}{h_N} \cdot \frac{e^{L(t_1 - t_0)}}{L}, \ 0 \leqslant k \leqslant N-1. \qquad (4)$$

Из (1), (3), (4) следует ограниченность множества X.

Необходимость. Множество $\tilde{X}$ ограничено, т. е.

$$\exists K : \forall N, \ x_N(\cdot) \in \tilde{X}_N \Rightarrow \| x_N(t) \| \leqslant K, \ t \in T_N. \qquad (5)$$

Пусть множество X не ограничено. Тогда существует такое измеримое управление $u(t) \in U$, $t \in T$, что для некоторого

$$\bar{t} \in T \Rightarrow \| x(\bar{t}) \| > K + \alpha, \ \alpha > 0. \qquad (6)$$

Согласно [1], найдется подпоследовательность A_N-допустимых траекторий $x_N(t)$, $N \to \infty$, $N \in \Lambda$, что

$$\max_{t \in T_N} \| x_N(t) - x(t) \| \to 0, \ N \to \infty, \ N \in \Lambda. \qquad (7)$$

Обозначим через τ^N такое $t \in T_N$, что $\bar{t} \in [t, t + h_N)$. В силу непрерывности $x(t)$

$$\| x(\tau^N) - x(\bar{t}) \| \to 0, \ N \to \infty, \ N \in \Lambda. \qquad (8)$$

Из (6)—(8) нетрудно получить противоречие с (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мордухович Б. Ш.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 431.

Поступила в редакцию
28.02.78.

Кафедра МОУ

УДК 517.926.4

Л. А. АЛЬСЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОЙ СПС

В R^2 рассмотрим СПС, заданную линейными системами

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 \end{aligned} \right| \qquad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\beta x_2 \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 \end{aligned} \right| \qquad (2)$$

и линиями переключения

$$x_1 > 0, \quad x_2 = 0, \qquad (3)$$

$$x_2 = -\frac{\cos t}{|\sin t|} x_1, \ x_1 \leqslant 0, \qquad (4)$$