

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ПУТЕМ ИССЛЕДОВАНИЯ НИЖНИХ ЕДИНИЦ И ВЕРХНИХ НУЛЕЙ

В настоящей работе доказываются некоторые утверждения, раскрывающие связь между нижними единицами, верхними нулями, минимальными (МДНФ) и кратчайшими дизъюнктивными нормальными формами (КДНФ) функции алгебры логики (ФАЛ). Полученные результаты могут быть использованы для решения задачи минимизации монотонных ФАЛ и для понижения перебора в случае минимизации произвольной ФАЛ.

Введем необходимые определения. Пусть F некоторая ФАЛ от n аргументов задана множествами M_0 и M_1 вершин n -мерного единичного куба B^n , где F принимает значение 0 и 1 соответственно. Заметим, что мы оперируем в общем случае частичными ФАЛ, а всюду определенные рассматриваются как частный случай, когда $M_0 \cup M_1 = B^n$. Поэтому в тех утверждениях, которые справедливы только для всюду определенных ФАЛ, будем обозначать функцию символом f . В тех же утверждениях, которые справедливы для любой частичной ФАЛ, будет использоваться символ F .

Обозначим $M_F = M_0 \cup M_1$. Понятия «нижняя единица» и «верхний нуль», примененные в [1, 2] при исследовании монотонных функций, предлагается использовать для исследования произвольных функций.

Вершина $\tilde{\alpha}$ называется нижней единицей (верхним нулем) функции F , если $F(\tilde{\alpha}) = 1$ ($F(\tilde{\alpha}) = 0$) и для любой $\tilde{\beta} \in M_F$ из того, что $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ ($\tilde{\beta} > \tilde{\alpha}$) следует, что $F(\tilde{\beta}) = 0$ ($F(\tilde{\beta}) = 1$). Обозначим через B_F (A_F) множество всех нижних единиц (верхних нулей) функции F .

Функция F называется монотонной, если для любых вершин $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, принадлежащих M_F , из того, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, следует, что $F(\tilde{\alpha}) \leq F(\tilde{\beta})$.

Легко проверить, что функция монотонна, тогда и только тогда, когда любая ее нижняя единица не меньше любого ее верхнего нуля.

Будем говорить, что элементарная конъюнкция $K_{\tilde{\beta}}$ соответствует вершине $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, если $\beta_i = 1$ тогда и только тогда, когда x_i входит в $K_{\tilde{\beta}}$.

Лемма. Если $\tilde{\beta} \in B_F$ и для любого $\tilde{\alpha} \in A_F$, $\tilde{\beta}$ не меньше, чем $\tilde{\alpha}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ импликанта функции F .

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $\tilde{\gamma}$, для которой $K_{\tilde{\beta}}(\tilde{\gamma}) = 1$, тогда $\tilde{\gamma} \geq \tilde{\beta}$. Предположим $F(\tilde{\gamma}) = 0$, тогда существует $\tilde{\alpha} \in A_F$, что $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\gamma}$ и, следовательно, $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\beta}$, что противоречит условиям леммы.

Теорема. Если $\tilde{\beta} \in B_F$ и для любого $\tilde{\alpha} \in A_F$, $\tilde{\beta}$ не меньше, чем $\tilde{\alpha}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ входит в любую МДНФ и хотя бы в одну КДНФ всюду определенной функции f .

Доказательство. По лемме $K_{\tilde{\beta}}$ — импликанта f и, следовательно, чтобы доказать теорему, достаточно (см. [3], с. 72), что нет таких слагаемых в сокращенной дизъюнктивной нормальной форме (S_K ДНФ) функции f , отличных от $K_{\tilde{\beta}}$ таких, что

$$\bigvee_{i=1}^R K_i \rightarrow K_{\beta}, R \geq 1.$$

Предположим противное, т. е. такие слагаемые существуют. Тогда, если удалить все буквы, входящие в K_{β} , по критерию поглощения ([3], с. 78) должно выполняться условие

$$\bigvee_{i=1}^R K_i^* \equiv 1$$

и поэтому существует индекс $j \in \{1, 2, \dots, R\}$, что $K_j^*(0) = 1$. Заметим, что в K_j^* не могут содержаться переменные без отрицания и, следовательно, если x_i входит в K_j , то она должна входить и в K_{β} .

Рассмотрим вершину $\tilde{\alpha}$ такую, что $K_{\tilde{\alpha}} = K_j^* (K_j = K_j^* \wedge K_j^*)$. Очевидно, $K_j(\tilde{\alpha}) = 1$ и, следовательно, $f(\tilde{\alpha}) = 1$. С другой стороны, в силу свойств K_j , $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$. Кроме того, $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\beta}$, ибо, если бы $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, то $K_{\tilde{\beta}}$ являлся бы частью K_j и, следовательно, K_j не было бы простым импликантом. Мы доказали, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а это противоречит тому, что $\tilde{\beta}$ нижняя единица. Теорема доказана.

Следствие. Если всюду определенная функция f монотонна, то формула

$$\bigvee_{\tilde{\beta} \in B_j} K_{\tilde{\beta}}$$

является МДНФ и КДНФ функции f .

Справедливость этого утверждения следует из теоремы и из факта, что для всюду определенных монотонных ФАЛ, МДНФ, КДНФ, СКДНФ единственны и совпадают.

Пример 1. Рассмотрим функцию f_1 , заданную множествами $M_1 = \{111, 011, 101, 110\}$ и $M_0 = B^n \setminus M_1$. Функция f_1 всюду определена, монотонна и $B_{f_1} = \{011, 101, 110\}$. Тогда в силу следствия

$$x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3$$

является МДНФ и КДНФ функции f_1 .

Пример 2. Рассмотрим функцию f_2 , заданную множествами $M_1 = \{010, 101, 110, 111\}$ и $M_0 = M_1 \setminus B^n$. Соответствующие множества нижних единиц и верхних нулей следующие: $B_{f_2} = \{010, 101\}$ $A_{f_2} = \{011, 100\}$. Видно, что 101 не меньше, чем 011 и 100. Следовательно, в силу теоремы $x_1 x_3$ входит в ядро функции f_2 .

Таким образом, исследуя верхние нули и нижние единицы, можно получить:

- 1) некоторые импликанты произвольной частичной ФАЛ (лемма);
- 2) часть ядра произвольной всюду определенной ФАЛ (теорема);
- 3) МДНФ и КДНФ произвольной монотонной всюду определенной ФАЛ (следствие).

Заметим, что обобщить теорему и следствие на случай частичных функций невозможно, так как существуют частичные монотонные функции, МДНФ и КДНФ которых содержат переменные с отрицанием. Например, функция, заданная множествами $M_0 = \{0101\}$ и $M_1 = \{0011, 1001\}$ монотонна, а ее единственная МДНФ и КДНФ равна $\bar{x}_2$.

В связи с этим представляет интерес задача определения класса частичных функций, МДНФ и КДНФ которых не содержат отрицаний над переменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробков В. К.—В сб.: Проблемы кибернетики, вып. 13.—М., 1965, с. 5.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющим параметром:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (A)$$

где $f(x, u, t)$ — n -мерная функция; $x \in R^n$; $U \subset R^r$. Абсолютно непрерывную траекторию $x(t)$ будем называть A -допустимой, если существует такое управление (измеримое) $u(t)$, что пара $\{x(t), u(t)\}$ является решением системы (A). Пусть X — множество A -допустимых траекторий.

Аппроксимируем систему (A) последовательностью систем разностных уравнений:

$$x_N(t+h_N) = x_N(t) + h_N f(x_N, u_N, t), \\
x_N(t_0) = x_0, \quad u_N(t) \in U, \quad t \in T_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (A_N)$$

которые получаются из (A) при сеточном разбиении $T_N = \{t_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}\}$, $\tau_i = t_0 + ih_N$, $h_N = (t_1 - t_0)/h_N$, отрезка T и эйлеровой замены производной $\dot{x}(t) \approx [x(t+h) - x(t)]/h$. Траекторию $x_N(t)$ будем называть A_N -допустимой, если найдется такое управление $u_N(t)$, что пара $\{x_N(t), u_N(t)\}$ является решением системы (A_N). Обозначим через $\bar{X}_N$ множество всех A_N -допустимых траекторий, $\bar{X} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bar{X}_N$.

Теорема. Пусть функция $f(x, u, t)$ непрерывна по (x, u, t) , удовлетворяет условию Липшица по x с константой L , а множество U — компакт. Для того, чтобы множество X было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы было ограничено множество $\bar{X}$.

Доказательство. *Достаточность.* Так как множество X ограничено, то

$$\exists K: \forall x(\cdot) \in X \Rightarrow \|x(t)\| \leq K, \quad t \in T. \quad (1)$$

Пусть $u_N(t)$, $t \in T_N$, — последовательность управлений в системах (A_N), $N = 1, 2, \dots$. Положим

$$u^N(t) = u_N(\tau_k), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2)$$

определив тем самым последовательность управлений $u^N(t)$, $t \in T$, для системы (A). Каждому из управлений $u^N(t)$ будет соответствовать A -допустимая траектория $x^N(t)$, $\|x^N(t)\| \leq K$, $t \in T$. В силу (1), (2), непрерывности $f(x, u, t)$ и компактности U , T следует:

$$\exists c_N = o(h_N): \left\| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x^N(t), u^N(t), t) dt - \right. \\
\left. - h_N f(x^N(\tau_k), u_N(\tau_k), \tau_k) \right\| \leq c_N. \quad (3)$$

Так как $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x , то

$$\|x_N(\tau_{k+1}) - x^N(\tau_{k+1})\| \leq \|x_N(\tau_k) - x^N(\tau_k)\| + \\
+ \left\| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x^N(t), u^N(t), t) dt - h_N f(x_N, u_N, \tau_k) \right\| \leq$$