Краткие сообщения

УДК 517.62.60

С. Н. ЛЯХОВЕЦ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Пусть объект управления описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^m A_i(t) x(t-h_i) + \sum_{j=1}^m C_j(t) \frac{dx(t-h_j)}{dt} + B(t) u(t), \\ t \in T = [0, t_1], t_1 > nh_m, x(t) \equiv 0, t \in [-h_m, 0], \end{cases}$$

где $x' = \{x_1, \dots, x_n\}$, $u' = \{u_1, \dots, u_r\}$, $u(t) \in U$, $t \in T$, U — множество кусочно-непрерывных функций (или любое другое плотное в $L_2[0, t_1]$ множество), $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$, $m \geq 0$, $A_i(t)$, $i = \overline{0, m}$, $C_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, $B(t)$ — матрицы с элементами из $L_2[0, t_1]$ соответствующих размерностей.

Определение [1]. Систему (1) назовем управляемой в пространстве $M = L_2[t_1 - h_m, t_1] \times H$, $H \subset R^n$, если наблюдение $\{x(t), t \in [t_1 - h_m, t_1], x(t_1)\}$ замечает аффинное подпространство плотное в M , когда u пробегает все множество U .

Аналогично дается определение управляемости в пространстве $L_2[t_1 - h_m, t_1]$ (под наблюдением понимаем $\{x(t), t \in [t_1 - h_m, t_1]\}$).

Управляемость в L_2 и $L_2 \times R^n$ стационарных систем с запаздыванием рассматривалась в работах [2—4]. Проверка результатов указанных работ представляет определенные трудности. В данной статье получены параметрические условия управляемости стационарной системы (1) в пространствах M и $L_2[t_1 - h_m, t_1]$.

Рассмотрим функционал $J(u) = g'x(t_1) + \int_{t_1 - h_m}^{t_1} p'(t)x(t)dt$, где $g \in H$.

$H = \{g \in R^n : g' C_k(t_1) = 0, k = \overline{1, m}\}$, $p(t) \in L_2[t_1 - h_m, t_1]$. Потребуем, чтобы абсолютно непрерывная n -вектор функция $\psi(t)$, $t \in T$, удовлетворяла системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}'(t) + \sum_{i=0}^k \psi'(t+h_i) A_i(t+h_i) - \sum_{j=1}^k \frac{d}{dt} [\dot{\psi}'(t+h_j) C_j(t+h_j)] + p(t) = 0, \\ t \in [t_1 - h_{k+1}, t_1 - h_k], k = 0, 1, \dots, m-1, \\ \psi'(t) = \sum_{i=0}^m \psi'(t+h_i) A_i(t+h_i) - \sum_{j=1}^m \frac{d}{dt} [\dot{\psi}'(t+h_j) C_j(t+h_j)] = 0, \\ t \in [0, t_1 - h_m], \psi(t_1) = g. \end{cases} \quad (2)$$

С учетом $g \in H$ и (2) $J(u)$ примет вид

$$J(u) = \int_0^{t_1} \psi'(t) B(t) u(t) dt. \quad (3)$$

Из теоремы Хана-Банаха и (3) следует, что объект (1) управляем в M тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} \text{система (2),} \\ \psi'(t) B(t) = 0, t \in T, \end{cases} \quad (4)$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть $A_i(t) = A_i$, $i = \overline{0, m}$, $C_j(t) = C_j$, $j = \overline{1, m}$, $B(t) = B$.

Теорема. Для управляемости стационарной системы (1) в пространствах M и $L_2[\bar{t}_1 - h_m, t_1]$ достаточно, чтобы

1) $\text{rank} \left[\lambda E + \sum_{i=0}^m \exp(\lambda h_i) A_i - \lambda \sum_{j=1}^m \exp(\lambda h_j) C_j, B \right] = n$ при всех комплексных λ ;

2) $\text{rank} [A_m - \lambda C_m, B] = n$ хотя бы при одном комплексном λ .

Доказательство. В силу первого условия заключаем, что решение системы (4) обладает свойством $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, t_1 - nh_m]$ [5]. Покажем, что $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, t_1]$. Уравнение $\dot{\psi}'(t) + \sum_{i=0}^m \psi'(t + h_i) A_i -$

$-\sum_{j=1}^m \psi'(t + h_j) C_j = 0$ при $t \in [\bar{t} - h_m, \bar{t} - h_{m-1}]$ дает $\psi'(t + h_m) A_m - \psi'(t + h_m) C_m = 0$. Имеем $\psi'(t) A_m - \psi'(t) C_m = 0$, $\psi'(t) B = 0$, $t \in [\bar{t}, \bar{t} + h_m - h_{m-1}]$. Выполнение условия 2) означает, что последним соотношениям не могут удовлетворять произвольные функции [6], и, следовательно, $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, \bar{t} + h_m - h_{m-1}]$, так как $\psi(\bar{t}) = 0$. Аналогично устанавливаем, что $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t} + h_m - h_{m-1}, \bar{t} - 2h_{m-1}]$. Через конечное число шагов получаем требуемый результат: $\psi(t) \equiv 0$, $t \in [\bar{t}, t_1]$.

Доказательство в случае пространства $L_2[t_1 - h_m, t_1]$ не меняется, достаточно лишь рассуждения, предшествующие теореме, провести с $g=0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что второе условие теоремы является и необходимым для управляемости в $L_2[t_1 - h_m, t_1]$ и M . Для обоих пространств первое условие в общем случае необходимым не будет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М., 1972, с. 214.
2. Минюк С. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех., 1972, № 1, с. 8.
3. Manitius A. and Triggiani R.— SIAM J. Control and Optim., 1978, v. 16, № 4.
4. Куперман Л. М.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 10.
5. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения.— М., 1967, с. 205.
6. Фрезер Р., Дуикан В., Коллар А. Теория матриц и ее приложения.— М., 1950.