которая дает решение исходной задачи, можно получить независимо от ε-задачи. Достаточно при решении задачи (1), (2) индекс l удаляемого из базиса вектора при переходе от одного опорного плана к другому определять с помощью правила, полученного для ε-задачи при доказательстве леммы 2. Такой выбор индекса l устраняет возможность зацикливания.

В заключение отметим, что нуждается также в исправлении в [8, с. 24] доказательство предложения 2 о вырожденных задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данциг Дж. Линейное программирование.— М., 1966, с. 228.
2. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования.— М., 1961, 1964.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование.— М., 1963, 1969.
4. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М., 1975, с. 101.
5. Абрамов Л. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование.— Л., 1976, с. 118.
6. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование.— М., 1964, с. 71.
7. Гасс С. Линейное программирование.— М., 1964.
8. Козал П. Т. Симплекс-метод.— Минск, 1968.

Поступила в редакцию
03.07.78.

Кафедра высшей алгебры

УДК 517.968

Ф. В. ЧУМАКОВ, И. Л. ВАСИЛЬЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ НА ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

В последние два десятилетия решено большое число интегральных уравнений, являющихся обобщением в различных направлениях хорошо известного классического уравнения Абеля [1—6]. Во всех случаях, кроме [5], контуром интегрирования является разомкнутая дуга. В работе [5] рассматриваются некоторые уравнения со степенным ядром на замкнутом контуре. В частности, дается решение в замкнутой форме уравнения первого рода

$$\int_c^t \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + k\int_t^c \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = f(t) \qquad (1)$$

в случае $k \neq 1,\ e^{-2\pi\alpha i}$. В настоящей работе дается в квадратурах решение уравнения (1) при $k=1,\ e^{-2\pi\alpha i}$.

1. Вспомогательные утверждения. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения, легко получаемые путем небольшого изменения теоремы об аналитичности интеграла по параметру [7, с. 62], [1, с. 17].

Теорема А. Пусть однозначная функция $\varphi^+(z, s)$ аналитична по z в области D^+, ограниченной простым замкнутым контуром, и непрерывна по s на некоторой спрямляемой кривой Г. Если функция $f(s)$ непрерывна на Г за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка, то функция $F^+(z) = \int_\Gamma \varphi^+(z, s) f(s)\,ds$ является аналитической в области D^+.

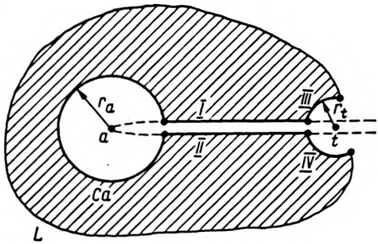
Теорема Б. Пусть однозначная функция $\varphi^-(z, s)$ аналитична по z в области D^-, представляющей собой плоскость $\bar{C}$ с выброшенной областью, ограниченной простым замкнутым контуром, и непрерывна по s на некоторой спрямляемой кривой Г. Если функция $f(s)$ непрерывна на Г, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка, то функция $F^-(z)=\int\limits_\Gamma \varphi^-(z,\,s)\,f(s)\,ds$ является аналитической в области D^-. Причем, если $\varphi^-(z,\,s)$ при $z\to\infty$ обращается в нуль некоторого порядка, то $F^-(z)$ на бесконечности имеет нуль того же порядка.

2. Уравнение Абеля с внутренним весом. Пусть замкнутый гладкий контур L разбивает плоскость $\bar{C}$ на две области D^+ и D^-. Будем считать, что точка $z=0$ находится в D^+.

Рассмотрим уравнение

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}=f(t), \tag{2}$$

где $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $a\in D^+$, $f(t)$ — заданная функция, интегрирование ведется по контуру L в положительном направлении, начиная с точки t. Будем искать решение $\varphi(t)$ уравнения (2) в классе функций, удовлетворяющих на контуре L условию Гельдера, в виде разности $\varphi(t)=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$ предельных значений функций $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ $(\varphi^-(\infty)=0)$ аналитических соответственно в областях D^+ и D^-.



Выведем вспомогательные соотношения, связывающие интегралы по замкнутому контуру с интегралами по разомкнутому контуру (см. рисунок).

Выделим регулярную в заштрихованной области ветвь функции $(z-a)^{-\beta}(t-z)^{-\alpha}$, проводя в плоскости разрез, соединяющий точки a, t и задавая значение этой функции в некоторой точке плоскости, отличной от a, t. Вырежем точки a, t дугами окружностей соответственно радиусов r_a, r_t. Рассмотрим в заштрихованной области аналитическую функцию $F(z)=(z-a)^{-\beta}(t-z)^{-\alpha}\varphi^+(z)$. По теореме Коши

$$\int\limits_{r_a} F(z)\,dz+\int\limits_{\mathrm{I}} F(z)\,dz+\int\limits_{\mathrm{III}} F(z)\,dz+\int\limits_{L'} F(z)\,dz+\int\limits_{\mathrm{IV}} F(z)\,dz+\int\limits_{\mathrm{II}} F(z)\,dz=0.$$

Здесь L' — часть контура L, входящая в границу заштрихованной области. Функция $F(z)$ в точках a, t может обращаться в ∞ интегрируемого порядка. Учитывая это и то, что $\int\limits_{\mathrm{II}} F(z)\,dz=-e^{-2\pi\beta i}\int\limits_{\mathrm{I}} \hat{F}(z)\,dz$ (здесь $\hat{F}(z)$ — значение F на I), при $r_a\to 0$, $r_t\to 0$ получим

$$\int\limits_L \frac{\varphi^+(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\,\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}=-2ie^{-\beta\pi i}\sin\beta\pi\int\limits_a^t \frac{\varphi^+(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\,\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}. \tag{3}$$

Рассуждая аналогичным образом относительно области D^-, получаем

$$\int\limits_L \frac{\varphi^-(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}=-2ie^{-(\alpha+\beta)\pi i}\sin(\alpha+\beta)\pi\int\limits_\infty^t \frac{\varphi^-(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}. \tag{4}$$

Пусть теперь $\tau=a+s(t-a)$. Тогда

$$\int\limits_a^t \frac{\varphi^+(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}=(t-a)^{1-\beta-\alpha}\int\limits_0^1 \frac{\varphi^+(a+s(t-a))\,ds}{s^\beta(1-s)^\alpha}=$$

$$=(t-a)^{1-\beta-\alpha}\Phi^+(t), \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\varphi^-(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = (t-a)^{1-\beta-\alpha}\int_{-\infty}^{1}\frac{\varphi^-(a+s(t-a))\,ds}{s^\beta(1-s)^\alpha} =$$
$$= (t-a)^{1-\beta-\alpha}\Phi^-(t), \quad (\Phi^-(\infty)=0), \tag{6}$$

$\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ — предельные значения некоторых функций, аналитических соответственно в D^+ и D^-. Здесь мы воспользовались теоремой А (в случае (5) и теоремой Б (в случае (6)). Перепишем теперь уравнение (2) в виде

$$\int_L \frac{\varphi^+(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} - \int_L \frac{\varphi^-(\tau)}{(\tau-a)^\beta}\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = f(t). \tag{2'}$$

Учитывая (3), (4) и подставляя в (2′) выражения интегралов через предельные значения аналитических функций (5), (6), придем к краевой задаче Римана

$$\mu\Phi^+(t) - \nu\Phi^-(t) = (t-a)^{\alpha+\beta-1}f(t), \tag{7}$$
$$\mu = -2ie^{-\beta\pi i}\sin\beta\pi,\quad \nu = -2ie^{-(\alpha+\beta)\pi i}\sin(\alpha+\beta)\pi.$$

Решение последней выписывается в виде $\Phi^+(z) = \frac{1}{\mu}\Psi^+(z)$, $\Phi^-(z) = \frac{1}{\nu}\Psi^-(z)$, где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(\tau-a)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\,d\tau}{\tau-z}. \tag{8}$$

Подставляя в (5), (6) предельные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$, путем обращения интегралов Абеля найдем искомое решение $\varphi(t)=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$. Легко видеть, что формула для нахождения решения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}(t-a)^\beta\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu}\int_a^t \frac{\Psi^+(\tau)(\tau-a)^{1-\beta-\alpha}d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^-(\tau)(\tau-a)^{1-\beta-\alpha}d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right), \tag{9}$$

где $\Psi^+(t)$, $\Psi^-(t)$ — предельные значения интеграла типа Коши (8). По каждому решению $\varphi(t)$ уравнения (2) можно построить (формулы (5), (6)) решение задачи Римана (7), и обратно. В этом смысле задача (7) эквивалентна уравнению (2).

3. Вырожденные случаи уравнения типа Абеля с внутренним весом. Уравнение (2) при $\beta=0$ представляет собой заданное на замкнутом контуре уравнение Абеля

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = f(t), \tag{10}$$

которое можно получить из (1) при $k=1$. Петерс его не рассматривал в силу того, что (10) сводится к вырожденному случаю краевой задачи Римана, решение которой было дано в работе [2] в 1966 г. и не вошло в английский перевод монографии [1]. В силу общей теории вырожденной задачи Римана [1, 2] $\Phi^+(t)$ в (7) можно брать произвольно. Решение (10) получается из (9) и имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{d}{dt}\left(\int_a^t \frac{\Phi^+(\tau)(\tau-a)^{1-\alpha}d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right). \tag{11'}$$

Первый интеграл в (11′) есть предельное значение аналитической в D^- функции (по теореме А). В силу произвольности $\Phi^+(t)$ формулу (11′) можно записать в виде

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) + \frac{e^{\alpha\pi i}}{2\pi i}\cdot\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \tag{11}$$

Здесь $\varphi^+(t)$ — предельное значение произвольной аналитической в D^+ функции. Из (11) вытекает, что для разрешимости (10) в искомом классе функций необходимо и достаточно, чтобы свободный член уравнения $f(t) = (t-a)^{1-\alpha}F^-(t)$, где $F^-(t)$ — предельное значение функции, аналитической в D^- $(F^-(\infty) = 0)$.

Если $\beta = 1-\alpha$, то коэффициент ν задачи Римана (7) равен 0, и способ, предложенный Петерсом, здесь не применим. Рассуждая аналогично, получим следующую формулу для решения (2):

$$\varphi(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}(t-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu}\int_a^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \int_\infty^t \frac{\Phi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right). \qquad (12')$$

Из (12′) вытекает, что уравнение (2) разрешимо в этом случае тогда и только тогда, когда $f(t)$ является предельным значением аналитической в D^+ функции. Применив к второму интегралу в (12′) теорему Б, получим

$$\varphi(t) = \frac{e^{\alpha\pi i}}{2\pi i}(t-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - \varphi^-(t), \qquad (12)$$

где $\varphi^-(t)$ — предельное значение произвольной аналитической в D^- функции $(\varphi^-(\infty) = 0)$.

Пример. $\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = t^{-\alpha-n}$, L — замкнутый контур, содержащий внутри начало координат. В силу (3), (4) $(\beta = 0)$ имеем $2i\sin\alpha\pi\cdot e^{-\alpha\pi i}\int_\infty^t \frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = t^{-\alpha-n}$. Отсюда

$$\varphi^-(t) = \frac{e^{\alpha\pi i}}{2\pi i}\cdot\frac{d}{dt}\int_\infty^t \frac{\tau^{-\alpha-n}d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{ne^{\alpha\pi i}}{2\pi i}t^{-n-1}\int_0^1 \frac{s^{n-1}ds}{(s-1)^{1-\alpha}} = -\frac{n!\,t^{-n-1}}{2\pi i\prod\limits_{j=0}^{n-1}(\alpha+j)}.$$

Общее решение приведенного уравнения будет

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) + t^{-n-1}\frac{n!}{2\pi i\prod\limits_{j=0}^{n-1}(\alpha+j)},$$

$\varphi^+(t)$ — предельное значение произвольной аналитической в D^+ функции.

4. Уравнение

$$\int_c^t \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + e^{-2\alpha\pi i}\int_t^c \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = f(t) \qquad (13)$$

(c — некоторая фиксированная точка на контуре L; $f(t)$ — заданная функция), так же как и предыдущее, сводится к вырожденному случаю задачи Римана и не может быть решено способом Петерса. Дадим решение его в замкнутой форме, опираясь на изложенный выше прием. Запишем уравнение (13) в виде

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - (1-e^{-2\alpha\pi i})\int_t^c \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = f(t). \qquad (14)$$

Искать гельдеровское решение будем в виде разности $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$. Так как

$$\int_L \frac{\varphi^+(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = 0, \quad \int_L \frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = -2i\sin\alpha\pi\cdot e^{-\alpha\pi i}\int_\infty^t \frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}},$$

то из (14) получим

$$\int_{\infty}^{c} \frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} - \int_{t}^{c} \frac{\varphi^+(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = -\frac{ie^{\alpha\pi i}f(t)}{2\sin\alpha\pi}. \tag{15}$$

$$\int_{t}^{c} \frac{\varphi^+(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = (c-t)^{1-\alpha}\Phi^+(t) \text{ (по теореме А)}, \tag{16}$$

$$\int_{\infty}^{c} \frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = (c-t)^{1-\alpha}\Phi^-(t),\ \Phi^-(\infty) = 0 \text{ (по теореме Б)}.$$

От (15) приходим к задаче о скачке:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = -\frac{e^{\alpha\pi i}f(t)}{2i\sin\alpha\pi}(c-t)^{\alpha-1}. \tag{17}$$

Для того чтобы решение этой задачи принадлежало искомому классу, необходимо и достаточно, чтобы f имела вид $f(t) = (c-t)^{1-\alpha}f^*(t)$, $f^*(t) \in H(L)$. Подставляя в (16) $\Phi^+(t)$ и обращая интеграл Абеля, найдем

$$\varphi^+(t) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_{t}^{c} \frac{\Phi^+(\tau)(c-\tau)^{1-\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau, \tag{18}$$

$\varphi^-(t)$ найдем из (17). Пусть $X(z) = (z-c)^{\alpha-1}\int_{\infty}^{c}\frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(z-\tau)^\alpha}$, $X(\infty) = 0$.

Тогда на дуге (c, ∞)

$$X^+(t) = (t-c)^{\alpha-1}\left(\int_{t}^{c}\frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \int_{\infty}^{t}\frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\right),$$

$$X^-(t) = (t-c)^{\alpha-1}\left(\int_{t}^{c}\frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + e^{2\alpha\pi i}\int_{\infty}^{t}\frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\right).$$

Выражение (17) примет вид

$$X^+(t) = \Phi^-(t), \tag{19}$$

где $\Phi^-(t)$ уже известная функция. $X^-(t)$ выбираем произвольно [2]. Из представления

$$\int_{\infty}^{t}\frac{\varphi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = -\frac{(t-c)^{1-\alpha}}{2i\sin\alpha\pi}e^{-\alpha\pi i}(X^+(t) - X^-(t))$$

в силу произвольного выбора $X^-(t)$ и теоремы Б следует, что $\varphi^-(t)$ есть предельное значение произвольной аналитической в D^- функции, исчезающей на бесконечности. Таким образом, решение приведенного здесь уравнения дается формулой

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_{t}^{c}\frac{\Phi^+(\tau)(c-\tau)^{1-\alpha}\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \varphi^-(t). \tag{20}$$

Авторы выражают глубокую благодарность академику Ф. Д. Гахову за ценное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1963.
2. Гахов Ф. Д.— Дифференц. уравнения, 1966, т. 2, № 4.
3. Самко С. Г.— Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, № 2.
4. Karleman T.— Mat. Z., 1922, v. 15.
5. Peters A. C.— Comm. Pure and Appl. Math, 1969, v. XXII.
6. Wolfersdorf L.— Math. Zeit, 1965, B. 90, № 1.
7. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М., 1973.

Поступила в редакцию 26.09.78.

Кафедра теории функций