Если задача $\hat{P}$ лежит в некоторой достаточно малой δ_1-окрестности $(0<\delta_1\leqslant\delta)$ задачи P, то

$$|\varphi(y(\cdot),\ z(\cdot))-\hat{\varphi}(x_{l(\hat{P})}(\cdot),\ \dot{x}_{l(\hat{P})}(\cdot)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

для всех $(y(\cdot),\ z(\cdot))\in C_n(T)\times L_n^1(T)$, $\|y(\cdot)-x_{l(\hat{P})}(\cdot)\|\leqslant\gamma$, $\|z(\cdot)-$ $-\dot{x}_{l(\hat{P})}(\cdot)\|\leqslant\gamma$, где γ — достаточно малая положительная постоянная. Согласно предложению 1, существует δ_2, $0<\delta_2\leqslant\delta_1$, такое, что для каждого решения $x_{l(\hat{P})}(\cdot)$ можно найти решение $\bar{x}_l(\cdot):T\to R^n$ задачи (2), удовлетворяющее условиям

$$\|x_{l(\hat{P})}(\cdot)-\bar{x}_l(\cdot)\|\leqslant\gamma,\ \|\dot{x}_{l(\hat{P})}(\cdot)-\dot{\bar{x}}_l(\cdot)\|\leqslant\gamma, \tag{14}$$

если $\alpha(G_0,\ \hat{G}_0)\leqslant\delta_2$, $\alpha(F(t,\ x),\ \hat{F}(t,\ x))\leqslant\delta_2$ при всех $(t,\ x)\in T\times R^n$. Из (12)—(14) получаем

$$M-\hat{M}\leqslant\varepsilon \tag{15}$$

для любой задачи $\hat{P}\in V_{\delta_2}(P)$.

Аналогично доказывается, что

$$\hat{M}-M\leqslant\varepsilon \tag{16}$$

для любой задачи $\hat{P}$, лежащей в некоторой достаточно малой δ_3-окрестности $(0<\delta_3\leqslant\delta_2)$ задачи P. Из неравенств (15), (16) следует, что $|M-\hat{M}|\leqslant\varepsilon$ для всех задач $\hat{P}\in V_{\delta_3}(P)$.

Замечание. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Найти нижнюю грань $\varkappa$ функционала $\varphi(x(\cdot))=g(x(t_1))$ на множестве абсолютно непрерывных функций $x(\cdot):T\to R^n$, удовлетворяющих условиям $\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ u(t)$ почти при всех $t\in T$, $x(t_0)\in G_0$, G_0 — компакт в R^n, $u(t)\in Q(t,\ x(t))$, $u(\cdot)$ — измеримая на T функция.

Предположим, что функция $f:T\times R^n\times R^r\to R^n$ измерима по t при каждых $(x,\ u)$ и непрерывна по $(x,\ u)$ при каждом t; многозначное отображение $Q:T\times R^n\to R^n$ измеримо по t при каждом x и непрерывно по x при каждом t; множество $Q(t,\ x)$ непусто и замкнуто при всех $(t,\ x)$; $g:R^n\to R$ — непрерывная функция; $(t,\ x)\to F_1(t,\ x)=\{y\in R^n|y=f(t,\ x,\ u),$ $u\in Q(t,\ x)\}$. Значение M задачи $P=\{\varphi_1,\ F_1,\ G_0\}$ равно $\varkappa$.

Таким образом, рассматриваемая в замечании задача оптимального управления будет корректной, если многозначное отображение F_1 удовлетворяет условиям теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Ф. М.— Изв. вузов СССР. Математика, 1958, № 4, с. 113.
2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.— М., 1972.
3. Петров Н. Н.— Вестн. ЛГУ, 1974, № 7, с. 60.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М., 1974.
5. Филиппов А. Ф.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1967, № 3, с. 16.
6. Antosiewicz H. A., Cellina A.— J. Different. Equat., 1975, v. 19, № 2.
7. Pianigiani Giulio — J. Different. Equat., 1977, v. 25, № 1.

Поступила в редакцию
07.06.78.

Кафедра высшей математики ФМП

УДК 512.25

П. Т. КОЗЕЛ

О ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При решении симплекс-методом вырожденных задач линейного программирования возможно зацикливание; способы устранения его впервые получены Данцигом и Чарнсом [1]. Большое внимание вопросам вырожденности уделяется в монографиях [2 (1961), 3 (1963)]. Ссылки на эти работы в связи с вопросами вырожденности содержатся в различных пособиях по математическому программированию [2 (1964), 3 (1969), 4—6].

В данной заметке показывается, что в [2, 3] вырожденные задачи рассмотрены недостаточно строго, дается также простое обоснование метода Чарнса для устранения зацикливания.

1. Рассмотрим вырожденную задачу

$$z=c_1x_1+\ldots+c_nx_n\to\min \tag{1}$$

при условиях

$$x_1A_1+\ldots+x_nA_n=B,\ x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $A_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$, $j=\overline{1,n}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$, ранг $(A_1\ldots A_n)=m<n$. Пусть

$$B(\varepsilon)=B+\varepsilon A_1+\ldots+\varepsilon^nA_n,\ \varepsilon>0, \tag{3}$$

либо

$$B(\varepsilon)=B+\varepsilon R_1+\ldots+\varepsilon^mR_m,\ \varepsilon>0, \tag{4}$$

где $R_1,\ldots,R_m$ — произвольная линейно-независимая система m-мерных векторов.

Для обоснования конечности симплекс-метода для вырожденной задачи (1), (2) в [2] рассматривается ε-задача

$$z=c_1x_1+\ldots+c_nx_n\to\min \tag{5}$$

при условиях

$$x_1A_1+\ldots+x_nA_n=B(\varepsilon),\ x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где в [2] $B(\varepsilon)$ вида (3), а в [3] вида (4). Для ε-задачи в [2 (1961), с. 208], а в [3 (1963), с. 259] формулируется утверждение: «существует такое $\varepsilon_1>0$, что ε-задача (5), (6) при $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ является невырожденной». Для ε-задачи с $B(\varepsilon)$ вида (4), рассматриваемой в [3], такое утверждение не имеет места. Как видно из примеров, векторы $R_1,\ldots,R_m$ не могут быть произвольными. Действительно, система $x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $x_j\geqslant 0$, $j=\overline{1,3}$ совместна и обладает вырожденными планами, например, (0, 1, 0). Однако соответствующая ε-система с $B(\varepsilon)$ вида (4), где $R_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\varepsilon\\1+\varepsilon^2\end{pmatrix}$, $x_j\geqslant 0$, $j=\overline{1,3}$), несовместна при любом $\varepsilon>0$. Если задача (1), (2) с двусторонними ограничениями на переменные, то векторы $R_1,\ldots,R_m$ также не могут быть произвольными. Это видно, если в приведенном примере вместо $x_j\geqslant 0$ положим $0\leqslant x_j\leqslant 1$, $j=\overline{1,3}$. В [2], где рассматривается ε-задача с $B(\varepsilon)$ вида (3), доказательство утверждения также является неполным, нет обоснования совместности ε-системы. Здесь этот пробел легко устраним, если задача (1), (2) обладает опорным планом, базис которого составляют векторы $A_1,\ldots,A_m$. Но в [2] такого предположения не делается.

2. Приведем обоснование метода Чарнса для устранения зацикливания. Пусть $X=(x_1,\ldots,x_n)$ — опорный план задачи (1), (2). Предположим (это не является ограничением общности), что базис плана X состоит из первых m векторов $A_1,\ldots,A_m$. Тогда справедливо равенство

$$x_1A_1+\ldots+x_mA_m=B\,(x_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,m}). \tag{7}$$

Рассмотрим ε-задачу (5), (6), где $B(\varepsilon)$ вида (3).

Лемма 1. Существует $\varepsilon_1>0$ такое, что базис плана X является базисом невырожденного плана $X(\varepsilon)=(x_1(\varepsilon),\ldots,x_m(\varepsilon),0,\ldots,0)$ ε-задачи при любом $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$.

Доказательство. Из $x_1(\varepsilon)A_1+\ldots+x_m(\varepsilon)A_m=B(\varepsilon)$ имеем

$$x_i(\varepsilon)=x_i+\varepsilon^i+\varepsilon^{m+1}x_{i\,m+1}+\ldots+\varepsilon^nx_{in},\ i=\overline{1,m}, \tag{8}$$

где x_i — коэффициенты равенства (7), x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ — коэффициенты равенств $x_{1j}A_1+\ldots+x_{mj}A_m=A_j$. Пусть $0<\varepsilon<1$, $a=\max|x_{ij}|$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{m+1,n}$, тогда $x_i(\varepsilon)\geqslant x_i+\varepsilon^i-a\varepsilon^{m+1}\dfrac{1-\varepsilon^{n-m}}{1-\varepsilon}>x_i+\varepsilon^i-\dfrac{a\varepsilon^{i+1}}{1-\varepsilon}=$

$= x_i + \varepsilon^i\left(1 - \frac{a\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. Если $\varepsilon_1 < \frac{1}{1+a}$, то $x_i(\varepsilon) > 0$, $i = \overline{1, m}$, при любом $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$.

Лемма 2. Пусть решение ε-задачи симплекс-методом начинается с построенного в лемме 1 плана $X(\varepsilon)$. Существует $\varepsilon_2 > 0$ $(\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1)$, что при любом $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ за конечное число арифметических действий найдем оптимальный план ε-задачи, либо установим, что оптимального плана не существует.

Доказательство. Покажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в процессе решения будут получаться невырожденные планы, а невырожденных планов при любом ε не больше, чем C_n^m. Предположим, что уже получен план $Y(\varepsilon)$ с базисом $A_{s_1}, \ldots, A_{s_m}$, невырожденный при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon'$. Базисные координаты его будут выражаться формулами вида (8)

$$y_i(\varepsilon) = y_i + \varepsilon x_{i1} + \ldots + \varepsilon^n x_{in}, \; i \in I = \{s_1, \ldots, s_m\}, \tag{9}$$

где y_i, x_{ij} — коэффициенты равенств

$$\sum_{i \in I} y_i A_i = B, \; \sum_{i \in I} x_{ij} A_i = A_j, \; j = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Если относительная оценка плана $Y(\varepsilon)$ $z_k - c_k > 0$ и не все $x_{ik} \leqslant 0$, то переходим к новому опорному плану $Y'(\varepsilon)$, координаты которого равны $y_i'(\varepsilon) = y_i(\varepsilon) - \frac{y_l(\varepsilon)}{x_{lk}} x_{ik}$, $i \neq k$, $y_k'(\varepsilon) = \frac{y_l(\varepsilon)}{x_{lk}}$, где $\frac{y_l(\varepsilon)}{x_{lk}} = \min\limits_{x_{ik} > 0} \frac{y_i(\varepsilon)}{x_{ik}}$ [7, гл. 4, теорема 1]. Покажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ минимум отношений $\frac{y_i(\varepsilon)}{x_{ik}}$, $x_{ik} > 0$, будет достигаться только для одного индекса, откуда будет следовать невырожденность плана $Y'(\varepsilon)$. Достаточно показать, что эти отношения попарно различны. Из (9) легко видеть, что если $\frac{y_l}{x_{lk}} < \frac{y_s}{x_{sk}}$ или $\frac{y_l}{x_{lk}} = \frac{y_s}{x_{sk}}$, $\frac{x_{lj}}{x_{lk}} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}}$, $j = \overline{1, t-1}$, $t \leqslant n$, но $\frac{x_{lt}}{x_{lk}} < \frac{x_{st}}{x_{sk}}$, то $\frac{y_l(\varepsilon)}{x_{lk}} < \frac{y_s(\varepsilon)}{x_{sk}}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Осталось показать, что равенство $\frac{x_{lj}}{x_{lk}} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}}$, $j = \overline{1, n}$, невозможно. Из этого равенства следует, что координаты x_{lj} и x_{sj} векторов $X_j = \begin{pmatrix} x_{s_1 j} \\ \vdots \\ x_{s_m j} \end{pmatrix}$, $j = \overline{1, n}$, пропорциональны, однако, из (10) ранг $(X_1 \ldots X_n) =$ ранг $(A_1 \ldots A_n) = m$. Таким образом, существует $\varepsilon'' \leqslant \varepsilon'$, что $Y'(\varepsilon)$ — невырожденный план для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon''$. При доказательстве леммы 2 получено правило определения индекса l, для которого достигается минимум отношений $\frac{y_i(\varepsilon)}{x_{ik}}$, $x_{ik} > 0$, для достаточно малых $\varepsilon > 0$. В последовательности $\min\limits_{x_{ik} > 0} \frac{y_i}{x_{ik}}$, $\min\limits_{x_{ik} > 0} \frac{x_{ij}}{x_{ik}}$, $j = \overline{1, n}$, где каждое отношение рассматривается для индексов i, дающих минимум предыдущему отношению, по меньшей мере, один из минимумов достигается только для одного индекса; l-индекс, при котором достигается первый из таких минимумов.

Отметим, что вектор с индексом l удаляется из базиса при переходе от плана $Y(\varepsilon)$ к плану $Y'(\varepsilon)$.

Последовательности планов, получаемых при решении ε-задачи соответствует последовательность опорных планов исходной задачи: из (9) и (10) следует, что если $Y(\varepsilon)$ — невырожденный план для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon''$, то $y_i \geqslant 0$, $i \in I$, являются базисными координатами плана Y задачи (1), (2). Оптимальному плану ε-задачи будет соответствовать оптимальный план задачи (1), (2), так как их относительные оценки будут совпадать. Если ε-задача не обладает оптимальным планом, то для некоторого невырожденного плана $Y(\varepsilon)$ $z_k - c_k > 0$ и все $x_{ik} \leqslant 0$. Это будет иметь место и для соответствующего плана Y задачи (1), (2). Следовательно, она также не обладает оптимальным планом. Ясно, что последовательность планов, которая дает решение исходной задачи, можно получить независимо от ε-задачи. Достаточно при решении задачи (1), (2) индекс l удаляемого из базиса вектора при переходе от одного опорного плана к другому определять с помощью правила, полученного для ε-задачи при доказательстве леммы 2. Такой выбор индекса l устраняет возможность зацикливания.

В заключение отметим, что нуждается также в исправлении в [8, с. 24] доказательство предложения 2 о вырожденных задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данциг Дж. Линейное программирование.— М., 1966, с. 228.
2. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования.— М., 1961, 1964.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование.— М., 1963, 1969.
4. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М., 1975, с. 101.
5. Абрамов Л. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование.— Л., 1976, с. 118.
6. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование.— М., 1964, с. 71.
7. Гасс С. Линейное программирование.— М., 1964.
8. Козал П. Т. Симплекс-метод.— Минск, 1968.

Поступила в редакцию
03.07.78.

Кафедра высшей алгебры

УДК 517.968

Ф. В. ЧУМАКОВ, И. Л. ВАСИЛЬЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ НА ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

В последние два десятилетия решено большое число интегральных уравнений, являющихся обобщением в различных направлениях хорошо известного классического уравнения Абеля [1—6]. Во всех случаях, кроме [5], контуром интегрирования является разомкнутая дуга. В работе [5] рассматриваются некоторые уравнения со степенным ядром на замкнутом контуре. В частности, дается решение в замкнутой форме уравнения первого рода

$$\int_c^t \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + k\int_t^c \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = f(t) \tag{1}$$

в случае $k \neq 1, e^{-2\pi\alpha i}$. В настоящей работе дается в квадратурах решение уравнения (1) при $k=1, e^{-2\pi\alpha i}$.

1. Вспомогательные утверждения. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения, легко получаемые путем небольшого изменения теоремы об аналитичности интеграла по параметру [7, с. 62], [1, с. 17].

Теорема А. Пусть однозначная функция $\varphi^+(z, s)$ аналитична по z в области D^+, ограниченной простым замкнутым контуром, и непрерывна по s на некоторой спрямляемой кривой Г. Если функция $f(s)$ непрерывна на Г за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка, то функция $F^+(z) = \int_\Gamma \varphi^+(z, s) f(s)\,ds$ является аналитической в области D^+.

Теорема Б. Пусть однозначная функция $\varphi^-(z, s)$ аналитична по z в области D^-, представляющей собой плоскость $\bar{C}$ с выброшенной областью, ограниченной простым замкнутым контуром, и непрерывна по s на некоторой спрямляемой кривой Г. Если функция $f(s)$ непрерывна на Г, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она может