

$$+a_{n-1}A^{n-1}] = a_0 a_{n-1}(\tau)E + [a_0(\tau) + a_1 a_{n-1}(\tau)]A + \dots + [a_{n-3}(\tau) + a_{n-2} a_{n-1}(\tau)]A^{n-2} + [a_{n-2}(\tau) + a_{n-1} a_{n-1}(\tau)]A^{n-1},$$

откуда, сравнивая коэффициенты при равных степенях матрицы A , получаем линейную дифференциальную систему (11) с начальными условиями (12). Постоянные a_i , $i=0, n-1$, суть коэффициенты характеристического полинома $\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_0$ матрицы A .

4. В качестве приложения рассмотрим систему (1), у которой одномерная часть приводима. Пусть $L(t)$ — преобразование Ляпунова. В этом случае исследование управляемости системы (1) эквивалентно исследованию управляемости системы

$$\dot{y} = A_1 y + L^{-1}(t) B(t) u,$$

где $A_1 = L^{-1}(t) A(t) L(t) - L^{-1}(t) \dot{L}(t)$ есть постоянная матрица.

В заключение авторы выражают благодарность Р. Ф. Габасову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Е.—Труды I Международного конгресса ИФАК по автомат. управл.—М., 1961.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением.—М., 1967.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М.—Автоматика и телемеханика, 1972, № 9.
4. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем.—Минск, 1973.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М., 1967.
6. Забелло Л. Е.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1971, № 3.
7. Забелло Л. Е.—Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 12.

Поступила в редакцию
23.03.78.

Кафедры МОУ БГУ имени В. И. Ленина и математического анализа естественного факультета университета имени Я. А. Коменского (Братислава, ЧССР)

А. А. ЛЕВАНОВ

УДК 517.966

КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследованием корректности задач оптимального управления, начиная с работы [1], занимались многие авторы (см., например, [2, 3]). В отличие от этих работ в предлагаемой заметке исследуется корректность задачи оптимального управления со свободным правым концом.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — норма в R^n ; $\rho(x, G) = \inf_{y \in G} \|x - y\|$ — расстояние от точки x до множества G ; $\alpha(F, G) = \max_{x \in F} (\sup_{y \in G} \rho(x, G), \sup_{y \in G} \rho(y, F))$ — отклонение множеств F и G ; $C_n(T)$ — банахово пространство непрерывных отображений $x(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x(\cdot)\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|$; $L_n^1(T)$ — банахово пространство измеримых отображений $x(\cdot): T \rightarrow R^n$ таких, что $\int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\| dt < \infty$

с нормой $\|x(\cdot)\| = \int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\| dt$. Везде в заметке измеримость и суммируемость понимаются в смысле Лебега.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{X} \in F(t, x). \quad (1)$$

В соотношении (1) $x \in R^n$, $t \in T$, F — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $(t, x) \in T \times R^n$ некоторое множество $F(t, x) \in R^n$. Будем предполагать, что отображение F удовлетворяет условиям:

$y \in R^n$ функции $t \rightarrow \rho(y, f(t))$, $t \rightarrow \rho(y, F(t, x(t)))$ измеримы на T . Функция $(t, y) = \rho(F(t, x(t)), y)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Согласно следствию к предложению 8 [4, с. 345], функция $t \rightarrow \rho(f(t), F(t, x(t)))$ измерима. Из следствия 2 к теореме 3 [4, с. 347] следует измеримость отображения $t \rightarrow \Phi(t)$. Теперь существование требуемой функции $u(\cdot)$ следует из теоремы 1 [4, с. 341].

Пусть $\bar{x}(\cdot) : [t^*, t^{**}] \rightarrow R^n$ — решение задачи

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t^*) = x_0, \quad (3)$$

$h = \|\bar{x}(\cdot)\|$, и пусть функция $k(\cdot)$, участвующая в формулировке условия iii), соответствует числу $h+1$.

Предложение 1. Пусть отображение $\hat{F}$ удовлетворяет условиям i) — iii); $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r$ при всех $(t, x) \in [t^*, t^{**}] \times R^n$, $\|x_0 - x_0^*\| = v < 1$. Тогда существует решение $x^*(\cdot)$ задачи $\dot{x} \in \hat{F}(t, x)$, $x(t^*) = x_0^*$, такое, что $\|\bar{x}(t) - x^*(t)\| \leq \xi(t)$, $\|\dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}^*(t)\| \leq k(t)\xi(t) + r$

почти при всех $t \in [t^*, t^{**}]$ таких, что $\xi(t) \leq 1$, здесь $\xi(t) = v \cdot e^{\int_{t^*}^t k(s) ds} +$
 $+ r \int_{t^*}^t e^{\int_{t^*}^s k(s) ds} d\tau.$

Доказательство. Так как $\bar{x}(\cdot)$ — решение дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$, то $\rho(\bar{x}(t), \hat{F}(t, \bar{x}(t))) \leq r$ почти при всех $t \in [t^*, t^{**}]$.

Построим последовательность $x_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots$,

$$x_0(t) = \bar{x}(t), \quad x_{i+1}(t) = x_0^* + \int_{t^*}^t u_i(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1, \dots,$$

где $u_i(\cdot)$ такая измеримая функция, что почти при всех t

$$u_i(t) \in \hat{F}(t, x_i(t)), \quad \|u_i(t) - \dot{x}_i(t)\| = \rho(\dot{x}_i(t), \hat{F}(t, x_i(t))).$$

В силу леммы 2 такая функция $u_i(\cdot)$ существует.

Дальнейшее доказательство предложения 1 является повторением доказательства теоремы 1 из работы [5].

Следствие. Пусть многозначное отображение F удовлетворяет условиям i) — iii); существует функция $m(\cdot) \in L_1[t^*, t^{**}]$ такая, что $\rho(0, F(t, x_0)) \leq m(t)$, $t \in [t^*, t^{**}]$. Тогда существует решение задачи (3) на отрезке $[t^*, t^{**}]$ или на его части.

Это утверждение устанавливается так же, как предложение 1 и следствие к теореме 1 [5].

Пусть $[L]_\varepsilon$ — замкнутая ε -окрестность множества L ; Ω — множество решений задачи (2), а $\hat{\Omega}$ — множество решений задачи

$$\dot{x} \in \hat{F}(t, x), \quad x(t_0) \in \hat{G}_0; \quad (4)$$

$$P_t = \{x \in R^n \mid x = x(t), x(\cdot) \in \Omega\}, \quad \hat{P}_t = \{x \in R^n \mid x = x(t), x(\cdot) \in \hat{\Omega}\}.$$

Предложение 2. Пусть отображения $F, \hat{F}$ удовлетворяют условиям i) — iii); все решения задачи (2) продолжимы до точки t_1 ; G_0 — компакт в R^n . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что

$$\alpha(\Omega, \hat{\Omega}) \leq \varepsilon, \quad (5)$$

если

$$\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq r, \quad \alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r \text{ при всех } (t, x) \in T \times R^n. \quad (6)$$

Доказательство. Существует компакт Π в R^n такой, что

$$\Pi_t \subset \Pi \text{ при всех } t \in T. \quad (7)$$

В противном случае существовало бы решение задачи (2), не продолжимое до точки t_1 .

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любого решения $x(\cdot): T \rightarrow R^n$ задачи (2), согласно предложению 1, найдется решение $\hat{x}(\cdot): T \rightarrow R^n$ задачи (4), удовлетворяющее условию

$$\|\hat{x}(\cdot) - x(\cdot)\| \leq \varepsilon, \quad (8)$$

если выполнено условие (6) с достаточно малой постоянной $r = r_1 > 0$, поэтому

$$\{\hat{\Omega}\}_\varepsilon \supset \Omega, \quad (9)$$

если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq r_1$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r_1$ при всех $(t, x) \in T \times R^n$.

Пусть σ — некоторая положительная постоянная. Существует число r_2 , $0 < r_2 \leq r_1$ такое, что

$$\hat{\Pi}_t \subset [\Pi]_\sigma, \quad (10)$$

если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq r_2$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r_2$, $(t, x) \in T \times R^n$. Предположим, что включение (10) не имеет места, т. е. для любого $\omega > 0$ существует решение $x_\omega(\cdot)$ задачи (4), удовлетворяющее условиям $x_\omega(t) \in [\Pi]_\sigma$, $t \in [t_0, t_\omega]$, $x(t_\omega) \in \partial[\Pi]_\sigma$ ($\partial[\Pi]_\sigma$ — граница компакта $[\Pi]_\sigma$), хотя $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq \omega$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq \omega$, $(t, x) \in T \times R^n$. Тогда, согласно предложению 1, для некоторого $\bar{\omega} > 0$ найдется решение задачи (2) $x(\cdot): [t_0, t_-] \rightarrow R^n$ такое, что $\|x_\omega(t_-) - x(t_-)\| \leq \frac{\sigma}{2}$. Отсюда следует $x(t_-) \notin \Pi$, что противоречит выбору компакта Π .

Согласно предложению 1, для любого решения $\hat{x}(\cdot): T \rightarrow R^n$ задачи (4) существует решение задачи (2) $x(\cdot): T \rightarrow R^n$, удовлетворяющее неравенству (8), если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq r$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq r$, где r достаточно малая положительная постоянная. Значит, при выполнении условия (6),

$$\{\Omega\}_r \supset \hat{\Omega}. \quad (11)$$

Из соотношений (9), (11) следует (5).

Если условие iii) не выполнено, то, как показывает пример $\dot{x} \in F(x)$, $x(0) = 0$, $T = [0, 1]$, где множество $F(x)$ при каждом $x \in R$ состоит из одной точки $x^{\frac{2}{3}}$, предложение 2 может не иметь места.

Будем говорить, что выполнено условие а), если для любого $\eta > 0$ существует функция $h(\cdot) \in L_1^+(T)$ такая, что $\sup_{\|x\| < \eta} \sup_{y \in F(t, x)} \rho(0, y) \leq h(t)$ при всех $t \in T$.

Теорема. Пусть многозначное отображение F удовлетворяет условиям i) — iii), а); G_0 — компакт; каждое решение задачи (2) продолжимо до точки t_1 . Тогда задача P корректна.

Доказательство. При сделанных предположениях допустимые решения существуют, и множество Π_t при всех $t \in T$ принадлежит некоторому компактному. Отсюда и из условия а) следует, что $-\infty < M < +\infty$. Из предложения 2 имеем $-\infty < \hat{M} < +\infty$ для всех задач P из некоторой δ -окрестности задачи P .

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $(x_{\hat{P}}, \hat{p}(\cdot))$ — минимизирующая последовательность в задаче $\hat{P} \in V_\delta(P)$. Существует номер $i(\hat{P})$ (вообще говоря, зависящий от $\hat{P}$) такой, что

$$|\hat{M} - \Phi(x_{i(\hat{P})}(\cdot), \hat{x}_{i(\hat{P})}(\cdot))| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Если задача $\hat{P}$ лежит в некоторой достаточно малой δ_1 -окрестности ($0 < \delta_1 \leq \delta$) задачи P , то

$$|\varphi(y(\cdot), z(\cdot)) - \hat{\varphi}(x_{i(\hat{P})}(\cdot), \dot{x}_{i(\hat{P})}(\cdot))| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (13)$$

для всех $(y(\cdot), z(\cdot)) \in C_n(T) \times L_n^1(T)$, $\|y(\cdot) - x_{i(\hat{P})}(\cdot)\| \leq \gamma$, $\|z(\cdot) - \dot{x}_{i(\hat{P})}(\cdot)\| \leq \gamma$, где γ — достаточно малая положительная постоянная. Согласно предложению 1, существует δ_2 , $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, такое, что для каждого решения $x_{i(\hat{P})}(\cdot)$ можно найти решение $\bar{x}_i(\cdot): T \rightarrow R^n$ задачи (2), удовлетворяющее условиям

$$\|x_{i(\hat{P})}(\cdot) - \bar{x}_i(\cdot)\| \leq \gamma, \|\dot{x}_{i(\hat{P})}(\cdot) - \dot{\bar{x}}_i(\cdot)\| \leq \gamma. \quad (14)$$

если $\alpha(G_0, \hat{G}_0) \leq \delta_2$, $\alpha(F(t, x), \hat{F}(t, x)) \leq \delta_2$ при всех $(t, x) \in T \times R^n$. Из (12) — (14) получаем

$$M - \hat{M} \leq \varepsilon \quad (15)$$

для любой задачи $\hat{P} \in V_{\delta_2}(P)$.

Аналогично доказывается, что

$$\hat{M} - M \leq \varepsilon \quad (16)$$

для любой задачи $\hat{P}$, лежащей в некоторой достаточно малой δ_3 -окрестности ($0 < \delta_3 \leq \delta_2$) задачи P . Из неравенств (15), (16) следует, что $|\hat{M} - M| \leq \varepsilon$ для всех задач $\hat{P} \in V_{\delta_3}(P)$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Найти нижнюю грань x функционала $\varphi(x(\cdot)) = g(x(t_1))$ на множестве абсолютно непрерывных функций $x(\cdot): T \rightarrow R^n$, удовлетворяющих условиям $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ почти при всех $t \in T$, $x(t_0) \in G_0$, G_0 — компакт в R^n , $u(t) \in Q(t, x(t))$, $u(\cdot)$ — измеримая на T функция.

Предположим, что функция $f: T \times R^n \times R^r \rightarrow R^n$ измерима по t при каждом (x, u) и непрерывна по (x, u) при каждом t ; многозначное отображение $Q: T \times R^n \rightarrow R^r$ измеримо по t при каждом x и непрерывно по x при каждом t ; множество $Q(t, x)$ непусто и замкнуто при всех (t, x) ; $g: R^n \rightarrow R$ — непрерывная функция; $(t, x) \rightarrow F_1(t, x) = \{y \in R^n | y = f(t, x, u), u \in Q(t, x)\}$. Значение M задачи $P = \{\varphi, F_1, G_0\}$ равно x .

Таким образом, рассматриваемая в замечании задача оптимального управления будет корректной, если многозначное отображение F_1 удовлетворяет условиям теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Ф. М. — Изв. вузов СССР. Математика, 1958, № 4, с. 113.
2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М., 1972.
3. Петров Н. Н. — Вестн. ЛГУ, 1974, № 7, с. 60.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М., 1974.
5. Филиппов А. Ф. — Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1967, № 3, с. 16.
6. Antosiewicz H. A., Cellina A. — J. Different. Equat., 1975, v. 19, № 2.
7. Pianigiani Giulio — J. Different. Equat., 1977, v. 25, № 1.

Поступила в редакцию
07.06.78.

Кафедра высшей математики ФМП

П. Т. КОЗЕЛ

УДК 512.25

О ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При решении симплекс-методом вырожденных задач линейного программирования возможно закливание; способы устранения его впервые получены Данцигом и Чарнсом [1]. Большое внимание вопросам вырожденности уделяется в монографиях [2 (1961), 3 (1963)]. Ссылки на эти работы в связи с вопросами вырожденности содержатся в различных пособиях по математическому программированию [2 (1964), 3 (1969), 4—6].