

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (18)$$

$$\delta_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где $\|\delta_{ij}\|$ — заданная матрица заменяемости изделий, функции затрат $f'(x')$ имеют вид (4).

В задаче (15)–(18) функция $r(\pi)$ имеет вид:

$$r(\pi) = \min \sum_{j=1}^n \left(c_j^{\pi j} \sum_{i=1}^m x_{ij} + d_j^{\pi j} \right)$$

при условиях (17)–(19) и

$$\underline{x}_j^{\pi j} \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \bar{x}_j^{\pi j}, j = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Следовательно, для вычисления $r(\pi')$ решаем открытые транспортные задачи со специальной функцией и запрещенными клетками:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j^{\pi j} x_{ij}$$

при условиях (17)–(19), (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. — Минск, 1977, с. 191.
2. Лейтен А. К. — Труды ВЦ Тартусского университета, вып. 22, 1974, с. 47; вып. 29, с. 37; вып. 31, с. 36.
3. Рунге В., Шох М. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1978, № 2, с. 7.
4. Емеличев В. А., Ковалев М. М. — Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1972, № 1, с. 65.
5. Kovalev M., Girlich E. — Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization, 1977, B. 8, № 1, S. 89.
6. Емеличев В. А. — Кибернетика, 1971, тт. I, II, № 6, с. 50; 1972, № 2, с. 17.

Поступила в редакцию
16.03.78.

Кафедра математического
обеспечения АСУ

УДК 62-50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, Ю. МАМРИЛЛА

К УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть имеется система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

где x — n -вектор; u — r -вектор; $t \in T = [t_0, t_1]$.

Одним из важных вопросов теории управляемости является нахождение необходимых условий управляемости, выраженных через параметры системы [1–3].

Хорошо известный критерий управляемости [2, 4] состоит в том, чтобы для каждого g , $\|g\| \neq 0$, имело место соотношение

$$g'F(t, t)B(t) \neq 0, t \in T. \quad (2)$$

Цель настоящей статьи: получить необходимое и достаточное условие управляемости системы (1) через параметры $A(t)$, $B(t)$.

1. Пусть матричная функция $A(t)$ интегрируема на T , причем $\|A(t)\| < a$, функция $B(t)$ непрерывна на T : выполнено условие Лаппо-Данилевского (матрица $A(t)$ коммутирует со своим интегралом). Тогда имеет место

Теорема. Система (1) управляема тогда и только тогда, когда существует

вуют числа $h_i \leq 0$ ($h_i \neq h_s$, $s \neq i$), $t_1 - h_i \in T$, $i = \overline{1, n}$, для которых выполняется условие

$$\text{rank} \left[\left[\beta_1^i E + \beta_2^i \int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \beta_n^i \left(\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] \times \right. \\ \left. \times B(t_1 - h_i), i = \overline{1, n} \right] = n, \quad (3)$$

где β_j^i , $j = \overline{1, n}$ — суммы определенных сходящихся численных рядов, члены которых выражаются через определенные интегралы от элементов матрицы $A(t)$, t_1 , h_i .

Доказательство. Достаточность. Допустим противное: условие (3) выполняется, но система (1) неуправляема. Значит, для $t = t_1$ и некоторых x_0, x_1 не найдется управления $u(t)$, $t \in T$ такого, что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. На языке неявного критерия (2) это означает, что существует вектор $\bar{g}$, $\bar{g} \neq 0$, такой, что

$$\bar{g}' F(t_1, t) B(t) \equiv 0, t \in T, \quad (4)$$

где матричная функция $F(t_1, t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial F(t_1, t)}{\partial t} = -F(t_1, t) A(t), F(t_1, t_1) = E. \quad (5)$$

Решением задачи (5) является функция $F(t_1, t) = \exp \int_t^{t_1} A(\tau) d\tau$. Следовательно, условие (4) можно записать

$$\bar{g}' \exp \int_t^{t_1} A(\tau) d\tau B(t) \equiv 0, t \in T,$$

или в виде

$$\bar{g}' \left[E + \int_t^{t_1} A(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_t^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^2 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_t^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} + \dots \right] B(t) \equiv 0, t \in T. \quad (6)$$

Так как $\|A(t)\| \leq a$, $t \in T$ то, очевидно, матричный ряд (6) сходится абсолютно и равномерно на каждом $[t_1 - h_i, t_1]$. Подставим в (6) на место t поочередно числа $t_1 - h_1, \dots, t_1 - h_n$, которые выбраны произвольно из отрезка T . При $t = t_1 - h_i$ из (6) следует

$$\bar{g}' \left[E + \int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} + \dots \right] B(t_1 - h_i) = 0. \quad (7)$$

Используя теорему Кэли—Гамильтона, из (7) получаем

$$\bar{g}' \left[\gamma_1^i E + \gamma_2^i \int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \gamma_n^i \left(\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] B(t_1 - h_i) = 0, \quad (8)$$

где через γ_j^i обозначены сходящиеся численные ряды, зависящие от t_1, h_i и определенных интегралов элементов $A(t)$. Обозначим суммы этих рядов через β_j^i , $j = \overline{1, n}$. На основе последнего можно (8) записать в виде

$$\bar{g}' \left[\beta_1^i E + \beta_2^i \int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \beta_n^i \left(\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] B(t_1 - h_i) = 0. \quad (8')$$

Проводя такой же процесс при $t = t_1 - h_2, \dots, t = t_1 - h_n$, получаем вместе с (8') уравнения

$$\bar{g}' \left[\beta_1 E + \beta_2 \int_{t_1-h_1}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \beta_n \left(\int_{t_1-h_n}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] B(t_1-h_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Из предположения $\bar{g} \neq 0$ вытекает, что ранг матрицы в (3) меньше n . Полученное противоречие доказывает достаточность условия (3) для управляемости системы (1).

Необходимость. Предположим, что (2) выполняется, но ранг матрицы (3) меньше n . Последнее означает, что существует такой ненулевой n -вектор $\bar{g}$, что

$$\bar{g}' \left[\beta_1 E + \beta_2 \int_{t_1-h_1}^{t_1} A(\tau) d\tau + \dots + \beta_n \left(\int_{t_1-h_n}^{t_1} A(\tau) d\tau \right)^{n-1} \right] B(t_1-h_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Так как числа t_1-h_i выбраны произвольно из $\{t_0, t_1\}$, то равенства (9) имеют место лишь в случае, если $\bar{g}' F(t_1, t) B(t) = 0, t \in T$. Итак, получено противоречие с предположением (2). Необходимость условия (3) доказана.

2. Для эффективной проверки критерия (3) воспользуемся формулой [5]:

$$f(A) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{C(\lambda)}{\psi^k(\lambda)} f(\lambda) \right]_{\lambda=\lambda_k}^{m_k-1},$$

$$\text{где } \psi^k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} = \frac{(\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\lambda-\lambda_s)^{m_s}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} = \frac{|\lambda E - A|}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}},$$

$(m_1+m_2+\dots+m_s=n)$; $C(\lambda)$ — приведенная присоединенная матрица для $\lambda E - A$, определяемая соотношением $B(\lambda) = D_{n-1}(\lambda) C(\lambda)$, где $B(\lambda)$ — присоединенная матрица к матрице A , т. е. удовлетворяющая равенствам: $(\lambda E - A) B(\lambda) = \Delta(\lambda) E$; $B(\lambda) (\lambda E - A) = \Delta(\lambda) E$; $\Delta(\lambda) = |\lambda E - A|$ и $D_{n-1}(\lambda)$ — наибольший общий делитель всех миноров $(n-1)$ -го порядка характеристической матрицы $\lambda E - A$.

Обозначив $\int_{t_1-h_i}^{t_1} A(\tau) d\tau = \Phi_i$, получаем

$$e^{\Phi_i} = \sum_{k=1}^{s_i} \frac{1}{(m_k^i-1)!} \left[\frac{C_i(\lambda)}{\psi_i^k(\lambda)} e^{\lambda} \right]_{\lambda=\lambda_k^i}^{(m_k^i-1)}, \quad (10)$$

где λ_k^i — собственные значения матрицы Φ_i , $i = \overline{1, n}$. Формулу (10) можно использовать для проверки условия (3) теоремы, которое принимает вид

$$\text{ранг} \{e^{\Phi_i} B(t-h_i), i = \overline{1, n}\} = n.$$

3. В случае, когда матрица $A(t) \equiv A$ постоянная, условие (3) теоремы можно заменить следующим:

$$\text{ранг} \{[a_0(t_1-h_i) E + a_1(t_1-h_i) h_i A + \dots + a_{n-1}(t_1-h_i) h_i^{n-1} A^{n-1}] B(t_1-h_i), i = \overline{1, n}\} = n,$$

где функции $a_0(\tau), \dots, a_{n-1}(\tau)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(\tau) &= a_0 a_{n-1}(\tau); \quad \dot{a}_1(\tau) = a_0(\tau) + a_1 a_{n-1}(\tau); \quad \dots; \\ \dot{a}_{n-1}(\tau) &= a_{n-2}(\tau) + a_{n-1} a_{n-1}(\tau) \end{aligned} \quad (11)$$

с начальными условиями

$$a_0(0) = 1, a_1(0) = 0, \dots, a_{n-1}(0) = 0. \quad (12)$$

Действительно, сделав замену независимой переменной $t_1-t=\tau$, имеем $e^{At} = a_0(\tau) E + a_1(\tau) A + \dots + a_{n-1}(\tau) A^{n-1}$. Так как выполняется условие Лапун-Данилевского, то

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(\tau) E + \dot{a}_1(\tau) A + \dot{a}_2(\tau) A^2 + \dots + \dot{a}_{n-1}(\tau) A^{n-1} &= a_0(\tau) A + a_1(\tau) A^2 + \dots + \\ &+ a_{n-1}(\tau) A^n = a_0(\tau) A + a_1(\tau) A^2 + \dots + a_{n-1}(\tau) [a_0 E + a_1 A + \dots + \end{aligned}$$

$$+a_{n-1}A^{n-1}] = a_0 a_{n-1}(\tau)E + [a_0(\tau) + a_1 a_{n-1}(\tau)]A + \dots + [a_{n-3}(\tau) + a_{n-2} a_{n-1}(\tau)]A^{n-2} + [a_{n-2}(\tau) + a_{n-1} a_{n-1}(\tau)]A^{n-1},$$

откуда, сравнивая коэффициенты при равных степенях матрицы A , получаем линейную дифференциальную систему (11) с начальными условиями (12). Постоянные $a_i, i=0, n-1$, суть коэффициенты характеристического полинома $\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_0$ матрицы A .

4. В качестве приложения рассмотрим систему (1), у которой одномерная часть приводима. Пусть $L(t)$ — преобразование Ляпунова. В этом случае исследование управляемости системы (1) эквивалентно исследованию управляемости системы

$$\dot{y} = A_1 y + L^{-1}(t) B(t) u,$$

где $A_1 = L^{-1}(t) A(t) L(t) - L^{-1}(t) \dot{L}(t)$ есть постоянная матрица.

В заключение авторы выражают благодарность Р. Ф. Габасову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Е.—Труды I Международного конгресса ИФАК по автомат. управл.—М., 1961.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением.—М., 1967.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М.—Автоматика и телемеханика, 1972, № 9.
4. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем.—Минск, 1973.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М., 1967.
6. Забелло Л. Е.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1971, № 3.
7. Забелло Л. Е.—Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 12.

Поступила в редакцию
23.03.78.

Кафедры МОУ БГУ имени В. Н. Ляникова и математического анализа естественного факультета университета имени Я. А. Коменского (Братислава, ЧССР)

А. А. ЛЕВАНОВ

УДК 517.966

КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследованием корректности задач оптимального управления, начиная с работы [1], занимались многие авторы (см., например, [2, 3]). В отличие от этих работ в предлагаемой заметке исследуется корректность задачи оптимального управления со свободным правым концом.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — норма в R^n ; $\rho(x, G) = \inf_{y \in G} \|x - y\|$ — расстояние от точки x до множества G ; $\alpha(F, G) = \max_{x \in F} (\sup_{y \in G} \rho(x, G), \sup_{y \in G} \rho(y, F))$ — отклонение множеств F и G ; $C_n(T)$ — банахово пространство непрерывных отображений $x(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x(\cdot)\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|$; $L_n^1(T)$ — банахово пространство измеримых отображений $x(\cdot): T \rightarrow R^n$ таких, что $\int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\| dt < \infty$

с нормой $\|x(\cdot)\| = \int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\| dt$. Везде в заметке измеримость и суммируемость понимаются в смысле Лебега.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{X} \in F(t, x). \quad (1)$$

В соотношении (1) $x \in R^n, t \in T, F$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $(t, x) \in T \times R^n$ некоторое множество $F(t, x) \in R^n$. Будем предполагать, что отображение F удовлетворяет условиям: