

М. М. КОВАЛЕВ, С. П. ДРОНЬ

О КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА НЕСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Сформулируем общую задачу кусочно-линейной оптимизации на несвязной области

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f^j(x_j) \Rightarrow \min \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$x_j \in \bigcup_{t=1}^{s_j} [\underline{x}_j^t, \bar{x}_j^t], \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где

$$f^j(x_j) = c_j^t x_j + d_j^t, \quad x_j \in [\underline{x}_j^t, \bar{x}_j^t]. \quad (4)$$

Предполагается, что функции $f^j(x_j)$ однозначны, т. е., если $\bar{x}_j^{t-1} = \underline{x}_j^t$ для некоторых j и t , считаем, что в (4) $x_j \in (x_j^t, \bar{x}_j^t]$, причем в этом случае

$$c_j^{t-1} \bar{x}_j^{t-1} + d_j^{t-1} \leq c_j^t \underline{x}_j^t + d_j^t. \quad (5)$$

При $s_j = 2$, $\underline{x}_j^1 = \bar{x}_j^1 = \underline{x}_j^2 = 0$, $\bar{x}_j^2 = +\infty$ для всех j задача (1)–(4) превращается в известную задачу линейного программирования с фиксированными доплатами в целевой функции [1].

Если $c_j^1 = c_j^2 = \dots = c_j^{s_j} = c_j$, $d_j^1 = d_j^2 = \dots = d_j^{s_j} = 0$, то задача (1)–(4) превращается в почти дискретную задачу линейной оптимизации [2]. В работе [2] изучалась задача линейного программирования с разрывной целевой функцией, которая есть частный случай задачи (1), (2), (4) при

$$d_j^t = 0 \text{ для некоторых } t \text{ и } d_j^t = d_j \text{ для остальных } t \quad (6)$$

и $c_j^1 = c_j^2 = \dots = c_j^{s_j} = c_j$; в [2] автор сохраняет только предположение (6).

В работе В. Рунге и М. Шоха [3] задача (1)–(4) изучалась в предположении (5) и $c_j^t \geq 0$, $\bar{x}_j^{t-1} = \underline{x}_j^t$ для всех t, j .

Здесь мы покажем, что задача (1)–(4) эквивалентна некоторой экстремальной задаче на выборках и для ее решения применимы эффективные алгоритмы упорядочения, предложенные в [4, 5], причем из одного из них вытекает алгоритм В. Рунге и М. Шоха [3]. В качестве приложения рассмотрим алгоритмы решения задачи размещения произ-

водства и задачи стандартизации с кусочно-линейными целевыми функциями.

Рассмотрим множество выборок: $D = \{\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \pi_j \in \{1, \dots, s_j\}, j = 1, \dots, n\}$. Для $\pi \in D$ положим $H(\pi) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, x_j^{\pi_j} \leq x_j \leq \bar{x}_j^{\pi_j}\}$ и определим на $H(\pi)$ функцию $f_\pi(x) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, x_j^{\pi_j} \leq x_j \leq \bar{x}_j^{\pi_j}\}$.

Обозначим через x_π оптимальное решение в следующей задаче линейного программирования с двусторонними ограничениями:

$$\min \{f_\pi(x) \mid x \in H(\pi)\}. \quad (7)$$

и введем на D функцию $r(\pi) = f_\pi(x_\pi)$.

Теорема. Если π^* — оптимальное решение в экстремальной задаче на выборках:

$$\min \{r(\pi) \mid \pi \in D\}, \quad (8)$$

то x_{π^*} — оптимальное решение задачи (1) — (4).

Доказательство. Предположим противное, что x_{π^*} — не оптимальное решение задачи (1) — (4), т. е. существует допустимое решение x^0 такое, что

$$f(x^0) < f(x_{\pi^*}). \quad (9)$$

В силу предположения (5) для $x \in H(\pi^*)$

$$f(x_{\pi^*}) \leq f_{\pi^*}(x_{\pi^*}). \quad (10)$$

С другой стороны, так как допустимая область задачи (1) — (4) совпадает с множеством $\bigcup_{\pi \in D} H(\pi)$, существует такая выборка π^0 , что

$$f_{\pi^0}(x^0) = f(x^0). \quad (11)$$

Объединяя (9), (10) и (11) имеем $f_{\pi^0}(x_{\pi^0}) \leq f_{\pi^0}(x^0) < f_{\pi^0}(x_{\pi^0})$, что противоречит предположению об оптимальности выборки π^* в задаче (8). Теорема доказана.

Для решения задачи (8) применим алгоритм упорядочения выборок [1], основанный на методе построения последовательности планов

В. А. Емеличева [6]. Пусть $g(\pi) = \sum_{j=1}^n c_{\pi_j} x_j$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} c_j^i x_j^i + d_j^i, & \text{если } c_j^i \geq 0, \\ c_j^i x_j^i + d_j^i, & \text{если } c_j^i < 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $g(\pi)$ — линейная аппроксимация снизу на D функции $r(\pi)$, т. е. $g(\pi) \leq r(\pi)$ для всех $\pi \in D$.

Решение задачи (8) заключается в построении последовательности выборок $\{\pi^k\}$ по возрастанию миноранты $g(\pi)$ до выполнения следующего критерия оптимальности:

$$r(\pi^*) = \min_{1 \leq k \leq K} r(\pi^k) \leq g(\pi^k). \quad (12)$$

Если для некоторого k имеет место (12), то π^* — оптимальное решение задачи (8). Для вычисления значений $r(\pi^k)$ необходимо решать задачи линейного программирования (7).

Алгоритм упорядочения выборок по возрастанию миноранты изложен в [1, с. 110].

Пример. Пусть целевая функция имеет вид $\min f^1(x) + f^2(y)$, где

$$f^1(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \in [1, 2], \\ x + 2, & x \in [3, 4], \\ 2x + 1, & x \in [5, 7], \end{cases} \quad f^2(y) = \begin{cases} 0, & y \in [0, 1], \\ y + 1, & y \in [3/2, 3], \\ -2y + 5, & y \in [7/2, 5]. \end{cases}$$

Ограничения задаются следующей системой неравенств: $-x+2y \leq 3$, $x-y \leq 1$; $1 \leq x \leq 2$, или $3 \leq x \leq 4$, или $5 \leq x \leq 7$; $0 \leq y \leq 1$, или $3/2 \leq y \leq 3$, или $7/2 \leq y \leq 5$. Строим матрицу для определения миноранты

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2,5 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}.$$

1 шаг. $\pi_1 = (1, 3)$, $g(\pi_1) = -6$, $H(\pi_1) = \emptyset$.

2 шаг. $\pi_2 = (1, 1)$, $g(\pi_2) = -1$, $r(\pi_2) = -1$. Согласно критерию оптимальности (12), $(x^*, y^*) = (2, 0)$ — оптимальное решение.

В качестве приложения изложенного метода рассмотрим две задачи: задачу размещения производства и задачу стандартизации:

Задача размещения производства [1] заключается в следующем: минимизировать

$$\sum_{j=1}^n f^j(x_j) + T(x_1, \dots, x_n) \text{ при условиях } \sum_{j=1}^n x_j \geq b, x_j \in$$

$$\in \bigcup_{i=1}^{s_j} [x_j^i, \bar{x}_j^i], j = 1, \dots, n. \text{ Здесь инвестиционные затраты, связанные}$$

с размещением в пункте j предприятия мощностью x_j стандартного типа t имеют вид (4), причем можно считать, что $c_j^i \geq 0$, $d_j^i \geq 0$ и выполняются условия (5), а транспортные издержки вычисляются по правилу $T(x_1, \dots,$

$$x_n) = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \text{ при условиях } x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, b_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, x_{ij} > 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

В рассматриваемой задаче для функции $r(\pi)$ имеем следующее представление: $r(\pi) = \min \sum_{j=1}^n (c_j^{\pi j} + d_j^{\pi j}) + T(x_1, \dots, x_n)$ при условиях $\sum_{j=1}^n x_j \geq b,$

$$x_j \in [x_j^{\pi j}, \bar{x}_j^{\pi j}], j = 1, \dots, n, \text{ или, учитывая, что } x_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} \text{ получаем}$$

$$r(\pi) = \sum_{j=1}^n d_j^{\pi j} + \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_j^{\pi j} + t_{ij}) x_{ij}; \quad (13)$$

$$x_j^{\pi j} \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \bar{x}_j^{\pi j}, \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i, x_{ij} \geq 0, \quad (14)$$

т. е. для вычисления $r(\pi)$ на элементах последовательности решаем открытые транспортные задачи (13) — (14).

Слагаемые миноранты можно определить по правилу $c_{ij} = c_j^i x_j^i + d_j^i + T_{ij}$, где оценки T_{ij} транспортных слагаемых вычисляются по одному из следующих правил (см. [1], с. 100)

$$T_{ij} = \begin{cases} T(b, \dots, b, \bar{x}_j^i, b, \dots, b) - T(b, \dots, b) \\ T(x_1^+, \dots, x_{j-1}^+, \bar{x}_j^i, x_{j+1}^+, \dots, x_n^+) - T(x_1^+, \dots, x_n^+). \end{cases}$$

В задаче стандартизации [1] с кусочно-линейным критерием необходимо:

$$\min \sum_{j=1}^n f^j(x_j) \quad (15)$$

при условиях

$$x_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}, j = 1, \dots, n, \quad (16)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_{ij}, i = 1, \dots, m, \quad (17)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (18)$$

$$\delta_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где $\|\delta_{ij}\|$ — заданная матрица заменяемости изделий, функции затрат $f'(x')$ имеют вид (4).

В задаче (15)–(18) функция $r(\pi)$ имеет вид:

$$r(\pi) = \min \sum_{j=1}^n \left(c_j^{\pi j} \sum_{i=1}^m x_{ij} + d_j^{\pi j} \right)$$

при условиях (17)–(19) и

$$\underline{x}_j^{\pi j} \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \bar{x}_j^{\pi j}, j = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Следовательно, для вычисления $r(\pi')$ решаем открытые транспортные задачи со специальной функцией и запрещенными клетками:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j^{\pi j} x_{ij}$$

при условиях (17)–(19), (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. — Минск, 1977, с. 191.
2. Лейтен А. К. — Труды ВЦ Тартусского университета, вып. 22, 1974, с. 47; вып. 29, с. 37; вып. 31, с. 36.
3. Рунге В., Шох М. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1978, № 2, с. 7.
4. Емеличев В. А., Ковалев М. М. — Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1972, № 1, с. 65.
5. Kovalev M., Girlich E. — Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization, 1977, B. 8, № 1, S. 89.
6. Емеличев В. А. — Кибернетика, 1971, тт. I, II, № 6, с. 50; 1972, № 2, с. 17.

Поступила в редакцию
16.03.78.

Кафедра математического
обеспечения АСУ

УДК 62-50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, Ю. МАМРИЛЛА

К УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть имеется система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

где x — n -вектор; u — r -вектор; $t \in T = [t_0, t_1]$.

Одним из важных вопросов теории управляемости является нахождение необходимых условий управляемости, выраженных через параметры системы [1–3].

Хорошо известный критерий управляемости [2, 4] состоит в том, чтобы для каждого g , $\|g\| \neq 0$, имело место соотношение

$$g'F(t, t)B(t) \neq 0, t \in T. \quad (2)$$

Цель настоящей статьи: получить необходимое и достаточное условие управляемости системы (1) через параметры $A(t)$, $B(t)$.

1. Пусть матричная функция $A(t)$ интегрируема на T , причем $\|A(t)\| < a$, функция $B(t)$ непрерывна на T : выполнено условие Лаппо-Данилевского (матрица $A(t)$ коммутирует со своим интегралом). Тогда имеет место

Теорема. Система (1) управляема тогда и только тогда, когда существует