



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 1
ЯНВАРЬ

БІБЛІЯТЭКА
БЕЛДЭРЖУНІВЕРСІТЭТА
ІМЯ У. І. ЛЕЊНА

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Афанасьев Г. К., Лебедев В. И., Чернявский А. Ф., Черников Г. Н. Алгоритм выделения контура двончного изображения	3
Коляда А. А. Алгоритмы арифметики обобщенных СОК	6
Гахович А. С., Коляда А. А., Чернявский А. Ф. Определение интенсивности стохастического потока, генетически связанного с некоторым потоком сигналов с помощью многоступенчатых МВА	12
Кириленко А. И., Хапалюк А. П. Особенности некомпланарного отражения неоднородных волн	17
Кириленко А. И., Хапалюк А. П. Баланс энергии в некоторых случаях некомпланарного отражения	21
Липницкий И. В., Хартоник И. А., Умрейко Д. С., Неокладнова Л. Н., Крот В. И. Колебательные спектры и структура некоторых хлорпиридиновых комплексов переходных металлов	25
Татаринов Б. А., Цвирко В. А., Черенкевич С. Н., Комяк А. И. Применение метода малоуглового светорассеяния для изучения клеток в процессе их структурных перестроек	30
Гайсенко В. А., Дударев И. А., Кадум М., Клищенко А. П. Некоторые особенности поляризованной люминесценции органических молекул из высоких электронных состояний при двухквантовом возбуждении	34

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Ле Тьн Зунг. Оптимальное сопряжение неособых участков экстремалей Понтрягина	38
Млынчик И. И., То Туан. Об одном методе обработки таблиц информации	41
Беллевский В. В., Воробьев М. А., Дробушевич Г. А., Комаровский И. В. Алгоритм подсчета итогов по группам и подгруппам	46
Ракецкий В. М. Прямой метод решения задачи квадратичного программирования	54
Кузичева Е. Г. О сходимости одного алгоритма Робертса — Шипмана	56
Матвеев Г. В. Спинорная норма автоморфизма центральной простой алгебры	60
Козел П. Т. Нормальная форма матрицы изометрии симплектического пространства над конечным полем	63

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Кульша А. М., Яржембицкий В. Б. Влияние электродов из SnO_2 на основные характеристики фотоэлементов	66
Лукаков П. Ф., Лукашевич Т. А. Кинетика отжига комплексов бор-дивакансия в кремнии p -типа	68
Борисов О. М., Литвинов В. В., Оджаяев В. Б., Уренев В. И., Фейгенсон А. Л. Явление отрицательного отжига в имплантированных сурьмой слоях кремния	70
Мататов В. И., Солонская Г. А., Солонская К. А. Влияние закона включения фрикционной муфты на нагруженность ее элементов	72
Аннотации депонированных статей	75
Профессор А. Е. Левашев	77

Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО (главный редактор),
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (ответственный секретарь), В. С. ГРИГОРЬЕВ, Г. П. ДАВИДЮК, В. Г. ИВАШИН, В. Г. РУДЬ (зам. главного редактора), А. М. САРЖЕВСКИЙ, А. Е. СУПРУН, И. Г. ТИЩЕНКО

Редакционная коллегия серии:

А. М. САРЖЕВСКИЙ (ответственный редактор),
Ю. С. БОГДАНОВ (зам. ответственного редактора), Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Е. А. ИВАНОВ, В. В. ИЗОХ, Л. И. КОМАРОВ, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. С. ФЕДЕНКО, Б. Ю. ХАНОХ (ответственный секретарь), М. П. ХАЛИМАНОВИЧ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, С. С. ШУШКЕВИЧ

**ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА**

Серия I, физ., мат. и мех., 1980, № 1

Редактор *И. П. Стрельченя*
Художественный редактор *Л. Г. Медведова*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 03.09.79. Подписано в печать 04.01.80. АТ 08001.
Формат 70×108¹/₁₆. Печать высокая. Усл. печ. л. 7,0 Уч.-изд. л. 6,85.
Тираж 1080 экз. Зак. 522. Цена 80 коп.

Издательство Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. Минск, Парковая магистраль, 11. Дом книги. Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79.

Адрес редакции: 220080. Минск, Университетский городок, юридический факультет, к. 62, тел. 22-87-54.

УДК 681.323:681.326.3

Г. К. АФАНАСЬЕВ, В. И. ЛЕБЕДЕВ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, Г. Н. ЧЕРНИКОВ

АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ КОНТУРА ДВОИЧНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Обычно автоматическому распознаванию изображений и анализу сцен предшествует предварительная обработка, заключающаяся в кодировании, аппроксимации, фильтрации, восстановлении и улучшении исходных изображений. В каждом конкретном случае выбор необходимых ступеней предобработки определяется качеством исходных изображений и целью их анализа. При решении ряда практических задач оказывается полезным выделение и кодирование контурных линий или границ объектов, составляющих изображения. Предложено и опробовано много методов выделения границ объектов, эвристического характера, основанных на использовании наиболее характерных особенностей границ — больших значениях производных изменения интенсивности в районе границ объектов, а также основанных на формализованных представлениях о границах. Особенности и недостатки этих подходов обобщаются в обзорной статье Девиса [1] в приложении как к параллельным, так и к последовательным методам выделения границ.

Значительно меньше внимания в литературе уделяется разработке алгоритмов выделения контуров, ориентированных на аппаратную реализацию, а также разработке соответствующих вычислительных устройств. В статье [2] предлагаются аппаратно реализуемые алгоритмы кодирования границ объектов (и промежутков между объектами) произвольных черно-белых изображений и их сжатия, но не рассматривается структура соответствующего устройства. В работе [3] описывается проблемно-ориентированный процессор многофункционального назначения, подключаемый к ЭВМ типа ЕС, который, в частности, может выполнять операцию свертки и, следовательно, может быть использован для выделения контуров [4]. Однако этот процессор нецелесообразно применять для решения отдельной задачи обработки изображений, поскольку его многофункциональность не будет использоваться. Известна аппаратная реализация градиентного алгоритма выделения контуров с использованием фильтров Уолша [5], которая обладает рядом недостатков: трудоемкость, настройки фильтров Уолша, низкое быстродействие, сложность генерации функций Уолша.

В данной статье рассматривается алгоритм выделения контура двоичного изображения, ориентированный на аппаратную реализацию средствами цифровой вычислительной техники. При этом объем аппаратуры и время обработки не зависят от структуры изображения.

Обозначим дискретное бинарное изображение как матрицу S размера $m \times n$ из элементов $s_{i,j}$, где $s_{i,j} = \{0, 1\}$. Будем называть элементы $s_{i,j} = 1$ ($s_{i,j} = 0$) черными (белыми) клетками и определим объект изображения как связанное подмножество S_1 множества черных клеток $S^* \subseteq S$,

каждый элемент которого имеет общую сторону или общую вершину хотя бы с одной соседней черной клеткой. Изолированную черную клетку также будем называть объектом. Определим контур объекта как подмножество $K \subseteq S_1$, клетки которого имеют хотя бы одну общую сторону с белой клеткой. Объединение всех подмножеств K образует контур изображения, алгоритм выделения которого (A1) состоит из следующих этапов.

1. Заменить единичные элементы $s_{i,j}$ на нулевые, если $s_{i,j-1}$ и $s_{i,j+1}$ имеют единичные значения. Во всех остальных случаях значения $s_{i,j}$ оставить без изменений.
2. Повторить пункт 1 m раз (по числу строк матрицы S).
3. Транспонировать исходную матрицу S .
4. Повторить пункт 1 для матрицы S^T n раз (по числу строк матрицы S^T).
5. Транспонировать преобразованную по пункту 4 матрицу S^T .
6. Выполнить логическое сложение матриц, полученных по пунктам 2 и 5.

Предлагаемый алгоритм можно обобщить для обработки изображений, разделенных на фрагменты. При этом алгоритм должен учитывать возможное расположение объекта изображения на нескольких фрагментах.

Пусть изображение размера $M \times N$ состоит из $h \times l$ фрагментов, где $h = \left\lceil \frac{M}{m} \right\rceil$, $l = \left\lceil \frac{N}{n} \right\rceil$. Предположим, что фрагменты размера $m \times n$ изображения считываются рецепторным полем размера $(m+2) \times (n+2)$ последовательно по строкам, начиная с верхнего левого и кончая нижним правым. При этом верхняя горизонтальная и левая вертикальная границы рецепторного поля совмещаются с соответствующими границами считываемого фрагмента. Фрагменты обрабатываются в соответствии с описанным выше алгоритмом по мере их считывания. Большой размер рецепторного поля по сравнению с размером фрагмента необходим для «сшивки» фрагментов, при которой достаточно учесть из всех возможных три ситуации:

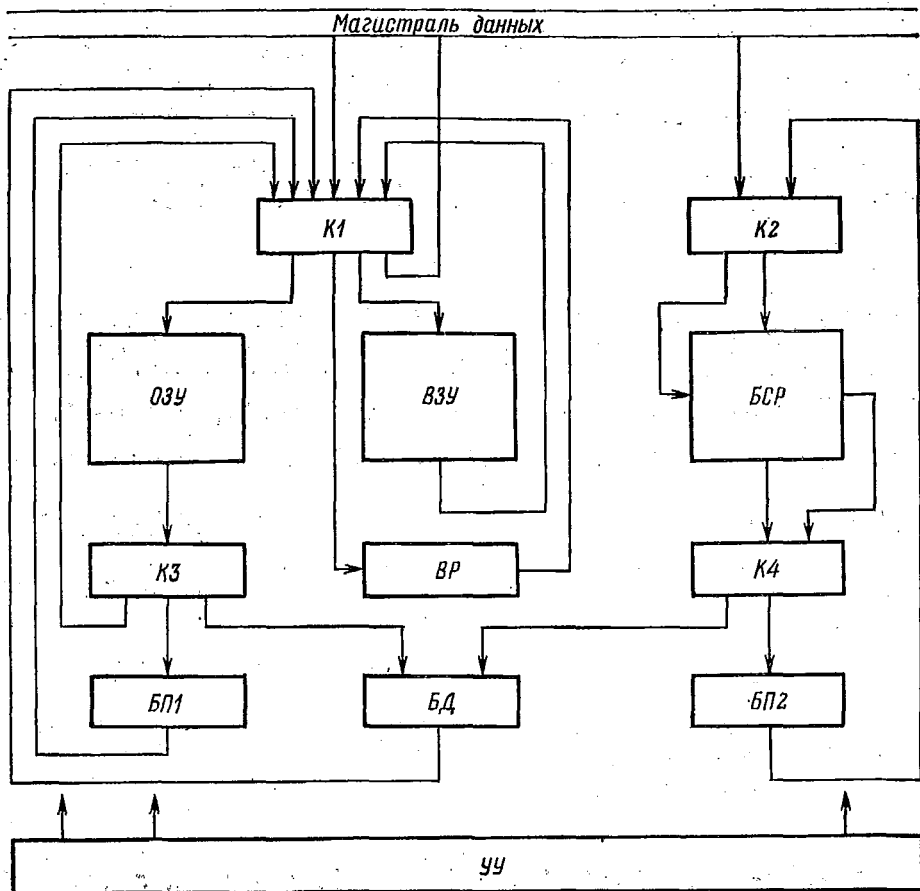
- в анализируемом фрагменте расположена часть объекта, начинающегося и заканчивающегося в смежных фрагментах;
- объект заканчивается в первой строке (столбце) анализируемого фрагмента;
- объект начинается в последней строке (столбце) анализируемого фрагмента.

Обобщенный алгоритм выделения контура (A2) состоит из следующих этапов.

1. Присоединить к текущему фрагменту $\Phi_{i,j}$ две смежные строки фрагмента $\Phi_{i+1,j}$, два смежных столбца фрагмента $\Phi_{i,j+1}$ и четыре смежных с этими строками и столбцами элемента фрагмента $\Phi_{i+1,j+1}$. Назовем полученный по этому пункту фрагмент расширенным.
2. Применить A1 к расширенному фрагменту $\Phi_{i,j}$.
3. Запомнить элементы $(m+1)$ -й строки и $(n+1)$ -го столбца расширенного фрагмента $\Phi_{i,j}$, преобразованные по пункту 2.
4. Заменить элементы первой строки и первого столбца фрагмента $\Phi_{i,j}$ элементами $(m+1)$ -й строки и $(n+1)$ -го столбца расширенных фрагментов $\Phi_{i-1,j}$ и $\Phi_{i,j-1}$ соответственно.
5. Повторить пункты 1—4 $h \times l$ раз (по числу фрагментов изображения).

Фрагмент $\Phi_{i,j}$ размера $m \times n$ после выполнения пунктов 1—4 алгоритма будет содержать контуры объектов, расположенные целиком в этом фрагменте и части контуров объектов, расположенные в нескольких фрагментах, включая фрагмент $\Phi_{i,j}$.

Структурная схема процессора (см. рисунок) для реализации обобщенного алгоритма выделения контура состоит из оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) емкостью $m+2$ двоичных $n+2$ -разрядных слов; блока сдвиговых регистров (БСР), содержащего $n+2$ универсальных $m+2$ -разрядных регистров сдвига; двух блоков преобразо-



Пример реализации процессора

вания (БП1) и (БП2) на $n+2$ и $m+2$ разрядов соответственно; блока дизъюнкторов (БД); коммутаторов (К1—К4); вспомогательного запоминающего устройства (ВЗУ) емкостью l двоичных $n+2$ -разрядных слов; вспомогательного $m+2$ -разрядного регистра сдвига (БСР); устройства управления (УУ).

Обработка текущего фрагмента $\Phi_{i,j}$ в процессоре производится за три цикла.

В первом цикле расширенный фрагмент $\Phi_{i,j}$ через К1 и К2 записывается одновременно в ОЗУ и БСР в виде матриц Φ и Φ^T соответственно. При этом новая строка матрицы Φ записывается в младшие разряды регистров БСР. Такт записи автоматически совмещается с тактом сдвига ранее записанной информации вправо на один разряд.

Во втором цикле каждая строка матрицы Φ из ОЗУ поступает через К3 и БП1, а каждый столбец этой матрицы (строка матрицы Φ^T) — из БСР через К4 в БП2, где они преобразуются согласно пунктам 1, 4 алгоритма А1.

Из БП1 через К1 преобразованная строка матрицы Φ записывается в исходную ячейку ОЗУ, а преобразованная строка матрицы Φ^T из БП2 через К2 — в исходный регистр БСР.

В третьем цикле строки и столбцы преобразованных матриц Φ и Φ^T считываются одновременно из ОЗУ и старших разрядов регистров БСР соответственно и через К3 и К4 подаются в БД, где производится их логическое сложение согласно пункту 6 алгоритма А1. Из БД через К1 преобразованная матрица Φ (за исключением 1-й, $(m+1)$ -й, $(m+2)$ -й строк

и 1-го, $(n+1)$ -го, $(n+2)$ -го столбцов) записывается в ОЗУ или выводится из процессора для дальнейшей обработки. При этом первые строка и столбец этой матрицы заменяются $(m+1)$ -й строкой и $(n+1)$ -м столбцом расширенных фрагментов $\Phi_{i-1, j}$ и $\Phi_{i, j-1}$ из ВЗУ и ВР соответственно.

Легко показать, что число тактов, необходимое для обработки одного фрагмента в процессоре, равно $2(m+2) + \max\{m+2, n+2\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis L. S.—Computer Graphics and Image Processing, 1975, v. 4, № 3, p. 248.
2. Morrin T. H.—Computer Graphics and Image Processing, 1976, v. 5, № 2, p. 172.
3. Щиглик В. Д., Налбандян Ж. С.—Докл. АН Арм. ССР, 1976, т. 12, № 2, с. 100.
4. Фу К. Структурные методы в распознавании образов. Пер. с англ.—М., 1977, с. 20.
5. Епифанцев Б. Н., Забишта Ю. П.—Изв. Томского политехн. ин-та, 1975, т. 248, с. 35.

Поступила в редакцию
27.12.77.

Кафедра электронных
математических машин

УДК 861.142.01

А. А. КОЛЯДА

АЛГОРИТМЫ АРИФМЕТИКИ ОБОБЩЕННЫХ СОК

Рассмотрим нормированные обобщенные системы остаточных классов (ОСОК) первого рода [1], в которых все арифметические операции сводятся к выполнению некоторых действий над целыми числами из множества

$$P(r_{\min}, r_{\max}) = \left\{ A \in Z \mid A = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i - r_A P; r_A \in [r_{\min}, r_{\max}] \right\}, \quad (1)$$

$$0 \leq \tilde{\alpha}_i < P_i,$$

где Z — множество целых чисел; $P = \prod_{i=1}^n p_i$; $p_1, p_2, \dots, p_n$ — система попарно взаимно простых модулей; $P_i = \frac{P}{p_i}$, $\tilde{\alpha}_i = |\alpha_i| P_i^{-1} \mid_{p_i} \mid_{p_i}$, $\alpha_i = |A|_{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$); $[r_{\min}, r_{\max}] \supset [0, r_{\max}^n + 1]$, $r_{\max}^n$ — максимальное значение нормированного ранга чисел из $[0, P)$, определяемое соотношением

$$r_{\max}^n = n - 1 - \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \right] \leq n - 1. \quad (2)$$

Согласно (1), максимальным и минимальным числами множества $P(r_{\min}, r_{\max})$ являются соответственно:

$$A_{\max} = \left\lfloor \sum_{i=1}^n P_i (p_i - 1) \right\rfloor_P + (r_{\max}^n - r_{\min}) P; A_{\min} = -r_{\max} P. \quad (3)$$

На практике чаще всего оперируют с симметричными множествами. Будем называть $P(r_{\min}, r_{\max})$ «симметричным», если $A_{\max}$ и $A_{\min}$ находятся в одинаково удаленных от 0 интервалах вида $[jP, (j+1)P)$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Согласно (3), это требование приводит к условию $r_{\max} = r_{\max}^n + 1 - r_{\min}$.

Прежде всего остановимся на важном вопросе об оценке интервального индекса (ИИ) результатов арифметических операций. Требующиеся оценки ИИ можно получить непосредственно из формул для них путем исследования на экстремум соответствующих выражений [2, 3]. Однако в некоторых случаях к более простым решениям приводит другой подход,

основанный на применении следующей леммы об экстремальных значениях ИИ.

Лемма 1. Пусть $\hat{C}$ — произвольное ограниченное множество целых чисел, кодируемых в некоторой нормированной ОСОК с основаниями $p_1, p_2, \dots, p_n$ и пусть $(r_c)_{\max} = \max_{c \in \hat{C}} \{r_c\}$, $(r_c)_{\min} = \min_{c \in \hat{C}} \{r_c\}$, $C_{\min}$ и $C_{\max}$ — соответ-

ственно наименьший и наибольший элементы $\hat{C}$; $\hat{A}_i = \bigcup_{j=0}^i \left(\left\{ C \in \left[\left[\frac{C_{\min}}{P} \right] + j \right) P, \left(\left[\frac{C_{\min}}{P} \right] + j + 1 \right) P \right\} \mid r_{\lfloor C \rfloor_P}^n = r_{\max}^n - (i - j) \right\} \cap \hat{C}$; $\hat{B}_i = \bigcup_{j=0}^i \left(\left\{ C \in \left[\left[\frac{C_{\max}}{P} \right] - j \right) P, \left(\left[\frac{C_{\max}}{P} \right] - j + 1 \right) P \right\} \mid r_{\lfloor C \rfloor_P}^n = i - j \right\} \cap \hat{C}$; $i = 0, 1, 2, \dots, r_{\max}^n$. Тогда значение $(r_c)_{\max}$ ($(r_c)_{\min}$) принимает интервальный индекс любого из чисел, принадлежащих первому непустому множеству из последовательности $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_{r_{\max}^n}$ ($\hat{B}_0, \hat{B}_1, \dots, \hat{B}_{r_{\max}^n}$), при этом соответствующие значения ИИ определяются соотношением

$$r_c = r_{\lfloor C \rfloor_P}^n - \left\lfloor \frac{C}{P} \right\rfloor. \quad (4)$$

Доказательство. Для любого целого $C = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n, r_c)$ справедливо следующее соотношение:

$$C = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\gamma}_i - r_c P = \lfloor C \rfloor_P + (r_{\lfloor C \rfloor_P}^n - r_c) P,$$

откуда $r_c = r_{\lfloor C \rfloor_P}^n - \left\lfloor \frac{C}{P} \right\rfloor$.

Утверждение леммы 1 теперь легко получить из последней формулы.

Перейдем к рассмотрению алгоритмов арифметики нормированных ОСОК.

1. Сложение и вычитание. Сумма или разность двух чисел $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, r_A)$ и $B = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, r_B)$ из $P(r_{\min}, r_{\max})$ определяется следующим образом:

$$C = A \pm B = (\lfloor \tilde{\alpha}_1 \pm \tilde{\beta}_1 \rfloor_{p_1}, \lfloor \tilde{\alpha}_2 \pm \tilde{\beta}_2 \rfloor_{p_2}, \dots, \lfloor \tilde{\alpha}_n \pm \tilde{\beta}_n \rfloor_{p_n}, r_c), \text{ где} \\ r_c = r_A \pm r_B - \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\tilde{\alpha}_i \pm \tilde{\beta}_i}{p_i} \right\rfloor. \quad (5)$$

Из (5) следует, что

$$r_{\max}^{\text{сум}} = (r_c)_{\max} = 2r_{\max}, \quad r_{\min}^{\text{сум}} = (r_c)_{\min} = 2r_{\min} - n,$$

$$r_{\max}^{\text{раз}} = r_{\max} - r_{\min} + n, \quad r_{\min}^{\text{раз}} = r_{\min} - r_{\max},$$

$$Q_{\text{сум}} = Q_{\text{раз}} = r_{\max}^{\text{сум}} - r_{\min}^{\text{сум}} = 2(r_{\max} - r_{\min}) + n.$$

Для алгебраической суммы в случае систем с симметричным $P(r_{\min}, r_{\max})$ имеем:

$$r_{\max}^{\text{ac}} = 2r_{\max} - (r_{\max}^n + 1) + n; \quad r_{\min}^{\text{ac}} = 2(r_{\max}^n + 1) - n - 2r_{\max},$$

$$Q_{\text{ac}} = r_{\max}^{\text{ac}} - r_{\min}^{\text{ac}} = 4r_{\max} - 3(r_{\max}^n + 1) + 2n.$$

2. Умножение целых чисел. Рассмотрим множество $\hat{C} = \{C \in \mathbb{Z} \mid C = AB; A, B \in P(r_{\min}, r_{\max})\}$. Произведение $C = AB = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n, r_c)$, где $\tilde{\gamma}_i = \lfloor P_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_i \rfloor_{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а r_c — индекс произведения, остаточный код которого может быть определен по формулам:

$$|r_C|_{p_i} = \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\tilde{\gamma}_j}{p_j} - \left\| \left[\frac{P_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_i}{p_i} \right] \right\|_{p_i} - P_i \tilde{\beta}_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\tilde{\alpha}_j}{p_j} - r_A \right) - \right. \\ \left. - P_i \tilde{\alpha}_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\tilde{\beta}_j}{p_j} - r_B \right) \right|_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6)$$

$$|r_C|_p = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\gamma}_i}{p_i} - P \left(\sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\alpha}_j}{p_j} - r_A \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\beta}_j}{p_j} - r_B \right) \right|_p, \quad (7)$$

где $(p, P) = 1$.

Для получения наименьшего и наибольшего значений r_C воспользуемся леммой об экстремальных значениях ИИ. В рассматриваемом случае $C_{\min} = A_{\min} A_{\max}$, $C_{\max} = \max(A_{\min}^2, A_{\max}^2)$ и, согласно (3), интервалы $\left[\left\lfloor \frac{C_{\min}}{P} \right\rfloor P, \left(\left\lfloor \frac{C_{\min}}{P} \right\rfloor + r_{\max}^n + 1 \right) P \right)$ и $\left[\left(\left\lfloor \frac{C_{\max}}{P} \right\rfloor - r_{\max}^n \right) P, \left(\left\lfloor \frac{C_{\max}}{P} \right\rfloor + 1 \right) P \right)$ содержат по одному числу множества $\hat{C}$ каждый: первый — число $C_{\min}$, второй — $C_{\max}$. Поэтому из леммы 1 следует, что именно этим числам соответствуют экстремальные значения ИИ произведения, т. е.

$$r_{\max}^{\text{np}} = r_{\lfloor C_{\min}/P \rfloor}^n - \left\lfloor \frac{C_{\min}}{P} \right\rfloor, \quad (8)$$

$$r_{\min}^{\text{np}} = r_{\lfloor C_{\max}/P \rfloor}^n - \left\lfloor \frac{C_{\max}}{P} \right\rfloor. \quad (9)$$

Согласно (3), (8), (9), для систем с симметричным $P(r_{\min}, r_{\max})$ получим

$$r_{\min}^{\text{np}} = -r_{\max}^2 P, \quad r_{\max}^{\text{np}} = r_{\max} \left(\left\| \sum_{i=1}^n P_i (p_i - 1) \right\|_P + (r_{\max} - 1) P \right),$$

$$Q_{\text{np}} = r_{\max}^{\text{np}} - r_{\min}^{\text{np}} = r_{\max} \left(\left\| \sum_{i=1}^n P_i (p_i - 1) \right\|_P + (2r_{\max} - 1) P \right).$$

Последняя формула показывает, что при вычислении ИИ произведения необходимо воспользоваться выражениями (6) и (7).

3. Операция сужения. Эта операция состоит в вычислении обобщенного кода $(\tilde{\alpha}_{1k}, \tilde{\alpha}_{2k}, \dots, \tilde{\alpha}_{nk}, r_A^{(k)})$ числа $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, r_A)$ в системе модулей $p_1, p_2, \dots, p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). ИИ $r_A^{(k)}$ может быть получен с помощью следующих формул:

$$r_A^{(k)} = r_A \frac{P}{P^{(k)}} - \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{p_i} \frac{P \tilde{\alpha}_i}{P^{(k)}} \right] - \sum_{j=k+1}^n \frac{P_j}{P^{(k)}} \tilde{\alpha}_j, \quad (10)$$

$$r_A^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\tilde{\alpha}_{ik}}{p_i} - \frac{A}{P^{(k)}}, \quad (11)$$

где $P^{(k)} = \prod_{i=1}^k p_i$; $\tilde{\alpha}_{ik} = |\alpha_i| P_{ik}^{-1} |p_i|_{p_i} P_{ik} = \frac{P^{(k)}}{p_i}$, ($i = 1, 2, \dots, k$).

Экстремальные значения индекса $r_A^{(k)}$, а также диапазон СОК, используемый для вычисления ИИ, определяются непосредственно из (10).

$$\left(r_{\min}^{\text{суж}} \right)_k = \left(r_{\min} - n + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{p_j} \right) \frac{P}{P^{(k)}} + k + \sum_{i=1}^k \left[\frac{P}{p_i P^{(k)}} \right], \quad (12)$$

$$(r_{\max}^{\text{суж}})_k = r_{\max} \frac{P}{P^{(k)}}, \quad (13)$$

$$Q_k^{\text{суж}} = (r_{\max}^{\text{суж}})_k - (r_{\min}^{\text{суж}})_k = \left(r_{\max} - r_{\min} + n - \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{P_j} \right) \frac{P}{P^{(k)}} - k - \sum_{i=1}^k \left[\frac{P}{p_i P^{(k)}} \right]. \quad (14)$$

4. Алгоритм определения знака числа основан на применении операции сужения и следующей леммы, полученной в [1].

Лемма 2. О знаке числа. Пусть $A = (\tilde{\alpha}_{1k}, \tilde{\alpha}_{2k}, \dots, \tilde{\alpha}_{kk}, r_A^{(k)})$ — некоторое число, представленное в нормированной ОСОК с модулями $p_1, p_2, \dots, p_k$ и пусть $(r_{\max}^H)_k$ — максимальное значение нормированного ранга чисел из $[0, P^{(k)})$. Если $r_A^{(k)} > (r_{\max}^H)_k$, то $A < 0$. Если $r_A^{(k)} \leq 0$, то $A \geq 0$.

Для $k = 1, 2, \dots, n$ рассмотрим множества

$$P_k(1, (r_{\max}^H)_k) = \left\{ A \in Z \mid A = \sum_{i=1}^k P_i \tilde{\alpha}_{ik} - r_A^{(k)} P^{(k)}, r_A^{(k)} \in [1, (r_{\max}^H)_k] \right\}.$$

При $k = n$ в употребляемых обозначениях индекс n будем опускать.

Для определения знака числа $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, r_A) \in P(r_{\min}, r_{\max})$ достаточно применить ко всем $r_A^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) лемму 2. Действительно, находя целое $l(A)$ такое, что для всех $l > l(A)$ индекс $r_A^{(k)} \in (0, (r_{\max}^H)_k]$, а $r_A^{(l(A))} \notin (0, (r_{\max}^H)_{l(A)}]$, знак числа A будет установлен по результатам применения леммы 2 к $r_A^{(A)}$.

Вычисление $r_A^{(k)}$ достаточно производить в диапазоне Q_k^{3H} , выбираемом из условия, что $A \in P_{k+1}(1, (r_{\max}^H)_{k+1})$. Поэтому, согласно (12–14), получим

$$(r_{\min}^{\text{3H}})_k = (r_A^{(k)})_{\min} = -kp_{k+1} + k + 1 + \sum_{j=1}^k \left[\frac{p_{k+1}}{p_j} \right],$$

$$(r_{\max}^{\text{3H}})_k = (r_A^{(k)})_{\max} = (r_{\max}^H)_{k+1} p_{k+1} \leq kp_{k+1}; \quad (15)$$

$$Q_k^{\text{3H}} = (r_{\max}^{\text{3H}})_k - (r_{\min}^{\text{3H}})_k \leq 2kp_{k+1} - (k + 1) - \sum_{j=1}^k \left[\frac{p_{k+1}}{p_j} \right]. \quad (16)$$

Из (16) видно, что если $p_{k+2} \geq 2k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), то для вычисления $r_A^{(k)}$ удобно воспользоваться следующими соотношениями, полученными из (10) и (11):

$$|r_A^{(k)}|_{p_{k+1}} = \rho_1^{(k)} = \left| \sum_{j=1}^k \frac{\tilde{\alpha}_{jk}}{p_j} - \frac{P_{k+1}}{P^{(k)}} \tilde{\alpha}_{k+1} \right|_{p_{k+1}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1); \quad (17)$$

$$|r_A^{(k)}|_{p_{k+2}} = \rho_2^{(k)} = \left| \sum_{j=1}^k \frac{\tilde{\alpha}_{jk}}{p_j} - \frac{P_{k+2}}{P^{(k)}} \tilde{\alpha}_{k+2} \right|_{p_{k+2}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-2); \quad (18)$$

$$|r_A^{(n-1)}|_p = \rho_2^{(n-1)} = \left| r_A p_n - \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{p_n \tilde{\alpha}_j}{p_j} \right] - \tilde{\alpha}_n \right|_p, \quad \text{где } p \geq 2(n-1). \quad (19)$$

5. Ранг числа. Алгоритм определения нормированного ранга числа $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) \in [0, P)$ основан на следующей лемме.

Лемма 3. О ранге числа. Для нормированного ранга числа $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ справедлива формула

$$r_A^H = |-a_2^{(n-1)}|_p - s,$$

где $a_2^{(n-1)}$ — старшая цифра смешанного кода ИИ $r_{A_0}^{(n-1)}$, т. е. $a_2^{(n-1)} = \left[\frac{r_{A_0}^{(n-1)}}{p_n} \right]$, $A_0 = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i$; s — знак числа $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p} = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i - |-a_2^{(n-1)}|_p P$, определяемый соотношением

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если } A_{|-a_2^{(n-1)}|_p} \geq 0, \\ 1, & \text{если } A_{|-a_2^{(n-1)}|_p} < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $(\rho_1^{(n-1)}, \rho_2^{(n-1)})$ — остаточный код индекса $r_{A_0}^{(n-1)}$ в системе модулей p_n, p , тогда $r_{A_0}^{(n-1)} = a_2^{(n-1)} p_n + a_1^{(n-1)}$, где $a_1^{(n-1)} = \rho_1^{(n-1)}$, $a_2^{(n-1)} = \left\lfloor \frac{\rho_2^{(n-1)} - \rho_1^{(n-1)}}{p_n} \right\rfloor$.

Согласно определению нормированного ранга, ранг числа $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ равен индексу последнего неотрицательного числа в последовательности $A_0, A_1, \dots, A_{r_{\max}^n}$, где $A_j = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i - jP$ ($j=0, 1, 2, \dots, r_{\max}^n$).

Из формулы (10) видно, что $r_{A_0}^{(n-1)} \leq 0$ и, следовательно,

$$r_{\max}^{3n} \leq a_2^{(n-1)} p_n + a_1^{(n-1)} < p_n p. \quad (20)$$

Из (10) следует также, что увеличение на единицу индекса числа A_j влечет за собой увеличение на p_n числа $r_{A_j}^{(n-1)}$. Следовательно, первым из чисел A_j ($j=0, 1, 2, \dots, r_{\max}^n$), для которого ИИ в нормированной ОСОК с основаниями $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ выйдет из области (20), является $A_{p-a_2^{(n-1)}} = A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}$.

Очевидно, $r_{A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}}^{(n-1)} = \rho_1^{(n-1)} \in [1, r_{\max}^{3n}]$; и так как $p_n \geq 2(n-2) \geq (n-1) > (r_{\max}^n)_{n-1}$ при $n \geq 3$, (см. п. 4), то

$$r_{A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}}^{(n-1)} = p_n - \rho_1^{(n-1)} > (r_{\max}^n)_{n-1}$$

и по лемме 2 $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p+1} < 0$.

Поэтому последним неотрицательным числом в последовательности A_j ($j=0, 1, 2, \dots, r_{\max}^n$) является $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}$ или $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p-1}$, если $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p} < 0$. Лемма доказана.

Из леммы 3 видно, что для определения r_A^n необходимо:

- по формулам (17)–(19) найти $r_{A_0}^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$);
- сформировать знак s числа $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}$, для которого $r_{A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}}^{(k)} = r_{A_0}^{(k)}$, ($k=1, 2, \dots, n-2$) и $r_{A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}}^{(n-1)} = \rho_1^{(n-1)}$;
- найти $r_A^{(n)} = |-a_2^{(n-1)}|_p - s$.

6. Умножение дробей. В нормированных ОСОК удобно рассматривать дроби вида $\frac{A}{SP}$, где S — некоторый натуральный множитель, а $A \in P(r_{\min}, r_{\max})$ [2, 4]. Умножение двух дробей $\frac{A}{SP}$ и $\frac{B}{SP}$ сводится к вычислению обобщенного кода $(\tilde{\gamma}'_1, \tilde{\gamma}'_2, \dots, \tilde{\gamma}'_n, r_{C'})$ числа $C' = \left[\frac{C}{SP} \right]$ — ближайшего целого к $\frac{C}{SP}$ ($C=AB$). Сначала вычисляется остаточный код $\{C'\}_{Q_{\text{пр}}}$ по формуле

$$\{C'\}_{Q_{\text{пр}}} = \left\{ \left\lfloor \frac{\{r_A^n\}_P - r_{C'}^{Q_{\text{пр}}}}{S} \right\rfloor \right\}_{\frac{Q_{\text{пр}}}{S}}. \quad (21)$$

Затем вычисляется $r_{C'}$ по формуле

$$\{r_{C'}\}_{\frac{Q_{np}}{SP}} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\gamma}_i}{p_i} - \frac{C'}{P} \right\} \frac{Q_{np}}{SP}.$$

Предполагается, что один из модулей диапазона Q_{np} выбран равным множителю S .

Найдем оценки для экстремальных значений $r_{C'}$. Согласно формуле (4) и формулам для C_{min} и C_{max} из п. 2 для систем с симметричным $\bar{P}(r_{min}, r_{max})$ с учетом того, что $r_{min} = r_{max}^H + 1 - r_{max}$, получаем $Q^{pd} \leq 2 \left[\frac{r_{max}^2}{S} \right] + r_{max}^H + 1$.

З а м е ч а н и е. При выполнении операций алгебраического сложения, умножения целых и дробей возможно переполнение. Это происходит, когда ИИ результата выходит из $[r_{min}, r_{max}]$. Проверка на переполнение легко осуществляется с помощью следующей леммы.

Лемма 4. Для того, чтобы число $r = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ в СОК с попарно взаимно простыми модулями $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ удовлетворяло неравенству $0 \leq r < p_m$ ($-p_m \leq r < 0$), необходимо и достаточно, чтобы для $i = 1, 2, \dots, m-1$

$$p_m = p_i \pmod{p_i} \quad (-p_m = p_i \pmod{p_i}).$$

Вышеизложенные алгоритмы выполнения арифметических операций применимы и для нормированных ОСОК 2-го рода с единственным изменением. При анализе на переполнение вместо проверки на принадлежность ИИ к $[r_{min}, r_{max}]$ необходимо проверять условия, налагаемые на ИИ при определении области определения операций. Следует также отметить, что приводимые оценки экстремальных значений и диапазонов изменения ИИ результатов операций изменятся.

Рассмотрим важные с практической точки зрения нормированные ОСОК с расширенным интервальным индексом по рангу (ОСОК РИИР), для которых множество (1) заменяется следующим:

$$\bar{P}(r_{min}, r_{max}) = \left\{ A \in Z \mid A = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i - r_A P; \quad r_A \in [r_{min} + r_A^H - r_{max}^H, r_{max} + r_A^H] \right\}.$$

Очевидно, $\bar{P}(r_{min}, r_{max}) = [-r_{max}P, (r_{max}^H + 1 - r_{min})P]$, а в случае симметричности $\bar{P}(r_{min}, r_{max}) = \bar{P}(r_{max}) = [-r_{max}P, r_{max}P]$.

Для получения экстремальных значений ИИ чисел в рассматриваемых системах удобнее всего воспользоваться леммой 1. Ее применение для систем с $\bar{P}(r_{max})$ дает следующие соотношения:

$$r_{min}^{сум} = r_{min}^{раз} = r_{min}^{ac} = 2r_{max}; \quad r_{max}^{сум} = r_{max}^{раз} = r_{min}^{ac} = 2r_{max} + r_{max}^H;$$

$$Q_{ac} = 4r_{max} + r_{max}^H;$$

$$r_{min}^{np} = -r_{max}^2 P; \quad r_{max}^{np} = r_{max}(r_{max}P - 1) + r_{max}^H; \quad Q_{np} = 2r_{max}^2 P - r_{max} + r_{max}^H;$$

$$r_{min}^{pd} = -r_{max}; \quad r_{max}^{pd} = r_{max} + r_{max}^H; \quad Q^{pd} = 2r_{max} + r_{max}^H.$$

Последние три соотношения получены в предположении, что $S = r_{max}$. В этом случае имеется возможность оперировать с дробями из $(-1, 1)$, что весьма удобно.

1. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 1, с. 12.
2. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 3, с. 3.
3. Коляда А. А., Кравцов В. К. Обнаружение и исправление ошибок при выполнении операций в ОСОК с помощью R-кодов. ВИНТИ, № 2240-77. Деп. от 06.06.77.
4. Коляда А. А., Кравцов В. К. Ранг числа и умножение дробей в нормированных обобщенных СОК. ВИНТИ № 4111-76. Деп. от 29.11.76.

Поступила в редакцию
15.06.78.

Кафедра электронных
математических машин

УДК 539.107.5

А. С. ГАХОВИЧ, А. А. КОЛЯДА, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА, ГЕНЕТИЧЕСКИ СВЯЗАННОГО С НЕКОТОРЫМ ПОТОКОМ СИГНАЛОВ, С ПОМОЩЬЮ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ МВА

Данная работа посвящена определению интенсивности случайного потока сигналов, порожденного потоком $A = \{A_1, A_2, \dots\}$, являющимся стохастическим нестационарным. В [1] эта задача решена для случая, когда для накопления статистических данных используются многоканальные временные анализаторы (МВА), работающие в одностоповом режиме. Применение таких МВА оправдано, когда порождаемый поток малоинтенсивен. Если поток имеет высокую интенсивность, следует использовать анализаторы, работающие в многостоповом режиме. При k -стоповом режиме МВА за цикл измерения T может зарегистрировать первые k сигналов, начиная с момента привязки τ_0 .

Введем обозначения: $\Omega_0 = (a, b)$ — область задания A ; $\Omega = (\tau_0, \tau_0 + t)$, $\tau_0 \in \Omega_0$, $t \in (0, c)$, c — длительность вторичного потока B_i ($i = 1, 2, \dots$); T — максимальная длина интервалов, измеряемых многоканальным временным анализатором; $A' = A + \Pi$, $B' = B + \Pi$, B — поток, получающийся в результате наложения B_i ($i = 1, 2, \dots$), Π — помеховый поток; $N(t)$ — содержимое канала МВА с номером $\left[\frac{t}{\Delta}\right]$, Δt — ширина канала, а квадратные скобки употребляются для обозначения целой части числа; N — число проведенных циклов измерений МВА; $P_e^B(\Omega)$, $P_e^{B'}(\Omega)$, $P_e^{B_i}(\Omega)$, $P_e^\Pi(\Omega)$ — вероятности попадания e импульсов в область Ω соответственно потоков B , B' , B_i и помехового; $f_1^A(\tau)$, $f_1^{A'}(\tau)$, $f_1^B(\tau)$, $f_1^{B'}(\tau)$, $\bar{f}_1^B(\tau)$, $\bar{f}_1^\Pi(\tau)$ — интенсивности потоков.

В обозначениях характеристик B_0 верхний индекс будем опускать.

Так же как в [1], предположим, что все вторичные потоки являются однотипными и не зависят друг от друга. Интенсивность первичного потока, а также типы первичного и вторичного потоков известны. Для определенности поток A считается пуассоновским, потоки B_i — отрицательно-биномиальными, а поток Π — стационарным пуассоновским.

Пусть произведено N циклов измерений. Тогда при работе в k -стоповом режиме величина $N(t)/N$ ($0 < t \leq T$), очевидно, является частотой попадания в интервал $(\tau_0 + t, \tau_0 + t + \Delta t)$ какого-то из первых k импульсов потока B' , находящегося правее τ_0 , независимо от величины τ_0 . При достаточно большом N эта частота приближается к безусловной вероятности $W_k(t)\Delta t$ попадания в $(\tau_0 + t, \tau_0 + t + \Delta t)$ указанного импульса, независимо от момента привязки на входе 1.

Идея, положенная в основу используемого в данной работе решения рассматриваемой задачи, состоит в приравнивании вероятности $W_k(t)\Delta t$,

вычисляемой по статистическим данным анализатора, с ее значением, вычисленным аналитически.

Для определения вероятности $W_k(t)\Delta t$ рассмотрим условную вероятность $W_k(t/\tau_0)\Delta t$ того, что в интервал $(\tau_0+t, \tau_0+t+\Delta t)$ попал любой из первых k сигналов потока B' , при условии, что на входе 1 привязка осуществлена к сигналу, появившемуся в момент τ_0 . Очевидно, эта вероятность равна сумме условных вероятностей $W^{(j)}(t/\tau_0)\Delta t$ ($j=1, 2, \dots, k$) попадания в $(\tau_0+t, \tau_0+t+\Delta t)$ j -го импульса потока B' , т. е.

$$W_k(t/\tau_0)\Delta t = \sum_{j=1}^k W^{(j)}(t/\tau_0)\Delta t. \quad (1)$$

Для перехода от условной вероятности $W_k(t/\tau_0)\Delta t$ к безусловной вероятности $W_k(t)\Delta t$ воспользуемся формулой Байеса, согласно которой

$$W_k(t/\tau_0)f_1^{A'}(\tau_0) = W_k(t, \tau_0) = W_k(t)f_1^{A'}(\tau_0/t), \quad (2)$$

$W_k(t, \tau_0)\Delta t\Delta\tau_0$ — совместная вероятность попадания в интервал $(\tau_0+t, \tau_0+t+\Delta t)$ какого-то из первых k импульсов после τ_0 потока B' и в интервал $(\tau_0, \tau_0+\Delta\tau_0)$ импульса потока A' ; $f_1^{A'}(\tau_0/t)\Delta\tau_0$ — условная вероятность попадания в окрестность точки τ_0 сигнала потока A' при условии, что в окрестность точки τ_0+t попал какой-то из первых k после τ_0 импульсов потока B' .

Умножая соотношение (1) на $f_1^{A'}(\tau_0)$ и применяя (2), получим

$$W_k(t)f_1^{A'}(\tau_0/t) = f_1^{A'}(\tau_0) \sum_{j=1}^k W^{(j)}(t/\tau_0).$$

Интегрируя последнее соотношение по переменной τ_0 в области Ω_0 , будем иметь:

$$W_k(t) \int_{\Omega_0} f_1^{A'}(\tau_0/t) d\tau_0 = \int_{\Omega_0} f_1^{A'}(\tau_0) \sum_{j=1}^k W^{(j)}(t/\tau_0) d\tau_0. \quad (3)$$

Так же, как и $W_k(t)\Delta t$, величину $\int_{\Omega_0} f_1^{A'}(\tau_0/t) d\tau_0$ можно определить с помощью данных, получаемых анализатором. Как известно [2], $\int_{\Omega_0} f_1^{A'}(\tau_0/t) d\tau_0$ можно рассматривать как среднее число сигналов потока A' , выпавших в таких точках τ_0 , для которых какой-то из первых k после τ_0 сигналов потока B' попал в интервал $(\tau_0+t, \tau_0+t+\Delta t)$. При достаточно малой дисперсии указанного числа выпаданий приближенно можно считать:

$$\int_{\Omega_0} f_1^{A'}(\tau_0/t) d\tau_0 = N(t),$$

поэтому первую часть (3) можно переписать в виде:

$$W_k(t) \int_{\Omega_0} f_1^{A'}(\tau_0/t) d\tau_0 = \frac{W_k(t)\Delta t}{\Delta t} N(t) = \frac{N^2(t)}{N\Delta t},$$

где Δt — ширина канала МВА.

Итак, окончательно имеем:

$$\frac{N^2(t)}{N\Delta t} = \int_{\Omega_0} f_1^{A'}(\tau_0) \left(\sum_{j=1}^k W^{(j)}(t/\tau_0) \right) d\tau_0. \quad (4)$$

Для вычисления вероятностей $W^{(j)}(t/\tau_0)\Delta t$ воспользуемся следующей формулой:

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(Y_i)P(X/Y_i), \quad (5)$$

где $Y_1, \dots, Y_n$ образуют полную группу событий, а событие X происходит с одним из n событий этой группы. Пусть Y_1 представляет собой событие, заключающееся в регистрации на входе 1 МВА в момент τ_0 помехового импульса потока A' , а Y_2 — событие, состоящее в регистрации на этом же входе при тех же условиях сигнального импульса. Очевидно, что эти два события образуют полную группу, т. е. для нашего случая в формуле (5) $n=2$.

Вводя событие X_j , заключающееся в выпадении в окрестности точки (τ_0+t) j -го после момента τ_0 сигнала потока B' при условии, что в окрестности точки τ_0 на входе 1 был зарегистрирован сигнал потока A' , и применяя формулу (5), получаем

$$W^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t = P(Y_1) W_1^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t + P(Y_2) W_2^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t, \quad (6)$$

где $W_1^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t$ и $W_2^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t$ — условные вероятности попадания в интервал $(\tau_0+t, \tau_0+t+\Delta t)$ j -го после момента τ_0 импульса потока B' при условии, что на входе 1 в момент τ_0 был зарегистрирован соответственно помеховый или сигнальный импульсы потока A' . Очевидно,

$$P(Y_1) = \frac{f_1^{\Pi}}{f_1^{A'}(\tau_0)}; \quad P(Y_2) = \frac{f_1^A(\tau_0)}{f_1^{A'}(\tau_0)}.$$

Учитывая, что сигналы потока B' выпадают независимо друг от друга, вероятность $W_1^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t$ равна произведению вероятности выпадения в области Ω $(j-1)$ -го сигнала потока B' и вероятности попадания в интервал $(\tau_0+t, \tau_0+t+\Delta t)$ j -го сигнала этого потока:

$$W_1^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t = P_{j-1}^{B'}(\Omega) f_1^{B'}(\tau_0+t) \Delta t$$

и

$$W_2^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t = \sum_{i=0}^{j-1} P_i(\Omega) P_{j-i-1}^{B'}(\Omega) (\bar{f}_1^{B_0}(\tau_0+t) + f_1^{B'}(\tau_0+t)) \Delta t.$$

Так как $\bar{f}_1^{B_0}(t+\tau_0) = \bar{f}_1^{B_0}(t+\tau_0-\tau_0) = \bar{f}_1(t)$, то, подставляя выражения для $P(Y_1)$, $P(Y_2)$, $W_1^{(j)}(t/\tau_0)$ и $W_2^{(j)}(t/\tau_0)$ в (6), получаем

$$\begin{aligned} W^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t &= \frac{f_1^{\Pi}}{f_1^{A'}(\tau_0)} P_{j-1}^{B'}(\Omega) f_1^{B'}(\tau_0+t) \Delta t + \\ &+ \frac{f_1^A(\tau_0)}{f_1^{A'}(\tau_0)} \left(\sum_{i=0}^{j-1} P_i(\Omega) P_{j-i-1}^{B'}(\Omega) (f_1(t) + f_1^{B'}(t+\tau_0)) \Delta t \right). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$P_{j-1}^{B'}(\Omega) = \sum_{i=0}^{j-1} P_i^{\Pi}(\Omega) P_{j-i-1}^B(\Omega),$$

поэтому выражение для $W^{(j)}(t/\tau_0) \Delta t$ можно переписать:

$$\begin{aligned} W^{(j)}(t/\tau_0) &= \frac{f_1^{\Pi}}{f_1^{A'}(\tau_0)} f_1^{B'}(\tau_0+t) \sum_{m+n=j-1} P_m^{\Pi}(\Omega) P_n^B(\Omega) + \\ &+ \frac{f_1^A(\tau_0)}{f_1^{A'}(\tau_0)} (\bar{f}_1(t) + f_1^{B'}(t+\tau_0)) \sum_{t+m+n=j-1} P_t(\Omega) P_m^{\Pi}(\Omega) P_n^B(\Omega). \end{aligned}$$

Подставляя последнее соотношение в (4), будем иметь

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^k \int_{\Omega_0} [f_1^{\Pi} f_1^{B'}(\tau_0+t) \sum_{m+n=j-1} P_m^{\Pi}(\Omega) P_n^B(\Omega) + f_1^A(\tau_0) (\bar{f}_1(t) + \\ &+ f_1^{B'}(\tau_0+t)) \sum_{t+m+n=j-1} P_t(\Omega) P_m^{\Pi}(\Omega) P_n^B(\Omega)] d\tau_0 = \frac{N^2(t)}{N\Delta t}. \quad (7) \end{aligned}$$

Соотношение (7) в дальнейшем используется в качестве основного уравнения. Фигурирующие в (7) характеристики $P_n^{\Pi}(\Omega)$ и $P_n(\Omega)$ определяются соответственно по следующим известным формулам [2]:

$$P_n^{\Pi}(\Omega) = \frac{(f_1^{\Pi} \cdot t)^n}{n!} e^{-f_1^{\Pi} t}, \quad (8)$$

$$P_n(\Omega) = \frac{\left(\int_0^t \bar{f}_1(\tau) d\tau \right)^n}{\left(1 + \int_0^t \bar{f}_1(\tau) d\tau \right)^{n+1}}, \quad (9)$$

а характеристики $P_n^B(\Omega)$ могут быть найдены с помощью производящей функции $V_{\Omega}^B(z)$ числа точек суммарного потока B . Подставляя в производящий функционал поток B , имеющий, согласно [1], вид

$$L_{\Omega}^B[u] = \exp \int_{\Omega} f_1^A(x) \left[\frac{1}{1 - \int_{\Omega} u(\tau) \bar{f}_1(\tau - x) d\tau} - 1 \right] dx, \quad u = z - 1,$$

будем иметь

$$V_{\Omega}^B(z) = \exp \left\{ \int_a^b \left(\frac{f_1^A(x)}{1 + \int_{\Omega} \bar{f}_1(\tau - x) d\tau - z \int_{\Omega} \bar{f}_1(\tau - x) d\tau} - f_1^A(x) \right) dx \right\}.$$

Тогда

$$P_n^B(\Omega) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} V_{\Omega}^B(z) |_{z=0}. \quad (10)$$

Применяя (10), получаем

$$P_0^B(\Omega) = \exp \left\{ \int_a^b \left(\frac{f_1^A(x)}{1 + \int_{\Omega} \bar{f}_1(\tau - x) d\tau} - f_1^A(x) \right) dx \right\};$$

$$P_n^B(\Omega) = P_0^B(\Omega) \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_j = n \\ k_i > 0, \\ i=1, 2, \dots, j}} \prod_{e=1}^j \int_a^b \frac{f_1^A(x) \left(\int_{\Omega} \bar{f}_1(\tau - x) d\tau \right)^{k_e}}{\left(1 + \int_{\Omega} \bar{f}_1(\tau - x) d\tau \right)^{k_e + 1}} dx. \quad (11)$$

Используя тейлоровское приближение функции

$$\bar{f}_1(t + \tau_0 - x) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\bar{f}_1^{(l)}(t)}{l!} (\tau_0 - x)^l$$

и вводя обозначение $Y = \int_0^t \bar{f}_1(\tau) d\tau$, последнее выражение представим в виде

$$P_n^B(\Omega) = \exp \left\{ \int_a^b \left(\frac{f_1^A(x)}{1 + Y + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(\tau_0 - x)^l}{l!} (Y^{(l)}(t) - Y^{(l)}(0))} - f_1^A(x) \right) dx \right\} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_j = n \\ k_i > 0, \\ i=1, \dots, j}} \prod_{e=1}^j \int_a^b \frac{f_1^A(x) \left[Y + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(\tau_0 - x)^l}{l!} (Y^{(l)}(t) - Y^{(l)}(0)) \right]^{k_e}}{\left[1 + Y + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(\tau_0 - x)^l}{l!} (Y^{(l)}(t) - Y^{(l)}(0)) \right]^{k_e + 1}} dx. \quad (12)$$

Интенсивность потока B определяется путем функционального дифференцирования производящего функционала в точке $u=0$:

$$f_1^B(\tau) = \int_a^\tau f_1^A(x) \bar{f}_1(\tau-x) dx.$$

Используя тейлоровское приближение функции $\bar{f}_1(t+\tau_0-x)$, приведенное выше, получаем

$$f_1^{B'}(\tau) = f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x) (\tau_0-x)^i dx. \quad (13)$$

Подставляя в уравнение (7) выражение (13) для $f_1^{B'}(\tau)$ и выражения для вероятностей числа выпадений, определяемых формулами (8), (9) и (12), после обозначений

$$\Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}) = f_1^\Pi(\tau_0) \sum_{m+n+j-1} P_m^n(\Omega) P_n^B(\Omega),$$

$$\Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}) = f_1^A(\tau_0) \sum_{i+m+n=j-1} P_i(\Omega) P_m^\Pi(\Omega) P_n^B(\Omega)$$

будем иметь

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Omega_0} [f_1^{B'}(\tau_0+t) \Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}) + (\bar{f}_1(t) + f_1^{B'}(\tau_0+t)) \Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)})] d\tau_0 = \frac{N^2(t)}{N\Delta t},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \left\{ \frac{Y^{(n)}}{(n-1)!} \int_{\Omega_0} \left[(\Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \dots, Y^{(n-1)}) + \Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, \dots, Y^{(n-1)})) \times \right. \right. \\ \left. \times \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x) (\tau_0-x)^{n-1} dx \right] d\tau_0 + \int_{\Omega_0} \left[\left(f_1^\Pi + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x) (\tau_0-x)^i dx \cdot \Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \dots, Y^{(n-1)}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(Y' + f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x) (\tau_0-x)^i dx \right) \Phi_{2j}(\tau_0, t, \right. \right. \\ \left. \left. Y, \dots, Y^{(n-1)}) \right] d\tau_0 \right\} = \frac{N^2(t)}{N\Delta t}. \end{aligned}$$

Находя $Y^{(n)}$, получаем

$$\begin{aligned} Y^{(n)} = (n-1)! \frac{\frac{N^2(t)}{N\Delta t} - \sum_{j=1}^k \left\{ \int_{\Omega_0} \left[\left(f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x) (\tau_0-x)^i dx \right) \Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \dots, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sum_{j=1}^k \left\{ \int_{\Omega_0} \left[(\Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \dots, Y^{(n-1)}) + \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. Y^{(n-1)} - (Y' + f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x) (\tau_0-x)^i dx) \Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, \dots, Y^{(n-1)}) \right] d\tau_0 \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, \dots, Y^{(n-1)}) \right) \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x) (\tau_0-x)^{n-1} dx \right] d\tau_0 \right\}}{\sum_{j=1}^k \left\{ \int_{\Omega_0} \left[(\Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \dots, Y^{(n-1)}) + \right. \right. \right.} \end{aligned}$$

Решая полученное дифференциальное уравнение при начальных усло-

виях $Y(0) = 0$; $Y'(0) = \bar{f}_1(0)$, ..., $Y^{(n-1)}(0) = \bar{f}_1^{(n-2)}(0)$ с помощью численных методов, можно найти искомую интенсивность вторичного потока.

В случае постоянной интенсивности первичного потока реализация уравнения упрощается. Наконец, отметим, что задача может быть решена и для других комбинаций первичного и вторичного потоков аналогично рассмотренному случаю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахович А. С., Коляда А. А., Чернявский А. Ф. — Техническая кибернетика, 1980, № 1.
2. Большаков И. А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. — М., 1969.

Поступила в редакцию
24.06.78

Кафедра электронных
математических машин

УДК 535.132

А. И. КИРИЛЕНКО, А. П. ХАПАЛЮК

ОСОБЕННОСТИ НЕКОМПЛАНАРНОГО ОТРАЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН

Некомпланарное отражение неоднородных плоских волн характеризуется рядом специфических особенностей, которые необходимо учитывать при прохождении света через сложные оптические системы. В работах [1, 2] изучались особенности законов преобразования волновых параметров (обобщенные законы Снеллиуса) при таком отражении; в работе [3] предложен матричный метод определения амплитудных параметров отраженной и преломленной волн (обобщенные формулы Френеля). В данной работе изучаются особенности интерпретации амплитудных и энергетических характеристик при некомпланарном отражении и преломлении волн.

Будем пользоваться декартовой системой координат, у которой плоскость xy является границей раздела двух поглощающих сред с показателями преломления $N = n - i\kappa$ и $N_1 = n_1 - i\kappa_1$, а ось z направлена по нормали $\bar{q}$ к этой границе. Вектор рефракции падающей волны записывается в виде

$$\bar{m} = N\bar{e} = (n - i\kappa)(\bar{e}_1 + i\bar{e}_2) = \bar{h} + i\bar{\tau}, \quad (1)$$

где $\bar{e}(\bar{e}^2 = 1)$ — комплексный волновой вектор; $\bar{e}_1 = \text{ch } \Phi(\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ — вектор фазовой, а $\bar{e}_2 = \text{sh } \Phi(\cos \alpha \cos \eta, \sin \eta, -\sin \alpha \cos \eta)$ — амплитудной нормали; $\bar{h}$ и $\bar{\tau}$ — эффективные векторы фазовой и амплитудной нормали соответственно; Φ — параметр неоднородности волны; α — угол (истинный) падения (векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{q}$ определяют истинную, а векторы $\bar{h}$ и $\bar{\tau}$ — эффективную плоскость падения); η — параметр некомпланарности, определяющий ориентацию амплитудной нормали относительно истинной плоскости падения. Обычное, компланарное, отражение получается в частном случае при $\eta = 0, \pi$.

Общее решение уравнений Максвелла для неоднородных плоских волн с заданным вектором рефракции (1) возьмем в виде

$$\bar{E} = A_s[\bar{u}\bar{e}] - A_p[\bar{e}[\bar{u}\bar{e}]], \quad \bar{H} = A_s N[\bar{e}[\bar{u}\bar{e}]] + A_p N[\bar{u}\bar{e}], \quad (2)$$

где $\bar{u} = \{0, 0, 1\}$, A_s и A_p — амплитудные параметры s -и p -волн соответственно; зависящий от координат и времени множитель $\exp[i\omega t - ik(\bar{m}\bar{r})]$ опущен. Выражение для отраженной волны предполагается в том же виде (2), но с другими амплитудными параметрами A'_s и A'_p и с противо-

положительным знаком нормальной составляющей волнового вектора. Для представления преломленной волны в (2) следует заменить амплитудные параметры $(A_{s,p} \rightarrow A_{s,p}^d)$, показатель преломления $(N \rightarrow N')$ и вектор рефракции $(m \rightarrow m')$, компоненты которого определяются из равенств: $m_x = m_x$, $m_y = m_y$, $m_z' = \sqrt{N_1^2 - N^2 + m_z^2}$. Представление (2) отличается от других возможных представлений тем, что при отражении и преломлении s -и p -волны не преобразуются одна в другую, хотя их поляризация не остается постоянной. Это приводит к тому, что амплитудные коэффициенты отражения R_s и R_p и прохождения D_s , D_p таких волн, если их записать через нормальные составляющие векторов рефракции, имеют вид обычных коэффициентов отражения и прохождения Френеля:

$$R_s = \frac{m_z - m_z'}{m_z + m_z'}, \quad R_p = \frac{N_1^2 m_z - N^2 m_z'}{N_1^2 m_z + N^2 m_z'}, \quad (3)$$

$$D_s = \frac{2m_z}{m_z + m_z'}, \quad D_p = \frac{2NN_1 m_z}{N_1^2 m_z + N^2 m_z'}.$$

Если формулы (3) записать через волновые параметры α , ϑ , η , то вид их будет отличаться от формул Френеля [4] из-за более сложной структуры трехмерного отражения неоднородных волн. В частности, зависимость соотношений (3) от угла η вносит значительное изменение в их физическую интерпретацию, и она довольно существенно отличается от известной интерпретации обычных формул Френеля.

Одним из наиболее принципиальных отличий некомпланарного отражения от обычного компланарного можно считать появление неоднозначности между значениями коэффициентов отражения и прохождения (3) и пространственной (поляризационной) структурой падающей волны. Действительно, при заданном значении m_z , что необходимо для сохранения значений коэффициентов (3), волновые параметры падающей волны могут быть различными. Коэффициенты отражения и прохождения (3) не будут изменяться при условии

$$e_z = e_{1z} + ie_{2z} = \text{ch } \vartheta \cos \alpha - i \text{sh } \vartheta \sin \alpha \cos \eta = \text{const.} \quad (4)$$

Из одного комплексного уравнения (4) нельзя однозначно определить три параметра падающей волны, один из них должен задаваться произвольно. Получается, что различные по своей пространственной структуре волны, падающие под различными углами, имеют одинаковые коэффициенты отражения и прохождения. По-видимому, наибольший интерес представляет зависимость от угла η . Угол падения α и параметр ϑ как функции угла η находятся из (4) и определяются по формулам ($\cos \eta \neq 0$)

$$2\text{ch}^2 \vartheta = a + \sqrt{a^2 - 4e_{1z}^2}, \quad 2\cos^2 \alpha = a - \sqrt{a^2 - 4e_{1z}^2}, \quad (5)$$

$$a = 1 + e_{1z}^2 + e_{2z}^2 \sec^2 \eta$$

и, как видно, могут изменяться в довольно широких пределах. Исключением являются предельные случаи отражения однородных волн ($\vartheta = 0$) и нормальное падение ($\alpha = 0$). Компланарное отражение ($\cos \eta = 1$) получается как частный случай. Особым случаем следует считать и тот, когда амплитудная нормаль перпендикулярна к плоскости падения ($\cos \eta = 0$). При этом α и ϑ не определяются однозначно, так как эти два параметра должны удовлетворять только одному условию: $\text{ch } \vartheta \cos \alpha = \text{const}$. На рис. 1 и 2 представлены зависимости $\alpha(\eta)$ и $\vartheta(\eta)$, вычисленные по формулам (5) для различных значений e_z . Зависимости эти являются монотонными. При увеличении угла η для сохранения коэффициентов отражения и прохождения неизменными требуется одновременное увеличение угла падения и параметра неоднородности. Если произвольным образом задавать угол падения α (или параметр ϑ), то можно за счет выбора угла η и параметра ϑ (или угла α) не менять значений формул (3). Однако здесь имеются некоторые ограничения, которые легко получаются

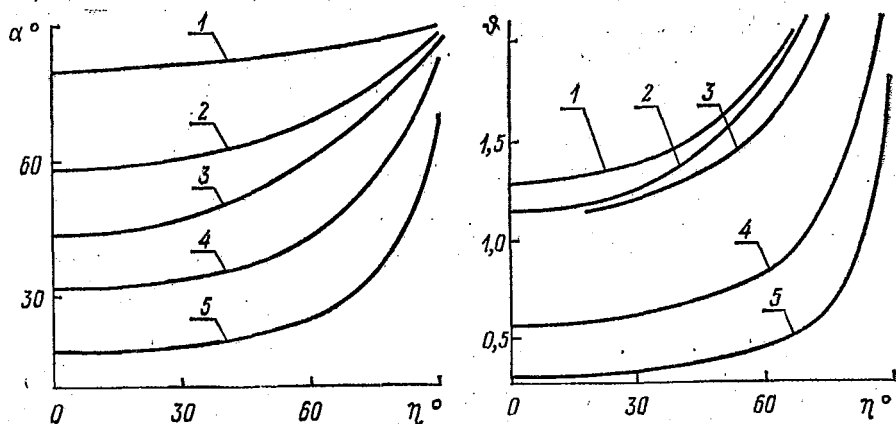


Рис. 1. Зависимость между истинным углом падения α и параметром некомпланарности η при постоянных значениях нормальной компоненты волнового вектора $\vec{s} = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$; e_{1z}^2 ; $e_{2z}^2 = 0,05$; 2,0 (1); 1,0; 2,0 (2); 1,5; 1,0 (3); 1,0 (4); 1,01 (5)

Рис. 2. Зависимость между параметром неоднородности ϕ и параметром некомпланарности η при постоянных значениях нормальной компоненты волнового вектора

(значения e_{1z}^2 и e_{2z}^2 те же, что и для соответствующих кривых на рис. 1)

из уравнений (4). Оказывается, можно так изменить угол α (или ϕ), что постоянство коэффициентов отражения и прохождения не может быть сохранено путем изменения остальных параметров.

Представляет интерес эти результаты выразить через эффективные волновые векторы $\vec{h}$ и $\vec{\tau}$. Как известно [3], эти векторы должны удовлетворять соотношениям

$$\vec{h}^2 - \vec{\tau}^2 = n^2 - \kappa^2; (\vec{h}, \vec{\tau}) = -n\kappa. \quad (6)$$

Коэффициенты отражения и прохождения (3) будут постоянными, если в (6) дополнительно потребовать постоянства значений для h_z и τ_z . После этого два равенства (6) следует рассматривать как уравнения для определения четырех оставшихся компонент векторов $\vec{h}$ и $\vec{\tau}$. Очевидно, двух уравнений (6) недостаточно для однозначного определения этих параметров, два из них остаются произвольными. Однако один из этих двух произвольных параметров не является существенным и связан с выбором системы координат. Поворотом системы координат вокруг нормали к границе раздела можно добиться, чтобы одна тангенциальная компонента эффективных волновых векторов, например h_y , равнялась нулю. В результате получим два уравнения относительно трех неизвестных:

$$h_x^2 - \tau_x^2 - \tau_y^2 = c_1; h_x \tau_x = c_2; \quad (7)$$

где $c_1 = n^2 - \kappa^2 - h_z^2 + \tau_z^2$, $c_2 = -n\kappa - h_z \tau_z$, и, следовательно, одно из них можно задавать произвольно. Будем задавать τ_y , так как в данном представлении эта компонента может характеризовать степень некомпланарности волны и поэтому зависимость от нее представляет наибольший интерес. Компоненты h_x и τ_x как функции τ_y определяются по формулам

$$2h_x^2 = \sqrt{(c_1 + \tau_y^2)^2 + 4c_2^2} + c_1 + \tau_y^2; 2\tau_x^2 = \sqrt{(c_1 + \tau_y^2)^2 + 4c_2^2} - c_1 - \tau_y^2. \quad (8)$$

Для падающей волны с произвольным значением τ_y и с h_x и τ_x , определяемыми по формулам (8), коэффициенты отражения и прохождения остаются неизменными. При этом ориентация эффективных волновых

векторов и, следовательно, пространственная структура поля волны может быть весьма разнообразной:

Другая принципиальная особенность некомпланарного отражения связана с ориентацией вектора потока энергии (вектора Пойнтинга). Сохранение значения нормальной составляющей вектора рефракции у всего множества волн, для которых $e_z = \text{const}$, обеспечивает постоянное значение нормальной компоненты вектора потока энергии. Значения тангенциальных компонент этого вектора будут различными. Для s — волны тангенциальные компоненты вектора Пойнтинга, вычисленные по обычным формулам с точностью до несущественного множителя, не зависящего при постоянном m_z от η ,

$$P_j = \text{Re} [N^* (1 - e_z^2)^*] e_j, \quad (j = x, y). \quad (9)$$

Эти компоненты через параметры α , Φ и η с учетом условий (5) запишутся с точностью до новой постоянной в следующем виде:

$$P_x = b_1 \sqrt{a - 2e_{1z}^2 + \sqrt{a^2 - 4e_{1z}^2}} - b_2 \cos \eta \sqrt{2e_{1z}^2 - a + \sqrt{a^2 - 4e_{1z}^2}}, \quad (10)$$

$$P_y = b_2 \sin \eta \sqrt{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4e_{1z}^2}},$$

где $b_1 = n(1 - e_{1z}^2 + e_{2z}^2) - 2\kappa e_{1z}e_{2z}$; $b_2 = \kappa(1 - e_{1z}^2 + e_{2z}^2) + 2ne_{1z}e_{2z}$ — величины, постоянные для множества волн с одинаковыми значениями коэффициентов (3).

Обращает на себя внимание существование нормальной к плоскости падения составляющей потока энергии, которая не равна нулю даже в прозрачных средах. Она обращается в нуль в общем случае только при компланарном отражении, а в прозрачных средах еще дополнительно и при скользящей фазовой ($\alpha = \pi/2$) или скользящей амплитудной нормали ($\eta = \pi/2$) падающей волны. Таким образом, ориентация вектора потока энергии канонических неоднородных волн (2) при одинаковых значениях коэффициентов (3) в зависимости от параметра некомпланарности (ориентации вектора амплитудной нормали) может быть различной.

Аналогичным образом ведет себя вектор Пойнтинга преломленной волны, хотя выражение для него через волновые параметры более сложное. В случае прозрачных сред его тангенциальные компоненты фактически (с точностью до множителя) совпадают с (10). В общем случае ориентация его также меняется с изменением параметров падающей волны и он не лежит ни в истинной, ни в эффективной плоскости падения.

Аналогичные результаты получаются для потока энергии при отражении и преломлении p -волны. При одновременном существовании s - и p -компонент в волне в выражении для потока энергии дополнительно появляются интерференционные перекрестные слагаемые, которые здесь не рассматриваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хапалюк А. П., Кириленко А. И. — ЖПС, 1975, т. 23, № 5, с. 893.
2. Хапалюк А. П., Кириленко А. И. — ЖПС, 1976, т. 24, № 6, с. 1044.
3. Кириленко А. И., Хапалюк А. П. — ЖПС, 1977, т. 26, № 3, с. 532.
4. Борн М, Вольф Ф. Э. Основы оптики. — М., 1970.

Поступила в редакцию
15.09.78

НИИ ПФП

БАЛАНС ЭНЕРГИИ В НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ НЕКОМПЛАНАРНОГО ОТРАЖЕНИЯ

При энергетической интерпретации явления отражения и преломления плоских волн, основанной на анализе формул Френеля и формулы для вектора потока энергии (вектора Пойнтинга), возникает ряд затруднений. Они встречаются при рассмотрении отражения как однородных, так и неоднородных волн, особенно в тех случаях, когда направление распространения близко к скользящему или же волны переходят границу поглощающих сред [1—4]. Эти проблемы до сих пор остаются дискуссионными и в последнее время предложено несколько новых вариантов их решения [2, 3], которые, однако, насколько нам известно, основаны на анализе частного случая двумерного (компланарного) отражения. Изучение трехмерного (некомпланарного) случая [5, 6] дает возможность подойти к этому кругу вопросов с более общих позиций. В данной работе выясняются некоторые особенности энергетической интерпретации некомпланарного отражения на границе прозрачных сред в тех частных случаях, когда фазовые, или амплитудные нормали падающей и преломленной волн параллельны плоскости раздела сред, т. е. являются скользящими.

Будем рассматривать такие падающие волны, которые отражаются и преломляются без преобразования (*s*- и *p*-волны). При этом амплитудные коэффициенты отражения $R_{s,p}$ и прохождения $D_{s,p}$, записанные через нормальные составляющие волнового вектора падающей волны e_z и через относительный показатель преломления n , имеют вид обычных амплитудных коэффициентов. Однако в отличие от компланарного случая, при некомпланарном отражении коэффициенты $R_{s,p}$ и $D_{s,p}$ являются функциями не только угла падения α и параметра неоднородности волны Φ , но и угла некомпланарности η , определяющего ориентацию амплитудной нормали волны относительно плоскости падения. Появление дополнительного параметра η в этих формулах приводит к ряду новых особенностей отражения и привносит новые элементы в проблему энергетической интерпретации отражения неоднородных волн.

При изучении скользящего распространения волн удобно выделить четыре случая в зависимости от того, будет ли фазовая или амплитудная нормаль скользящей в падающей или преломленной волне: 1) амплитудная нормаль падающей и преломленной волны параллельна границе раздела ($2\eta = 2\eta' = \pi$); 2) амплитудная нормаль падающей и фазовая нормаль преломленной волны параллельна границе раздела ($2\eta = 2\alpha' = \pi$); 3) фазовая нормаль падающей и преломленной волн параллельна границе раздела ($2\alpha = 2\alpha' = \pi$); 4) фазовая нормаль падающей и амплитудная нормаль преломленной волны параллельна границе раздела ($2\alpha = 2\eta' = \pi$). Выражения для нормальных составляющих волновых векторов возьмем из работы [5].

При энергетической интерпретации отражения обычно исходят из уравнения баланса потока энергии, проходящего через границу. В нашем случае эти уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} (1 - |R_s|^2) \operatorname{Re} e_z - 2 \operatorname{Im} R_s \operatorname{Im} e_z &= \frac{1}{n} |D_s|^2 \operatorname{Re} e'_z, \\ (1 - |R_p|^2) \operatorname{Re} e_z + 2 \operatorname{Im} R_p \operatorname{Im} e_z &= \frac{1}{n} |D_p|^2 \operatorname{Re} e'_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где e_z и $e'_z = \sqrt{1 - n^2(1 - e_z^2)}$ — нормальные компоненты волнового вектора падающей и преломленной волн соответственно.

С точностью до несущественного для нас множителя выражения справа в (1) определяют потоки энергии преломленной, а слева — падающей и отраженной волн. В общем случае поток энергии в первой

среде определяется тремя слагаемыми: первые два определяют разность потоков энергии по отдельности падающей и отраженной волн (основной поток), третье — интерференционный (перекрестный) поток, который возникает при суперпозиции падающей и отраженной волн.

В первых трех случаях интерференционный поток отсутствует. Первый случай, по-видимому, ближе всего к обычному отражению. Нормальные компоненты волнового вектора — действительные числа: $e_z = \text{ch } \vartheta \cos \alpha$, $e'_z = \sqrt{1 - n^2(1 - \text{ch}^2 \vartheta \cos^2 \alpha)}$. Коэффициенты отражения и прохождения, несмотря на неоднородность падающих волн, также действительные числа, отличные от нуля и единицы. Имеется поток энергии через границу раздела. Баланс энергии особенностей не имеет, и энергетические коэффициенты отражения и прохождения могут быть определены обычным образом.

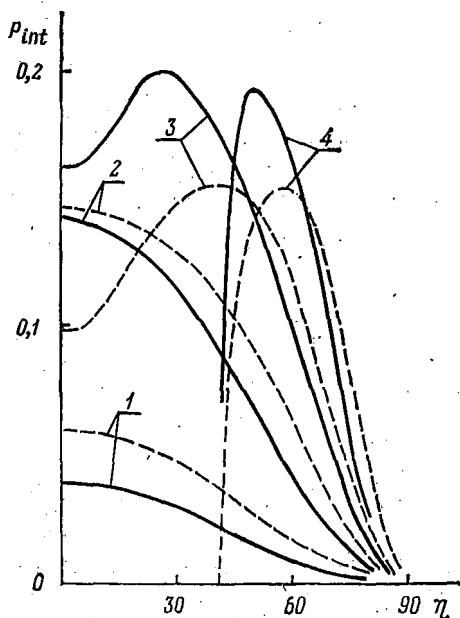


Рис. 1. Зависимость потока энергии P_{int} s -волны (сплошные) и p -волны (пунктирные кривые, то же на рис. 2 и 3) от угла некомпланарности η при различных параметрах неоднородности ϑ ($\vartheta = 0,25$ (1); $0,5$ (2); $0,75$ (3); $1,0$ (4)); относительный показатель преломления $n = 0,75$

Во втором случае $e_z = \text{ch } \vartheta \cos \alpha$, $e'_z = -i \sqrt{1 + n^2(1 - \text{ch}^2 \vartheta \cos^2 \alpha)}$ и коэффициенты отражения являются комплексными числами, по модулю равными единице. Поток энергии через границу отсутствует. Отсюда видно, что такое отражение похоже на обычное полное отражение (ПО), хотя преломленная волна затухает не по нормали к границе раздела. Суммарный поток энергии преломленной волны параллелен границе раздела. Энергетические коэффициенты отражения и прохождения могут быть определены в этом случае таким же образом, как и при обычном ПО.

Весьма своеобразными представляются два последних случая. Несмотря

на то, что в третьем случае $e_z = -i \sqrt{n^2(1 + \text{sh}^2 \vartheta \cos^2 \eta) - 1}$, $e'_z = -i \text{sh } \vartheta \cos \eta$ — чисто мнимые величины, амплитудные коэффициенты отражения и прохождения — действительные числа, в общем случае отличные от нуля и единицы. Однако поток энергии через границу отсутствует, так как у всех трех волн вектор потока энергии параллелен границе раздела. Величина $|R_{s,p}|^2$, обычно интерпретируемая как энергетический коэффициент отражения, изменяется при изменении параметров ϑ и η , в то время как поток энергии остается скользящим. Следовательно, обычная интерпретация энергетических коэффициентов здесь неприменима.

В четвертом случае $e_z = -i \text{sh } \vartheta \cos \eta$, $e'_z = \sqrt{1 - n^2(1 + \text{sh}^2 \vartheta \cos^2 \eta)}$. Коэффициенты отражения — комплексные числа, по модулю равные единице, и, хотя по отдельности нормальные компоненты потока энергии падающей и отраженной волн равны нулю, поток энергии через границу все же существует. В первой среде нормальная составляющая потока энергии полностью определяется интерференционным членом. Он не зависит от нормальной к границе раздела координаты и, следовательно, на любом расстоянии от границы сохраняет свое значение:

$$P_{\text{int}}^s = n_2 \frac{4n^2 \text{sh}^2 \vartheta \cos^2 \eta}{1 - n^2} \sqrt{1 - n^2(1 + \text{sh}^2 \vartheta \cos^2 \eta)},$$

$$P_{\text{int}}^p = \frac{P_{\text{int}}^s}{n^2 + (1 + n^2) \text{sh}^2 \vartheta \cos^2 \eta}, \quad n = \frac{n_1}{n_2}, \quad (2)$$

где n_2 — показатель преломления второй среды, в которой распространяется преломленная волна. На рис. 1 показаны зависимости интерференционных потоков P_{int}^s и P_{int}^p от угла η (ориентации амплитудной нормали), рассчитанные по формулам (2). Постоянный множитель $4n_2 n^2 (1 - n^2)^{-1}$ при этом не учитывается.

Интерференционные потоки P_{int}^s и P_{int}^p во второй среде становятся обычными потоками преломленной волны. Их можно рассматривать как функции относительного показателя преломления n и нормальной компоненты вектора волновой нормали $e_z = -i \operatorname{sh} \vartheta \cos \eta$, причем эти функции в общем случае не являются монотонными. Поток s -волны в зависимости от e_z становится максимальным при

$$\operatorname{sh}^2 \vartheta \cos^2 \eta = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - n^2}{n^2}, \quad (3)$$

а поток p -волны при

$$\operatorname{sh}^2 \vartheta \cos^2 \eta = \frac{-3n^2 + \sqrt{n^4 + 8}}{2(1 + n^2)}. \quad (3')$$

Поток s -волны во второй среде как функция n имеет максимум при

$$n^2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2}{1 + a}}, \quad (a = |e_z|^2). \quad (4)$$

Максимум функции $P_{\text{int}}^p(n)$ достигается при n , удовлетворяющих кубическому уравнению относительно n^2

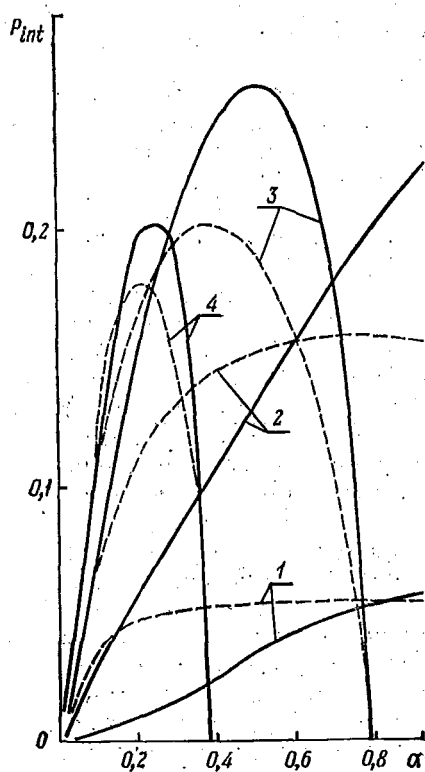


Рис. 2. Зависимость потоков энергии P_{int} s -волны и p -волны от $a = |e_z|^2$ при различных значениях относительного показателя преломления n ($n=0,25$ (1); $0,5$ (2); $0,75$ (3); $0,85$ (4))

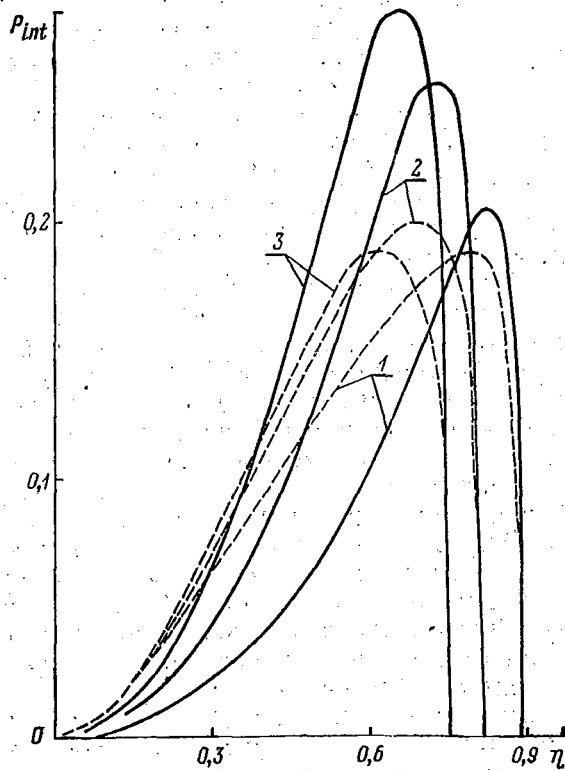


Рис. 3. Зависимость потоков энергии P_{int} прошедшей s -волны и p -волны от величины относительного показателя преломления n при различных значениях e_z ($|e_z|^2=0,25$ (1); $0,5$ (2); $0,75$ (3))

$$\left(n^2 - \frac{1}{1+a}\right)\left(n^4 + \frac{3a}{1+a}\right) + \frac{a}{1+a^2} = 0, \quad (4')$$

которое, как показывает исследование, всегда имеет один действительный корень $n^2 < (1+a)^{-1}$.

На рис. 2 и 3 представлены зависимости потоков P_{int}^s и P_{int}^p от относительного показателя преломления n и квадрата модуля нормальной компоненты волнового вектора падающей волны, вычисленные по формулам (2). Постоянный множитель $4n_2$ не учитывается.

Отметим, что соотношения (2) — (4) остаются справедливыми и при компланарном отражении $\eta=0, \pi$. При этом они относятся к отражению неоднородной плоской волны, скользящей вдоль границы раздела сред и затухающей по нормали к этой границе. В частности, такое отражение практически реализуется на второй границе плоскопараллельного слоя, если на его первой границе происходит полное отражение однородной волны (см., например, [7]).

В рассматриваемом нами случае волны в первой среде отличаются между собой только ориентацией амплитудной нормали, у них одинаковые фазовые нормали и одинаковые амплитуды. Ориентация амплитудной нормали не влияет на значение потока энергии и, вычисленный по отдельности для каждой из этих волн, он оказывается одинаковым и направлен вдоль границы раздела. В этом случае отсутствуют даже формальные признаки, по которым можно было бы определить, какая из двух волн является падающей, а какая — отраженной. Этот выбор не сказывается на балансе энергии и ничего не меняет в уравнениях (1). Изменение направления нормальной компоненты волнового вектора преломленной волны приводит к изменению направления интерференционного потока энергии в первой среде, но не влияет на его величину и не изменяет модулей коэффициентов отражения и прохождения.

В рамках принятого рассмотрения не представляется возможным разбить интерференционный поток на два слагаемых с тем, чтобы одно из них назвать падающим, а другое — отраженным потоком. Использование формул для определения энергетических коэффициентов отражения и прохождения, предложенных в работе [2], а также иных формул в работе [3], для данного предельного случая приводит к выражениям, лишенным физического смысла.

Этот пример показывает, что ранее сделанные выводы о том, что интерференционный поток не может быть удовлетворительным образом отнесен ни к падающей, ни к отраженной, ни к преломленной волне или же разбит на две части [8, 9, 10], остаются в силе (по крайней мере тогда, когда мы хотим дать общие формулы, пригодные для всех случаев). Это представляется нам проявлением простого и общего правила: взаимная энергия двух взаимодействующих систем (в данном случае падающей и отраженной волн) не может быть корректным образом приписана одной из них или каким-либо образом разделена между ними.

Отсутствие интерференционного потока при отражении, однако, не является гарантией того, что возможна обычная интерпретация энергетических соотношений (случай 3). Дело, по-видимому, в том, что теоретические результаты по отражению и преломлению сильно неоднородных волн, особенно в поглощающих средах или при направлениях их распространения, близких к скользящему, нельзя сравнивать с известными явлениями отражения и преломления ограниченных световых пучков, моделируемых плоскими волнами, и они не могут быть интерпретированы в рамках одних и тех же представлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кизель В. А. Отражение света. — М., 1973.
2. Бойко Б. Б. и др. — ЖПС, 1973, т. 19, № 4, с. 669.
3. Веремей В. В. и др. — Опт. и спектр., 1978, т. 44, № 2, с. 345.

4. Fragstein C. v.—Ann. d. Phys., 1950, Bd. 7, № 11—8, S. 63.
5. Хапалюк А. П., Кириленко А. И.—ЖПС, 1975, т. 23, № 5, с. 893.
6. Кириленко А. И., Хапалюк А. П.—ЖПС, 1977, т. 26, № 3, с. 532.
7. Dupařský L. Czech.—J. Phys., 1961, v. 11, p. 871.
8. Born M., Ladenburg L.—Phys. Z., 1911, Bd. 12, S. 198.
9. Santavy I.—Atti Fondaz. G. Ronchi e contrib. Ist., 1970, v. 25, № 2, p. 201.
10. Salzberg B.—Amer. J. Phys., 1948, v. 16, p. 444.

Поступила в редакцию
17.11.78.

НИИ ПФП

УДК 535.338

И. В. ЛИПНИЦКИЙ, И. А. ХАРТОНИК, Д. С. УМРЕЙКО, Л. Н. НЕОКЛАДНОВА,
В. И. КРОТ

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ И СТРУКТУРА НЕКОТОРЫХ ХЛОРПИРИДИНОВЫХ КОМПЛЕКСОВ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ

В последние годы обнаружены важные биологические функции ряда комплексов переходных металлов: они могут регулировать работу некоторых ферментов, управлять окислительно-восстановительными процессами и, обладая антибактериальной, антивирусной и противоопухолевой активностью, нередко оказывать лечебное действие. Из анализа данных литературы [1] следует, что терапевтический эффект подобных соединений определяется как природой, валентным состоянием центрального атома-комплексобразователя и координированных к нему лигандов, так и геометрической структурой (строением) комплекса в целом. Сложилось мнение, что наиболее активными в этом отношении должны быть цис-конфигурации. Тем не менее, известно [2], что комплексы транс-строения (например, родия) также проявляют антиопухолевые свойства. Таким образом, направленный поиск биологически активных препаратов на основе *d*-металлов, кроме соответствующего выбора биоактивных лигандов, предполагает необходимость знания структуры комплексной молекулы и ее отличительных особенностей.

Используя колебательные спектры, мы исследовали спектральные свойства в связи со структурой биологически эффективных комплексов переходных металлов в твердой фазе общей формулы $[\text{Me}(\text{py})_4\text{Cl}_2]\text{Cl} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, ($\text{Me} = \text{Co}(\text{III}), \text{Rh}(\text{III}), \text{Ir}(\text{III}), \text{py} = \text{C}_5\text{H}_5\text{N}$).

Спектры комбинационного рассеяния (СКР) изученных веществ регистрировались на спектрофотометре «Sprex-Ramalog» с использованием линии 6328 Å гелий-неонового и 5145 Å аргонового лазеров (выходная мощность излучения ~65 мВт). Это позволяло производить запись спектров при щелях ~2—4 см⁻¹ и регистрировать контуры полос с малыми аппаратными искажениями, достоверно выявлять слабоинтенсивные полосы. Спектры инфракрасного поглощения (ИКС) записывались на спектрофотометре «Perkin-Elmer» (модель 180) и Фурье-спектрометре «Polytec Fir-30» в области 3500—30 см⁻¹. Использовалась стандартная методика приготовления образцов в виде суспензии в вазелиновом масле и таблетках КВг.

На рис. 1 изображена низкочастотная область (~380—80 см⁻¹) колебательных спектров, где расположены интересующие нас полосы, отвечающие валентным $\text{Me}-\text{Lig}$ и деформационным $\text{Lig}-\text{Me}-\text{Lig}$ колебаниям. Следует отметить, что наблюдаемое повышение наиболее характерных частот внутримолекулярных колебаний амина в комплексе (по сравнению со свободным состоянием), например, от ~405 (ИКС), 404 см⁻¹ (СКР) до ~470—480 см⁻¹, от ~602 до ~649 см⁻¹ (рис. 2) и других указывает на непосредственную координацию пиридина к центральному атому через азот в рассмотренных соединениях Co, Rh, Ir.

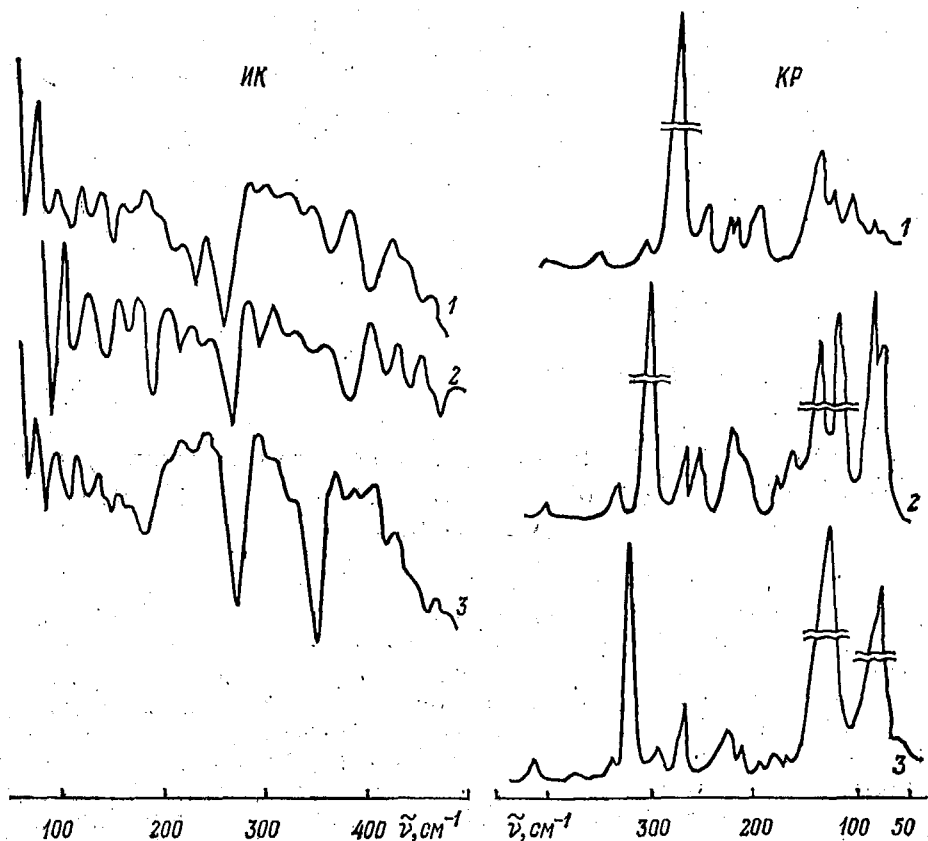


Рис. 1. Колебательные спектры ИК и КР в области (380—80 см^{-1}) комплексных соединений:

1 — $[\text{CoPy}_4\text{Cl}_2] \text{Cl} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$; 2 — $[\text{RhPy}_4\text{Cl}_2] \text{Cl} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$; 3 — $[\text{IrPy}_4\text{Cl}_2] \text{Cl} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$

Принимая молекулы амина за точечные с приведенной массой, внутренние колебания иона $[\text{MePy}_4\text{Cl}_2]^+$ симметрии D_{4h} (транс-изомер) можно сгруппировать по типам колебаний в виде суммы неприводимых представлений $\Gamma = 2A_{1g} + 2A_{1u} + B_{1g} + B_{2u} + B_{2g} + 3E_u + E_g$. Вследствие наличия приблизительно центра инверсии, активность колебаний в СКР и ИКС определялась с учетом правила альтернативного запрета (см. таблицу, а). Из перечисленных типов колебаний, входящих в прямую сумму Γ , только B_{2u} должно быть неактивным в СКР и ИКС.

Антисимметричным A_{2u} и симметричным A_{1g} валентным колебаниям $\text{Me}-\text{Cl}$ хлорпиридинатов Co , Rh , Ir отвечают полосы 360—369 и 310—340 см^{-1} соответственно, близкие к частотам транс-хлорпиридиновых комплексов платины [3] и хлораминовых комплексов $\text{Co}(\text{III})$ [4]. Полосы, которые лежат в интервалах 249—266 и 276—320 см^{-1} и существенно зависят от природы центрального атома, отнесены нами к симметричным A_{1g} и антисимметричным B_{1g} колебаниям относительно оси C_4 четырех гетероатомов пиридина в плоскости σ_h , а весьма сильные полосы поглощения 345—340 см^{-1} — к типу асимметричных E_u валентных колебаний связи $\text{Me}-\text{N}$, что согласуется с известными данными о координации гетероциклических аминов через донорный атом азота к металлу [3].

Наблюдаются большие различия частот антисимметричных $\tilde{\nu}_{as}$ и симметричных $\tilde{\nu}_s$ валентных колебаний $\text{Me}-\text{Cl}$ в исследованных хлорпиридинатах по сравнению с аналогичными по форме частотами колебаний в гексахлоридных комплексах Ir , Rh . К примеру, в тетраэдрически искаженном комплексе $\text{K}_3\text{RhCl}_6 \cdot \text{H}_2\text{O}$, $\tilde{\nu}_{as}(\text{Rh}-\text{Cl})$ составляет $\sim 330 \text{ см}^{-1}$



Рис. 2. Колебательные спектры ИК и КР в области (500—800 см^{-1}) комплексных соединений:

1 — Pdru_2Cl_2 ; 2 — $[\text{Cory}_4\text{Cl}_2]\text{Cl}\cdot 6\text{H}_2\text{O}$; 3 — $[\text{Rhpy}_4\text{Cl}_2]\text{Cl}\cdot 6\text{H}_2\text{O}$; 4 — $[\text{Irgy}_4\text{Cl}_2]\text{Cl}\cdot 6\text{H}_2\text{O}$

(дублетная), а $\tilde{\nu}_8$ равна 300 и 285 см^{-1} [5]. Они оказываются значительно меньшими по сравнению с аналогичными частотами (363 и 329 см^{-1} соответственно) для $[\text{Rhpy}_4\text{Cl}_2]\text{Cl}\cdot 6\text{H}_2\text{O}$. Подобная картина наблюдается и для иридиевых комплексов. Для хлорпиридинового плоскостного комплекса Cory_2Cl_2 , для которого существует возможность структурной изо-

мерии, рассматриваемые колебания находятся в интервале $\sim 340-280 \text{ см}^{-1}$ [6]. В случае транс-формы $[\text{Co}(\text{NH}_3)_4\text{Cl}_2]\text{Cl}$ частота антисимметричных валентных колебаний $\text{Co}-\text{Cl}$ составляет 355 см^{-1} . Для кобальтовых аминовых комплексов типа $[\text{Co}(\text{Am})_4\text{Cl}_2]\text{X}$, ($\text{X}=\text{Cl}, \text{Br}$) одной из

причин чувствительности ν_{as} к составу внутренней координационной сферы, когда азот неэквивалентен, может быть взаимодействие валентных колебаний $\text{Co}-\text{Cl}$ типа A_{2u} с аналогичными по симметрии внеплоскостными деформационными колебаниями $\text{N}-\text{Co}-\text{N}$ [4]. Напротив, для $\nu_s(A_{1g})$ таких возможностей не представляется вследствие различия форм подходящих колебаний. По-видимому, подобный эффект имеет место и в хлорпиридинатных комплексах $\text{Co}, \text{Rh}, \text{Ir}$ транс-конфигурации, на что указывают также большие интенсивности ИК полос внеплоскостных деформационных колебаний (A_{2u}) $\text{N}-\text{Me}-\text{N}$, лежащих примерно около 160 см^{-1} . Этим можно объяснить малую разницу частот $\nu_{as}(A_{2u})$ в ряду рассматриваемых соединений по сравнению с $\nu_s(A_{1g})$, которые заметно отличаются по величине при переходе от одного комплекса к другому (в зависимости от природы центрального атома).

Проявляющаяся тенденция понижения частот валентных и деформационных колебаний $\text{Me}-\text{Lig}$ в ряду элементов $\text{Ir} > \text{Rh} > \text{Co}$ является следствием значительного ослабления их акцепторных свойств в последовательности заполнения электронами оболочек $5d^6 > 4d^6 > 3d^6$ центральных атомов.

Для цис-аналогов характерна более низкая (по сравнению с транс-формой) симметрия C_{2v} . Нормальные колебания катиона $[\text{Meru}_4\text{Cl}_2]^+$ могут быть классифицированы в том же приближении по типам симметрий следующим образом: $\Gamma = 6A_1 + 4B_1 + 3B_2 + 2A_2$. Входящие в представление Γ колебания вида A_1, B_1, B_2 активны в СКР и ИКС, тогда как A_2 разрешены только в СКР. Экспериментальные частоты цис-изомеров $\text{Co}, \text{Rh}, \text{Ir}$ систематизированы по типам колебаний в таблице, б. Из анализа спектров следует, что большинство частот, отвечающих колебаниям Me -лиганд комплексов, совпадает в спектрах комбинационного рассеяния и инфракрасного поглощения из-за отсутствия центра инверсии у исследуемых систем. Ввиду близости некоторых из частот по величине для нормальных колебаний с участием пиридина как целого отнесение их к определенным формам колебаний на данном этапе не представляется возможным. Интерпретация экспериментально наблюдаемых полос коррелирует с известными данными для цис-галогенпиридинатов ряда переходных металлов [3] с учетом особенностей состава, природы и заряда центрального атома. При анализе вибрационных спектров оказалось, что некоторые из частот комплекса данного химического состава совпадают по величинам для обоих изомеров C_{2v} и D_{4h} , что характерно для многих смешанных соединений подобного типа.

При одновременной реализации двух гексакоординированных, но пространственно различающихся структур (цис- и транс-) следует ожидать неравноценности взаимодействия $\text{Me}-\text{ру}$ в системе связей $\text{ру}-\text{Me}-\text{ру}$ и $\text{ру}-\text{Me}-\text{галоген}$. Это общая закономерность при переходе от цис- к транс-конформации (или наоборот). Наиболее чувствительными к таким изменениям должны быть полосы, характеризующиеся плоскими $\gamma(\text{C}-\text{N}-\text{C}, \text{C}-\text{C}-\text{N})$ и неплоскими $\kappa(\text{C}-\text{N})$ колебаниями координированного через азот пиридинового кольца [7]. В цис-изомерах это приводит к расщеплению соответствующих полос $\Delta\nu$.

Для установления подобного эффекта и оценки степени влияния природы центрального атома на величину $\Delta\nu$ в хлорпиридинатах переходных металлов нами исследованы колебательные спектры палладиевого комплекса Pdru_2Cl_2 (область $\sim 500-800 \text{ см}^{-1}$ показана на рис. 2). Как видно, интенсивные полосы ~ 690 и 765 см^{-1} , характеризующие плоские

Колебательные частоты хлорпиридинатных комплексов $[\text{Меру}_4\text{C1}_2]\text{C1} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$

а) симметрия D_{4h}

Me	Частоты, см^{-1} , и типы (формы) колебаний; их активность									
	$\tilde{\nu}_{\text{вал}} (\text{Me}-\text{C1})$		$\tilde{\nu}_{\text{вал}} (\text{Me}-\text{N})$			$\tilde{\nu}_{\text{деф}} (\text{C1}-\text{Me}-\text{C1})$	$\tilde{\nu}_{\text{деф}} (\text{N}-\text{Me}-\text{C1})$	$\tilde{\nu}_{\text{деф}} (\text{N}-\text{Me}-\text{N})$		
	A_{2u} (ИК)	A_{1g} (КР)	E_u (ИК)	B_{1g} (КР)	A_{1g} (КР)	E_u (ИК)	E_g (КР)	A_{2u} (ИК)	E_u (ИК)	B_{2g} (КР)
Co	360 о. сл.	310 о. сл.	345 с	276 о. сл.	249 сл.	189 пл.	155 пл.	164 с.	121 ср.	125 ср.
Rh	363 с.	329 сл.	340 ш. с.	301 о. с.	252 ср.	182 с.	160 с.	160 с.	140 с.	132 с.
Ir	369 ср.	340 о. сл.	342 о. с.	320 о. с.	266 ср.	185 с.	166 пл.	163 пл.	145 с.	132 о. с.

б) симметрия C_{3v}

Me	Активность	$\tilde{\nu}_{\text{вал}} (\text{Me}-\text{C1})$ $A_1 + B_1$	$\tilde{\nu}_{\text{вал}} (\text{Me}-\text{N})$ $2A_1 + B_1 + B_2$	$\tilde{\nu}_{\text{деф}} (\text{C1}-\text{Me}-\text{C1})$ A_1	$\tilde{\nu}_{\text{деф}} (\text{N}-\text{Me}-\text{N}, \text{C1})$ $A_1 + 2A_2 + 2B_1 + B_2$	$\tilde{\nu}_{\text{деф}} (\text{N}-\text{Me}-\text{N})$ $A_1 + B_2$
Co	ИК	329 о. сл. 310 сл.	289 о.сл. 253 о.с. 225 с. 202 с.	189 пл.	164 с. 148 ср. 121 сл. 100 ср.	81 ср.
	КР	310 сл.	276 о.с.ш. 249 сл. 223 о.сл.	195 сл.	160 о. сл. 155 пл. 137 ср. 125 ср. 105 ср.	81 ср.
Rh	ИК	335 сл. 310 ср.	285 с. 257 о.с. 229 ср. 209 с.	182 с.	160 с. 140 с. 108 с.	82 о.с.
	КР	335 сл. 319 сл.	264 ср. 252 ср. 203 пл.	175 сл.	160 сл. 132 о.с. 118 о. с.	79 с.
Ir	ИК	320 пл.	296 пл. 245 сл. 222 ср.ш.	185 с.	163 пл. 145 с. 128 с. 100 с.	85 с.
	КР	340 о. сл. 320 о.с.	290 о.с. 266 ср. 222 сл. 190 о.сл.	174 о.сл.	166 пл. 132 о.с. 100 с.	75 ср.

Примечания: с — сильная, о. с. — очень сильная, сл. — слабая, о.сл. — очень слабая, ср. — средняя, пл. — плечо, ш. — широкая.

колебания углов $\gamma(\text{C—C—N}, \text{C—N—C})$ и неплоские $\kappa(\text{C—N})$ пиридинового кольца, разрешены с компонентами 686, 695, 762, 770 см^{-1} соответственно. Можно считать, что Pdpy_2Cl_2 изоструктурен платиновому цис-изомеру Ptpy_2Cl_2 , изученному в [5]; для него величина расщепления $\Delta\nu$ равнялась $\sim 8 \text{ см}^{-1}$ для обеих полос. В спектрах КР Pdpy_2Cl_2 наблюдается лишь один дублет (645, 656 см^{-1}). Полоса 748 см^{-1} $\kappa(\text{C—N})$ свободного пиридина оказывается смещенной к 740 см^{-1} и, по-видимому, является наиболее интенсивной длинноволновой компонентой дублета, высокочастотная составляющая которого не наблюдается.

В хлорпиридинатных комплексах Co , Rh , Ir симметрии D_{4h} с четырьмя гетероциклическими аминами в плоскости σ_h расщепление полос ~ 680 и $\sim 760 \text{ см}^{-1}$, очевидно, должно отсутствовать, как и у транс-изомеров PtCl_4py_2 и PtCl_2py_2 [8]. Напротив, у их цис-аналогов вследствие наличия двух несимметричных координат py—Me—Cl и одной симметричной py—Me—py , ($\text{Me}=\text{Co}, \text{Rh}, \text{Ir}$) эти полосы должны быть сложными. Действительно, на примере кобальтового соединения $[\text{Co}(\text{py}_4\text{Cl}_2)\text{Cl} \times 6\text{H}_2\text{O}]$ (см. рис. 2) легко проследить за появлением в ИКС интенсивной триплетной полосы с компонентами 755, 762, 765 см^{-1} , которые можно отнести, например, к внеплоскостным колебаниям в кольцах пиридина типа $\kappa(\text{C—N})$, расположенных в транс- и цис-позициях. Аналогичный эффект наблюдается и в СКР (полосы 772 и 650 см^{-1} разрешены).

Таким образом, полученные результаты можно принять за основу при анализе спектральных изменений состояния хлорпиридиновых комплексов кобальта, родия и иридия при взаимодействии их с биологическими системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenberg B.—Natur, 1965, v. 205, p. 698.
2. Cleare M. J.—Coord. chem. Rev., 1974, v. 12, p. 349.
3. Pfeiffer M.—Spectrochim. Acta, 1974, v. 30A, p. 341.
4. Chottard G.—Compt. Rend., 1972, v. 274, p. 1116.
5. Hendra P. I.—Spectrochim. Acta, 1967, v. 23A, p. 1963.
6. Allan J. R., Brown D. M.—J. Inorg. Nucl. Chem., 1965, v. 27, p. 1305.
7. Adams D. M., Chatt J.—J. Chem. Soc., 1961, p. 739.
8. Rao S.—Z. anorg. u. allg. chem., 1960, Bd. 304, S. 176.

Поступила в редакцию
5.03.79.

НИИ ПФП

УДК 577.37

Б. А. ТАТАРИНОВ, В. А. ЦВИРКО, С. Н. ЧЕРЕНКЕВИЧ, А. И. КОМЯК

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОУГЛОВОГО СВЕТОРАССЕЯНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ КЛЕТОК В ПРОЦЕССЕ ИХ СТРУКТУРНЫХ ПЕРЕСТРОЕК

Форма и размеры клеток и их органелл *in vitro* или при функционировании в организме, а также при внешних воздействиях подвержены различным изменениям. Большинство используемых методов регистрирует наличие структурных изменений, но не позволяет проследить за размерами частиц в процессе эксперимента [1]. Применение широко распространенных методов оптической и электронной микроскопии осложняется необходимостью специальной обработки исследуемых препаратов, которая зачастую приводит к структурным изменениям клеток и к значительным ошибкам при определении размеров клеток [2].

Методы, основанные на измерении интенсивности света, рассеянного под разными углами [3], позволяют избежать указанных трудностей и применимы для изучения различных типов частиц. Чтобы определить

размеры частиц в пределах 0,2—100 мкм, необходимо проводить измерения интенсивности света при малых углах (до 10—20°). Указанный метод неоднократно применялся для установления размеров коллоидных и металлических [4] частиц, а также ряда клеток и их органелл [5].

В настоящей работе описана методика определения размеров частиц с помощью метода малоуглового светорассеяния.

Блок-схема разработанного и изготовленного нефелометра для измерения интенсивности рассеянного под малыми углами света показана на рис. 1. В качестве источника света использован гелий-неоновый лазер 1. С помощью щелей 2 ширина первичного луча уменьшается до 0,5 мм. Прошедший через кювету 4 луч поглощается в светопроницаемой «улитке» 6. Рассеянный свет проходит через серию диафрагм 7, исключаяющих отражение от стенок тубуса и регистрируется фотоэлектронным умножителем ФЭУ-68 9, отобранным по максимальной чувствительности в красной области спектра, питание которого осуществляется стабилизатором ВС-22 10. Сигнал ФЭУ усиливается 11 и подается на самописец 12. Поскольку интенсивность рассеянного света изменяется в пределах пяти порядков в зависимости от угла наблюдения, предусмотрена установка калиброванных нейтральных светофильтров 3, ослабляющих первичный пучок света. Более плавная регулировка чувствительности системы регистрации осуществляется с помощью усилителя. Применение поляризованного лазерного пучка света позволяет получать поляризационные диаграммы рассеяния с помощью поляроида 8 в регистрирующем тубусе гониометра. Определение угла наблюдения рассеянного света осуществляется с помощью системы отсчета гониометра ГС-5 5.

Для исследований применимы как плоская, так и цилиндрическая кюветы. В случае плоской кюветы, которая практически не искажает падающий луч и позволяет выполнять измерения при очень малых углах (порядка 10'), необходимо проводить сложный учет эффектов, связанных с преломлением и отражением света на стенках кюветы [6].

Применение цилиндрической кюветы позволяет избежать этих затруднений при измерении в пределах 0,5—150°. Возникающее при этом расхождение луча снимается благодаря увеличению диаметра кюветы и ее уплощению со стороны падающего луча. Все представленные ниже результаты получены с помощью цилиндрической кюветы. Необходимые поправочные коэффициенты, учитывающие эффекты преломления и отражения на стенках кюветы и изменение «видимого» рассеивающего объема, определялись экспериментально по методу [7]. В качестве калибровочных были использованы растворы полимеров, для которых интенсивность света, рассеянного при малых углах, остается практически постоянной. Это водные растворы поливинилового спирта (4%) и полигликоля (5%), раствор полиэтиленгликоля в хлороформе (10%) и полиакриламидный гель (7%). Относительная ошибка измерения интенсивности рассеянного света, вычисленная по [8] в случае дебаевского фактора рассеяния для гауссовых клубков составляет менее 1%.

Изготовленный прибор обладает рядом преимуществ по сравнению с аналогичными моделями [9]. Так, в связи с использованием света длинной волны 632,8 нм не происходит значительного снижения интенсивности рассеянного света за счет его активного поглощения, поскольку

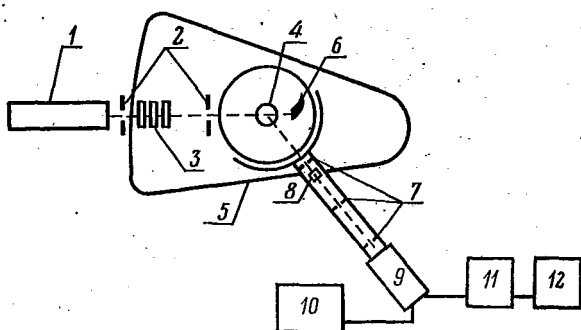


Рис. 1. Схема малоуглового нефелометра.

длина волны рассеиваемого света лежит вне полос поглощения большинства биообъектов. Это позволяет почти полностью исключить люминесценцию исследуемых препаратов. Небольшая угловая полуширина первичного луча позволяет регистрировать его интенсивность (I_0) без учета вклада света, рассеянного под малыми углами. Это дает возможность определить относительную интенсивность света, рассеянного под разными углами I_Θ/I_0 (I_Θ — интенсивность света, рассеянного под углом Θ).

Гомогенность исследуемых суспензий в кювете поддерживалась непрерывным перемешиванием. Растворители очищались от возможного загрязнения фильтрованием непосредственно в кювету через стеклянный фильтр ПОР-160. Для исключения многократного рассеяния света на исследуемых частицах, концентрация последних в растворе поддерживалась таким образом, чтобы мутность суспензии не превышала 50%.

Измерение индикатрисы рассеяния позволяет находить размеры частиц в растворе по методу [4]. В этом случае представление индикатрисы рассеяния в координатах $I\Theta^2$, Θ в логарифмическом масштабе позволяет выделить малоугловой максимум, положение которого (Θ_m) линейно связано с радиусом частиц r соотношением $r \cdot \Theta_m = \alpha$.

Величина α зависит от длины рассеиваемого света и незначительно изменяется для различных форм частиц. Так, для сферы, диска и цилиндра при $\lambda = 632,8$ нм $\alpha = 12,3 \pm 1,3$ мкм·град. Следовательно, с помощью данного метода можно определять размеры частиц без предварительного установления их формы.

В качестве примера рассмотрим результаты определения размеров эритроцитов, полученных из крови доноров, и их мембран (рис. 2). В исследуемой системе координат индикатрисы характеризуются максимумами в областях $3,5-4,0^\circ$ и $8-10^\circ$. В физиологическом растворе размеры свежеприготовленных эритроцитов 7,4 и 2,3 мкм (соответственно диаметр клеток и их толщина) хорошо совпадают с результатами, полученными с помощью других методов [10]. Размеры очищенных мембран эритроцитов, выделенных по методу [11], составляют 7,8 и 2,55 мкм, что указывает на сохранение формы частиц после гемолиза. При больших углах наблюдения интенсивность рассеянного света для суспензии эри-

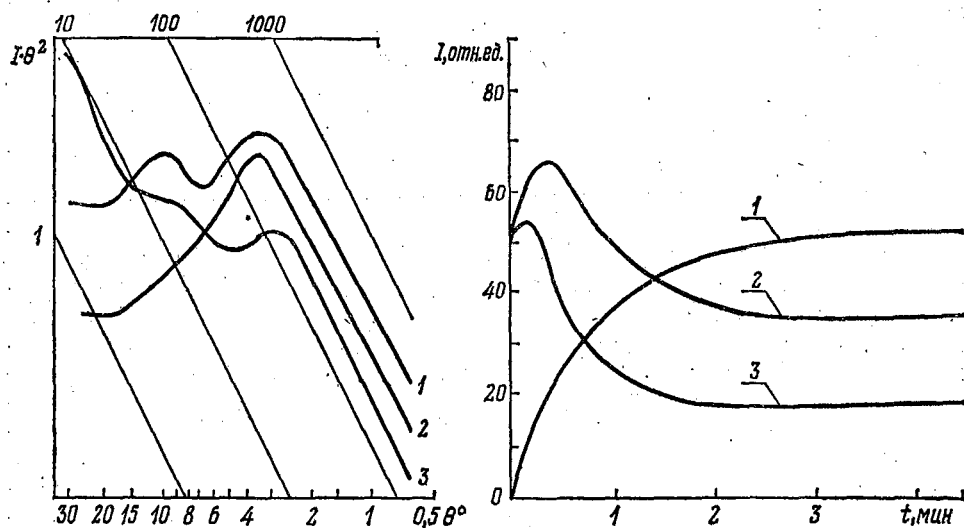


Рис. 2. Индикатрисы светорассеяния для суспензий свежеполученных эритроцитов в 0,15 М NaCl (1), эритроцитов в процессе гемолиза в 0,08 М NaCl (2), мембран эритроцитов (3)

Рис. 3. Изменение интенсивности рассеянного под различными углами света в процессе гипотонического гемолиза:

1 — $\Theta_{\text{рас}} = 0^\circ$; 2 — $\Theta_{\text{рас}} = 3,5^\circ$; 3 — $\Theta_{\text{рас}} = 8^\circ$

троцитов резко уменьшается, в то время как для эритроцитарных мембран ее изменение невелико. Следовательно, в суспензии эритроцитов нет частиц меньших размеров, чем клетки. Эритроцитарные мембраны представляют собой менее гомогенную по размерам систему, в которой содержится большое число мелких обломков. Это указывает на неоднородность препарата мембран эритроцитов, получаемых по методу Доджа [11].

С помощью метода малоуглового светорассеяния можно определять размеры клеток и их органелл в процессе физического воздействия, влияющего на структуру клеток. При этом обнаруживается ряд изменений, которые не могут регистрироваться другими методами. Так, на рис. 3 приведены кинетические кривые гемолиза эритроцитов, вызываемого переводом клеток из физиологического раствора в гипотоническую среду. Кривая 1 отражает характер изменения мутности суспензий, а кривые 2 и 3 — изменение интенсивности света, рассеянного суспензией эритроцитов под углами $3,5^\circ$ и 8° соответственно. Последние кривые описывают изменения частиц, имеющих размеры близкие к $2,3$ и $7,0$ мкм. Наблюдение при различных углах рассеяния позволяет выделить отдельные этапы появления и исчезновения частиц определенного размера на фоне суммарного процесса структурной перестройки клеток. Так как для частиц различного размера характерны свои максимумы в индикатрисе рассеяния, указанный факт может быть использован для наблюдения за изменениями внутриклеточных органелл в нативной клетке.

На основании серии кинетических кривых, полученных при одинаковых условиях, но на различных углах наблюдения представляется возможным построение серии индикатрис рассеяния света на различных стадиях гемолиза эритроцитов. На рис. 2 представлена индикатриса рассеяния эритроцитов через 20 с при их переводе из $0,15$ М NaCl в раствор $0,08$ М NaCl (кривая 3). Вместо двух максимумов, характерных для нативных клеток, появляется один при $3,8^\circ$. Это указывает на то, что на начальном этапе гемолиза эритроцит изменяет свою форму от дискообразной до сферической с диаметром $6,5$ мкм.

Предварительные эксперименты показали возможность применения описанного метода для исследования структурных состояний лейкоцитов, тромбоцитов и клеток микроорганизмов при лизисе, действии на клетки лекарственных и токсических соединений, изменении pH, ионной силы, температуры раствора и т. д.

Таким образом, метод малоуглового светорассеяния перспективен для изучения морфологических изменений клеток и их органелл.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чижевский А. Л. Структурный анализ движущейся крови. — М., 1959, с. 87.
2. Поликар А. Поверхность клетки и ее микросреда. — М., 1975, с. 23.
3. Fiel R. I. — Exp. Cell. Res., 1970, v. 59, p. 413.
4. Sloan C. K. — J. Phys. Chem., 1955, v. 59, p. 834.
5. Fiel R. I., Munson B. R. — Exp. Cell. Res., 1970, 59, 421.
6. Stein B. S., Keane A. I. — J. Polim. Sci., 1955, v. 17, p. 21.
7. Harpst I. A., Krasna A., Zimm B. H. — Biopolymers, 1968, v. 6, p. 585.
8. Hermann I. I., Livingston S. — J. Opt. Soc. Am., 1951, v. 41, p. 460.
9. Aughey W., Boum F. I. — J. Opt. Soc. Am., 1954, v. 44, p. 833.
10. Гольдберг Д. И., Левина Г. Д. Диаметр эритроцитов в норме и патологии. — Томск, 1969, с. 19.
11. Dodge J. T., Mitchell C. — Arch. Biochem. Biophys. 1963, v. 100, p. 119.

Поступила в редакцию
12.03.79.

Кафедра биофизики

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ОРГАНИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛ ИЗ ВЫСОКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ ДВУХКВАНТОВОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Исследование поляризованной люминесценции молекул позволяет получать различного рода информацию о строении и свойствах молекул и, в частности, определять ориентацию моментов переходов в молекуле [1]. Новые возможности в этом плане предоставляет изучение люминесценции при двухфотонном возбуждении и люминесценции из высокоэнергетических возбужденных состояний, так называемой синей люминесценции (СЛ). В этих случаях оказывается возможным устанавливать ориентацию моментов переходов не только между основным и возбужденным, но и между возбужденными состояниями.

В настоящей работе изучена поляризованная СЛ растворов родамина 6Ж, родамина С и 3,6 тетраметилдиамино-N-метилфталимида (Ф) в глицерине и этиловом спирте с целью изучения относительного расположения моментов переходов и особенностей процесса возбуждения СЛ.

Измерения степени поляризации проводились по двухлучевой методике. Для возбуждения использовалось излучение основной частоты лазера на неодимовом стекле (9430 см^{-1}) и его второй гармоники. При помощи кристаллической пластинки (пластинка $\lambda/2$ для излучения основной частоты и λ для излучения второй гармоники) можно было изменять взаимную ориентацию векторов поляризации возбуждающих потоков. Для изменения интенсивности световых потоков использовалась система калиброванных нейтральных фильтров. Максимальная энергия излучения основной частоты и второй гармоники за один импульс ($\sim 30 \text{ нс}$) составляли 0,5 и 0,03 Дж соответственно. Длинноволновая составляющая люминесценции отделялась от СЛ при помощи системы фильтров, пропускающей излучение в диапазоне 360—420 нм, причем максимум пропускания отвечал длине волны 380 нм.

Поскольку частоты возбуждающих световых потоков нерезонансны переходам из основного состояния в состояния, благодаря заселению которых может наблюдаться СЛ, процесс ее возбуждения должен быть многоквантовым. Проверка показала, что световые потоки по отдельности не вызывают появления СЛ. Зависимости ее интенсивности от интенсивности основной частоты излучения при постоянной интенсивности второй гармоники являются линейными. В случае постоянства интенсивности основной частоты с увеличением интенсивности второй гармоники зависимость в начале также линейна, а затем начинает проявляться эффект насыщения. Поскольку излучение второй гармоники резонансно переходу с поглощением в первое возбужденное состояние S_1 , из совокупности этих эффектов можно заключить, что флуоресцирующее состояние S_f заселяется под действием излучения основной частоты. Процесс возбуждения, таким образом, является двухквантовым, и в нем участвует по одному кванту различной частоты. Тогда степень поляризации СЛ в жестких растворах будет определяться взаимной ориентацией моментов переходов из основного состояния S_0 в S_1 , из S_1 в более высокое S_n , и из S_f в S_0 . Обозначим единичные векторы этих моментов через μ_1 , μ_2 и μ_3 соответственно. Если регистрация люминесценции осуществляется в направлении оси Y лабораторной системы координат, в зависимости от ориентации векторов поляризации излучения основной частоты и второй гармоники ($\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$), степень поляризации будет определяться следующими выражениями:

при $\vec{e}_1 \parallel Z, \vec{e}_2 \parallel Z$

$$P = \frac{-2 - 4(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)^2 + 3(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)^2 + 3(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)^2 + 12(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)}{4 + 8(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)^2 + (\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)^2 + (\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)^2 + 4(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)}, \quad (1)$$

при $\vec{e}_1 \parallel Z, \vec{e}_2 \parallel Y$

$$P = \frac{-5 + 4(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)^2 + 4(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)^2 + 11(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)^2 - 12(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)}{11 - 6(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)^2 - 6(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)^2 + (\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)^2 + 4(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)}, \quad (2)$$

при $\vec{e}_1 \parallel Y, \vec{e}_2 \parallel Z$

$$P = \frac{-5 + 4(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)^2 + 11(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)^2 + 4(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)^2 - 12(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)}{11 - 6(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)^2 + (\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)^2 - 6(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)^2 + 4(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2)(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)(\vec{\mu}_1\vec{\mu}_3)}, \quad (3)$$

В случае маловязких растворов, когда длинноволновая люминесценция полностью деполаризована за счет вращательной деполаризации, СЛ будет по-прежнему поляризована [2, 3] за счет малого времени жизни в возбужденном состоянии. Степень поляризации при этом не будет зависеть от ориентации вектора $\vec{e}_1$ относительно лабораторной системы координат и ориентации $\vec{\mu}_1$ относительно $\vec{\mu}_2, \vec{\mu}_3$, так как распределение молекул в состоянии S_1 является изотропным. При $\vec{e}_2 \parallel Z$ степень поляризации будет определяться формулой Левшина — Перрена

$$P = \frac{3(\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)^2 - 1}{3 + (\vec{\mu}_2\vec{\mu}_3)^2} \text{ и } P = 0 \text{ } \vec{e}_2 \parallel Y. \quad (4)$$

Таким образом, анализируя значение степени поляризации люминесценции в жестких и маловязких растворах, можно установить взаимную ориентацию моментов переходов.

В табл. 1 приведены измеренные значения степени поляризации при различных ориентациях векторов поляризации в маловязком (этанол) и вязком (глицерин) растворителях.

Для объяснения результатов, полученных в маловязком растворителе, необходимо в соответствии с формулой (4), предположить, что для родаминов векторы моментов переходов $\vec{\mu}_2$ и $\vec{\mu}_3$ примерно перпендикулярны, а для Ф примерно параллельны. Анализ поляризационных спектров длинноволновой люминесценции [1, 4] приводит к выводу о перпендикулярности моментов переходов $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_3$ для всех изучаемых веществ.

Из данных табл. 1 видно, что степень поляризации меняется при изменении ориентации вектора $\vec{e}_2$. Это противоречит предположению об изотропном распределении молекул в состоянии S_1 или предполагаемому механизму возбуждения. Как показали выполненные измерения, длинноволновая флуоресценция из состояния S_1 полностью деполаризована, так что предположение об изотропности распределения в состоянии S_1 вполне обосновано. Видимо, наряду со ступенчатым поглощением имеется еще один канал возбуждения, который заселяет состояния S^n .

Таблица 1
Значения степени поляризации СЛ для исследуемых веществ

Вещество, растворитель	Способ возбуждения		
	$\vec{e}_1 \parallel Z, \vec{e}_2 \parallel Z$	$\vec{e}_1 \parallel Z, \vec{e}_2 \parallel Y$	$\vec{e}_2 \parallel Z, \vec{e}_1 \parallel Y$
Родамин 6Ж, этанол	—0,25	—0,16	0,00
Родамин С, этанол	—0,24	—0,17	0,00
Ф, этанол	0,24	0,32	—0,08
Родамин 6Ж, глицерин	—0,24	—0,10	0,00
Родамин С, глицерин	—0,25	—0,13	0,00
Ф, глицерин	0,13	0,31	—0,08

Таблица 2

Значения степени поляризации
двухфотонновозбуждаемой составляющей СЛ
для предложенных моделей

Вещество	Модель	Способ возбуждения		
		$\vec{e}_1 \parallel Z, \vec{e}_2 \parallel Z$	$\vec{e}_1 \parallel Z, \vec{e}_2 \parallel Y$	$\vec{e}_2 \parallel Z, \vec{e}_1 \parallel Y$
Родамин 6Ж	$\vec{\mu}_1 \parallel \vec{\mu}_2$	-0,5	-0,2	-0,2
Родамин С	$\vec{\mu}_1 \perp \vec{\mu}_2$			
Ф	$\vec{\mu}_2 \parallel \vec{\mu}_3$ $\vec{\mu}_1 \perp \vec{\mu}_2$	0,2	0,5	-0,2

Таблица

Экспериментальные значения
поляризационного отношения

$\rho = \frac{\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp}}$ для растворов
родаминов и Ф в этиловом
спирте и глицерине

Вещество	Растворитель	
	Гли- церин	Этиловый спирт
Родамин 6Ж	2,2	1,0
Родамин С	2,3	1,0
Ф	0,85	0,9—1,0

В [5] показано, что для системы, взаимодействующей с двумя потоками резонансного излучения, наряду со ступенчатым должно наблюдаться двухфотонное поглощение. Естественно предположить, что оно и является дополнительным каналом заселения. Как показано в [5] для случая слабого возбуждения, угловая зависимость вероятности такого поглощения в наших обозначениях будет определяться величиной $(\vec{\mu}_1 \vec{e}_1)^2 (\vec{\mu}_2 \vec{e}_2)^2$. Если в качестве первого приближения это будет справедливо и в нашем случае, степень поляризации люминесценции, возбуждаемой двухфотонным поглощением, независимо от вязкости выразится формулами (1) — (3).

В табл. 2 приведены рассчитанные по формулам (1) — (3) значения степени поляризации двухфотонно возбуждаемой составляющей СЛ соответствующие предложенным моделям взаимной ориентации моментов переходов для исследованных соединений. Как видно, эти модели позволяют полностью качественно объяснить экспериментальные данные для маловязких растворов.

Для вязких растворов, если пренебречь вращательным движением молекул, угловые зависимости ступенчатого и двухфотонного поглощения будут совпадать, и степень поляризации СЛ определится формулами (1) — (3). Результаты измерений (см. табл. 1) качественно вполне согласуются с результатами теоретических расчетов (см. табл. 2).

Поскольку в жестких растворах угловое распределение молекул, возбуждаемых за счет ступенчатого поглощения и двухфотонным образом, совпадает, а для маловязких — различается, дополнительную информацию о процессах заселения высоких возбужденных состояний можно получить из измерений поляризационных отношений, т. е. отношений ρ сечений поглощения при параллельной и ортогональной взаимной ориентации векторов поляризации возбуждающих потоков излучения.

Как показывает несложный расчет, в жестких и маловязких растворах соответственно:

$$\rho = \frac{2(\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2)^2 + 1}{2 - (\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2)^2}; \quad (5)$$

$$\rho = \frac{\sigma_g [2(\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2)^2 + 1] + \sigma_c}{\sigma_g [2 - (\vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2)^2] + \sigma_c}, \quad (6)$$

где σ_g и σ_c — молекулярные константы, определяющие вероятность ступенчатого и двухфотонного поглощения.

В соответствии с формулами (5), (6) для родаминов в глицерине ρ должно иметь значение близкое к 3, для спиртового раствора эта величина должна быть меньше. Для Φ_r должно быть меньше единицы в глицерине и иметь несколько большее значение в спирте. Выполненные нами по люминесцентной методике [6] измерения поляризационного отношения приведены в табл. 3 и согласуются с изложенными теоретическими представлениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феофилов П. П. Поляризованная люминесценция атомов, молекул, кристаллов.— М., 1959.
2. Аристов А. В., Шевандин В. С.— Опт. и спектр., 1978, т. 44, с. 473.
3. Богданов В. Л., Клочков В. П. Там же, с. 707.
4. Саржевский А. М.— Докл. АН БССР, 1961, т. 5, с. 199.
5. Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом.— Минск, 1977.
6. Воропай Е. С., Дударев И. А., Клищенко А. П., Саржевский А. М.— ЖПС, 1975, т. 23, с. 273.

Поступила в редакцию
23.05.79.

Кафедра общей физики



ОПТИМАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ НЕОСОБЫХ УЧАСТКОВ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ПОНТЯГИНА

Получены необходимые условия оптимального сопряжения в особых точках для задачи с критерием качества типа максимума, а также для задачи с гладким критерием качества и системы с запаздыванием по состоянию.

1. Условие оптимальности для задачи с негладкой функцией качества и его следствия. 1. Рассмотрим задачу

$$\dot{x} = f(x, u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) = \max_{1 \leq i \leq m} \varphi_i(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad (2)$$

где x — n -вектор; $u(t)$ — кусочно-непрерывная r -вектор-функция управления; x_0 — заданное начальное состояние системы; $f(x, u, t)$, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, — непрерывные функции вместе со своими производными до второго порядка включительно; t_0, t_1 — заданные начальный и конечный моменты времени; U — некоторое множество пространства R^r .

Необходимое условие оптимальности первого порядка для этой задачи получено в [1].

Определение 1. Для управления $u(t)$ точку $t = \Theta \in [t_0, t_1]$ назовем особой, если существует множество $\omega(\Theta) \subset U$ такое, что $\omega(\Theta) \setminus u(\Theta) \neq \emptyset$ и для хотя бы одного $i \in I = \{i : 1 \leq i \leq m, \varphi_i(x(t_1)) = \varphi(x(t_1))\}$ $\forall v \in \omega(\Theta)$ выполняется равенство

$$\Delta_v H(x(\Theta), \psi^i(\Theta), u(\Theta), \Theta) = 0, \quad (3)$$

где $H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$, $\Delta_v H(x, \psi^i, u, t) = H(x, \psi^i, v, t) - H(x, \psi^i, u, t)$, $\psi^i(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x(t), \psi, u(t), t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = - \frac{\partial \varphi_i(x(t_1))}{\partial x},$$

где $x(t)$ — решение уравнения (1), соответствующее управлению $u(t)$.

Совокупность всех индексов $i \in I$, для которых выполняется (3), обозначим через I_1 . Пусть $u^0(t)$ — оптимальное управление, $x^0(t)$, $\psi^{0i}(t)$ — соответствующие ему траектории основной и сопряженной систем, $\Psi^{0i}(t)$ — решение следующей системы:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = & - \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi - \Psi \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^{0i}(t), u^0(t), t)}{\partial x^2}, \quad \Psi(t_1) = - \frac{\partial^2 \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

С помощью формулы приращения второго порядка [2] можно доказать следующий результат.

Теорема 1. Каждое оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет условию сопряжения в особой точке $\Theta \in [t_0, t_1]$:

$$\min_{\substack{t \in I, \\ j \in N_{I_1}}} \left(\left[\frac{d}{dt} \Delta_v H(x^0(t), \psi^{0j}(t), u^0(t), t) + \right. \right. \\ \left. + \Delta_v f'(x^0(t), u^0(t), t) \Psi^{0j}(t) \times \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Delta_v H(x^0(t), \psi^{0j}(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \right]_{t=\Theta+0} \right) \quad (4)$$

$$\Delta_v H(x^0(t), \psi^{0j}, u^0(t), t)|_{t=\Theta+0} \leq 0 \text{ для } \forall v \in \omega(\Theta).$$

2. Пусть требуется найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за минимальное время $t_1 - t_0$ траекторию системы (1) из точки x_0 на множество $Q = \{x \in R^n: \varphi_i(x) \leq 0, i = \bar{1}, m\}$.

Сведя эту задачу к задаче п. 1 с ограничением снизу на продолжительность процесса, убеждаемся, что справедливо

Следствие 1. Для оптимального управления в задаче быстрогодействия выполняется неравенство

$$\max_{t \in I} H(x^0(t_1^0), \psi^{0j}(t_1^0), u^0(t_1^0 - 0), t_1^0) \geq 0,$$

и, если $\Theta \in [t_0, t_1^0]$ является особой точкой для оптимального управления $u^0(t)$, справедливо (4), где t_1^0 — оптимальный конечный момент времени.

3. Пусть требуется минимизировать функционал $J(u) = \varphi_0(x(t_1))$ при ограничениях $\varphi_i(x(t_1)) \leq 0, i = \bar{2}, m$, где $x(t)$ — траектория системы (1).

Очевидно, что если $u^0(t)$ — оптимальное управление этой задачи, $x(t)$ — соответствующая ему траектория, то $u^0(t)$ является оптимальным и для задачи типа (1) — (2) где $\varphi_1(x(t_1)) = \varphi_0(x(t_1)) - \varphi_0(x^0(t_1))$. Поэтому для задачи с подвижным правым концом также справедливо условие (4).

II Условие оптимальности для задачи с запаздыванием по состоянию. Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t), t), \quad y(t) := x(t-h),$$

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0,$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1], \quad J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min,$$

где x — n — вектор; $u(t)$ — кусочно-непрерывная r -векторная функция управления; t_0, t_1 — заданные моменты времени; U — некоторое множество пространства R^r ; $f(x, y, u, t)$, $\varphi(x)$ — непрерывные функции вместе со своими частными производными до второго порядка включительно; $\varphi_0(t)$ — известная функция, заданная в такой начальной области E_{t_0} , чтобы при каждом допустимом управлении $u(t), t \in [t_0, t_1]$, траектория системы была определена единственным образом.

Приращение траектории на игольчатой вариации равно (см. [3])

$$\Delta x(t_1) = F(t_1, \Theta + \varepsilon) \Delta x(\Theta + \varepsilon) + \int_{\Theta}^{\Theta + \varepsilon} F(t_1, \tau + h) \frac{\partial f(\tau + h)}{\partial y} \Delta x(\tau) d\tau + \\ + \int_{\Theta + \varepsilon}^{t_1} F(t_1, \tau) \left[\Delta x' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta y + \Delta x' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x + \Delta y' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y + \right. \\ \left. + \Delta y' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Delta x + \Delta_u f + \frac{\Delta_v \partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\Delta_v \partial f}{\partial y} \Delta y \right] d\tau + o(\varepsilon^2), \quad (5)$$

где $F(t, \tau)$ — $n \times n$ — матричная функция, удовлетворяющая условиям $\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = -F(t, \tau) f_x(\tau) - F(t, \tau + h) f_y(\tau + h)$, $F(t, \tau) = 0, t < \tau$, $F(t, t) = E$ — единичная матрица.

Из (5) следует формула

$$\Delta J(u) = - \int_{\Theta}^{\Theta + \varepsilon} \Delta_v H(t) dt - \frac{\varepsilon^2}{2} [\Delta_v H'_x(s) \Delta_v f(s) + \\ + \Delta_v f'(s) \bar{\Psi}(s) \Delta_v f(s)]_{s=\Theta} + o(\varepsilon^2), \quad (6)$$

где $H(t) \equiv \psi'(t) f(x(t), y(t), u(t), t)$.

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(t) = & \int_t^{t_1} [F'(\tau, t) H_{xx}(\tau) F(\tau, t) + \\ & + F'(\tau, t) H_{xy}(\tau) F(\tau-h, t) + F'(\tau-h, t) H_{yy}(\tau) F(\tau-h, t) + F'(\tau-h, \\ & t) H_{yx}(\tau) F(\tau, t)] d\tau - F'(t_1, t) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} F(t_1, t). \end{aligned}$$

Из (6) получаем принцип максимума для оптимального управления $u = u^0(t)$:

$$H(x^0(t), y^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), y^0(t), \psi^0(t), u, t)$$

для $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Определение 2. Точку $t = \Theta \in [t_0, t_1]$ назовем особой, если существует множество $\omega(\Theta) \subset U$ такое, что $\omega(\Theta) \setminus u^0(\Theta) \neq \emptyset$, и для $\forall u \in \omega(\Theta)$ выполняется равенство $\Delta_v H(x^0, y^0, \psi^0, u^0, t)|_{t=\Theta} = 0$. Справедлива

Теорема 2. Оптимальное управление $u^0(t)$ и соответствующие ему $x^0(t), y^0(t), \psi^0(t)$ удовлетворяют условию сопряжения

$$\left[\frac{d}{dt} \Delta_v H(t) + \Delta_v H'_x(t) \Delta_v f(t) + \Delta_v f'(t) \Psi^0(t) \Delta_v f(t) \right]_{\Theta+0} \leq 0.$$

III Условие оптимального сопряжения высокого порядка. Рассмотрим систему (1) с критерием качества $J(u) = \Phi(x(t_1))$. В [2] получено условие оптимального сопряжения в особой точке $t = \Theta$.

Определение 3. Для управления $u(t)$ точку $t = \Theta \in [t_0, t_1]$ назовем особой точкой второго порядка, если она особа с соответствующим множеством $\omega(\Theta)$ и $\exists \omega_1(\Theta) \subset \omega(\Theta)$ такое, что $\omega_1(\Theta) \setminus u(\Theta) \neq \emptyset$, и для $\forall v \in \omega_1(\Theta)$ выполняется равенство

$$\left[\frac{d}{dt} \Delta_v H + \Delta_v f' \bar{\Psi} \Delta_v f + \frac{\partial \Delta_v H'}{\partial x} \Delta_v f \right]_{\Theta+0} = 0.$$

Разлагая $\Delta J(u)$ до ϵ^3 , можно убедиться, что справедлива

Теорема 3. Необходимым условием оптимального сопряжения в особой точке второго порядка является неравенство

$$\left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Delta_v H + \frac{d}{dt} \left(\Delta_v f' \bar{\Psi} \Delta_v f + \frac{\partial \Delta_v H'}{\partial x} \Delta_v f + \Delta_v Q_{1,1,2} \Delta_v f_{1,1} \Delta_v f_{1,2} \right) \right]_{\Theta+0} \leq 0, \quad (7)$$

где $Q_{1,1,2}(x, \psi, u, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{3!} \psi_{j_{1-1} j_{1,1} j_{1,2}} f_j(x, u, t) +$

$$+ \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!(3-k)!} \psi_{j_{l-1} j_{l,1} j_{l,2}} \frac{\partial^{3-k} f_l(x, u, t)}{\partial x_{l,k} \partial x_{l,2}},$$

$$\psi_{j_{1,1} j_{1,2}} = - \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{3!}{k!(4-k)!} \psi_{j_{l-1} j_{l,1} j_{l,2}} \frac{\partial^{4-k} f_l(x, u, t)}{\partial x_{l,k} \dots \partial x_{l,3}},$$

$$\psi_{j_{1,1} j_{1,2}}(t_1) = - \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x_{1,1} \partial x_{1,2} \partial x_{1,3}}.$$

Этот результат можно перенести на задачи, рассмотренные в I, II.

IV Примеры. П р и м е р 1. Требуется привести траекторию системы

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2$$

из точки $(0, 0)$ на множество $\{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0, x_2 \leq -\frac{1}{27}\}$ за минимальное время t_1 (начальный момент времени считаем нулевым), где $u(t)$ — кусочно-непрерывная функция, $|u(t)| \leq 1$.

Управление $u(t) = \text{sign} \cos \frac{3\pi t}{2}$ не удовлетворяет условию (4) при $\Theta = \frac{1}{3}$. Следовательно, оно не оптимально.

Пример 2. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 x_3$, $\dot{x}_3 = x_1 - 6t + 2$,

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = -\frac{157}{648}, \quad x_3(0) = -\frac{7}{18},$$

$$U = \{u: |u| \leq 1\},$$

$$\Phi(x(1)) = \frac{8}{27} x_1(1) - \frac{81}{32} x_2^2(1) \rightarrow \min.$$

Управление $u(t) = \text{sign} \cos \frac{3\pi t}{2}$ не удовлетворяет (7) при $\Theta = \frac{1}{3}$. Следовательно, оно неоптимально, хотя удовлетворяет принципу максимума.

В заключение автор выражает большую и искреннюю благодарность профессору Р. Габасову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич В. В. — В сб.: Дифференц. и интегр. уравнения. — Иркутск, 1973.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М., 1973.
3. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М., 1967.

Поступила в редакцию
01.10.77.

Кафедра методов оптимального
управления

УДК 681.3.06

И. И. МЛЫНЧИК, ТО ТУАН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОБРАБОТКИ ТАБЛИЦ ИНФОРМАЦИИ

Довольно часто в программах необходимо организовать таблицы информации таким образом, чтобы данные можно было легко и быстро помещать в таблицу и выбирать из нее. Примером такой таблицы может быть таблица символов (меток), обрабатываемая Ассемблером. Быстрым алгоритмом поиска является алгоритм двоичного поиска, но он может работать только с таблицами, которые упорядочены и упакованы. Поэтому такие процедуры могут использоваться только совместно с алгоритмом сортировки, который упорядочивает и упаковывает данные. Поиск методом прямого доступа (см. [1—5]) позволяет добиваться хорошей скорости при использовании неупакованной и неупорядоченной таблицы, но она сильно зависит от коэффициента загрузки таблицы $\rho = \frac{n}{N}$, где n — количество записей, находящихся в таблице; N — максимальная длина таблицы.

Действительно, Р. Моррис в работе [5] дал следующую оценку среднего числа проверок, необходимых для включения новой метки в таблицу (метка включается в таблицу меток, если она однозначна, т. е. еще не встречалась в таблице):

$$T_N(\rho) = 1 + \frac{n}{N} + \frac{n(n-1)}{N(N-1)} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{N(N-1) \dots (N-n+1)},$$

где j -ый член суммы есть вероятность того, что нужно произвести j или более проверок на отсутствие.

Индукцией по n нетрудно доказать, что

$$T_N(\rho) = 1 + \frac{n}{N-n+1} = \frac{N+1}{N-n+1} = \frac{1}{1 - \frac{n}{N+1}},$$

для больших N имеем $\frac{n}{N+1} \approx \frac{n}{N} = \rho$; следовательно,

$$T_N(\rho) \approx \frac{1}{1-\rho} = \frac{N}{N-n}, \quad (1)$$

Отметим, что $T_N(\rho)$ есть среднее число проверок на отсутствие метки в таблице. Среднее число проверок на обнаружение дано в [1, 2, 5]:

$$T_P(\rho) \approx 1 + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 + \frac{n}{2N} \cdot \frac{1}{1-\frac{n}{N}}$$

или

$$T_P(\rho) \approx \frac{2N-n}{2(N-n)}. \quad (2)$$

Эти оценки даются для разновидности метода прямого доступа: метода открытой адресации.

К недостаткам этого метода следует отнести тот факт, что под таблицу нужно заранее резервировать $N \cdot l$ байтов (l — длина строки таблицы в байтах).

Попытаемся улучшить этот метод, используя списковую структуру. Для удобства изложения в дальнейшем все рассуждения будут вестись относительно таблицы меток (символических имен) обрабатываемой Ассемблером. Строка этой таблицы имеет структуру:

<метка> <характеристики> <поле связи>

На первом просмотре Ассемблера таблица меток заполняется метками из исходного модуля. Метка помещается в таблицу, если она: а) правильна синтаксически; б) однозначна, т. е. еще не встречалась в программе; в) характеристики метки верны. Очевидно, что при этом очень важно быстро выяснить однозначность текущей метки, т. е. проверить ее отсутствие в таблице меток. На втором просмотре таблица меток используется для получения требуемых характеристик используемых меток, т. е. решается задача поиска на обнаружение метки в таблице. Для метода открытой адресации оценки этих двух задач поиска приведены в [1, 2].

Предположим, что все метки случайны по своему написанию. Для транслятора закон появления метки в исходной программе носит случайный характер (т. е. заранее не определен). Следовательно, в таблицу метки попадают в произвольном порядке (т. е. не упорядочены). Поэтому для поиска метки в таблице проще всего использовать метод линейного поиска. Легко видеть, что в этом случае в среднем нужно просмотреть половину таблицы (заполненной ее части). Предположим, что нужная метка находится в таблице, в любом месте ее заполненной части из n строк (записей) с вероятностью $1/n$. Вычислим математическое ожидание времени поиска: $\sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{1}{n} \right)$, где i -ый член суммы есть $i \cdot \frac{1}{n}$, т. е. произведение длины поиска на вероятность того, что нужно просмотреть i запись:

$$\sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2},$$

или в среднем нужно просмотреть половину таблицы [2, 3]. Если искомой метки нет, нужно просмотреть n записей.

Изложим суть предлагаемого метода поиска. Первоначальная идея метода очень проста. Рассмотрим последние символы всех меток. Среди них могут быть совпадающие и различные. Положим, что множество всех символов, участвующих в формировании меток, есть B . Для языка Ассемблера ЕС ЭВМ $|B| = 39$. Следовательно, если n небольшое, неко-

торых символов в таблице нет. Возникает идея связать все метки с одинаковыми последними символами в список. Если какой-то символ еще не присутствует, то список для него пустой. Максимальное возможное число списков равно $|B|$. Пусть встречается текущая метка. Возьмем у нее последний символ и произведем поиск в таблице только по списку, соответствующему этому символу, т. е. просмотрим только часть таблицы. Если этот список пустой, то, следовательно, такой метки нет в таблице. Для обращения к соответствующему списку надо знать адрес его начала. Эти адреса хранятся в дополнительной таблице *TABL*:

TABL DC 256X'00'

Пусть код символа из метки есть $X'ij'$, где i, j — есть шестнадцатеричные цифры. Адрес начала соответствующего списка будем хранить в байте с адресом $TABL + X'ij'$, т. е. код последнего символа в метке можно использовать в качестве индекса для *TABL*. Для связи в списках используем один байт. Код $X'00'$ в этом байте означает конец списка. В *TABL* код $X'00'$ означает, что соответствующий список пуст. Заметим, что в таблице меток *TABS* информацию будем размещать с адреса $TABS + l$, где l есть длина строки в байтах, т. е. нулевая строка таблицы меток не будет использоваться. В такой таблице *TABS* можно разместить до 255 меток (строк). Увеличить таблицу *TABS* можно расширением поля связи до 2 байтов. Соответственно следует расширить на 1 байт поле связи в *TABL*.

Проведем анализ предлагаемого метода. Обозначим через K количество символов (литер), которыми могут оканчиваться метки. Положим $K = |B|$. Если все символы из B с одинаковой вероятностью P встречаются в качестве последних символов меток, то $P = 1/K$.

Тогда средняя длина списка определяется как математическое ожидание числа меток, имеющих одинаковый последний символ (т. е. принадлежащих одному списку):

$$M_1 = \sum_{i=1}^n C_n^i \cdot (1-P)^{n-1} \cdot P^i \cdot i,$$

где $C_n^i (1-P)^{n-1} \cdot P^i$ есть вероятность того, что в *TABS* длина некоторого списка равна i , или

$$\begin{aligned} M_1 &= (1-P)^{n-1} \cdot P \cdot \sum_{i=1}^n C_n^i (1-P)^{1-i} \cdot P^{i-1} \cdot i = \\ &= (1-P)^{n-1} \cdot P \cdot \sum_{i=1}^n C_n^i a^{i-1} \cdot i, \end{aligned}$$

где $a = \frac{P}{1-P}$. Положим $S = \sum_{i=1}^n C_n^i \cdot i \cdot a^{i-1} \Rightarrow S' = [(1+a)^n]_a'$, следовательно:

$$M_1 = (1-P)^{n-1} \cdot P \cdot n \cdot \frac{1}{(1-P)^{n-1}} = nP = \frac{n}{K}. \quad (3)$$

Предположим, что вероятности использования различных литер в качестве последних символов меток различны и равны P_i . Ясно, что $\sum_{i=1}^K P_i = 1$. Тогда для i -го списка аналогично получаем его среднюю длину, равную nP_i . Символ i выбирается из B с вероятностью P_i , следовательно, вероятность обращения к списку i есть также P_i . Если учитывать все списки, среднее число необходимых сравнений (если нужной метки нет в *TABS*) вычисляется следующим образом:

$$M_2 = \sum_{i=1}^K (nP_i \cdot P_i) = n \sum_{i=1}^K P_i^2.$$

Нетрудно доказать следующее неравенство: $\left(\sum_{i=1}^K a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^K a_i^2 \sum_{i=1}^K b_i^2$, для

всех $a_i, b_i, i = 1, \dots, K$. Если обозначить через $b = \sum_{i=1}^K a_i b_i$, $a = \sum_{i=1}^K a_i^2$,

$c = \sum_{i=1}^K b_i^2$, то неравенство примет вид: $b^2 \leq ac$. Рассмотрим квадратичное уравнение:

$$X^2 a - 2bX + c = 0, \quad (4)$$

детерминант его равен $b^2 - ac$. Если подставить в (4) значения a, b и c ,

то получим $X^2 \sum_{i=1}^K a_i^2 - 2X \sum_{i=1}^K a_i b_i + \sum_{i=1}^K b_i^2 = 0$ или

$$(X^2 a_1^2 - 2X a_1 b_1 + b_1^2) + \dots + (X^2 a_K^2 - 2X a_K b_K + b_K^2) = 0,$$

следовательно,

$$(Xa_1 - b_1)^2 + (Xa_2 - b_2)^2 + \dots + (Xa_K - b_K)^2 = 0.$$

Это означает, что (4) не может иметь двух различных корней. Следовательно, детерминант $b^2 - ac \leq 0$. Если $b^2 - ac = 0$, то (4) имеет единственное решение. Это достигается в случае, когда $\frac{b_1}{a_1} = \dots = \frac{b_K}{a_K}$. По-

ложим $a_i = 1, b_i = P_i, i = 1, \dots, K$. Тогда неравенство принимает вид:

$(P_1 + P_2 + \dots + P_K)^2 \leq K(P_1^2 + \dots + P_K^2)$. Однако $\sum_{i=1}^K P_i = 1$, следова-

тельно, $\sum_{i=1}^K P_i^2 \geq \frac{1}{K}$ или $n \sum_{i=1}^K P_i^2 \geq \frac{n}{K}$. Равенство здесь достигается,

если $P_1 = P_2 = \dots = P_K = P = \frac{1}{K}$.

Фактически доказано утверждение, что метод имеет наилучшую временную характеристику при $P_1 = P_2 = \dots = P_K = \frac{1}{K}$. В дальнейшем предполагаем, что условие всегда выполняется. Из (3) следует, что при возрастании K временная характеристика метода улучшается. Можно увеличить K до 256 путем построения функции расстановки F от метки (точнее, от ее машинного представления). Функция F должна давать целые значения, равномерно распределенные в промежутке $[0, 255]$. Существуют разные методы вычисления F [1, 2, 4, 5].

Теперь сравним временные характеристики предлагаемого метода и метода открытой адресации. Рассмотрим два случая.

1. Сравнение средних чисел проверок на отсутствие метки в таблице. На основании (1) и (3) составим отношение:

$$T_N(\rho) = \frac{N}{N-n} \sim \frac{n}{K}, \quad (5)$$

где отношение $\sim$ есть элемент множества $\{>, <, =\}$. Из (5) имеем: $NK \sim Nn - n^2 \Rightarrow n^2 - Nn + NK \sim 0$. Детерминант левой части (квадратичного многочлена относительно n):

$$\Delta = N^2 - 4NK = N(N - 4K).$$

Так как $N > 0$, то $\Delta < 0$, если $N < 4K$. Тогда (5) принимает вид $T_N(\rho) > \frac{n}{K}$. Это означает, что при $N < 4K$ временная характеристика

предлагаемого метода лучше аналогичной характеристики метода открытой адресации.

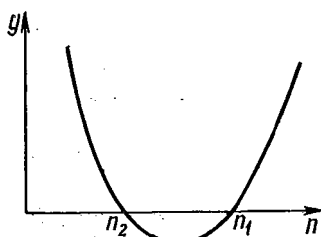
Если $K = 256 \Rightarrow 4K = 4 \cdot 256 = 1024$. Во многих трансляторах N часто меньше 1024 (например, в альфа-трансляторе для машины М-20, $N = 512$), т. е. практически наш метод лучше. Если $N \geq 4K$, уравнение $n^2 - Nn + NK = 0$ имеет корни. Для $N = 4K$ имеем $n_1 = n_2 = \frac{N}{2}$. Для $N > 4K$ эти корни имеют вид:

$$n_1 = \frac{N + \sqrt{N(N-4K)}}{2}; \quad n_2 = \frac{N - \sqrt{N(N-4K)}}{2}.$$

График функции $y = n^2 - Nn + NK$ изображен на рисунке, из которого видно, что для $n_2 < n < n_1$ наш метод хуже. Для $n > n_1$ и $n < n_2$ наш метод лучше.

Если $N = 255$, в зависимости от K корни n_1, n_2 имеют следующие значения:

K	n_2	n_1
16	17,15	237,85
17	17,32	236,68
18	19,49	235,51
19	20,68	234,32
20	21,88	233,12



Здесь нас интересует главным образом n_2 . Полученные значения n_2 доказывают преимущество нашего метода даже для $N > 4K$.

2. Сравнение средних чисел проверок на обнаружение метки в таблице.

(В предположении, что в TABS существует нужный элемент, причем он случайно появляется в различных строках занятой части таблицы).

Для нашего метода это число есть $\frac{n}{2K}$. Следовательно, из (2) имеем:

$$\frac{2N - n}{2(N - n)} \sim \frac{n}{2K} \Rightarrow n^2 - (N + K)n + 2NK \sim 0. \quad (6)$$

Для левой части $\Delta = (N + K)^2 - 8NK = N^2 - 6NK + K^2$ есть многочлен относительно N . Рассмотрим его знак. $\Delta' = 9K^2 - K^2 = 8K^2 > 0$. Это означает, что уравнение $\Delta = 0$ всегда имеет два различных корня:

$$N'_1 = 3K + \sqrt{8K^2} = K(3 + \sqrt{8}); \quad N'_2 = K(3 - \sqrt{8}).$$

Нетрудно видеть, что $\Delta' > 0$ для $N < K(3 - \sqrt{8})$ и $N > K(3 + \sqrt{8})$; $\Delta' < 0$ для $K(3 - \sqrt{8}) < N < K(3 + \sqrt{8})$. Следовательно, если $N < N'_2$ и $N > N'_1$, уравнение $\Delta = 0$ имеет корни:

$$n'_1 = \frac{(N + K) + \sqrt{\Delta}}{2}; \quad n'_2 = \frac{(N + K) - \sqrt{\Delta}}{2},$$

где Δ есть левая часть (6).

Для $n'_2 > n$ и $n'_1 < n$, отношение $\sim$ из (6) принимает значение $>$, что означает преимущество нашего метода. Заметим, что по среднему числу проверок на обнаружение наш метод намного лучше метода открытой адресации. Действительно, если $N = 255$ и $K = 16, 17, 18, 19, 20$, то n'_1 и n'_2 принимают следующие значения:

K	n_2'	n_1'
16	34,34	250,92
17	36,37	250,41
18	39,03	249,88
19	41,42	249,32
20	43,83	248,74

Сравним эту таблицу с приведенной ранее. Для одинаковых K значение n_2' в два раза больше n_2 (напомним, что чем больше n_2 и n_2' , тем лучше наш метод. Причем для двух случаев n_1 и n_1' близки к $N = 255$, следовательно, нас не интересуют эти значения).

При оценках и сравнении двух методов мы не учитывали такие характеристики, как время вычисления функции расстановки; время, затраченное на обработку списков и др.

Фактически нужно сравнивать не средние величины a_1 и a_2 , а величины $a_1 a_1 + \beta_1$ и $a_2 a_2 + \beta_2$.

Если a_1 есть число (среднее) проверок на отсутствие для нашего метода $\left(\frac{n}{K}\right)$, то $\alpha_1 \approx 374$ мкс, $\beta_1 \approx 441$ мкс. Эти небольшие величины неплохо характеризуют преимущество предлагаемого метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Донован Дж. Системное программирование.— М., 1975.
2. Лебедев В. Н. Введение в системы программирования.— М., 1975.
3. Папернов А. А., Полымов В. Я. Методы упорядочения информации в цифровых системах.— М., 1973.
4. Глушков В. М. и др. Обработка информационных массивов в автоматизированных системах управления.— Киев, 1970.
5. Morris R.— Comm. ACM, 1968, v. 11, № 1, p. 229.

Поступила в редакцию
27.10.77.

Кафедра общего программирования

УДК 681.3

В. В. БЕЛЯВСКИЙ, М. А. ВОРОБЬЕВ, Г. А. ДРОБУШЕВИЧ,
И. В. КОМАРОВСКИЙ

АЛГОРИТМ ПОДСЧЕТА ИТОГОВ ПО ГРУППАМ И ПОДГРУППАМ

При решении экономических задач на ЭВМ часто требуется распечатать массив, одновременно с подведением итоговых данных по определенным группам и (или) подгруппам.

Рассмотрим постановку задачи. Имеем входной массив с записями Z следующей структуры:

$$Z = \{P, Q\},$$

где $P = \{p_i | i = \overline{1, n}\}$ — реквизиты-признаки [1] записи Z ; $Q = \{q_j | j = \overline{1, l}\}$ — реквизиты-основания [1] записи Z , причем вместо p_i и q_j в записях Z могут стоять произвольные коды или цифровые данные.

Предполагается, что перед распечаткой массива с одновременным подведением итоговых данных входной массив рассортирован по возрастанию или убыванию значений кодов p_i ($i = \overline{1, n}$).

Выполним разбиение записей входного массива на группы записей $G^0, G^1, G^2, \dots, G^n$, причем к G^0 отнесем все записи массива; G^1 — записи с одинаковыми значениями кодов p_1 ; G^2 — с одинаковыми значениями кодов p_1 и p_2 соответственно; ... ; G^n — записи с одинаковыми значениями кодов $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно, а также разбиение на подгруппы записей $\prod_i^k$.

К подгруппе $\prod_t^k$ отнесем все записи, у которых соответственно равны значения кодов $p_1, p_2, \dots, p_k$, а также p_t , где $k < t \leq n$.

Итогом группы $G^k (k \leq n)$ является

$$S(G^k) = \{S(G_j^k) \mid j = \overline{1, l}\},$$

где $S(G_j^k) = \sum_{z \in G^k} q_j, j = \overline{1, l}$.

Итогом подгруппы $\prod_t^k (k < t \leq n)$ является

$$S(\prod_t^k) = \{S(\prod_{t,j}^k) \mid j = \overline{1, l}\},$$

где $S(\prod_{t,j}^k) = \sum_{z \in \prod_t^k} q_j, j = \overline{1, l}$.

Согласно постановке задачи (упорядоченность входного массива) для подсчета итогов на G^k достаточно просуммировать $q_j, j = \overline{1, l}$, входящие в логически подряд расположенные записи при последовательном методе доступа, у которых $p_1, p_2, \dots, p_k$ равны. В дальнейшем будем использовать этот факт для сокращения операций при подсчете итоговых данных по группам.

$$S(G_j^i) = \sum_{z \in G^i} q_j = \sum_{z \in \bigcup_{i=0}^{i-1} G^{i+1}} S(G_j^{i+1}) \quad j = \overline{1, l}, i = \overline{0, n-1} \quad (1)$$

$$S(G_j^n) = \sum_{z \in G^n} q_j \quad j = \overline{1, l}. \quad (2)$$

Блок-схема учитывает формулы (1) и (2) для реализации задачи с подсчетом итоговых данных по группам.

При подсчете итоговых данных по подгруппе $\prod_t^k$ внутри группы G^k суммировать логически подряд расположенные записи, у которых $p_1, p_2, \dots, p_k, p_t$ равны, нельзя, так как записи этой подгруппы могут чередоваться с записями других подгрупп $\prod_t^k$ группы G^k .

Итоговые данные $S(G^k)$ должны следовать в выходном массиве по окончании группы G^k , а итоговые данные $S(\prod_t^k)$ следуют после итоговых данных $S(G^k)$.

Рассмотрим пример. Дан массив «Выпуск деталей по предприятию», состоящий из записей следующей структуры:

Наименование реквизита	Шифр цеха	Шифр бригады	Шифр смены	Шифр детали	Сдано за сутки
Условное обозначение	ШЦ	ШБ	ШС	ШД	СС
Диапазон изменений	1—90	1—5	1—3	1—99999	0—999
Условное обозначение согласно общей постановке	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1

Массив рассортирован по возрастанию p_1, p_2, p_3, p_4 . В данном массиве нужно выделить следующие группы: G^0 — записи, содержащие информацию по всему предприятию, т. е. все записи массива; G^1 — по определенным цехам данного предприятия; G^2 — по определенным бригадам каждого цеха; G^3 — по каждой смене в разрезе бригады, цеха; G^4 — по выпуску каждой детали в разрезе смены, бригады, цеха.

Для решения задачи выделены следующие подгруппы.

Π_4 — записи, содержащие информацию о выпуске определенной детали данным цехом; Π_4^2 — о выпуске определенной детали каждой бригады для каждого цеха.

Требуется распечатать массив «Выпуск деталей по предприятию» с итоговыми данными по группам G^0, G^1, G^2, G^3, G^4 и подгруппам Π_4^1, Π_4^2 , где $S(G^0) = \sum_{z \in G^0} q_1 = \sum_{z \in \cup G^1} S(G^1)$, $S(G^1) = \sum_{z \in G^1} q_1 = \sum_{z \in \cup G^2} S(G^2)$, $S(G^2) = \sum_{z \in G^2} q_1 = \sum_{z \in \cup G^3} S(G^3)$, $S(G^3) = \sum_{z \in G^3} q_1 = \sum_{z \in \cup G^4} S(G^4)$, $S(G^4) = \sum_{z \in G^4} q_1$, $S(\Pi_4^1) = \sum_{z \in \Pi_4^1} q_1$, $S(\Pi_4^2) = \sum_{z \in \Pi_4^2} q_1$.

Отметим, что

$$\sum_{z \in G^1} q_1 = \sum_{z \in \cup \Pi_4^1} q_1, \quad \sum_{z \in G^2} q_1 = \sum_{z \in \cup \Pi_4^2} q_1.$$

Пусть массив «Выпуск деталей по предприятию» имеет следующие записи:

Условные обозначения	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1
Значения реквизитов	10	1	1	237	15
				237	12
				237	14
	10	1	1	240	1
				240	2
				240	4
	10	1	2	240	8
				240	16
	10	1	3	234	30
				234	40
				237	50
				237	21
	10	2	2	237	13
	20	1	2	240	14

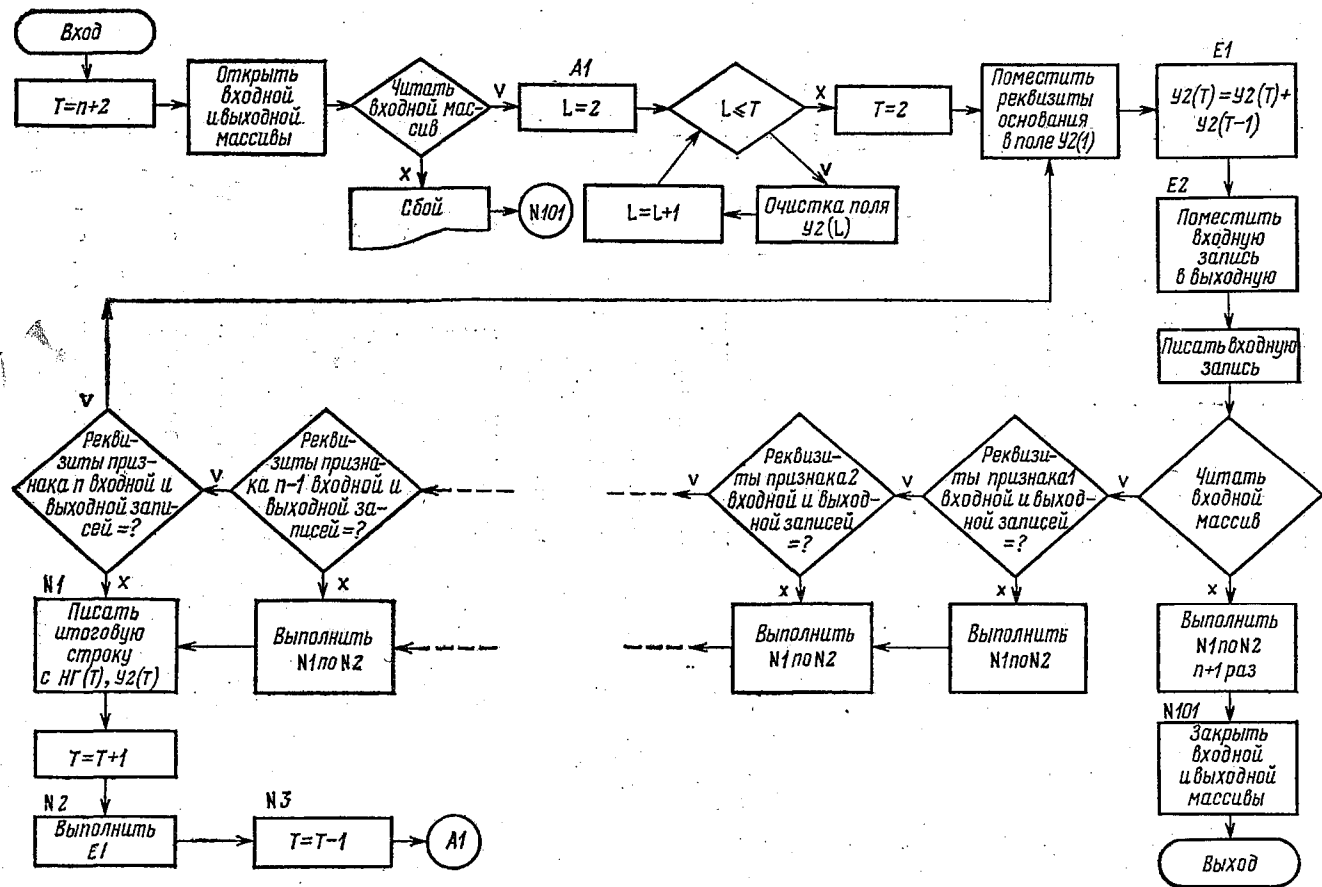
Тогда выходным массивом должен быть следующий:

10	1	1	237	15
10	1	1	237	12
10	1	1	237	14
ИТОГО ПО ДЕТАЛИ				41
10	1	1	240	1
10	1	1	240	2
10	1	1	240	4

ИТОГО ПО ДЕТАЛИ	7
ИТОГО ПО СМЕНЕ	48
10 1 2 240	8
10 1 2 240	16
ИТОГО ПО ДЕТАЛИ	24
ИТОГО ПО СМЕНЕ	24
10 1 3 234	30
10 1 3 234	40
ИТОГО ПО ДЕТАЛИ	70
10 1 3 237	50
10 1 3 237	21
ИТОГО ПО ДЕТАЛИ	71
ИТОГО ПО СМЕНЕ	141
ИТОГО ПО БРИГАДЕ	213
В ТОМ ЧИСЛЕ	234 70
	237 112
	240 31
10 2 2 237	13
ИТОГО ПО ДЕТАЛИ	13
ИТОГО ПО СМЕНЕ	13
ИТОГО ПО БРИГАДЕ	13
В ТОМ ЧИСЛЕ	237 13
ИТОГО ПО ЦЕХУ	226
В ТОМ ЧИСЛЕ	234 70
	237 125
	240 31
20 1 2 240	14
ИТОГО ПО ДЕТАЛИ	14
ИТОГО ПО СМЕНЕ	14
ИТОГО ПО БРИГАДЕ	14
В ТОМ ЧИСЛЕ	240 14
ИТОГО ПО ЦЕХУ	14
В ТОМ ЧИСЛЕ	240 14
ВСЕГО ПО ПРЕДПРИЯТИЮ	240

Пояснение к блок-схеме. Поле У2 является связным рабочим полем, повторяющимся $N+2$ раза.

У2(1) служит для обработки прочитанных записей; У2(2) для накопления итогов по группе G^n ; У(3) для накопления итогов по группе $G^{n-1}, \dots$; У2($N+1$) для накопления итогов по группе G^1 ; У2($N+2$) для накопления итогов по группе G^0 .



В поле НГ хранятся наименования по группам:

НГ (2) 'ИТОГО ПО ГРУППЕ G^n '

НГ (3) 'ИТОГО ПО ГРУППЕ G^{n-1} '

.....
.....
.....
.....

НГ (N+1) 'ИТОГО ПО ГРУППЕ G^1 '

НГ (N+2) 'ВСЕГО'

Покажем реализацию блок-схемы на указанном примере.

РАЗДЕЛ ИДЕНТИФИКАЦИИ.

ПРОГРАММА. ПОДСЧЕТ ИТОГОВ.

РАЗДЕЛ ОБОРУДОВАНИЯ.

СЕКЦИЯ КОНФИГУРАЦИИ.

РАБОЧАЯ-МАШИНА. МИНСК-32.

СЕКЦИЯ ВВОДА-ВЫВОДА.

УПРАВЛЕНИЕ-МАССИВАМИ.

МАС1 ПРЕДНАЗНАЧИТЬ МЛ 1.

МАС2 ПРЕДНАЗНАЧИТЬ ПЧ 1.

РАЗДЕЛ ДАННЫХ.

СЕКЦИЯ МАССИВОВ.

ОМ МАС1 В БЛОКЕ 50 ЗАПИСЕЙ МЕТКИ СТАНДАРТНЫ, ШИФР 'ДАПЕЧ'.

1 ЗАП1.

2 ШЦ1 Ш 99.

2 ШБ1 Ш 9.

2 ШС1 Ш 9.

2 ШД1 Ш 9(5).

2 СС1 Ш 9(3).

ОМ МАС2 МЕТКИ ОПУЩЕНЫ.

1 ЗАП2.

2 ШЦ2 Ш 99.

2 ШБ2 Ш 9.

2 ШС2 Ш 9.

2 ШД2 Ш 9(5).

2 СС2 Ш 9(3).

СЕКЦИЯ РАБОЧЕЙ-ПАМЯТИ.

77 L Ш 9.

77 N Ш 9.

77 T Ш 9.

77 Т-1 Ш 9.

1 ЗАП4.

2 ЗП4 ПОВТОРЯЕТСЯ 6 РАЗ.

3 У2 Ш 9(8).

1 ЗАП3.

2 НА31 Ш Х(18).

2 НА32 Ш Х(18) ЗНАЧ 'ИТОГО ПО ДЕТАЛИ'.

2 НА33 Ш Х(18) ЗНАЧ 'ИТОГО ПО СМЕНЕ'.

2 НА34 Ш Х(18) ЗНАЧ 'ИТОГО ПО БРИГАДЕ'.

2 НА35 Ш Х(18) ЗНАЧ 'ИТОГО ПО ЦЕХУ'.

2 НА36 Ш Х(18) ЗНАЧ 'ВСЕГО ПО ПРЕДПРИЯТИЮ'.

1 ЗАП5 ПЕРЕОПРЕДЕЛЯЕТ ЗАП3.

2 НГ ПОВТОРЯЕТСЯ 6 РАЗ Ш Х(18).

РАЗДЕЛ ПРОЦЕДУР.

ВЫЧИСЛИТЬ Т-6.

ОТКРЫТЬ ВХОДНОЙ МАС1, ВЫХОДНОЙ МАС2.

ЧИТАТЬ МАС1 В КОНЦЕ ПЕРЕЙТИ К СВОЙ.

А1. ВЫПОЛНИТЬ А2 МЕНЯЯ L ОТ 2 НА 1 ДО L=T.

А2. ПОМЕСТИТЬ 0 В У2 (L).

А3. ВЫЧИСЛИТЬ Т=2.

Т1. ПОМЕСТИТЬ СС1 В У2 (1).

Е1. ВЫЧИСЛИТЬ Т-1 = Т - 1.

ВЫЧИСЛИТЬ $У2'(Т) = У2(Т) + У2(Т-1)$.

Е2. ПОМЕСТИТЬ ЗАП1 В ЗАП2.

ПИСАТЬ ЗАП2.

ЧИТАТЬ МАС1 В КОНЦЕ ПЕРЕЙТИ К N100.

ЕСЛИ ШЦ1 НЕ=ШЦ2 ПЕРЕЙТИ К N99.

ЕСЛИ ШБ1 НЕ=ШБ2 ПЕРЕЙТИ К N98.

ЕСЛИ ШС1 НЕ=ШС2 ПЕРЕЙТИ К N97.

ЕСЛИ ШД1 НЕ=ШД2 ПЕРЕЙТИ К N1.

ИНАЧЕ ПЕРЕЙТИ К Т1.

N99. ВЫПОЛНИТЬ N1 ПО N2.

N98. ВЫПОЛНИТЬ N1 ПО N2.

N97. ВЫПОЛНИТЬ N1 ПО N2.

N1. ВЫДАТЬ НГ(Т), У2(Т).

ВЫЧИСЛИТЬ Т=Т+1.

N2. ВЫПОЛНИТЬ E1.

N01. ВЫЧИСЛИТЬ $T = T - 1$.

N02. ПЕРЕЙТИ К A1.

N100. ВЫПОЛНИТЬ N1 ПО N2 5 РАЗ.

N101. ЗАКРЫТЬ MАС1, MАС2.

NNN. ВЫЙТИ ИЗ ПРОГРАММЫ.

СБОИ. ОСТАНОВИТЬ 'СБОИ'.

ПЕРЕЙТИ К N101

При решении задачи не учитывались итоговые данные по подгруппам. Перейдем к рассмотрению этого вопроса. Отметим два подхода.

1. Число подгрупп, по которым находятся итоговые данные, ограничено и известно. В этом случае достаточно вставить в соответствующие места блок-схемы блоки накопления и вывода результатов. Рассмотрим эти блоки:

а) перед чтением первой записи массива нужно произвести очистку связанного рабочего поля, размерностью $i \times j$, где i — количество групп, для которых вычисляются итоги по подгруппам; j — максимальное число подгрупп в группах;

б) после блока E2 нужно осуществить проверку на принадлежность обрабатываемой записи к соответствующей подгруппе j (по шифру) группы i . При совпадении шифров произвести подсуммирование, в противном случае — ввести новый шифр подгруппы и задать начальные значения;

в) при необходимости, после блока N1 выдать итоговые данные по подгруппам.

2. Число подгрупп не ограничено или это значение настолько велико, что решение методом 1 невозможно из-за недостатка оперативной памяти.

Для простоты изложения будем предполагать, что для всех групп подгруппы определяются одним и тем же реквизитом-признаком: p_t , где $k < t \leq n$. Пусть G^k — группа, для которой находятся итоги по подгруппам. Решение задачи можно провести за два этапа а) и б):

а) рассортируем исходный массив по реквизитам-признакам $p_1, p_1, p_2, \dots, p_n$. Теперь записи каждой подгруппы групп $G^0, G^1, \dots, G^k$ расположены подряд. Следовательно, можно воспользоваться блок-схемой, предварительно заменив печать данных записью этих данных на МЛ. Для отличия итоговых строк по разным подгруппам в выходном массиве необходимо ввести идентифицирующий реквизит ПР.

Значение этого реквизита должно быть, например, одним из следующих: 0 — для исходных записей; 1 — для итоговых записей подгруппы; 2 — для следующей группы записей и т. д.;

б) рассортировав полученный массив по признакам и признаку ПР, получим массив, в котором подсчитаны итоговые данные по подгруппам. Повторно воспользуемся блок-схемой: подсчитаем итоговые данные по группам, при этом итоговые записи в расчете не участвуют, а только переносятся на внешний носитель.

Если подгруппы для различных групп определяются не одним реквизитом-признаком, то этап а) необходимо повторить несколько раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев М. А. Обработка экономической информации на электронных машинах (теорет. вопросы), изд. 2.— М., 1965.

Поступила в редакцию
05.11.77.

Кафедра общего программирования

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу квадратичного программирования с двухсторонними ограничениями

$$F(x) = x'Dx + c'x \rightarrow \min_x, \quad Ax = b, \quad 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

где D — знакоположительная симметрическая $n \times n$ -матрица; A — $m \times n$ -матрица, $\text{rank } A = m$, x , c , d — n -векторы; b — m -вектор.

Основные алгоритмы квадратичного программирования описаны в [1—3]. Методы Била и Вулфа во многом основаны на симплексметоде. Поэтому итерации в них ведутся по специальным (базисным) планам. Возможность использования произвольных планов предусматривается в методах Зойтендейка и в методе проекции сопряженных направлений. В предлагаемом алгоритме вычисления ведутся также по произвольным планам, что позволяет использовать любую априорную информацию о планах. Выбор подходящих направлений осуществляется с помощью совместного использования метода [4] и метода сопряженных градиентов. Для невырожденных задач метод является конечным и позволяет на каждой итерации оценивать отклонение по целевой функции текущего плана от оптимального.

Пусть $\{x^1, A_{\text{оп}}^1\}$ — начальный опорный план; ε — допустимое отклонение плана x от оптимального по целевой функции, $\{x, A_{\text{оп}}\}$ ($x = x^k$, $A_{\text{оп}} = A_{\text{оп}}^k$) — опорный план на k -ой итерации.

1. По опорному плану $\{x, A_{\text{оп}}\}$ вычислим векторы

$$f = \frac{\partial F(x)}{\partial x}, \quad u' = f'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}, \quad \Delta'_n = u' A_n - f'_n.$$

2. Проверим критерий оптимальности:

$$\Delta_j \leq 0, \quad x_j = 0; \quad \Delta_j \geq 0, \quad x_j = d_j; \quad \Delta_j = 0, \quad 0 < x_j < d_j; \quad j \in I_n. \quad (2)$$

Если соотношения (2) выполняются, то алгоритм оканчивает работу, $x = x^k$ — оптимальный план в задаче (1). В противном случае переходим к п. 3.

3. Проверим достаточное условие субоптимальности:

$$\sum_{\Delta_i > 0} x_i \Delta_i + \sum_{\Delta_i < 0} (x_i - d_i) \Delta_i \leq \varepsilon.$$

Если оно выполняется, то $x = x^k$ — ε -оптимальный план в задаче (1) и ее решение может быть прекращено; иначе переходим к п. 4.

4. Строим множества $I_n^{\text{кр}} = \{i : x_i = 0 \vee x_i = d_i, \quad i \in I_n\}$, $I_n^0 = \{i : 0 < x_i < d_i, \quad \Delta_i = 0, \quad i \in I_n\}$. Если $|I_n^0| + |I_n^{\text{кр}}| = n - m$ (символом $|I|$ обозначено количество элементов множества I), то строим $I_n^{\text{кр}}(*) = I_n^{\text{кр}} \setminus \{i_1, \dots, i_s\}$, где $i_j, j = \overline{1, s}$ — индексы, на которых нарушаются соотношения (2); если $|I_n^0| + |I_n^{\text{кр}}| < n - m$, то $I_n^{\text{кр}}(*) = I_n^{\text{кр}}$.

5. Вводим производную задачу:

$$\begin{aligned} \bar{F}(y) &= F(x + y) - F(x) = y'Dy + f'y \rightarrow \min; \quad Ay = 0; \\ -x_i &\leq y_i \leq d_i - x_i, \quad i \in I_n \setminus I_n^{\text{кр}}(*); \quad y_i = 0, \quad i \in I_n^{\text{кр}}(*). \end{aligned}$$

Положим $y^2 = 0$, $\bar{\Delta}_n^1 = \Delta_n^k$, $p^1 = \{p_i^1, i \in I_n\} = 0$.

Пусть y ($y = y^l$) — план производной задачи на l -ом шаге ее решения ($l = 2, 3, \dots$). Производная задача решается методом сопряженных градиентов с использованием опоры $A_{\text{оп}}^k$. Процедура на l -ом шаге сводится к следующим операциям.

а) По плану y вычислим векторы $\bar{f}_i, \bar{u}, \bar{\Delta}_n$:

$$\bar{f}_i = \begin{cases} 0, & i \in I_n^{kr}(*), \\ \frac{\partial \bar{F}(y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x+y)}{\partial y}, & i \in I \setminus I_n^{kr}(*), \end{cases}$$

$$\bar{u}' = \bar{f}_{оп} A_{оп}^{-1},$$

$$\bar{\Delta}_i = \begin{cases} 0, & i \in I_n^{kr}(*), \\ a_i \bar{u} - f_i, & i \in I \setminus I_n^{kr}(*), \end{cases}$$

где a_i — i -ый столбец матрицы A .

б) Проверим соотношения оптимальности:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_i &\leq 0, \quad y_i = -x_i; \quad \bar{\Delta}_i \geq 0, \quad y_i = d_i - x_i; \\ \bar{\Delta}_i &= 0, \quad -x_i < y_i < d_i - x_i; \quad i \in I \setminus I_n^{kr}(*). \end{aligned} \quad (3)$$

Если соотношения (3) выполняются, то решение производной задачи прекращаем и переходим к п. 6 ($y = y^l$ — оптимальный план производной задачи). В противном случае переходим к пункту в).

в) Строим множества:

$$\begin{aligned} \bar{I}_n^{kr} &= \{i: y_i = -x_i \vee y_i = d_i - x_i, \quad i \in I \setminus I_n^{kr}(*)\}, \\ \bar{I}_n^0 &= \{i: -x_i < y_i < d_i - x_i, \quad \bar{\Delta}_i = 0, \quad i \in I \setminus I_n^{kr}(*)\}. \end{aligned}$$

Если $|\bar{I}_n^{kr}| + |\bar{I}_n^0| + |I_n^{kr}(*)| = n - m$, то положим $p^{l-1} = 0$, $\bar{I}_n^{kr}(*)=\bar{I}_n^{kr} \setminus \{i_1, \dots, i_a\}$, где $i_j, j=\overline{1, a}$ — индексы, на которых нарушаются условия оптимальности (3). Если $|\bar{I}_n^{kr}| + |\bar{I}_n^0| + |I_n^{kr}(*)| < n - m$, то p^{l-1} остается без изменения, а $\bar{I}_n^{kr}(*)=\bar{I}_n^{kr}$.

г) Положим $\bar{\Delta}_i = 0, i \in \bar{I}_n^{kr}(*)$, вычислим $\beta = \frac{\bar{\Delta}_n' \bar{\Delta}_n}{(\bar{\Delta}_n^{l-1})' \bar{\Delta}_n^{l-1}}$, векторы $p = \bar{\Delta}_n + \beta p^{l-1}$, $q' = \{q'_{оп}, q'_n\}$: $q_n = p$, $q_{оп} = -A_{оп}^{-1} A_n p$ и

$$\gamma = \left[\frac{\partial \bar{F}(y+q)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{F}(y)}{\partial y} \right]' q.$$

д) Вычислим максимально допустимый шаг $\bar{\Theta}^0$ вдоль направления q :

$$\bar{\Theta}^0 = \min \{\bar{\Theta}_{i_0}^1, \bar{\Theta}_{i_0}^2, \bar{\Theta}\},$$

$$\bar{\Theta}_{i_0}^1 = \min_{q_i > 0} \frac{d_i - x_i - y_i}{q_i} = \frac{q_{i_0} - x_{i_0} - y_{i_0}}{q_{i_0}},$$

$$\bar{\Theta}_{i_0}^2 = \min_{q_i < 0} \frac{-x_i - y_i}{q_i} = -\frac{x_{i_0} + y_{i_0}}{q_{i_0}}, \quad i \in I_n; \quad \bar{\Theta} = \begin{cases} \infty, & \gamma = 0 \\ \frac{\bar{\Delta}_n' p}{\gamma}, & \gamma > 0. \end{cases}$$

Если $\bar{\Theta}^0 = \bar{\Theta}_{i_0}^1$ или $\bar{\Theta}^0 = \bar{\Theta}_{i_0}^2$, то положим $p = 0$.

е) Находим новый план $\bar{y} = y^{l+1}$ производной задачи $\bar{y} = y + \bar{\Theta}^0 q$. На этом l -ый шаг решения производной задачи заканчивается. Переходим к а) с $l = l+1$. Через конечное число шагов производная задача будет решена.

6. По решению производной задачи $\bar{y}$ находим максимально допустимый шаг в исходной задаче (1):

$$\Theta^0 = \{\Theta_{i_0}^1, \Theta_{i_0}^2, 1\},$$

где $\Theta_{i_0}^1 = \min_{y_i > 0} \frac{d_i - x_i}{y_i} = \frac{d_{i_0} - x_{i_0}}{y_{i_0}}$, $\Theta_{i_0}^2 = \min_{y_i < 0} \frac{-x_i}{y_i} = -\frac{x_{i_0}}{y_{i_0}}$. Пусть $\Theta^0 = 1$

или $\Theta^0 = \Theta_{i_0}^1$ ($\Theta^0 = \Theta_{i_0}^2$), а $i_0 \in I_n$. Находим новый план $\bar{x} = x^{k+1}$ по формуле

$$\bar{x} = x + \Theta^0 y. \quad (4)$$

Положим $\bar{A}_{оп} = A_{оп}$ ($\bar{A}_{оп} = A_{оп}^{k+1}$) и переходим к п. 7. Если $\Theta^0 = \Theta_{i_0}^1$ или $\Theta^0 = \Theta_{i_0}^2$, но $i_0 \in I_{оп}$, то новый опорный план $\bar{x}$ пересчитывается согласно (4), а $\bar{A}_{оп}$ получается из $A_{оп}$ заменой столбца a_{i_0} на столбец a_{j_0} , где j_0 один из таких индексов $j \in I_n$, что $0 < x_j < d_j$, $x_{i_0 j_0} \neq 0$ (это всегда возможно, если опорный план $x = x^k$ не вырожден)*.

7. k -ая итерация метода окончена. Переходим к п. 1 с $k = k + 1$ и новым опорным планом $\{\bar{x}, \bar{A}_{оп}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кюнц Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование.— М., 1965.
2. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений.— М., 1963.
3. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.— М., 1975.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 6, с. 85.

Поступила в редакцию
24.11.77.

Кафедра методов оптимального
управления

УДК 518:517.91/94

Е. Г. КУЗИЧЕВА

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА РОБЕРТСА — ШИПМАНА

Приложение методов инвариантного погружения к граничным задачам связано с решением двух основных вопросов: 1) выбор способа параметризации задачи; 2) выбор сечений задачи.

В работе [1] подробно рассмотрен вопрос о выборе сечений, и путем численных экспериментов дана их качественная характеристика. По существу, такая характеристика является эвристической.

Нами предпринимается попытка доказать сходимость одного из алгоритмов Робертса — Шипмана и тем самым выявить некоторые важные при решении упомянутых вопросов закономерности.

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y}), \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

с граничными условиями специального вида

$$y_i(a) - c_i = 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (2)$$

$$y_{s_m}(b) - d_m = 0, \quad m = \overline{1, n-r}, \quad (3)$$

где $\bar{y}: [a, b] \rightarrow R^n$, $\bar{f}: [a, b] \times R^n \rightarrow R^n$, c_i , d_m — известные числа.

Будем считать, что граничная задача (1) — (3) имеет единственное решение, обладающее необходимой в дальнейшем степенью гладкости.

Предположим, что задачу (1) — (3) необходимо численно решить методом пристрелки [2]. При этом из-за неустойчивости уравнений могут возникать некоторые трудности, которые авторы [1] предлагают преодолеть путем разделения правых частей (1) на две составляющие (линейную и нелинейную) и решения ряда двухточечных граничных задач, характерных для погружения. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

* Вопрос о наилучшем выборе индекса j_0 требует дополнительных исследований.

Предположим, что правая часть (1) может быть записана в виде $f_i = p_i + q_i$, $i = \overline{1, n}$, допускающем простую разрешимость двухточечной граничной задачи для уравнения $\bar{y}' = \bar{p}(t, \bar{y})$ с условиями (2) и (3). Таким образом, имеем

$$\bar{y}' = (1 - \theta_k) \bar{p}(t, \bar{y}) + \theta_k \bar{f}(t, \bar{y}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В работе [1] предлагаются три схемы разделения: линейная, вариационная и квазилинейная. Рассмотрим линейное разделение:

$$\bar{p}(t, \bar{y}) = B(t) \bar{y} + \bar{b}(t),$$

где $B: [a, b] \rightarrow L(R^n, R^n)$, $\bar{b}: [a, b] \rightarrow R^n$.

Сопоставим с задачей (1) — (3) следующую параметризованную задачу:

$$\begin{cases} \bar{z}' = (1 - \theta) \bar{p}(t, \bar{z}) + \theta \bar{f}(t, \bar{z}), \\ z_i(a) - c_i = 0, \quad i = \overline{1, r} \\ z_{s_m}(b) - d_m = 0, \quad m = \overline{1, n-r}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\bar{z} \equiv \bar{z}(t, \theta)$; $\bar{z}(t, 1) \equiv \bar{y}(t)$.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$:

$$\{\theta_k\}_0^N; \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = 1.$$

Пусть $\theta_0 = 0$. Тогда имеем

$$\bar{z}' = \bar{p}(t, \bar{z}), \quad a \leq t \leq b.$$

$$\bar{z}(a, 0) - c_i = 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

$$\bar{z}(b, 0) - d_m = 0, \quad m = \overline{1, n-r}.$$

Это линейная задача, поэтому $\bar{z}(t, 0)$ сможем, вообще говоря, найти точно: $\bar{z}_0 = \bar{z}_0(t) = \bar{z}(t, 0)$. Пусть теперь $\theta_1 \neq 0$; $\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta_0$. Система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} \bar{z}_1' = (1 - \theta_1) \bar{p}(t, \bar{z}_1) + \theta_1 \bar{f}(t, \bar{z}_1), \quad a \leq t \leq b \\ \bar{z}_1 = \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_1(a) - c_i = 0, \quad i = \overline{1, r} \\ \bar{z}_1(b) - d_m = 0, \quad m = \overline{1, n-r} \end{cases} \quad (5)$$

Систему (5) решаем по методу прямой пристрелки. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} \bar{u}_1'(t) = (1 - \theta_1) \bar{p}(t, \bar{u}_1(t)) + \theta_1 \bar{f}(t, \bar{u}_1(t)), \quad a \leq t \leq b \\ \bar{u}_1(t, \bar{c}^0)|_{t=a} = \bar{c}^0. \end{cases} \quad (6)$$

В качестве $\bar{c}^0$ выбираем вектор $\bar{c}^0 = \bar{z}_0(a) = (c_1, c_2, \dots, c_r, z_{0r+1}, z_{0r+2}, \dots, z_{0n})^T = (c_1, c_2, \dots, c_r, s_1^0, s_2^0, \dots, s_{n-r}^0)^T$. Решая (6), получаем $\bar{u}_1(b, \bar{c}^0) = \bar{u}_1(b, s_1^0, s_2^0, \dots, s_{n-r}^0)^T$. Если $\bar{u}_1(t, \bar{c}^0) \equiv \bar{z}_1(t)$, то должно выполняться

$$u_{1s_k}(b, s_1^0, s_2^0, \dots, s_{n-r}^0) = d_k, \quad k = \overline{1, n-r}. \quad (7)$$

Запишем (7) в векторной форме

$$\bar{\varphi}(\bar{s}_1, \theta_1) = \bar{d},$$

$$\bar{\varphi} = (u_{1s_1}, u_{1s_2}, \dots, u_{1s_m})^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T, \quad (8)$$

$$\bar{s}_1 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_{n-r}^0)^T, \quad \bar{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{n-r})^T.$$

Применим к (8) метод Ньютона, тогда

$$\bar{s}_1^{(k+1)} = \bar{s}_1^{(k)} - \left[\frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{s}_1^{(k)}, \theta_1)}{\partial \bar{s}} \right]^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{s}_1^{(k)}, \theta_1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $\bar{s}_1^{(0)} = \bar{c}^0(0)$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_1^{(k)} = \bar{s}_1^*$, $\bar{s}_1^* = (s_{11}^*, s_{12}^*, \dots, s_{1n-r}^*)^T$,

где $s_{1i}^* = z_{1r+i}(a)$, $i = \overline{1, n-r}$, т. е. это $(r+1)$ -ая, $(r+2)$ -ая, ... (n) -ая компоненты решения граничной задачи (5), которая решается аналогично задаче Коши (6), если в качестве $\bar{c}^0$ берется вектор

$$\bar{c}^0 = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_r, s_{11}^*, s_{12}^*, s_{13}^*, \dots, s_{1n-r}^*)^T.$$

Возникают вопросы [3]: 1) когда (9) будет сходящимся; 2) каким должно быть разбиение отрезка $[0, 1]$ для θ , чтобы итерации (9) и подобные им были сходящимися. Решение системы

$$\Phi(\bar{s}_0, \theta_0) = 0$$

известно: $s_{01}^* = z_{0r+1}(a)$, $s_{02}^* = z_{0r+2}(a)$, ... $s_{0n-r}^*(a) = z_{0n}(a)$. На основании (9) запишем $\bar{s} = \bar{s} - A\bar{\Phi}$.

Рассмотрим область $\hat{D} \subset R^n$. Пусть задача Коши (6) такова, что для $\forall \bar{c}^0 \in \hat{D}$ существует решение, и оно непрерывно дифференцируемо по $\bar{c}^0$ в $\hat{D}$. Можно положить, что $\Phi(\bar{s}, \theta) = \bar{s} - A\bar{\Phi}$, $\det A(\bar{s}(\theta)) \neq 0$, $\Phi: D \times [0, 1] \subset R^{n+1} \rightarrow R^n$; $D \subset \hat{D}$. Предположим, что $\bar{y}^*(a) \in \hat{D}$, $\bar{s}(1) = \bar{y}^*(a)$ и для любого $\theta \in [0, 1]$ существует $\bar{s}: [0, 1] \rightarrow R^n$ такое, что $\Phi(\bar{s}(\theta), \theta) \equiv 0$. Выбираем сечение $L(\theta_k, b, 1)$ для оболочки (12): $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = 1$. В результате возникает итерационный процесс, который имеет вид:

$$\bar{s}_i^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_i^{(k)}, \theta_i), \quad i = \overline{1, N-1},$$

где

$$\bar{s}_1^0 = \bar{s}_0, \quad \bar{s}_i^0 = \bar{s}_{i-1}^{p_{i-1}}, \quad \bar{s}_N^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_N^{(k)}, 1), \quad k = \overline{0, p_{N-1}}; \quad (10)$$

$$\bar{s}_N^{(0)} = \bar{s}_{N-1}^{p_{N-1}}.$$

Нас интересует в основном сходимость $\{\bar{s}_N^{(i)}\}_{i=0}^\infty$.

Теорема. Пусть при любом $\bar{s} \in \hat{D} \subset R^n$ (некоторая область, содержащая $\bar{y}^*(a)$) задача Коши $\bar{u}' = \bar{\psi}(t, \bar{u})$, $\bar{u}(t, \bar{s})|_{t=a} = \bar{s}$, $a \leq t \leq b$, где $\bar{\psi}(t, \bar{u}) = (1 - \theta_1)\bar{p}(t, \bar{u}(t)) + \theta_1\bar{f}(t, \bar{u}(t))$, $a \leq t \leq b$, имеет единственное решение $\bar{u}(t, \bar{s})$, непрерывно дифференцируемое в $\hat{D}$ по $\bar{s}$.

Пусть отображение $\Phi: D \times [0, 1] \subset R^{n+1} \rightarrow R^n$ F-дифференцируемо по $\bar{s}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}}$ непрерывна на $D \times [0, 1]$; $D \subset \hat{D}$. Предположим, что уравнение $\Phi(\bar{s}, \theta) = 0$ для любого $\theta \in [0, 1]$ имеет непрерывное решение $\bar{s}: [0, 1] \rightarrow \text{int}(D)$ при условии, что $\bar{s}(0) = \Phi(\bar{s}(0), 0)$ для некоторого значения $\bar{s}(0) = \bar{s}_0 \in D$.

Если на решении $\bar{s}(\theta)$ спектральный радиус матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}}$ меньше единицы, т. е. $\rho \left[\frac{\partial \Phi(\bar{s}(\theta), \theta)}{\partial \bar{s}} \right] = q(\theta) < 1$, $0 \leq \theta \leq 1$, то

1) существует разбиение θ_k : $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N = 1$ отрезка $[0, 1]$ и целые положительные числа $p_1, p_2, \dots, p_{N-1}$ — номера итерации такие, что $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty$, $i = \overline{0, N-1}$, определяемые по правилу (12), содержатся в D ;

2) $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{s}_N^{(i)} = \bar{s}(1) = \bar{y}^*(a)$.

Доказательство. Теорема ставит два вопроса: а) корректно ли определены $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty$; б) будет ли иметь место сходимость $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_N^{(k)} = \bar{s}(1)$.

Обозначим через M множество: $M = \{\bar{s} \in R^n \mid \bar{s} = \bar{s}(\theta), 0 \leq \theta \leq 1\}$. Так как $\bar{s}$ непрерывно и рассматривается на замкнутом отрезке $[0, 1]$, то M — замкнутое множество, а следовательно, компактное.

По условию теоремы $M \subset \text{int}(D)$. Будем считать, что $D_0 \subset D$ компактное и такое, что $M \subset \text{int}(D_0)$. Далее пусть $\theta \in [0, 1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\|\cdot\|_\theta$, что

$$\left\| \frac{\partial \Phi(\bar{s}(\theta), \theta)}{\partial \bar{s}} \right\|_\theta \leq q(\theta) + \varepsilon. \quad (11)$$

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ $q(\theta) + 3\varepsilon < 1$. $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}}$ непрерывна на $D \times [0, 1]$, следовательно, равномерно непрерывна на $D_0 \times [0, 1]$. Значит, существует $\delta_1 = \delta_1(\theta) > 0$ такое, что

$$\|\Phi'(\bar{s}, \theta_1) - \Phi'(\bar{d}, \theta_2)\| \leq \varepsilon, \quad (12)$$

как только $\bar{s}, \bar{d} \in D_0$ и $\|\bar{s} - \bar{d}\|_\theta \leq \delta_1$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ и $\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta_1$. Требуется, чтобы

$$\|\bar{s}(\theta_1) - \bar{s}(\theta_2)\|_\theta \leq \delta_1 \quad (13)$$

для любых $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$. Пусть $\delta_2 = \delta(\theta) > 0$ такое, что при $|\theta_1 - \theta_2| \leq \delta_2$ выполняется неравенство (13).

Определим $\delta^* = \min(\delta_1, \delta_2)$. Пусть $\delta \leq \delta^*$, $\delta > 0$ и такое, что

$$M_\theta = \{\bar{s} \in R^n \mid \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\|_\theta \leq \delta, 0 \leq \eta \leq 1\} \subset \text{int}(D_0).$$

Рассмотрим окрестность $|\eta - \theta| < \delta$. В силу неравенств (11), (12) имеем

$$\left\| \frac{\partial \Phi(\bar{s}(\eta), \eta)}{\partial \bar{s}} \right\|_\theta = \left\| \frac{\partial \Phi(\bar{s}(\eta), \eta)}{\partial \bar{s}} - \frac{\partial \Phi(\bar{s}(\theta), \theta)}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \Phi(\bar{s}(\theta), \theta)}{\partial \bar{s}} \right\|_\theta \leq q(\theta) + 2\varepsilon.$$

Будем рассматривать такие $\bar{s}$, чтобы отображение Φ оставалось отображением сжатия, т. е.

$$\|\Phi(\bar{s}, \eta) - \Phi(\bar{s}(\eta), \eta)\|_\theta \leq \mu \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\|_\theta, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\begin{aligned} & \|\Phi(\bar{s}, \eta) - \Phi(\bar{s}(\eta), \eta) - \frac{\partial \Phi(\bar{s}(\eta), \eta)}{\partial \bar{s}} (\bar{s} - \bar{s}(\eta)) + \\ & + \frac{\partial \Phi(\bar{s}(\eta), \eta)}{\partial \bar{s}} (\bar{s} - \bar{s}(\eta))\| \leq \sup \left\| \frac{\partial \Phi(\bar{s} + \lambda(\bar{s}(\eta) - \bar{s}), \eta)}{\partial \bar{s}} \right\|_\theta \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\|_\theta + \\ & + q(\theta) + 2\varepsilon \leq (q(\theta) + 3\varepsilon) \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\|_\theta = \mu \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\|_\theta. \end{aligned}$$

Определим $\Omega_\theta = \{(\bar{s}, \eta) \mid |\eta - \theta| \leq \delta, \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\|_\theta \leq \delta\}$. Оказывается, что Φ осуществляет отображение сжатия в области Ω_θ .

Для $\forall (\bar{s}^{(0)}, \eta) \in \Omega_\theta$ итерация $\bar{s}^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}^{(k)}, \eta)$ с $\bar{s}^{(0)}$ заданным будет такой, что последовательность $\{\bar{s}^{(k)}\}_0^\infty \in D_0$ будет сходиться к $\bar{s}(\eta)$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}^{(k)} = \bar{s}(\eta).$$

Рассмотрим $\|\cdot\|_*$. Тогда существуют такие s_1 и s_2 , $0 < s_1 \leq s_2$ и $\|\cdot\|_*$, что $s_1 \|\bar{d}\| \leq \|\bar{d}\|_* \leq s_2 \|\bar{d}\|$. Теперь рассмотрим $\|\cdot\|_*$. Существуют такие $\delta = \delta(\theta) > 0$ и $\Omega = \{(\bar{s}, \eta) \mid |\eta - \theta| \leq \delta \text{ и } \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\| \leq \delta\}$, что (21) выполняется для $\forall \theta \in [0, 1]$.

Отрезок $[0, 1]$ компактен. Следовательно, существует такое покрытие его конечным множеством интервалов

$$J_j = \{\theta \mid |\theta - \theta_j| \leq \delta(\theta_j), \delta(\theta_j) > 0\}, \quad j = \overline{1, M},$$

что, если обозначим $\delta_0 = \min_{1 \leq j \leq M-1} \delta(\hat{\theta}_j)$ и $\Omega_0 = \{(\theta, \eta) \mid \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\| \leq \delta_0, 0 \leq \eta \leq 1\}$, то при любых $(\bar{s}^{(0)}, \eta) \in \Omega_0$ существует последовательность $\{\bar{s}^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}^{(k)} = \bar{s}(\eta)$, где $\bar{s}^{(0)}$ задано, $\bar{s}^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}^{(k)}, \eta)$.

Выберем разбиение отрезка $[0, 1]$ точками θ_k по правилу $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = 1$, и пусть выполняется условие

$$\max_{0 \leq k \leq N-L} \|\bar{s}(\theta_{k+1}) - \bar{s}(\theta_k)\| \leq \delta < \delta_0.$$

Рассмотрим итерационный процесс $\bar{s}_i^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_i^{(k)}, \theta_i)$. Точки θ_i определенные, разбиение отрезка $[0, 1]$ существует, так как функция непрерывна.

Пусть $\bar{s}_i^{(0)} = \bar{s}_{i-1}^{p_{i-1}}$. По определению $\bar{s}_i^{(0)} = \bar{s}(\theta_{i-1})$. Встает вопрос: существуют ли p_{i-1} , чтобы сходимость сохранялась и $\bar{s}(\theta_{i-1}) \approx \bar{s}_{i-1}^{(p_{i-1})}$. По определению $\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| = 0$. Предположим, что

$$\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leq \tau < \delta_0,$$

$$\bar{s}_i^{(0)} = \bar{s}_{i-1}^{p_{i-1}}$$

$$\|\bar{s} - \bar{s}(\theta_i)\| \leq \|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| + \|\bar{s}(\theta_i) - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leq \tau + \delta < \delta_0,$$

отсюда $\tau \leq \delta_0 - \delta$. Положим $\tau = \delta_0 - \delta$. p_{i-1} определяются из условия

$$\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| = \|\bar{s}_{i-1}^{(p_{i-1})} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leq \delta_0 - \delta.$$

Следовательно, $\bar{s}_i \in \Omega_0$. $(\bar{s}_i^{(0)}, \theta_i) \in \Omega_0$, тогда $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_i^{(k)} = \bar{s}(\theta_i)$. Возьмем $\bar{s}_{i+1}^{(0)} = \bar{s}_i^{(p_{i-1})}$ такие, чтобы выполнялось условие $\|\bar{s}_i^{(p_{i-1})} - \bar{s}(\theta_i)\| \leq \delta_0 - \delta$. Тогда $\{\bar{s}_{i+1}^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_{i+1}^{(k)} = \bar{s}(\theta_{i+1})$. Таким образом, существуют $p_i, i = \overline{1, N-1}$ такие, что $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_i^{(k)} = \bar{s}(\theta_i)$. $\bar{s}_N^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_N^{(k)}, \theta_N)$; $\theta_N = 1$.

Имеем $\bar{s}_N^{(0)} = \bar{s}_{N-1}^{(p_{N-1})}$ и $\{\bar{s}_N^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_N^{(k)} = \bar{s}(\theta_N) = \bar{s}(1) = \bar{y}^*(a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roberts S. M. and Shipman J. S.—J. of Optimiz. Theory and Appl., 1973, v. 12, № 5, p. 459.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы.— М., 1973.
3. Ортега Дж., Рейнбалдт В. Итерационные методы.— М., 1975.

Поступила в редакцию
04.03.78.

Кафедра численных методов
и программирования

УДК 519.4

Г. В. МАТВЕЕВ

СПИНОРНАЯ НОРМА АВТОМОРФИЗМА ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ

Отображение спинорной нормы эффективно используется в теории ортогональных групп [1], а также в арифметической теории квадратичных форм [2]. Обычное определение не дает простого способа ее вычисления. Известно много утверждений, упрощающих вычисление спинорной нормы. В частности, одно из них принадлежит Цассенхаузу [3]. Цель

настоящей заметки — вычислить спинорную норму автоморфизма центральной простой алгебры A над глобальным полем K , $\text{char } K \neq 2$.

Известно, что любой K -автоморфизм σ алгебры A — внутренний. Будем рассматривать A как пространство над K с симметрической билинейной формой $\beta(x, y) = \text{Trd}(xy)$, где через Trd обозначен приведенный след [4]. Легко видеть, что форма β невырожденная. Действительно, если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — K -базис A , то определитель $\det(\beta(e_i, e_j))$ отличен от нуля, поскольку он равен дискриминанту алгебры A . Пусть u — обратимый элемент A , который индуцирует автоморфизм σ . Тогда $\beta(\sigma(x), \sigma(y)) = \text{Trd}(u^{-1}xu u^{-1}yu) = \text{Trd}(u^{-1}xyu) = \text{Trd}(xy) = \beta(x, y)$. Следовательно, автоморфизм σ является одновременно изометрией алгебры A , рассматриваемой как пространство с невырожденной билинейной симметрической формой β . Обозначим через Nrd отображение приведенной нормы, а через Θ — отображение спинорной нормы. Пусть n^2 — K -ранг A , K^{*2} -подгруппа квадратов мультипликативной группы поля K , $\text{char } K \neq 2$.

Теорема. Всякий автоморфизм σ центральной простой алгебры A является вращением, причем

$$\Theta(\sigma) = (\text{Nrd } u)^{n-1} K^{*2}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда A — полная матричная алгебра $M_n(K)$, $n > 1$. Необходимо доказать, что $(\det u)^{n-1} \in \Theta(\sigma)$. Для краткости, отождествим матрицу u с автоморфизмом σ . Поскольку группа $SL(n, K)$ — коммутант $GL(n, K)$, то элемент u можно заменить любым элементом, имеющим тот же определитель. Положим $g = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \alpha)$, где $\alpha = \det u$. Докажем, что $\alpha^{n-1} \in \Theta(g)$. Обозначим через e_{ij} матрицу с единицей на месте ij и нулями на остальных местах. Эти матрицы образуют базис алгебры $M_n(K)$.

Нетрудно подсчитать, что

$$g^{-1}e_{ij}g = \begin{cases} e_{ij}, & i, j \leq n-1, \text{ или } i = j = n \\ \alpha e_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n, j = n \\ \alpha^{-1}e_{ij}, & j = 1, 2, \dots, n, i = n. \end{cases}$$

Следовательно, σ — вращение, так как $\det \sigma = \det(\text{ad } g) = (\alpha^{-1})^{n-1} \alpha^{n-1} = 1$. Через $\text{ad } g$ обозначено присоединенное представление матрицы g в базисе $\{e_{ij}\}$. Рассмотрим ограничение $\bar{g}$ вращения g на $2(n-1)$ -мерное инвариантное подпространство $V \subset M_n(K)$, порожденное базисом $\{e_{ij}\}$, где либо $i = n, j = 1, 2, \dots, n-1$, либо $j = n, i = 1, 2, \dots, n-1$. Поскольку $\text{tr}(e_{ij}e_{ki}) \neq 0$, тогда и только тогда, когда $i = l, j = k$, имеет место ортогональное разложение $M_n(K) = V \perp V_1$, где V_1 натянуто на базис $\{e_{ij}\}$, $i, j \leq n-1$, либо $i = j = n$. Отсюда вытекает, что V и V_1 невырожденные пространства и $\Theta(g) = \Theta(\bar{g})$, так как на подпространстве V_1 g действует тривиально. Нетрудно получить ортогональное разложение пространства V в $n-1$ экземпляров гиперболических плоскостей

$$V \cong \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \perp \dots \perp \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Действительно, $\text{tr}(e_{ij}^2) = 0$, $\text{tr}(e_{ij}e_{ji}) = 1$, если $e_{ij} \in V$. Поскольку эти гиперболические плоскости инвариантны относительно $\bar{g}$ и спинорная норма мультипликативна относительно ортогональных разложений, то $\Theta(g) = \Theta(\bar{g})^{n-1}$, где $\bar{g}$ — ограничение $\bar{g}$ на любую из указанных гиперболических плоскостей. Вычислим $\Theta(\bar{g})$. Пусть a, b — гиперболическая пара. Тогда $\bar{g}(a) = \alpha^{-1}a$, $\bar{g}(b) = \alpha(b)$, $\beta(a, a) = \beta(b, b) = 0$, $\beta(a, b) = 1$. Векторы $a+b$ и $a+ab$ неизотропны. Действительно,

$$\beta(a+b, a+b) = \beta(a, a) + \beta(b, b) + 2\beta(a, b) = 2,$$

$$\beta(a+ab, a+ab) = \beta(a, a) + \beta(ab, ab) + 2\beta(a, ab) = 2\alpha.$$

Поэтому можно рассмотреть симметрии τ_{a+b} и τ_{a+ab} относительно гиперплоскостей, ортогональных неизотропным векторам $a+b$ и $a+ab$ [1].

Оказывается, $\bar{g} = \tau_{a+ab} \tau_{a+b}$. Проверим это.

$$\tau_{a+b}(a) = a - \frac{2\beta(a+b, a)}{\beta(a+b, a+b)}(a+b) = a - (a+b) = -b,$$

$$\tau_{a+ab}(-b) = -b - \frac{2\beta(a+ab, -b)}{\beta(a+ab, a+ab)}(a+ab) = -b + \frac{2}{2a}(a+ab) = \frac{a}{a}.$$

Следовательно, $\tau_{a+ab} \tau_{a+b}(a) = \bar{g}(a)$. Аналогично, $\tau_{a+ab} \tau_{a+b}(b) = \bar{g}(b)$, поэтому

$$\Theta(\bar{g}) = \beta(a+ab, a+ab) \beta(a+b, a+b) K^{*2} = 4aK^{*2} = aK^{*2}.$$

Итак, $a^{n-1} \in \Theta(\bar{g})^{n-1} = \Theta(g)$, что и завершает рассмотрение случая полной матричной алгебры.

Общий случай легко сводится к рассмотренному. Пусть K — поле разложения алгебры A . Тогда $K \times_K A$ — полная матричная алгебра над K . Рассмотрим вложение $A \ni u \rightarrow \bar{u} \in K \times_K A$.

На основании приведенной ниже леммы $\Theta(u) \subset \Theta(\bar{u})$, т. е. $\Theta(u) = (\text{Nrd } u)^{n-1} K^{*2}$. Известно, что почти все пополнения K_v поля K относительно нетривиального нормирования v являются полями разложения, поэтому, почти всегда, имеет место включение $\Theta(u) (\text{Nrd } u)^{1-n} \subset K_v^{*2}$. Применяя теорему о квадратах в глобальном поле [2], получаем, что $\Theta(u) (\text{Nrd } u)^{1-n} \in K^{*2}$.

Лемма. Пусть V — пространство с невырожденной билинейной симметрической формой β над полем K , $\text{char } K \neq 2$. Пусть F — поле, содержащее поле K . Тогда каноническая изометрия $\varphi: V \rightarrow F \times_K V$ индуцирует мономорфизм групп вращений $\bar{\varphi}: O^+(V) \rightarrow O^+(F \times_K V)$, такой что $\Theta(\sigma) \subset \Theta(\bar{\varphi}(\sigma))$, $\sigma \in O^+(V)$.

Доказательство. По теореме Картана — Дьедонне [1, 4] $\sigma = \tau_{u_1} \tau_{u_2} \dots \tau_{u_m}$, где u_i — неизотропный вектор $i = \overline{1, m}$. Определим действие $\bar{\varphi}$ на σ по формуле

$$\bar{\varphi}(\sigma) = \tau_{\varphi(u_1)} \tau_{\varphi(u_2)} \dots \tau_{\varphi(u_m)}.$$

Тогда $\Theta(\sigma) = \beta(u_1, u_1) \dots \beta(u_m, u_m) K^{*2} \subset \beta(\varphi(u_1), \varphi(u_1)) \dots \beta(\varphi(u_m), \varphi(u_m)) F^{*2} = \Theta(\bar{\varphi}(\sigma))$.

В заключение отметим, что доказанная теорема, по всей видимости, справедлива и в случае алгебр над произвольным полем K . Например, это так для полных матричных алгебр, простых алгебр нечетного ранга и кватернионов. С помощью этой же теоремы удалось обнаружить отклонения от принципа Хассе для решеток в полной матричной алгебре над глобальным полем [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Артин Э. Геометрическая алгебра. — М., 1967.
2. O'Meara O. T. Introduction to quadratic forms. — Springer, 1973.
3. Zassenhaus H. — Arch. Math., v. 13, 1962, p. 434.
4. Бурбаки Н. Алгебра, модули, кольца, формы. — М., 1968.
5. Матвеев Г. В. XIV Всесоюзная алгебраическая конференция. Тез., ч. 2. — Новосибирск, 1977, с. 58.

Поступила в редакцию
11.03.78.

Кафедра высшей математики

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ ИЗОМЕТРИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Пусть V — n -мерное невырожденное векторное пространство над конечным полем F_q ; $\text{char } F_q \neq 2$; f — кососимметрическая форма, определяющая метрику пространства V ; σ — изометрия пространства V .

В работе найден простейший вид матрицы изометрии σ и формы f , к которому они приводятся одновременно выбором базиса в пространстве V .

Изометрии пространства V над произвольным полем $\text{char} \neq 2$ изучались Цассенхаузом [1], И. К. Цикуновым [2]. Цассенхауз описал типы элементарных делителей изометрий пространства V и нашел простейший вид матрицы формы f и матрицы изометрии пространства V для некоторых типов элементарных делителей. В [3, 4] И. К. Цикунов рассмотрел пространство V над конечным полем F_q , $\text{char } F_q \neq 2$, и нашел виды матриц формы f и изометрий пространства V для других возможных элементарных делителей. В данной работе найден более простой вид матриц, чем в работах [3, 4].

Лемма 1. Характеристический многочлен $m \times m$ -матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m-1} & \dots & -a_{l+1} & -a_l \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } l = \left[\frac{m}{2} \right], \quad (1)$$

совпадает с минимальным:

$$f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0. \quad (2)$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что канонический вид матрицы $xE - A$ равен $\text{diag}(1, \dots, 1, f(x))$.

Матрицу A вида (1) будем называть сопровождающей для многочлена $f(x)$ вида (2). Преимущество матрицы (1) для наших целей по сравнению с сопровождающей матрицей Фробениуса для многочлена (2) вытекает из леммы 2.

Следуя Цассенхаузу [1], многочлен $f(x)$ вида (2) будем называть симметричным, если $a_0 = 1$, $a_{m-i} = a_i$, $i = 1, \dots, m-1$; в противном случае — асимметричным. Для многочлена (2), где $a_0 \neq 0$, через $f^*(x)$ будем обозначать многочлен $f^*(x) = x^m + a_0^{-1}a_1x^{m-1} + \dots + a_0^{-1}a_{m-1}x + a_0^{-1}$. Для симметричного многочлена $f(x) = f^*(x)$. Из $f(a) = 0$ следует $f^*(a^{-1}) = 0$, $(g^*(x))^s = (g^s(x))^*$.

Лемма 2. Пусть $f(x)$ — симметричный многочлен степени $m = 2l$ вида (2); V — m -мерное пространство с симплектической метрикой над полем F_q ; σ — гомоморфизм пространства V , матрица которого в базисе с матрицей Грама

$$G = \begin{bmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{или } G_1 = aG, \quad a \neq b^2; \quad b \in F_q, \quad (3)$$

совпадает с матрицей A вида (1), сопровождающей для многочлена $f(x)$. Тогда σ — изометрия пространства V .

Доказательство. Так как $f(x)$ — симметричный многочлен четной степени, то в сопровождающей матрице (1) будем иметь $m=2l$, $a_0=1$, $a_{m-i}=a_i$, $i=1, \dots, m-1$. Непосредственно проверяется, что матрица A вида (1) с указанными свойствами удовлетворяет условиям ${}^tAGA=G$, ${}^tAG_1A=G_1$ (t — означает транспонирование матрицы).

Отметим, что леммы 1 и 2 справедливы для произвольного поля.

Теорема. Пусть σ — изометрия пространства V . Существует базис пространства, в котором σ соответствует матрица $A=A_1+\dots+A_k$, где A_i — матрица вида (1) либо $A_i=B_i+{}^tB_i^{-1}$, где B_i — матрица вида (1), а форме f соответствует матрица $G=G_1+\dots+G_k$, где G_i — матрица вида (3). Пары матриц A_i , G_i одинаковой четной размерности m_i .

Доказательство опирается на работы Цассенхауза [1] и И. К. Цикунова [3, 4]. Некоторые результаты из этих работ приводятся в лемме 3.

Инвариантное относительно изометрии σ подпространство $U \subset V$ будем называть ортогонально неразложимым относительно σ , если U не представимо в виде ортогональной суммы инвариантных подпространств.

Лемма 3 [1, леммы 1,2]. Пусть V — ортогонально неразложимо относительно изометрии σ . Тогда справедливо одно из следующих утверждений.

1) σ имеет два асимметричных элементарных делителя:

$$\begin{aligned} q_1^s(x) &= x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0, \\ q_2^s(x) &= x^m + a_0^{-1}a_1x^{m-1} + \dots + a_0^{-1}a_{m-1}x + a_0^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $q_1(x)$ — неприводимый над F_q многочлен степени >1 , $q_2(x) = q_1^*(x)$.

2) σ имеет два элементарных делителя:

$$(x \pm 1)^m, \quad (x \pm 1)^m, \quad (5)$$

где m нечетное,

3) σ имеет симметричный элементарный делитель:

$$p^s(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1, \quad a_{n-i} = a_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (6)$$

где $p(x)$ — неприводимый над F_q симметричный многочлен степени $l > 1$.

4) σ имеет один симметричный элементарный делитель:

$$(x \pm 1)^n. \quad (7)$$

Доказательство теоремы. Пусть σ — изометрия пространства V . Пространство V представимо в виде ортогональной суммы инвариантных ортогонально неразложимых относительно σ подпространств $V=V_1+\dots+V_k$. Так как V — невырожденное пространство, то размерности подпространств V_i — числа четные [5]. В подпространствах V_i σ индуцирует изометрии σ_i , элементарные делители которых описаны в лемме 3.

1. Если σ_i имеет два элементарных делителя вида (4) или (5), то из [1, теорема I] и из леммы I следует, что в V_i существует базис, в котором матрица σ_i приводится к виду $A_i=B_i+{}^tB_i^{-1}$, где B_i матрица вида (1), сопровождающая для элементарного делителя $q_1^s(x)$ или $(x \pm 1)^m$, а матрица формы f_i (f_i — ограничение формы f на V_i) к виду

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Если σ_i имеет один симметричный элементарный делитель $p^s(x)$ вида (6), то в V_i существует базис, в котором σ_i соответствует сопровождающая матрица для многочлена $p^s(x)$ вида (1), а форме f_i матрица

$G_i = \begin{bmatrix} 0 & E_i \\ -E_i & 0 \end{bmatrix}$. Утверждение следует из [5, теорема 4] и лемм 1 и 2.

3. Если σ_i имеет один элементарный делитель $(x \pm 1)^m$ вида (7), то в V_i существует базис с матрицей Грама вида (3), в котором σ_i соответствует A_i вида (1), сопровождающая для многочлена $(x \pm 1)^m$ ($m = \dim V_i$ — число четное, поэтому $(x \pm 1)^m$ — симметричный многочлен). Действительно, по лемме 1 и 2 гомоморфизм с указанной матрицей A_i в базисе Грама G или G_i из (3) является изометрией пространства V_i с элементарным делителем $(x \pm 1)^m$. Из [4] следует, что в V_i существует базис, в котором σ_i соответствует матрица $S = \mp (E - B)^{-1} (E + B)$, где B — клетка Жордана с элементарным делителем x^m , а форме f_i матрица

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{m-1} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad R_1 = aG, \quad a \neq b^2, \quad b \in F_q. \quad \text{Следова-}$$

тельно, существует матрица N , такая, что $N^{-1}A_iN = S$, ${}^tNGN = R$ или ${}^tNGN = aR$. Если ${}^tNGN = R$, то $M^{-1}SM = A_i$, ${}^tMRM = G$ и ${}^tMaRM = aG$, где $M = N^{-1}$. Если ${}^tNGN = aR$, то $M^{-1}SM = A_i$, ${}^tMaRM = G$ и $(aM)^{-1}SaM = A_i$, $a{}^tMRaM = aG$. Таким образом, заменой базиса в V_i матрицу S можно привести к виду (1), а матрицы R , aR к виду (3). Теорема доказана.

Примечание. В статье П. Т. Козел «О строении изометрий пространства с ортогональной метрикой» («Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ. и мех.», 1978, № 3) есть опечатки: всюду вместо $\det$ должно быть $\det$; на странице 22 в третьей строке вместо «нечетное» должно быть «четное»; на странице 23 в восьмой строке после G_1 и в 35 строке после H_4 должна быть точка; на странице 24 в третьей строке снизу вместо «нулевым» должно быть «ненулевым»; на странице 25 в начале 20-й строки должно быть $A_i \cdot A_{i+i}$; в списке литературы вместо Циркунов И. К. должно быть Цикунов И. К.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zassenhaus H. — «Can. Math. Bull.», 1958, 1, № 1, 31; № 2, 101; № 3, 183.
2. Цикунов И. К. — «ДАН СССР», 1965, 165, № 3, 500.
3. Цикунов И. К. — В сб.: Алгебра и математическая логика. Киев, 1966, 72.
4. Цикунов И. К. — «Укр. мат. ж.», 1966, 18, № 5, 122.
5. Артин Э. Геометрическая алгебра. М., 1969.

Поступила в редакцию
2/III 1978 г.

Кафедра высшей алгебры

Краткие сообщения

УДК 535.215.6

А. М. КУЛЬША, В. Б. ЯРЖЕМБИЦКИЙ

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОДОВ ИЗ SnO_2 НА ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОТОЭЛЕМЕНТОВ

Пленки двуокиси олова получают все более широкое использование при изготовлении различных приборов в качестве прозрачных проводящих покрытий. В данной работе рассматриваются возможности использования SnO_2 в качестве электрода к кремниевым $p-n$ -фотоприемникам типа солнечных элементов и координатно-чувствительным приемникам.

Таблица 1

Методы изготовления исследуемых фоточувствительных структур на основе кремния

Структуры	Методы изготовления слоев			
	Ni	SnO_2	Al	$p-n$
Ni — SnO_2 — (КЭС — 0,01) — — (КДБ — 0,3) — Al	электрохим. осажден.	пиролиз [1]	вакуумное напыление, сжигание	Эпитаксия
Ni — SnO_2 — (КДБ — 0,02) — — (КЭФ — 4,5) — Ni	то же	то же		диффузия

В табл. 1 приведены данные о методах изготовления исследуемых фоточувствительных структур; $p-n$ -переход находится на глубине (1—3) мкм; толщина пластины 400 мкм.

Двуокись олова наносилась методом пиролиза [1] при температуре подложки $\sim 500^\circ\text{C}$. Травление пленки SnO_2 производилось плавиковой кислотой или соляной с цинковым порошком.

На рис. 1 представлены спектральные зависимости фото э. д. с. и геометрия структур, а на рис. 2 — нагрузочные характеристики фотоэлементов (при освещении лампой КГМ-24-150 и плотности падающей мощности излучения $P \approx 24,4 \text{ мВт/см}^2$). Из рис. 1 и 2 следует, что $p-n$ -переходы, покрытые пленкой SnO_2 , обладают более высокой чувствительностью в области спектра 0,5—1,1 мкм. Полярность фото э. д. с. всегда соответствовала разделению электронно-дырочных пар в поле $p-n$ -перехода. Дополнительным подтверждением этого является отсутствие влияния SnO_2 на форму спектра фото э. д. с. Форма нагрузочных кривых указывает на существенное влияние последовательного сопротивления на параметры исследуемых структур, когда они используются в качестве солнечных элементов (СЭ). Более полное представление о влиянии SnO_2 на параметры СЭ может быть получено при рассмотрении табл. 2. Фактор заполнения (FF) рассчитывался по формуле [2]:

$$FF = \left(1 - \frac{1}{\alpha V_{xx}}\right) \left(1 - \frac{\ln \alpha V_{xx}}{\alpha V_{xx}}\right), \quad (1)$$

где V_{xx} — напряжение холостого хода; $\alpha = q/nkT$, n принималось равной 1, что соответствует диффузионному протеканию тока. Выражение (1) не учитывает влияние последовательного сопротивления СЭ, и поэтому в табл. 2 величина фактора заполнения оказывается несколько завышенной. Из табл. 2 видно, что к. п. д. СЭ увеличивается в присутствии пленки SnO_2 .

Таблица 2

Параметры исследуемых структур

Структуры	V_{xx} , В	$I_{K,3}$, mA/cm ²	FF	К. п. д., %
Ni— SnO_2 —(КЭС—0,01)—(КДБ—0,3)—Al	0,44	3,2	0,79	4,5
Без SnO_2	0,38	2,6	0,76	3,07
Ni— SnO_2 —(КДБ—0,02)—(КЭФ—4,5)—Ni	0,38	6,3	0,76	7,4
Без SnO_2	0,18	2,4	0,62	1,1

Известно [2], что пиролитическое нанесение SnO_2 на кремний приводит к окислению его поверхности. Причем наличие тонкой пленки окисла кремния существенно не сказывается на величине тока короткого замыкания [2]. Поэтому повышение к. п. д. и других параметров фотоэлементов может быть связано с уменьшением скорости поверхностной рекомбинации на пассивированной поверхности кремния, а также с улучшением условий собирания основных носителей заряда сплошным прозрачным электродом в сравнении с кольцевым непрозрачным контактом.

Влияние пленки SnO_2 на чувствительность координатно-чувствительных приемников изучалось на структурах $n^+ - p$ с прямоугольными алюминийевыми электродами на p -стороне. Оказалось, что в присутствии пленки SnO_2 , нанесенной на низкоомную n -область $p - n$ -перехода, чувствительность фотоприемника увеличилась в три-четыре раза ($110 - 150$ мВ/мВт·мм²). Количественно рост чувствительности не может быть обусловлен лишь просветляющим свойством SnO_2 на кремнии. По-видимому, создание гетероперехода приводит к появлению значительного

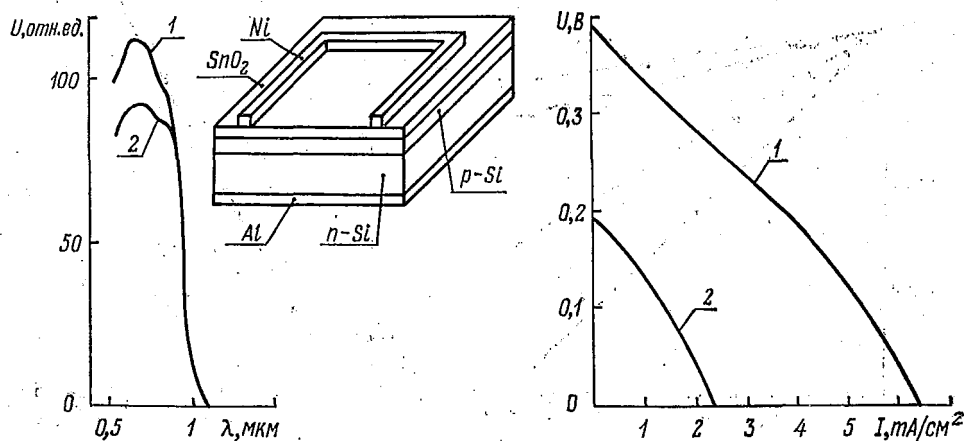


Рис. 1. Спектральные зависимости фото э. д. с. и геометрия структуры:
1 — с пленкой SnO_2 ; 2 — без SnO_2

Рис. 2. Нагрузочные характеристики фотоэлементов. Обозначения такие же, как и на рис. 1

изгиба зон на поверхности кремния, и, следовательно, к снижению потерь на поверхностную рекомбинацию электронов в тонком n -слое.

Полученные результаты позволяют рекомендовать применение пленок SnO_2 для улучшения ряда характеристик СЭ и координатно-чувствительных фотоприемников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лямичев И. Я., Марковский Л. Я., Николаев Ю. Н., Орлов И. Н.— Прикладная электролюминесценция.— М., 1974, с. 169.
2. Ghosh A. K. et al.— J. Appl. Phys., 1978, v. 49, № 6, p. 3490.

Поступила в редакцию
08.12.78.

НИИ ПФП, кафедра физики
полупроводников

УДК 621.315.592

П. Ф. ЛУГАКОВ, Т. А. ЛУКАШЕВИЧ

КИНЕТИКА ОТЖИГА КОМПЛЕКСОВ БОР-ДИВАКАНСИЯ В КРЕМНИИ p -ТИПА

При облучении кристаллов кремния p -типа эффективно образуются радиационные дефекты (РД) с донорным уровнем $E_D + 0,21$ эВ, относительно природы которых существуют различные точки зрения [1—3]. Выполненные нами в последнее время исследования по кинетике накопления РД в p -Si [4] позволили сделать заключение, что в состав этого дефекта входят атом бора и две вакансии (BW). Данная работа выполнялась с целью определения некоторых параметров отжига комплекса BW (порядок реакции и энергия активации отжига, а также частотный фактор, характеризующий скорость отжига дефекта).

Изучались легированные бором кристаллы с исходным удельным сопротивлением 10 Ом·см, выращенные методом зонной плавки в вакууме. Образцы для измерений были облучены при температуре 50°С электронами с энергией 10 МэВ (интегральный поток $\Phi = 1 \cdot 10^{16}$ см⁻²).

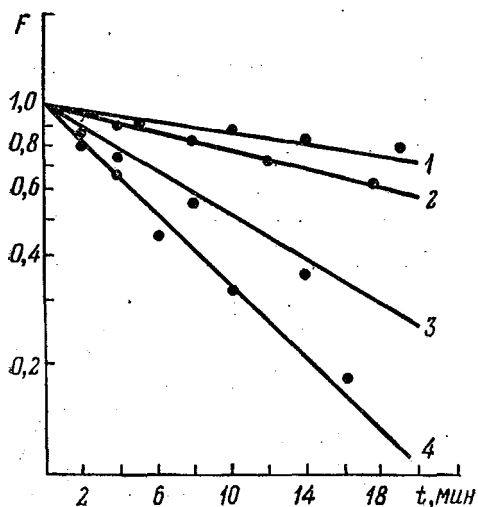


Рис. 1. Зависимость доли неотожженных дефектов от времени при различных температурах отжига:
1 — 350; 2 — 360; 3 — 380; 4 — 390°С

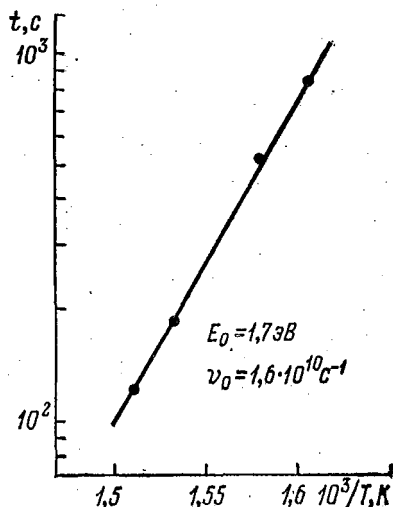


Рис. 2. Зависимость времени отжига дефектов от обратной температуры

Экспериментальные результаты получены из анализа температурных зависимостей коэффициента Холла на различных этапах изотермических отжига. Данные 15-минутного изохронного отжига облученных кристаллов показывают, что комплексы ВВ достаточно устойчивы и отжигаются в интервале температур 350—400° С, поэтому кинетика отжига этих РД исследовалась при температурах 350, 360, 380 и 390° С.

На рис. 1 точками показана экспериментальная зависимость доли $F = N(t)/N_0$ неотожженных дефектов с донорным уровнем $E_D + 0,21$ эВ от времени отжига (t) для различных температур изотермического отжига (N_0 — концентрация дефектов после облучения, $N(t)$ — на различных этапах отжига). Кинетика отжига исследуемого дефекта, как следует из обработки приведенных на рис. 1 результатов, подчиняется простой экспоненциальной зависимости типа $F = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, где τ — характеристическое время релаксации отжига. Последнее связано с частотным фактором ν_0 и энергией активации отжига E_0 следующим образом [5]:

$$\frac{1}{\tau} = \nu_0 \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right).$$

С учетом этого можно сделать заключение, что отжиг исследуемого РД подчиняется кинетике реакций первого порядка, для которых характерна экспоненциальная зависимость $F(t)$. Значение энергии активации отжига дефекта определялось методом сечений [5]. Для этого, используя результаты изотермических отжига (см. рис. 1) строилась зависимость логарифма времени отжига от обратной температуры отжига (рис. 2). Наклон прямой, проведенной через экспериментальные точки, соответствующие 20%-ному отжигу РД, дает $E_0 = 1,7 \pm 0,05$ эВ. С учетом этого значения E_0 определен предэкспоненциальный множитель (частотный фактор) $\nu_0 = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$.

Заметим, что частотный фактор имеет величину $\sim (10^{12} - 10^{13}) \text{ с}^{-1}$ в том случае, если отжиг является результатом простого однопрыжкового превращения или диссоциации, как это имеет место, например, при отжиге вакансий [6], дивакансии [7, 8] или комплекса (V—As) [9]. В отличие от этого частотный фактор $\nu_0 \sim (10^7 - 10^8) \text{ с}^{-1}$ характерен для длиннопрыжковой миграции, когда до захвата на стоки дефект совершает $\sim (10^5 - 10^6)$ простых прыжков. Такой процесс отжига наблюдается для междоузельных атомов бора [10]. Полученное нами промежуточное значение для ν_0 может служить основанием для предположения о том, что при отжиге происходит одновременная диффузия к стокам и распад дефекта на составляющие.

Таким образом, определенные нами параметры отжига ($T = 350 - 400^\circ \text{ С}$, $E_0 = 1,7 \pm 0,05$ эВ, $\nu_0 = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$) комплекса ВВ, вносящего в заштрихованную зону кремния донорный уровень $E_D + 0,21$ эВ, существенно отличаются от аналогичных параметров для дивакансии, полученных из исследований ЭПР и ИК — поглощения ($T = 250 - 320^\circ \text{ С}$, $E_0 = 1,2 - 1,3$ эВ; $\nu_0 = 10^{12} - 10^{13} \text{ с}^{-1}$ [7, 8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sonder E., Templeton L. C. — J. Appl. Phys., 1965, v. 36, p. 1811.
2. Walker J. W., Sah C. T. — Phys. Stat. Sol. (a), 1972, v. 11, p. 513.
3. Mooney P. M., Cheng L. J., Suli M. et al. — Phys. Rev. B, 1977, v. 15, p. 3836.
4. Лукаков П. Ф., Лукашевич Т. А. — ФТП, 1978, т. 12, с. 1660.
5. Дамаск А., Динс Дж. Точечные дефекты в металлах. — М., 1966.
6. Watkins G. D. — J. Phys. Soc. Japan, v. 18, suppl. 2, 1963, p. 22.
7. Watkins G. D., Corbett J. W. — Phys. Rev., 1965, v. 138, p. A543.
8. Cheng L. C., Corelli J. C., Corbett J. W., Watkins G. D. — Phys. Rev., 1966, v. 152, p. 762.
9. Eywarae A. O. — J. Appl. Phys., 1977, v. 48, p. 1840.
10. Watkins G. D. — Phys. Rev. B, 1975, v. 12, p. 5824.

О. М. БОРИСОВ, В. В. ЛИТВИНОВ, В. Б. ОДЖАЕВ, В. И. УРЕНЕВ,
А. Л. ФЕЙГЕНСОН

ЯВЛЕНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ОТЖИГА В ИМПЛАНТИРОВАННЫХ СУРЬМОЙ СЛОЯХ КРЕМНИЯ

Предложенный Гиббонсом механизм отрицательного отжига [1] заключается в том, что внедренные атомы примеси захватываются линейными дислокациями и дислокационными петлями, образующимися в процессе термообработки. При этом в основном адсорбируются должные атомы примесей, которые значительно отличаются размерами от атомов основы. Такими примесями в кремнии могут быть бор и сурьма. Явление отрицательного отжига хорошо известно в имплантированном боре кремнии [2, 3] и, на наш взгляд, лучше всего может быть объяснено с помощью выдвинутой модели [1]. Однако для ее подтверждения необходимы дополнительные экспериментальные данные и, в частности, по отжигу слоев кремния, легированных ионами сурьмы. Практический интерес представляет также исследование электрофизических свойств таких слоев на различных стадиях отжига, поскольку эта примесь используется в производстве полупроводниковых структур, однако, этот вопрос изучен явно недостаточно. Особенно это относится к области доз, ниже критической дозы аморфизации. Кинетика отжига в настоящей работе исследовалась поэтому в интервале температур $400\text{--}1000^\circ\text{C}$ и доз имплантации $3 \cdot 10^{13}\text{--}6 \cdot 10^{15}\text{ см}^{-2}$.

Внедрение ^{122}Sb (60 кэВ) осуществлялось при комнатной температуре в разориентированные относительно ионного пучка пластины Si марки КДБ-7,5, вырезанные по плоскости (111) и обработанные по обычной технологии. Плотность ионного тока составляла 2 мкА/см^2 . Отжиг проводился в вакууме. Поверхностная концентрация N_s , объемная концентрация n и подвижность μ носителей заряда находились из измерений эффекта Холла методом Ван дер Пау. Послойное травление анодно-окисленных слоев Si толщиной примерно $50\text{ \AA}$ позволяло определить профиль распределения этих параметров по глубине.

Результаты измерения N_s в процессе изохронного отжига представлены на рис. 1. Видно, что в области температур $500\text{--}550^\circ\text{C}$ для всех доз имплантации наблюдается резкое увеличение числа носителей. Поскольку при этих температурах происходит отжиг аморфного слоя [4], можно предположить, что активация атомов Sb связана с рекристаллизацией аморфных областей. Для интервала доз $6 \cdot 10^{13}\text{--}2 \cdot 10^{15}\text{ см}^{-2}$ N_s в рекристаллизованном слое изменяется пропорционально дозе с близким к единице коэффициентом использования. Дальнейшее повышение дозы не ведет к увеличению числа носителей в слое и при дозе $6 \cdot 10^{15}\text{ см}^{-2}$ коэффициент использования уже равен 0,3. Проведенный на этих образцах изотермический отжиг при 600°C в интервале длительностей 10—150 мин практически не изменил предельного значения N_s . При этом предельная объемная концентрация электронов в максимуме распределения $\sim 2,5 \cdot 10^{20}\text{ см}^{-3}$ и значительно превышает термически равновесное значение (рис. 2, кривая 1). Повышенная растворимость имплантированных атомов сурьмы наблюдалась ранее [4] и объясняется большой концентрацией неравновесных вакансий, освобождающихся в процессе рекристаллизаций аморфного слоя.

С увеличением температуры отжига неравновесная концентрация активной Sb уменьшается. Таким образом, уже для $t_{\text{отж}} \geq 650^\circ\text{C}$ становится заметным выход атомов сурьмы из узлов, связанный с установлением термодинамического равновесия. Эксперименты по обратному рассеянию [5] позволили установить, что неактивная часть атомов диффундирует к поверхности.

Для доз имплантации, непосредственно перед сплошной аморфизацией, в области температур $500\text{--}600^\circ\text{C}$ наблюдается уменьшение числа

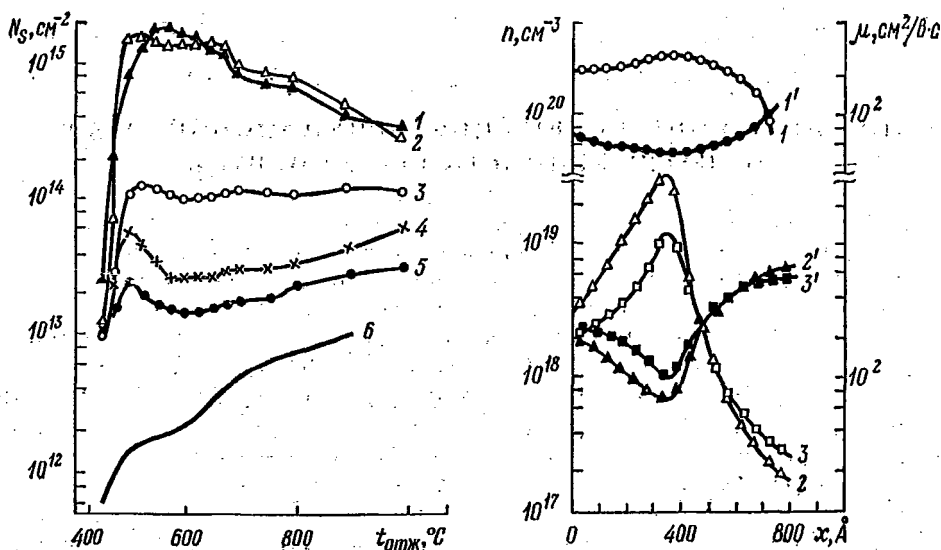


Рис. 1. Зависимость N_s от температуры изохронного отжига (10 мин) для различных доз имплантации:

1 — $6 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$; 2 — $2 \cdot 10^{15}$; 3 — $1,5 \cdot 10^{14}$; 4 — $6 \cdot 10^{13}$; 5 — $3 \cdot 10^{13}$; 6 — (из работы [6]) — $1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$

Рис. 2. Зависимость профилей $n(x)$ (кривые 1, 2, 3) и $\mu(x)$ (1', 2', 3') от дозы имплантации и режима отжига:

1, 1' — $6 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$, 625°C , 30 мин; 2, 2' — $6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$, 500°C , 10 мин; 3, 3' — $6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$, 600°C , 10 мин

электронов с последующим их восстановлением при $\sim 800^\circ \text{C}$. При этом степень отрицательного отжига увеличивается с дозой от 0,45 при $3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ до 0,6 при $6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$. Представленные на рис. 2 профили концентрации и подвижности носителей заряда показывают, что уменьшение N_s вызвано переходом атомов Sb в электрически неактивное состояние. При дозах, превышающих критическую дозу сплошной аморфизации ($\geq 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$), отрицательный отжиг не проявляется.

Характеристики отрицательного отжига соответствуют таковым для имплантированного бором кремния [2] и свидетельствуют в пользу предложенного Гиббсом механизма. Можно сделать вывод о том, что предполагаемые им дислокации и дислокационные петли образуются в результате отжига изолированных аморфных областей. С понижением дозы вклад этих областей в общее резупорядочение уменьшается, и уже при дозе $1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ эффект отрицательного отжига не обнаруживается [6]. В этом случае электрофизические свойства имплантированного слоя определяются в основном присутствием радиационных дефектов, стабильных вплоть до 800°C [6]. Такие дефекты наблюдались также при облучении кремния ионами бора [7] и быстрыми реакторными нейтронами [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Gibbons J. F. — Proc. IEEE, 1972, v. 60, p. 1062.
2. Seidel T. F., MacRAE A. U. — Rad. Effects, 1971, v. 7, p. 1.
3. Bichnell R. W., Allen R. M. — Rad. Effects, 1970, v. 6, p. 1.
4. Мейер Д. ж. и др. Ионное легирование полупроводников. — М., 1973, с. 296.
5. Davies J. A. et al. — Can. Journ. Phys., 1967, v. 45, p. 4053.
6. Johansson N. G. E., Mayer J. W. — Solid State Electron., 1970, v. 13, p. 123.
7. Челядинский А. Р., Марченко Г. М. — Тез. докл. Всесоюзной конференции. Радиационные эффекты в твердых телах. — Ашхабад, 1977, с. 156.
8. Semen'yuk A. K. et al. — Phys. Stat. sol. (a), 1971, v. 7, p. 51.

ВЛИЯНИЕ ЗАКОНА ВКЛЮЧЕНИЯ ФРИКЦИОННОЙ МУФТЫ НА НАГРУЖЕННОСТЬ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Изменением закона включения управляемой фрикционной муфты можно добиться того, чтобы нагруженность элементов механического привода была, при прочих равных условиях, минимально возможной.

Рассмотрим переходные процессы для случая наиболее простой однозвенной двухмассовой динамической системы с приводным асинхронным электродвигателем переменного тока, имеющим жесткую характеристику (частота вращения $\omega_g = \text{const}$), постоянным моментом трения полностью включенной муфты $\bar{M}_m = M_{m, \max}$ и постоянным моментом сопротивления M_c [1]. Продолжительность включения муфты принята постоянной и равной t_m , а момент трения муфты за время $0 \leq t \leq t_m$ меняется по разным законам.

Движение масс механического привода описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} I_m \ddot{\varphi}_m = M_m(t) - c_k(\varphi_m - \varphi_c), \\ I_c \ddot{\varphi}_c = c_k(\varphi_m - \varphi_c) - M_c, \end{cases} \quad (1)$$

где I_m и I_c — моменты инерции ведомых элементов муфты и разгоняемых масс системы; φ_m и φ_c — углы поворота масс с моментами инерции соответственно I_m и I_c ; c_k — приведенная крутильная жесткость системы; M_c — момент сопротивления.

Момент трения муфты *

$$M_m(t) = \begin{cases} M_m(t), & t \in [0; t_m], \\ \bar{M}_m, & t \in [t_m; \tau_1], \end{cases}$$

где τ_1 — время прекращения буксования муфты.

Исследуем наиболее тяжелый случай работы муфты, когда $\tau_1 > t_m$. Нагруженность элементов механического привода будем оценивать двумя показателями: величиной динамического крутящего момента

$$M_g(t) = \begin{cases} c_k[\varphi_m(t) - \varphi_c(t)] = c_k\varphi(t), & t \in [0; t_m], \\ c_k[\tilde{\varphi}_m(t) - \tilde{\varphi}_c(t)] = c_k\tilde{\varphi}(t), & t \in [t_m; \tau_1] \end{cases}$$

и работой трения за одно включение

$$L = L_1 + L_2 = \int_0^{t_m} M_m(t) [\omega_g - \dot{\varphi}_m(t)] dt + \int_{t_m}^{\tau_1} \bar{M}_m [\omega_g - \dot{\tilde{\varphi}}_m(t)] dt. \quad (3)$$

Максимальный динамический крутящий момент равен наибольшему значению функции $M_g(t)$ на промежутке $[0; \tau_1]$.

Из (1) для промежутков времени $[0; t_m]$ и $[t_m; \tau_1]$ имеем соответственно

$$\ddot{\varphi} + B^2\varphi = F_1(t), \quad \varphi = \varphi_m - \varphi_c, \quad (4)$$

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + B^2\tilde{\varphi} = F, \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_c, \quad (5)$$

где $B^2 = c_k \left(\frac{1}{I_m} + \frac{1}{I_c} \right)$, $F_1(t) = \frac{M_m(t)}{I_m} + \frac{M_c}{I_c}$, $F = \frac{\bar{M}_m}{I_m} + \frac{M_c}{I_c}$.

Используя метод вариации произвольных постоянных [2], получаем

* Под моментом трения муфты понимается активный крутящий момент, передающийся на систему при помощи фрикционной муфты.

общее решение уравнения (4) $\varphi(t) = A \sin(Bt + \alpha) + \frac{1}{B} \int_0^t F_1(x) \sin B(t - x) dx$, где A и α — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (5): $\tilde{\varphi}(t) = A_1 \sin(Bt + \alpha_1) + \frac{F}{B^2}$, A_1 , α_1 — произвольные постоянные.

Проанализируем влияние закона нарастания момента трения $M_M(t)$ на величину динамического крутящего момента M_g и работу трения L . Пусть закон изменения момента трения выражается формулой

$$M_M(t) = \begin{cases} a_1(e^t - 1), & t \in [0; t_M], \\ \bar{M}_M, & t \in [t_M; \tau_1], \end{cases}$$

где $a_1 = \bar{M}_M/(e^{t_M} - 1)$. Из (4) в этом случае имеем

$$\varphi(t) = A \sin(Bt + \alpha) + \frac{a_2}{1+B^2} e^t + \frac{b_1}{B^2}, \quad (6)$$

где $A = \sqrt{[a_2 B^2 + b_1(1+B^2)]^2 + (a_2 B)^2} / [(1+B^2) B^2]$, $a_2, b_1 = \text{const}$, $\text{tg } \alpha = [a_2 B^2 + b_1(1+B^2)] / (a_2 B)$. Из (5) получим частное решение

$$\tilde{\varphi}(t) = A_1 \sin(Bt + \alpha_1) + \frac{F}{B^2}, \quad (7)$$

удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{\varphi}(t_M) = \varphi(t_M) = \varphi_1$, $\dot{\tilde{\varphi}}(t_M) = \dot{\varphi}(t_M) = \omega_1$, где $\varphi_1 = \varphi(t_M)$, $\omega_1 = \dot{\varphi}(t_M)$ находятся из (6) и (7), $A_1 = \sqrt{(\varphi_1 B^2 - F)^2 + (B\omega_1)^2} / B^2$, $\text{tg}(Bt_M + \alpha_1) = (\varphi_1 B^2 - F) / (B\omega_1)$.

Из (1) с учетом $M_M(t)$ на промежутке $[0; t_M]$

$$\ddot{\varphi}_M(t) = \frac{1}{I_M} \left\{ a_1(e^t - t - 1) - c_k \left[\frac{A}{B} (\cos \alpha - \cos(Bt + \alpha)) + \frac{a_2}{1+B^2} (e^t - 1) + \frac{b_1}{B^2} t \right] \right\}. \quad (8)$$

Аналогично на промежутке $[t_M; \tau_1]$ имеем

$$\ddot{\tilde{\varphi}}_M(t) = \frac{1}{I_M} \left\{ \left(\bar{M}_M - \frac{c_k F}{B^2} \right) (t - t_M) + \frac{c_k A_1}{B} [\cos(Bt + \alpha_1) - \cos(Bt_M + \alpha_1)] \right\} + \dot{\varphi}_M(t_M), \quad (9)$$

где $\varphi_M(t_M)$ берется из (8). Верхний предел интегрирования τ_1 находим путем численного решения трансцендентного уравнения

$$\omega_g - \frac{1}{I_M} \left\{ \left(\bar{M}_M - \frac{c_k F}{B^2} \right) (\tau_1 - t_M) + \frac{c_k A_1}{B} [\cos(B\tau_1 + \alpha_1) - \cos(Bt_M + \alpha_1)] \right\} - \dot{\varphi}_M(t_M) = 0.$$

Подставляя в (3) выражения $M_M(t)$, $\ddot{\varphi}_M(t)$, $\ddot{\tilde{\varphi}}_M(t)$ на основании (8) и (9), а также τ_1 , получим $L = L_1 + L_2$, где $L_1 = a_1 \left\{ \left[\omega_g(t_M - t_M - 1) - \frac{1}{I_M} \left\{ a_1 \left[\frac{1}{2} e^{2t_M} - e^{t_M}(t_M + 1) + \frac{t_M^2}{2} + t_M + \frac{3}{2} \right] + \frac{Ac_k}{B} \left[\frac{1}{B} (\sin \alpha - \sin(Bt_M + \alpha)) - (e^{t_M} - t_M - 1) \cos \alpha \right] + \frac{ABc_k}{1+B^2} \left[e^{t_M} (\sin(Bt_M + \alpha) + \frac{1}{B} \cos(Bt_M + \alpha)) - \sin \alpha - \frac{1}{B} \cos \alpha \right] - \frac{a_2 c_k}{1+B^2} \left(\frac{1}{2} e^{2t_M} - 2e^{t_M} + t_M + \frac{3}{2} \right) - \frac{b_1 c_k}{B^2} [e^{t_M}(t_M - 1) - \frac{t_M^2}{2} + 1] \right\} \right] \right\}$; $L_2 = \bar{M}_M \left\{ \left[(\omega_g - \dot{\varphi}_M(t_M)) (\tau_1 - t_M) - \frac{1}{I_M} \left\{ \left(\bar{M}_M - \frac{c_k F}{B^2} \right) \times \right. \right. \right.$

$$\times \frac{(\tau_1 - t_m)^2}{2} + \frac{A_1 c_k}{B} \left[\frac{1}{B} (\sin (B\tau_1 + \alpha_1) - \sin (Bt_m + \alpha_1) - (\tau_1 - t_m) \cos (Bt_m + \alpha_1)) \right] \Bigg\} \Bigg\}.$$

Закон включения	Численные значения величин	
	L , кгм	$M_g \text{ max}$, кгм
Линейный	28729	64,6
Квадратичный	25052	65,5
Экспоненциальный	27217	75,7

Для случаев, когда момент трения на $[0; t_m]$ изменяется по формулам: $M_m(t) = \left\{ \frac{\overline{M}_m}{t_m} t; -\frac{\overline{M}_m}{t_m^2} t^2 + 2 \frac{\overline{M}_m}{t_m} t \right\}$, исследование проводится аналогичным образом. В таблице приведены численные значения работы трения L и максимального динамического крутящего момента M_g муфты при следующих исходных данных: $t_m = 1$ с; $I_m = 0,1$ кгм·с²; $I_c = 0,5$ кгм·с²; $c_k = 5$ кгм/рад; $\omega = 2301$ /с; $\overline{M}_m = 60$ кгм; $M_c = 20$ кгм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солонский А. С.— В сб.: Повышение эффективности использования техники в сельском хозяйстве, т. 63.— Горки, 1970.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М., 1958.

Поступила в редакцию
26.01.78.

Кафедра дифференциальных
уравнений, БИМСХ

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ *

УДК 519.85/857.6

Л. В. Командина. Прямой и двойственный опорные методы решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями. № 3794-78. Деп. от 14.12.78.

Рассматривается транспортная задача с дополнительными ограничениями в матричной и сетевой постановках, описываются прямой и двойственный опорные методы ее решения. Указанные методы являются реализацией соответствующих опорных методов решения общей задачи линейного программирования.

УДК 517.9

Б. С. Калитин. О построении знакопостоянных функций Ляпунова. № 653-79. Деп. от 20.02.79.

Приводятся примеры исследования задачи об асимптотической устойчивости методом построения знакопостоянных функций Ляпунова.

УДК 539.1.074

В. В. Изох, Э. И. Табачник. Моделирование на ЭВМ формирователя по переднему фронту. № 790-79. Деп. от 05.03.79.

Описывается методика и приводятся результаты статистического моделирования на ЭВМ формирователя по переднему фронту. Исследуется влияние на разброс моментов срабатывания формирователя следующих факторов: формы входного сигнала, флуктуаций формы, разброса амплитуд и времени нарастания переднего фронта входных сигналов, инерционность дискриминирующего элемента формирователя. Точность измерения временного положения импульсов оценивается с помощью трех основных критериев: дисперсионного, информационного и квантильных значений погрешности.

УДК 530.12:531.51

А. К. Горбачевич. К квантовой механике в произвольных системах отсчета при учете внешнего гравитационного поля. № 118—79. Деп. от 04.04.79.

С помощью введенных в гильбертовом пространстве ковариантных производных уравнения движения квантовой механики придан ковариантный вид относительно зависящих от времени унитарных преобразований и рассмотрена нерелятивистская квантовая механика в неинерциальных системах отсчета. Получен явный вид оператора Гамильтона в движущейся произвольным образом жесткой системе отсчета. На основе общековариантного уравнения Дирака рассмотрена релятивистская квантовая механика во внешнем гравитационном поле. При определении системы отсчета использована «концепция одиночного наблюдателя». Дано ковариантное определение оператора Гамильтона, который является эрмитовым. Общие выражения специализируются на случай произвольного движения в плоском пространстве и кругового геодезического движения в поле Шварцшильда. Отмечено, что при значениях орбиты, близких к $3/2 r_g$, где r_g — гравитационный радиус, гравитационное поле может оказывать существенное влияние на энергетические уровни атома, движущегося в поле Шварцшильда.

УДК 539.19

Н. Б. Барковский. Модифицированный алгоритм и программа расчета электронной структуры молекул по методу ССЗК. № 1184-79. Деп. от 04.04.79.

Приведен алгоритм для проведения расчетов по методу ССЗК с оригинальной схемой самосогласования, а также фортран-программа, реализующая указанный алгоритм.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

А. М. Людчик, А. Б. Ковриков. Локальные симметризованные орбитали и их применение в методе Малликена — Вольфсберга — Гельмгольца. № 1175-79. Деп. от 04.04.79.

Решается задача оптимизации учета свойств симметрии при расчетах электронной структуры молекул на примере метода Малликена — Вольфсберга — Гельмгольца. Вводятся так называемые локальные симметризованные орбитали (л. с. о.) и исследуются их свойства. Эти орбитали используются для расчета различных матричных элементов и малликеновских заселенностей. Описывается алгоритм оптимизированного по симметрии метода Малликена — Вольфсберга — Гельмгольца с самосогласованием по зарядам и конфигурациям.

В. А. Гулякин, В. В. Данилевич, Е. В. Новиков, А. Ф. Чернявский, В. А. Чудовский. Анализ двухпорогового устройства фиксации временного положения флуктуирующих электрических сигналов. № 1543-а-79. Деп. от 26.04.79.

Рассматривается двухпороговое устройство фиксации временного положения флуктуирующих по амплитуде и времени нарастания электрических сигналов. Анализируются источники погрешности фиксации, зависимой от параметров входных сигналов, и определяются условия ее минимизации. Приводятся результаты экспериментальных исследований указанной погрешности, а также случайной составляющей погрешности привязки, температурной и долговременной нестабильности разработанного устройства.

В. Т. Ерофеев. Тензорные дифференциальные уравнения в симметричных производных. № 257-79. Деп. от 19.08.79.

По аналогии с теорией внешнего дифференцирования введено симметричное дифференцирование d в классе симметричных дифференциальных форм S_n^m валентности m . Дифференциальный оператор первого порядка d преобразует симметричные формы из S_n^m в симметричные формы из S_n^{m+1} . Получены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения $du = b$, где b — заданная форма из S_n^{m+1} . Это условие имеет вид $\delta b = 0$, где δ — дифференциальный оператор порядка $m+1$. Получены также условия разрешимости уравнения $d^k u = b$, $b \in S_n^{m+k}$. Изучена структура решений этого уравнения. В простейшем случае, когда $b \in S_3^2$, форму b можно интерпретировать как тензор деформаций, а форму $u \in S_3^1$ из уравнения $du = b$ можно рассматривать как искомый вектор перемещений частиц среды. При такой интерпретации условия $\delta b = 0$ известны в механике как соотношения Сен-Венана.

ПРОФЕССОР А. Е. ЛЕВАШЕВ

На 82-ом году жизни скончался старейший деятель высшей школы, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики БГУ имени В. И. Ленина Анатолий Евгеньевич Левашев.

А. Е. Левашев начал свою трудовую деятельность в 1918 г. Работая преподавателем рабфака, он окончил физико-математический факультет Среднеазиатского госуниверситета (САГУ). С 1928 г. А. Е. Левашев — старший ассистент кафедры САГУ, с 1930 — доцент, а затем зав. кафедрой физики Ленинградского машиностроительного института. В последующие годы заведовал кафедрами САГУ, Киевского института киноинженеров, Киевского политехнического института; с 1961 г. А. Е. Левашев — профессор Киевского университета имени Т. Г. Шевченко.

С 1962 по 1973 г. А. Е. Левашев возглавлял кафедру теоретической физики БГУ имени В. И. Ленина, а с 1973 г. Анатолий Евгеньевич — профессор-консультант этой кафедры. За это время им подготовлены два доктора и шесть кандидатов физ.-мат. наук. С его именем связано создание белорусской школы физиков-гравитационистов.

В настоящее время группа физиков-гравитационистов, подготовленная профессором А. Е. Левашевым, является ведущей организацией в СССР по теме «Гравитация и электромагнетизм».

С первых шагов своей научной деятельности особое внимание А. Е. Левашев стал уделять физической интерпретации теории относительности. Это потребовало дальнейшей разработки математического аппарата теории, в частности, применения методов современной алгебры и теории расслоенных пространств. Как физическую основу А. Е. Левашев принял принцип двойственности. Это позволило, во-первых, распространить специальную теорию относительности на дискретные пространства, во-вторых, развить релятивистскую электродинамику СВЧ, подчиненную антисимметричному принципу двойственности. Широта указанного подхода дала возможность применить его при расчете адвекции в динамической метеорологии. Особенно эффективным применение принципа двойственности как физического принципа и развитого на этой основе математического аппарата векторов связности с мягкими тетрадами оказалось в общей теории относительности и релятивистской электродинамике вращающихся систем. Все эти результаты изложены более чем в 70 работах и монографиях. В настоящее время выходит из печати вторая монография А. Е. Левашева «Движение и двойственность в релятивистской электродинамике», содержащая результаты его многолетней исследовательской деятельности совместно с учениками.

На лекциях А. Е. Левашева, отличающихся глубиной и мастерством изложения, воспитано не одно поколение физиков. Лекции по специальным и общеобразовательным дисциплинам, руководство аспирантами, курсовыми и дипломными работами, выступления с популярными лекциями перед широкой общественностью, беседы со студентами младших курсов на кружке теоретической физики — вот далеко не полный перечень чрезвычайно разнообразной по форме и богатой по содержанию педагогической и воспитательной работы А. Е. Левашева. Он руководил научным семинаром кафедры; обладая блестящей эрудицией, постоянно консультировал сотрудников, щедро делился с ними богатейшим научным и жизненным опытом.

Большую научную и педагогическую работу А. Е. Левашев совмещал с общественной деятельностью, являясь членом научно-технического Совета при Минвузе СССР по секции гравитации.

А. Е. Левашев награжден медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне», Почетными грамотами Верховных Советов БССР и Уз. ССР.

Светлая память об Анатолии Евгеньевиче Левашеве навсегда останется в сердцах тех, кто его знал.



УДК 681.323:681.326.3

Афанасьев Г. К., Лебедев В. И., Чернявский А. Ф., Черников Г. Н. Алгоритм выделения контура двоичного изображения.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Предлагается алгоритм выделения контура двоичного изображения, допускающий распараллеливание при аппаратной реализации. Рассматривается пример структуры процессора для реализации этого алгоритма.

Библ. 5 назв., ил. 1.

УДК 681.142.01

Коляда А. А. Алгоритмы арифметики обобщенных СОК.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Предлагаются усовершенствованные машинные алгоритмы арифметических операций обобщенных систем остаточных классов, разработана методика оценки экстремальных значений интервального индекса чисел из различных множеств. Предлагаемые методы определения знака и ранга числа могут быть использованы в обычных СОК.

Библ. 4 назв.

УДК 539.107.5

Гахович А. С., Коляда А. А., Чернявский А. Ф. Определение интенсивности стохастического потока, генетически связанного с некоторым потоком сигналов, с помощью многоступенчатых МВА.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Рассматривается задача определения интенсивности случайного потока сигналов, порожденного некоторым нестационарным потоком событий. Искомая характеристика находится с помощью дифференциального уравнения, полученного на основе статистических данных многоканального временного анализатора (МВА), работающего в многостоповом режиме. Интенсивность первичного потока, а также типы первичного и вторичного потоков предполагаются известными.

Библ. 2 назв.

УДК 535.132

Кириленко А. И., Хапалюк А. П. Особенности некомпланарного отражения неоднородных волн.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Изучается неоднозначность связи между структурой падающей неоднородной волны и амплитудными коэффициентами отражения и прохождения при некомпланарном отражении, когда векторы фазовой и амплитудной нормали и нормаль к границе раздела сред не лежат в одной плоскости. При таком отражении и преломлении отмечается наличие потока энергии в направлении перпендикулярном к плоскости падения.

Библ. 4 назв., ил. 2.

УДК 535.132

Кириленко А. И., Хапалюк А. П. Баланс энергии в некоторых случаях некомпланарного отражения.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Изучается баланс энергии на границе раздела прозрачных сред в некоторых случаях некомпланарного отражения неоднородных волн, когда векторы фазовой и амплитудной нормали и нормаль к границе раздела не лежат в одной плоскости. Рассматриваются случаи, когда фазовая или амплитудная нормаль падающей или преломленной волны параллельна границе раздела сред.

Библ. 10 назв., ил. 3.

УДК 535.338

Липницкий И. В., Хартоник И. А., Умрейко Д. С., Крот В. И., Неокладнова Л. Н. Колебательные спектры и структура некоторых хлорпиридиновых комплексов переходных металлов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Исследованы колебательные спектры и структура ряда хлорпиридиновых комплексов переходных металлов общей формулы $[\text{Meru}_4\text{Cl}_2]\text{Cl} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ($\text{Me} = \text{Co}, \text{Rh}, \text{Ir}$). На основе анализа сделаны выводы о наличии в опытных образцах смеси изомеров D_{4h} и C_{2v} симметрии. Выполнено отнесение экспериментальных частот к типам и формам колебаний комплексных катионов.

Библ. 8 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 577.37

Татаринов Б. А., Цвирко В. А., Черенкевич С. Н., Комьяк А. И. Применение метода малоуглового светорассеяния для изучения клеток в процессе их структурных перестроек.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Разработана аппаратура для изучения рассеяния света под малыми углами клетками, находящимися в водных средах. Описан метод определения размеров клеток в ходе процессов, сопровождающихся нарушением их структуры. Показано, что использование метода малоуглового светорассеяния позволяет выявить ряд изменений структуры клеток, не регистрируемых с помощью других методов.

Библ. 11 назв., ил. 3.

УДК 537.35

Гайсенок В. А., Дударев И. А., Кадум М., Клищенко А. П. Некоторые особенности поляризованной люминесценции органических молекул из высоких электронных состояний при двухквантовом возбуждении.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Исследована степень поляризации (P) «синей» флуоресценции ксантовых красителей и 3,6-тетраметилдиамино-N-метилфталимида в органических растворителях различной вязкости. Обнаружена зависимость P синей люминесценции как от способа возбуждения, так и от вязкости растворителей. Совокупность полученных результатов объяснена в предположении, что в исследованных системах наряду со ступенчатым имеет место двухфотонное поглощение.

Библ. 6 назв., табл. 3.

УДК 62-50

Ле Тьн Зунг. Оптимальное сопряжение неособых участков экстремалей Понтрягина.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Получены условия оптимальности для задачи с негладкой функцией качества и его следствия.

Библ. 3 назв.

УДК 681.3.06

Млынчик И. И., То Туан. Об одном методе обработки таблиц информации.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Рассматривается метод обработки таблиц информации, являющийся разновидностью метода расстановки (прямого доступа). Проведены расчет его временных характеристик и сравнение с методом двоичного поиска и методом открытой адресации.

Библ. 5 назв., ил. 1.

УДК 681.3

Беляевский В. В., Воробьев М. А., Дробушевич Г. А., Комаровский И. В. Алгоритм подсчета итогов по группам и подгруппам.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Рассматривается задача подсчета итогов для больших информационных массивов. Определены виды итогов общего вида. Приведен формальный алгоритм подсчета итогов и пример, иллюстрирующий применение данного алгоритма.

Библ. 1 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 62-50

Ракецкий В. М. Прямой метод решения задачи квадратичного программирования.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Предлагается конечный метод решения задачи квадратичного программирования с двухсторонними ограничениями.

Библ. 4 назв.

УДК 518:517.91/94

Кузичева Е. Г. О сходимости одного алгоритма Робертса Шипмана.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Решается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом прямой пристрелки путем погружения, основанного на разделении правых частей уравнений на две составляющие (линейную и нелинейную) и решения ряда двухточечных граничных задач. Доказывается сходимость одного из алгоритмов Робертса — Шипмана решения граничных задач.

Библ. 3 назв.

УДК 519.4

Матвеев Г. В. Спинорная норма автоморфизма центральной простой алгебры.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Изучается спинорная норма автоморфизма центральной простой алгебры над глобальным полем характеристики, отличной от двух.

Библ. 5 назв.

УДК 512.831

Нормальная форма матрицы изометрии симплектического пространства над конечным полем. Козел П. Т. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех.», 1979, № 3.

Доказывается, что в n -мерном невырожденном пространстве с симплектической метрикой над конечным полем характеристики $\neq 2$ для произвольной изометрии δ существует базис, в котором матрица A изометрии δ и матрица V формы, определяющей метрику, одновременно приводятся к виду $A = A_1 + \dots + A_s$, $V = V_1 + \dots + V_s$, где $A_k = -B_k + {}^t B_k^{-1}$, $B_k - n_k \times n_k$ -матрица вида

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n_k-1} & \dots & a_{l+1} & a_l \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad l = \left[\frac{n_k}{2} \right]$$

или $A_k = B_k$ и $n_k = 2l$, $a_0 = -1$, $a_l = a_{n_k-l}$ $l = \overline{1, n_k-1}$; $V_k = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, I — единичная матрица либо скалярная с диагональным элементом, не являющимся квадратом.

Библ. 5 назв.

УДК 535.215.6

Кульша А. М., Яржембицкий В. Б. Влияние электродов из SnO_2 на основные характеристики фотоэлементов. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Рассматриваются возможности использования пленки двуокиси олова в качестве электрода к кремниевым $p-n$ -фотоприемникам типа солнечных элементов и координатно-чувствительным приемникам. Показано, что применение двуокиси олова позволяет увеличить к. п. д. и чувствительность фотоприемников некоторых типов благодаря уменьшению скорости поверхностной рекомбинации, а также улучшению условий собирания основных носителей заряда.

Библ. 2 назв., ил. 2, табл. 2.

УДК 621.315.592

Лугаков П. Ф., Лукашевич Т. А. Кинетика отжига комплексов бор-дивакансия в кремнии p -типа. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Изучена кинетика отжига комплексов бор-дивакансия с донорным уровнем $E_0 + 0,21$ эВ, которые образуются при облучении ($T \leq 50^\circ \text{C}$) электронами 10 МэВ кристаллов кремния p -типа, выращенных методом зонной плавки в вакууме. Экспериментальные результаты получены из измерений эффекта Холла на различных этапах изотермических отжигов. Определены порядок реакции ($\gamma=1$), частотный фактор ($\nu_0 = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$) и энергия активации термического отжига ($E_0 = 1,7$ эВ) исследуемого дефекта.

Библ. 10 назв., ил. 2.

УДК 621.315.592

Борисов О. М., Литвинов В. В., Оджаев В. Б., Уренев В. И., Фейгенсон А. Л. Явление отрицательного отжига в имплантированных сурьмой слоях кремния. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Исследованы электрофизические свойства имплантированных сурьмой слоев кремния и обнаружен отрицательный отжиг. Предполагается, что это явление связано с образованием при отжиге изолированных аморфных областей дислокаций и дислокационных петель, которые адсорбируют атомы сурьмы и переводят их в электрически неактивное состояние.

Библ. 8 назв., ил. 2.

УДК 517.942:531.44

Мататов В. И., Солонская Г. А., Солонская К. А. Влияние закона включения фрикционной муфты на нагруженность ее элементов. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1.

Исследовано влияние различных законов (линейный, квадратичный, экспоненциальный) включения фрикционной муфты на работу трения муфты и максимальную динамическую нагруженность ее элементов.

Библ. 2 назв., табл. 1.