

## ВЛИЯНИЕ ЗАКОНА ВКЛЮЧЕНИЯ ФРИКЦИОННОЙ МУФТЫ НА НАГРУЖЕННОСТЬ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Изменением закона включения управляемой фрикционной муфты можно добиться того, чтобы нагруженность элементов механического привода была, при прочих равных условиях, минимально возможной.

Рассмотрим переходные процессы для случая наиболее простой однозвенной двухмассовой динамической системы с приводным асинхронным электродвигателем переменного тока, имеющим жесткую характеристику (частота вращения  $\omega_g = \text{const}$ ), постоянным моментом трения полностью включенной муфты  $\bar{M}_m = M_{m, \max}$  и постоянным моментом сопротивления  $M_c$  [1]. Продолжительность включения муфты принята постоянной и равной  $t_m$ , а момент трения муфты за время  $0 \leq t \leq t_m$  меняется по разным законам.

Движение масс механического привода описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} I_m \ddot{\varphi}_m = M_m(t) - c_k(\varphi_m - \varphi_c), \\ I_c \ddot{\varphi}_c = c_k(\varphi_m - \varphi_c) - M_c, \end{cases} \quad (1)$$

где  $I_m$  и  $I_c$  — моменты инерции ведомых элементов муфты и разгоняемых масс системы;  $\varphi_m$  и  $\varphi_c$  — углы поворота масс с моментами инерции соответственно  $I_m$  и  $I_c$ ;  $c_k$  — приведенная крутильная жесткость системы;  $M_c$  — момент сопротивления.

Момент трения муфты \*

$$M_m(t) = \begin{cases} M_m(t), & t \in [0; t_m], \\ \bar{M}_m, & t \in [t_m; \tau_1], \end{cases}$$

где  $\tau_1$  — время прекращения буксования муфты.

Исследуем наиболее тяжелый случай работы муфты, когда  $\tau_1 > t_m$ . Нагруженность элементов механического привода будем оценивать двумя показателями: величиной динамического крутящего момента

$$M_g(t) = \begin{cases} c_k[\varphi_m(t) - \varphi_c(t)] = c_k\varphi(t), & t \in [0; t_m], \\ c_k[\tilde{\varphi}_m(t) - \tilde{\varphi}_c(t)] = c_k\tilde{\varphi}(t), & t \in [t_m; \tau_1] \end{cases}$$

и работой трения за одно включение

$$L = L_1 + L_2 = \int_0^{t_m} M_m(t) [\omega_g - \dot{\varphi}_m(t)] dt + \int_{t_m}^{\tau_1} \bar{M}_m [\omega_g - \dot{\tilde{\varphi}}_m(t)] dt. \quad (3)$$

Максимальный динамический крутящий момент равен наибольшему значению функции  $M_g(t)$  на промежутке  $[0; \tau_1]$ .

Из (1) для промежутков времени  $[0; t_m]$  и  $[t_m; \tau_1]$  имеем соответственно

$$\ddot{\varphi} + B^2\varphi = F_1(t), \quad \varphi = \varphi_m - \varphi_c, \quad (4)$$

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + B^2\tilde{\varphi} = F, \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_c, \quad (5)$$

где  $B^2 = c_k \left( \frac{1}{I_m} + \frac{1}{I_c} \right)$ ,  $F_1(t) = \frac{M_m(t)}{I_m} + \frac{M_c}{I_c}$ ,  $F = \frac{\bar{M}_m}{I_m} + \frac{M_c}{I_c}$ .

Используя метод вариации произвольных постоянных [2], получаем

\* Под моментом трения муфты понимается активный крутящий момент, передающийся на систему при помощи фрикционной муфты.

общее решение уравнения (4)  $\varphi(t) = A \sin(Bt + \alpha) + \frac{1}{B} \int_0^t F_1(x) \sin B(t - x) dx$ , где  $A$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (5):  $\tilde{\varphi}(t) = A_1 \sin(Bt + \alpha_1) + \frac{F}{B^2}$ ,  $A_1$ ,  $\alpha_1$  — произвольные постоянные.

Проанализируем влияние закона нарастания момента трения  $M_M(t)$  на величину динамического крутящего момента  $M_g$  и работу трения  $L$ . Пусть закон изменения момента трения выражается формулой

$$M_M(t) = \begin{cases} a_1(e^t - 1), & t \in [0; t_M], \\ \bar{M}_M, & t \in [t_M; \tau_1], \end{cases}$$

где  $a_1 = \bar{M}_M/(e^{t_M} - 1)$ . Из (4) в этом случае имеем

$$\varphi(t) = A \sin(Bt + \alpha) + \frac{a_2}{1 + B^2} e^t + \frac{b_1}{B^2}, \quad (6)$$

где  $A = \sqrt{[a_2 B^2 + b_1(1 + B^2)]^2 + (a_2 B)^2} / [(1 + B^2) B^2]$ ,  $a_2, b_1$  — const,  $\operatorname{tg} \alpha = [a_2 B^2 + b_1(1 + B^2)] / (a_2 B)$ . Из (5) получим частное решение

$$\tilde{\varphi}(t) = A_1 \sin(Bt + \alpha_1) + \frac{F}{B^2}, \quad (7)$$

удовлетворяющее начальным условиям  $\tilde{\varphi}(t_M) = \varphi(t_M) = \varphi_1$ ,  $\dot{\tilde{\varphi}}(t_M) = \dot{\varphi}(t_M) = \omega_1$ , где  $\varphi_1 = \varphi(t_M)$ ,  $\omega_1 = \dot{\varphi}(t_M)$  находятся из (6) и (7),  $A_1 = \sqrt{(\varphi_1 B^2 - F)^2 + (B\omega_1)^2} / B^2$ ,  $\operatorname{tg}(Bt_M + \alpha_1) = (\varphi_1 B^2 - F) / (B\omega_1)$ .

Из (1) с учетом  $M_M(t)$  на промежутке  $[0; t_M]$

$$\dot{\varphi}_M(t) = \frac{1}{I_M} \left\{ a_1(e^t - t - 1) - c_k \left[ \frac{A}{B} (\cos \alpha - \cos(Bt + \alpha)) + \frac{a_2}{1 + B^2} (e^t - 1) + \frac{b_1}{B^2} t \right] \right\}. \quad (8)$$

Аналогично на промежутке  $[t_M; \tau_1]$  имеем

$$\tilde{\dot{\varphi}}_M(t) = \frac{1}{I_M} \left\{ \left( \bar{M}_M - \frac{c_k F}{B^2} \right) (t - t_M) + \frac{c_k A_1}{B} [\cos(Bt + \alpha_1) - \cos(Bt_M + \alpha_1)] \right\} + \dot{\varphi}_M(t_M), \quad (9)$$

где  $\dot{\varphi}_M(t_M)$  берется из (8). Верхний предел интегрирования  $\tau_1$  находим путем численного решения трансцендентного уравнения

$$\omega_g - \frac{1}{I_M} \left\{ \left( \bar{M}_M - \frac{c_k F}{B^2} \right) (\tau_1 - t_M) + \frac{c_k A_1}{B} [\cos(B\tau_1 + \alpha_1) - \cos(Bt_M + \alpha_1)] \right\} - \dot{\varphi}_M(t_M) = 0.$$

Подставляя в (3) выражения  $M_M(t)$ ,  $\dot{\varphi}_M(t)$ ,  $\tilde{\dot{\varphi}}_M(t)$  на основании (8) и (9), а также  $\tau_1$ , получим  $L = L_1 + L_2$ , где  $L_1 = a_1 \left\{ \left[ \omega_g(e^{t_M} - t_M - 1) - \frac{1}{I_M} \left\{ a_1 \left[ \frac{1}{2} e^{2t_M} - e^{t_M}(t_M + 1) + \frac{t_M^2}{2} + t_M + \frac{3}{2} \right] + \frac{Ac_k}{B} \left[ \frac{1}{B} (\sin \alpha - \sin(Bt_M + \alpha)) - (e^{t_M} - t_M - 1) \cos \alpha \right] + \frac{ABc_k}{1 + B^2} \left[ e^{t_M} (\sin(Bt_M + \alpha) + \frac{1}{B} \cos(Bt_M + \alpha)) - \sin \alpha - \frac{1}{B} \cos \alpha \right] - \frac{a_2 c_k}{1 + B^2} \left( \frac{1}{2} e^{2t_M} - 2e^{t_M} + t_M + \frac{3}{2} \right) - \frac{b_1 c_k}{B^2} [e^{t_M}(t_M - 1) - \frac{t_M^2}{2} + 1] \right] \right\} \right\}$ ;  $L_2 = \bar{M}_M \left\{ \left[ (\omega_g - \dot{\varphi}_M(t_M)) (\tau_1 - t_M) - \frac{1}{I_M} \left\{ \left( \bar{M}_M - \frac{c_k F}{B^2} \right) \times \right. \right. \right.$

$$\times \frac{(\tau_1 - t_m)^2}{2} + \frac{A_1 c_k}{B} \left[ \frac{1}{B} (\sin (B\tau_1 + \alpha_1) - \sin (Bt_m + \alpha_1) - (\tau_1 - t_m) \cos (Bt_m + \alpha_1)) \right] \Bigg\} \Bigg\}.$$

| Закон включения  | Численные значения величин |                         |
|------------------|----------------------------|-------------------------|
|                  | $L$ , кгм                  | $M_g \text{ max}$ , кгм |
| Линейный         | 28729                      | 64,6                    |
| Квадратичный     | 25052                      | 65,5                    |
| Экспоненциальный | 27217                      | 75,7                    |

Для случаев, когда момент трения на  $[0; t_m]$  изменяется по формулам:  $M_m(t) = \left\{ \frac{\overline{M}_m}{t_m} t; -\frac{\overline{M}_m}{t_m^2} t^2 + 2 \frac{\overline{M}_m}{t_m} t \right\}$ , исследование проводится аналогичным образом. В таблице приведены численные значения работы трения  $L$  и максимального динамического крутящего момента  $M_g$  муфты при следующих исходных данных:  $t_m = 1$  с;  $I_m = 0,1$  кгм·с<sup>2</sup>;  $I_c = 0,5$  кгм·с<sup>2</sup>;  $c_k = 5$  кгм/рад;  $\omega = 2301$ /с;  $\overline{M}_m = 60$  кгм;  $M_c = 20$  кгм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Солонский А. С.— В сб.: Повышение эффективности использования техники в сельском хозяйстве, т. 63.— Горки, 1970.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М., 1958.

Поступила в редакцию  
26.01.78.

Кафедра дифференциальных  
уравнений, БИМСХ