

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ ИЗОМЕТРИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Пусть V — n -мерное невырожденное векторное пространство над конечным полем F_q ; $\text{char } F_q \neq 2$; f — кососимметрическая форма, определяющая метрику пространства V ; σ — изометрия пространства V .

В работе найден простейший вид матрицы изометрии σ и формы f , к которому они приводятся одновременно выбором базиса в пространстве V .

Изометрии пространства V над произвольным полем $\text{char} \neq 2$ изучались Цассенхаузом [1], И. К. Цикуновым [2]. Цассенхауз описал типы элементарных делителей изометрий пространства V и нашел простейший вид матрицы формы f и матрицы изометрии пространства V для некоторых типов элементарных делителей. В [3, 4] И. К. Цикунов рассмотрел пространство V над конечным полем F_q , $\text{char } F_q \neq 2$, и нашел виды матриц формы f и изометрий пространства V для других возможных элементарных делителей. В данной работе найден более простой вид матриц, чем в работах [3, 4].

Лемма 1. Характеристический многочлен $m \times m$ -матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m-1} & \dots & -a_{l+1} & -a_l \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } l = \left[\frac{m}{2} \right], \quad (1)$$

совпадает с минимальным:

$$f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0. \quad (2)$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что канонический вид матрицы $xE - A$ равен $\text{diag}(1, \dots, 1, f(x))$.

Матрицу A вида (1) будем называть сопровождающей для многочлена $f(x)$ вида (2). Преимущество матрицы (1) для наших целей по сравнению с сопровождающей матрицей Фробениуса для многочлена (2) вытекает из леммы 2.

Следуя Цассенхаузу [1], многочлен $f(x)$ вида (2) будем называть симметричным, если $a_0 = 1$, $a_{m-i} = a_i$, $i = 1, \dots, m-1$; в противном случае — асимметричным. Для многочлена (2), где $a_0 \neq 0$, через $f^*(x)$ будем обозначать многочлен $f^*(x) = x^m + a_0^{-1}a_1x^{m-1} + \dots + a_0^{-1}a_{m-1}x + a_0^{-1}$. Для симметричного многочлена $f(x) = f^*(x)$. Из $f(a) = 0$ следует $f^*(a^{-1}) = 0$, $(g^*(x))^s = (g^s(x))^*$.

Лемма 2. Пусть $f(x)$ — симметричный многочлен степени $m = 2l$ вида (2); V — m -мерное пространство с симплектической метрикой над полем F_q ; σ — гомоморфизм пространства V , матрица которого в базисе с матрицей Грама

$$G = \begin{bmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{или } G_1 = aG, \quad a \neq b^2; \quad b \in F_q, \quad (3)$$

совпадает с матрицей A вида (1), сопровождающей для многочлена $f(x)$. Тогда σ — изометрия пространства V .

Доказательство. Так как $f(x)$ — симметричный многочлен четной степени, то в сопровождающей матрице (1) будем иметь $m=2l$, $a_0=1$, $a_{m-i}=a_i$, $i=1, \dots, m-1$. Непосредственно проверяется, что матрица A вида (1) с указанными свойствами удовлетворяет условиям ${}^tAGA=G$, ${}^tAG_1A=G_1$ (t — означает транспонирование матрицы).

Отметим, что леммы 1 и 2 справедливы для произвольного поля.

Теорема. Пусть σ — изометрия пространства V . Существует базис пространства, в котором σ соответствует матрица $A = A_1 + \dots + A_k$, где A_i — матрица вида (1) либо $A_i = B_i + {}^tB_i^{-1}$, где B_i — матрица вида (1), а форме f соответствует матрица $G = G_1 + \dots + G_k$, где G_i — матрица вида (3). Пары матриц A_i , G_i одинаковой четной размерности m_i .

Доказательство опирается на работы Цассенхауза [1] и И. К. Цикунова [3, 4]. Некоторые результаты из этих работ приводятся в лемме 3.

Инвариантное относительно изометрии σ подпространство $U \subset V$ будем называть ортогонально неразложимым относительно σ , если U не представимо в виде ортогональной суммы инвариантных подпространств.

Лемма 3 [1, леммы 1,2]. Пусть V — ортогонально неразложимо относительно изометрии σ . Тогда справедливо одно из следующих утверждений.

1) σ имеет два асимметричных элементарных делителя:

$$\begin{aligned} q_1^s(x) &= x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0, \\ q_2^s(x) &= x^m + a_0^{-1}a_1x^{m-1} + \dots + a_0^{-1}a_{m-1}x + a_0^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $q_1(x)$ — неприводимый над F_q многочлен степени >1 , $q_2(x) = q_1^*(x)$.

2) σ имеет два элементарных делителя:

$$(x \pm 1)^m, \quad (x \pm 1)^m, \quad (5)$$

где m нечетное,

3) σ имеет симметричный элементарный делитель:

$$p^s(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1, \quad a_{n-i} = a_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (6)$$

где $p(x)$ — неприводимый над F_q симметричный многочлен степени $l > 1$.

4) σ имеет один симметричный элементарный делитель:

$$(x \pm 1)^n. \quad (7)$$

Доказательство теоремы. Пусть σ — изометрия пространства V . Пространство V представимо в виде ортогональной суммы инвариантных ортогонально неразложимых относительно σ подпространств $V = V_1 + \dots + V_k$. Так как V — невырожденное пространство, то размерности подпространств V_i — числа четные [5]. В подпространствах V_i σ индуцирует изометрии σ_i , элементарные делители которых описаны в лемме 3.

1. Если σ_i имеет два элементарных делителя вида (4) или (5), то из [1, теорема I] и из леммы I следует, что в V_i существует базис, в котором матрица σ_i приводится к виду $A_i = B_i + {}^tB_i^{-1}$, где B_i матрица вида (1), сопровождающая для элементарного делителя $q_1^s(x)$ или $(x \pm 1)^m$, а матрица формы f_i (f_i — ограничение формы f на V_i) к виду

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Если σ_i имеет один симметричный элементарный делитель $p^s(x)$ вида (6), то в V_i существует базис, в котором σ_i соответствует сопровождающая матрица для многочлена $p^s(x)$ вида (1), а форме f_i матрица

$G_i = \begin{bmatrix} 0 & E_i \\ -E_i & 0 \end{bmatrix}$. Утверждение следует из [5, теорема 4] и лемм 1 и 2.

3. Если σ_i имеет один элементарный делитель $(x \pm 1)^m$ вида (7), то в V_i существует базис с матрицей Грама вида (3), в котором σ_i соответствует A_i вида (1), сопровождающая для многочлена $(x \pm 1)^m$ ($m = \dim V_i$ — число четное, поэтому $(x \pm 1)^m$ — симметричный многочлен). Действительно, по лемме 1 и 2 гомоморфизм с указанной матрицей A_i в базисе Грама G или G_i из (3) является изометрией пространства V_i с элементарным делителем $(x \pm 1)^m$. Из [4] следует, что в V_i существует базис, в котором σ_i соответствует матрица $S = \mp (E - B)^{-1} (E + B)$, где B — клетка Жордана с элементарным делителем x^m , а форме f_i матрица

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{m-1} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad R_1 = aG, \quad a \neq b^2, \quad b \in F_q. \quad \text{Следова-}$$

тельно, существует матрица N , такая, что $N^{-1}A_iN = S$, ${}^tNGN = R$ или ${}^tNGN = aR$. Если ${}^tNGN = R$, то $M^{-1}SM = A_i$, ${}^tMRM = G$ и ${}^tMaRM = aG$, где $M = N^{-1}$. Если ${}^tNGN = aR$, то $M^{-1}SM = A_i$, ${}^tMaRM = G$ и $(aM)^{-1}SaM = A_i$, $a{}^tMRaM = aG$. Таким образом, заменой базиса в V_i матрицу S можно привести к виду (1), а матрицы R , aR к виду (3). Теорема доказана.

Примечание. В статье П. Т. Козел «О строении изометрий пространства с ортогональной метрикой» («Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ. и мех.», 1978, № 3) есть опечатки: всюду вместо $\det$ должно быть $\det$; на странице 22 в третьей строке вместо «нечетное» должно быть «четное»; на странице 23 в восьмой строке после G_1 и в 35 строке после H_4 должна быть точка; на странице 24 в третьей строке снизу вместо «нулевым» должно быть «ненулевым»; на странице 25 в начале 20-й строки должно быть $A_i \cdot A_{i+i}$; в списке литературы вместо Циркунов И. К. должно быть Цикунов И. К.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zassenhaus H. — «Can. Math. Bull.», 1958, 1, № 1, 31; № 2, 101; № 3, 183.
2. Цикунов И. К. — «ДАН СССР», 1965, 165, № 3, 500.
3. Цикунов И. К. — В сб.: Алгебра и математическая логика. Киев, 1966, 72.
4. Цикунов И. К. — «Укр. мат. ж.», 1966, 18, № 5, 122.
5. Артин Э. Геометрическая алгебра. М., 1969.

Поступила в редакцию
2/III 1978 г.

Кафедра высшей алгебры